arXiv:2304.03956v1 [math.AC] 8 Apr 2023

正规环上的 Auslander–Reiten 猜想

KAITO KIMURA

Abstract. 本文根据 Ext 模的消失，给出了交换诺特环上的有限生成模为投射模的充分条件。本文的一项主要结果指出，Auslander–Reiten 猜想对每个正规环都成立。

1. Introduction

本文中，我们始终假设所有环均为交换诺特环， R 是一个环，且 M 是一个有限生成的 R-模。根据 Ext 模的消失来刻画模的投射性，已在环论中得到广泛研究；例如参见 [1, 2, 5, 7, 8, 10, 13] 。本文的主要结果如下定理所示。

定理 1.1（推论 2.12）。假设 R 满足 Serre 条件（S_2），且 M 在余维一处局部具有有限投射维数。若满足以下三个条件之一，则 M 是一个投射 R-模，其中 $d = \dim R$。

(1) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant d$ 和 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = \operatorname{Ext}^j_R(M^*, M^*) = 0$。(2) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant d$ 和 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) = \operatorname{Ext}^j_R(M, M) = 0$，且 M 满足 (S_2)。(3) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2d+1$ 和 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = \operatorname{Ext}^j_R(M, M) = 0$。

实际上，我们可以给出比 (3) 更一般的条件；见推论 2.12(3)。Araya 在假设 R 是 Gorenstein 的情况下证明了与定理 1.1(3) 相同的结论。此外，Kimura、Otake 和 Takahashi [10] 将 Araya 的定理推广到了 R 为 Cohen–Macaulay 的情形。上述定理进一步细化了这些结果。此外，上述定理及其推论中的一些结果细化或重新证明了文献中的许多结果；详情见注 2.17。

Auslander 和 Reiten [4] 猜想，若对所有 $i > 0$，$\operatorname{Ext}^i_R(M, R \oplus M) = 0$，则 M 是投射的。此猜想称为 Auslander–Reiten 猜想，是一个著名的长期猜想，也是环论中最重要的问题之一。应用上述定理，我们可以对这个猜想给出一个答案。

推论 1.2（推论 2.16）。设 R 满足 (S_2)。如果 Auslander–Reiten 猜想对 R 在余维一处局部成立，那么该猜想对 R 成立。特别地，Auslander–Reiten 猜想对每个正规环都成立。

已知当 R 是包含有理数域 $\mathbb{Q}$ [8]的局部优良 Cohen–Macaulay 正规环时，或当 R 是 Gorenstein 正规环 [1], 时，或当 R 是局部 Cohen–Macaulay 正规环且 M 是秩一极大 Cohen–Macaulay 模 [7], 时，或当 R 是局部 Cohen–Macaulay 正规环且 M 是满足 $\operatorname{Hom}_R(M, M)$ 自由 [5] 的极大 Cohen–Macaulay 模时，Auslander–Reiten 猜想成立。最近，Kimura、Otake 和 Takahashi [10] 证明了该猜想对每个 Cohen–Macaulay 正规环都成立，从而涵盖了上述所有结果。即使 R 不是 Cohen–Macaulay，已知若 R 是正规环且满足以下任一条件，该猜想也成立：对所有满足深度 R 的 $2 \leqslant i \leqslant$，$\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Hom}_R(M, M)\ R) = 0$；$\operatorname{Hom}_R(M, M)$具有有限G维数 [13], ；或者它是正则局部环的商环且是包含 $\mathbb{Q}$ [5]的正规环。推论 1.2 改进了所有这些关于 Auslander–Reiten 猜想的结果。

包括上述结果在内的所有结果都将在第 2 节讨论。值得一提的是，我们将在不假设环为 Cohen–Macaulay 环的情况下证明 Kimura、Otake 和 Takahashi 的大部分结果 [10] 。在全文中 [10], ，由于该环

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D07.*Key words and phrases.* (Auslander) 转置，Auslander–Reiten 猜想，Ext 模，上同调核，Serre 条件，Tor 模。

是 Cohen–Macaulay 环，因此可以假设典范模存在。典范模的一些性质，例如内射维数有限，以及由典范对偶给出的极大 Cohen–Macaulay 模范畴的对偶性，在 [10]中确实起着关键作用。由于我们不假设环为 Cohen–Macaulay 环，因此本文无法使用这些方法。不过，通过详细考察对偶化复形尾部的结构，我们可以达到目的。

本节最后说明本文采用的约定。

约定。设 $n \geqslant 0$ 为一个整数。若对环 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$，均有 $\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \geqslant \inf\{n, \operatorname{ht} \mathfrak{p}\}$，则称 R 满足 Serre 条件 (S_n)。用 $E_R(M)$ 表示 M 的内射包络。我们用 $(-)^*$ 表示 R-对偶 $\operatorname{Hom}_R(-, R)$。对于局部环的性质 $\mathbb{P}$（分别地，对于局部环上模的性质）以及 $\operatorname{Spec} R$ 的子集 X，若局部环 $R_{\mathfrak{p}}$（分别地，$R_{\mathfrak{p}}$-模 $M_{\mathfrak{p}}$）对每个 $\mathfrak{p} \in X$ 都满足 $\mathbb{P}$，则称 R（分别地，R-模 M）在 X 上局部满足 $\mathbb{P}$。当 $X = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht} \mathfrak{p} \leqslant n\}$ 时，称 R（分别地，M）在余维 n 上局部满足 $\mathbb{P}$。设 R 为一个局部环，并设 $F = (\cdots \to F_2 \to F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \to 0)$ 是 M 的极小自由分解。M 的上同调核 $\Omega_R M$ 和（Auslander）转置 $\operatorname{Tr}_R M$ 分别定义为 $\operatorname{Im} \alpha$ 和 $\operatorname{Coker}(\alpha^*)$。令 $\Omega_R^0 M = M$，并递归地定义第 n 个上同调核 $\Omega_R^n M$ 为 $\Omega_R^n M = \Omega_R(\Omega_R^{n-1} M)$。（注意，对每个 n，模 $\operatorname{Tr}_R M$ 和 $\Omega_R^n M$ 在同构意义下唯一确定，因为 F 是 M 的极小自由分解，故其在同构意义下唯一；并且 $M^* \cong \Omega_R^2 \operatorname{Tr}_R M$，相差自由直和项。）若无歧义，则省略下标/上标。

2. The results

本节将给出若干基于 Ext 消失来判定模是否为投射模的准则，并证明引言中陈述的定理 1.1 和推论 1.2。为陈述本文的主要结果，我们先准备几个引理。

引理 2.1. 设 N 是一个 R-模，且 I 是一个内射 R-模。则对每个整数 $i \geqslant 0$，都有一个同构 $\operatorname{Tor}_i^R(M, \operatorname{Hom}(N, I)) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}_R^i(M, N)\ I)$。

*Pro*由此可得。存在一个拟同构 $M \otimes_R^{\mathbf{L}} \operatorname{RHom}_R(N, I) \simeq \operatorname{RHom}_R(\operatorname{RHom}_R(M, N)\ I)$。 ■

引理 2.2. 设 F 是 R-模范畴上的一个 R-线性函子，且 $\mathfrak{p}$ 是R的一个素理想。若 $F(E_R(R/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p}}$ 是零模，则 $F(E_R(R/\mathfrak{p}))$也如此。

证明。假设 $F(E_R(R/\mathfrak{p})) \neq 0$。存在一个有限生成的非零子模 $N$of $F(E_R(R/\mathfrak{p}))$。由于 $N_{\mathfrak{p}} = 0$，我们可以选取一个元素 $r \in R \setminus \mathfrak{p}$ 使得 $rN = 0$。r在 $E_R(R/\mathfrak{p})$ 上的乘法是同构，因此 r 在 $F(E_R(R/\mathfrak{p}))$ 上的乘法也是同构，这就产生了矛盾。■

以下引理改进了 [10, 命题 3.3(1)]。在张量积 $k \otimes_R N$ 非零的前提下，不再需要假设 N 是有限生成的。

引理 2.3。设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个局部环，并设 N 是一个 R-模，满足 $k \otimes_R N$ 非零。假设 $\operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{Tr} M, M \otimes_R N) = 0$。那么 M 是一个自由 R-模。

证明。我们可以假设 M 非零且不可分解。令 $\lambda\colon\ M \otimes M^* \to R$ 为由 $\lambda(x \otimes f) = f(x)$ 给出的同态，其中 $x \in M$和 $f \in M^*$。若 λ是满射，则 R同构于 M的一个直和项，因此由于 $M \cong R$ 是 M 不可分解的，我们有 $M \cong R$；例如参见 [11, 命题 2.8(iii)]。因此，只需证明 $\operatorname{Im} \lambda = R$。置 $L = M \otimes_R N$。类似于 [10, 命题 3.3(1)] 的证明可知，$(R/\operatorname{Im}\lambda) \otimes_R L = 0$。另一方面，由于 $k \otimes_R N$和M 非零，$k \otimes_R L$也非零。这意味着 $\operatorname{Im}\lambda = R$。■

本文的主要结果之一是下面的定理。它在证明定理 1.1 中起着至关重要的作用。

定理 2.4。设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个深度为 t 的局部环。假设对于所有 $1 \leqslant i \leqslant t$，$\operatorname{Ext}_R^i(M, R) = 0$，且 $\operatorname{Ext}_R^{t+1}(\operatorname{Tr} M, M^*) = 0$，并且 M 在 R 的去心谱上局部自由。那么，M 是自由的。

证明。我们可以假设 R 是完备的。存在一个维数为 $d = \dim R$的 Gorenstein 局部环 S，使得 R是 S的同态像。令 $I\colon\ 0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots I^d \to 0$ 为一个极小内射

S-模的分解。设 $D=\mathrm{Hom}_S(R,I)$：$0\to D^0\xrightarrow{\partial^0}D^1\xrightarrow{\partial^1}\cdots D^d\xrightarrow{\partial^d}0$，并对每个 $0\leqslant i\leqslant d$取 $K^i=\mathrm{Ker}\,\partial^i$。（复形 D 称为对偶化复形。）容易看出

$$D^i\cong\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R\\ \dim R/\mathfrak{p}=d-i}}E_R(R/\mathfrak{p})\quad\text{and}\quad H^j(D)=\mathrm{Ext}^j_S(R,S)=0 \tag{2.4.1}$$

对所有 $0\leqslant i\leqslant d$ 以及所有 $d-t+1\leqslant j\leqslant d$。因此，对于任意 $1\leqslant i\leqslant t$，存在一个正合列

$$0\to K^{d-i}\to D^{d-i}\to K^{d-i+1}\to 0. \tag{2.4.2}$$

注意，由引理 2.1 可知，对于任意内射 R-模 J 以及任意 $0\leqslant j\leqslant t$，我们有 $\mathrm{Tor}^R_j(M.J)\cong\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^j_R(M,R)J)=0$。我们通过对 i 使用归纳法来证明，对于所有 $0\leqslant i\leqslant t-1$ 以及所有 $1\leqslant j\leqslant t-i$，$\mathrm{Tor}^R_j(M.K^{d-i})=0$。事实上，若 $i=0$，则 $K^d=D^d$ 是一个内射 R-模。令 $1\leqslant i\leqslant t-1$。由 (2.4.2) 可知，对于每个 $0\leqslant j\leqslant t-i$，存在一个由 R-模构成的正合列 $\mathrm{Tor}^R_{j+1}(M,K^{d-i+1})\to\mathrm{Tor}^R_j(M,K^{d-i})\to\mathrm{Tor}^R_j(M,D^{d-i})$。根据归纳假设，结论成立。

这一断言表明，对于每个 $1\leqslant i\leqslant t$，自然复形

$$0\to M\otimes_R K^{d-i}\to M\otimes_R D^{d-i}\to M\otimes_R K^{d-i+1}\to 0 \tag{2.4.3}$$

是一个正合列。此外，我们断言，对于所有 $0\leqslant i\leqslant t$，$\mathrm{Tor}^R_{t+1-i}(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R K^{d-i})=0$。我们对 i 使用归纳法。若 $i=0$，则由引理 2.1 可得同构

$$\mathrm{Tor}^R_{t+1}(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R K^d)\cong\mathrm{Tor}^R_{t+1}(\mathrm{Tr}\,M,\mathrm{Hom}(M^*,K^d))\cong\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^{t+1}_R(\mathrm{Tr}\,M,M^*),K^d)=0.$$

假设 $1\leqslant i\leqslant t$。正合列 (2.4.3) 诱导出一个正合列

$$\mathrm{Tor}^R_{t+2-i}(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R K^{d-i+1})\to\mathrm{Tor}^R_{t+1-i}(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R K^{d-i})\to\mathrm{Tor}^R_{t+1-i}(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R D^{d-i}).$$

由 (2.4.1) 和引理 2.2 可知，$\mathrm{Tor}^R_{t+1-i}(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R D^{d-i})=0$，因为 M 在 R 的去心谱上是局部自由的。因此，由归纳假设，该断言成立。特别地，我们有 $\mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{Tr}\,M,M\otimes_R K^{d-t})=0$。

模 $\mathrm{Tor}^R_t(k,K^d)\cong\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^t_R(k,R)\ K^d)$ 在深度 $R=t$时非零。正合列 (2.4.2) 由 (2.4.1) 和引理 2.2 诱导出同构 $\mathrm{Tor}^R_t(k,K^d)\cong\mathrm{Tor}^R_{t-1}(k,K^{d-1})\cong\cdots\cong\mathrm{Tor}^R_1(k,K^{d-t+1})\cong k\otimes_R K^{d-t}$。因此，$k\otimes_R K^{d-t}$是一个非零模。引理 2.3 蕴含 M是自由的。■

注意，如果 $\mathrm{Ext}^2_R(\mathrm{Tr}\,M,M^*)=0$，那么从 $M\otimes_R M^*$到 $\mathrm{Hom}_R(M^*,M^*)$ 的自然同态是满射；参见 [3, 命题（2,6）（a）]。容易看出 M^*是自由的，因此 M也是如此。因此，当$t=$深度$R=1$时，无需使用我们的对偶化复形技术即可轻松证明定理 2.4 的断言。对我们而言，重要的是 $t\geqslant 2$ 的情形。在这种情况下，由于 $\Omega^2\mathrm{Tr}\,M$在相差自由直和项的意义下同构于 M^*，我们有同构 $\mathrm{Ext}^{t+1}_R(\mathrm{Tr}\,M,M^*)\cong\mathrm{Ext}^{t-1}_R(M^*,M^*)$，因此上述定理可改写为推论 2.5。

推论 2.5. 设 R 是深度为 $t\geqslant 2$的局部环。假设对所有 $1\leqslant i\leqslant t$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$，且 $\mathrm{Ext}^{t-1}_R(M^*,M^*)=0$，并且 M在 R的去心谱上局部自由。那么 M是自由的。

为了将关于 M^*的自扩张消失条件替换为关于 M的条件，需要先准备一个初等引理。

引理 2.6. 设 R是一个局部环，且 s、$t>0$为整数。假设对所有$s\leqslant i\leqslant s+t$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$。那么 $\mathrm{Ext}^s_R(M,M)\cong\mathrm{Ext}^s_R(\Omega^t M,\Omega^t M)$。

证明. 不妨设 $t=1$。自然正合列 $0\to\Omega M\to F\to M\to 0$，其中 F是一个自由R-模，诱导出正合列 $\mathrm{Ext}^s_R(M,F)\to\mathrm{Ext}^s_R(M,M)\to\mathrm{Ext}^{s+1}_R(M,\Omega M)\to\mathrm{Ext}^{s+1}_R(M,F)$。由假设，$\mathrm{Ext}^s_R(M,M)\cong\mathrm{Ext}^{s+1}_R(M,\Omega M)\cong\mathrm{Ext}^s_R(\Omega M,\Omega M)$。■

注 2.7. 假设 R 是局部的，且 M 具有有限投射维数。若对所有 $1\leqslant i\leqslant$深度R或深度 $M\geqslant$深度 R，$\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$，则由 [12, 第 154 页，引理 1(iii)] 以及 Auslander–Buchsbaum公式可知，M 是自由的。

令 $m,n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\cup\{\infty\}$。用 $\mathcal{G}_{m,n}$ 表示由满足以下条件的模 M 构成的、有限生成 R-模范畴的满子范畴：对所有 $1\leqslant i\leqslant m$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$；且对所有 $1\leqslant j\leqslant n$，$\mathrm{Ext}^j_R(\mathrm{Tr}\,M,R)=0$。

命题 2.8。设 R 是深度为 $t \geqslant 2$ 的局部环。假设 $\mathrm{Ext}_R^{t-1}(M,M) = 0$，且 M 在 R 的去心谱上局部自由。那么在以下两种情形中，M 都是自由的。

(1) $M \in \mathcal{G}_{2t-r+1,\ r}$ 对某个 $0 \leqslant r \leqslant 2t+1$。(2) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2t+1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0$。

证明。我们只需证明命题在情形 (1) 下成立。设 $s = \max\{t-r+2, 0\}$。我们得到不等式 $t+2 \leqslant r+s \leqslant 2t+1$。由于 $M \in \mathcal{G}_{2t-r+1,r}$，由 [9, 命题 1.11]，有 $N := \Omega^s M \in \mathcal{G}_{2t-r-s+1,r+s} \subseteq \mathcal{G}_{0,2}$，且 $\Omega^2 \mathrm{Tr} N \in \mathcal{G}_{r+s-2,2t-r-s+3} \subseteq \mathcal{G}_{t,0}$。因此，根据 [3, 命题 (2.6)(a)]，$N$ 是自反的。由于 N^* 在相差自由直和项的意义下同构于 $\Omega^2 \mathrm{Tr}\ N$，我们得到对所有 $1 \leqslant i \leqslant t$，$\mathrm{Ext}_R^i(N^*, R) = 0$。引理 2.6 表明，$\mathrm{Ext}_R^{t-1}((N^*)^*, (N^*)^*) \cong \mathrm{Ext}_R^{t-1}(N,N) \cong \mathrm{Ext}_R^{t-1}(M,M) = 0$。根据推论 2.5，$N^*$ 是自由的，因此 $N \cong (N^*)^*$ 也是自由的。由注 2.7 可知，当 $s \neq 0$ 时，M 是自由的。■

注 2.9。在命题 2.8 中，条件 $t =$ 深度 $R \geqslant 2$ 被作为假设施加。$t \geqslant 2$ 与 $t \leqslant 1$ 两种情形的差异也可以如下考虑。假设 $M \in \mathcal{G}_{\infty,\infty}$ 且 Tate 上同调模 $\widehat{\mathrm{Ext}}_R^{t-1}(M,M)$ 为零。我们看到，当 $t \geqslant 2$ 时，$\mathrm{Ext}_R^{t-1}(M,M) = 0$；例如参见[14]。换言之，条件 $\widehat{\mathrm{Ext}}_R^{t-1}(M,M) = 0$ 可以用 M 的一个自扩张的消失来解释。当 $t \leqslant 1$ 时，则无法如此处理。不过，此条件与定理 2.4 之间存在关联。若 $t = 1$，则有 $\mathrm{Hom}_R(M,M) \cong \widehat{\mathrm{Ext}}_R^0(M,M) = 0$，因此 M 是自由的。令 $t = 0$。于是得到同构 $0 = \widehat{\mathrm{Ext}}_R^{-1}(M,M) \cong \widehat{\mathrm{Ext}}_R^{-1}(\Omega^2 M, \Omega^2 M) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, \Omega^2 M) \cong \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(\mathrm{Tr}\ N, N^*)$，其中 $N = \mathrm{Tr}\ M$。此 Ext 模与定理 2.4 中的模相同。特别地，当 R 是 Gorenstein 时，定理 2.4 和命题 2.8 对应于 [1, 定理 8]。

设 $n \geqslant 0$ 是一个整数。我们用 $\mathrm{X}^n(R)$ 表示 R 中高度不超过 n 的素理想集合。下面的命题推广了推论 2.5 和命题 2.8。不言而喻，(4) 是 (3) 的特例。

命题 2.10. 设 X 是 $\mathrm{Spec}\ R$ 的一个子集，且包含 $\mathrm{X}^1(R)$。令 $s := \inf\{\text{深度}\, R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ R \setminus X\}$，并令 $t := \sup\{\text{深度}\, R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ R \setminus X\}$。假设 R 满足 (S_2)，且 M 在 X 上局部自由。那么，若满足以下四个条件之一，M 就是投射的。(1) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant t$ 和 $s-1 \leqslant j \leqslant t-1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = \mathrm{Ext}_R^j(M^*, M^*) = 0$。(2) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant t$ 和 $s-1 \leqslant j \leqslant t-1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M^*, R) = \mathrm{Ext}_R^j(M,M) = 0$，且 M 满足 (S_2)。(3) 对某些 m、$n \geqslant 0$，有 $M \in \mathcal{G}_{m,n}$，且满足 $m+n = 2t+1$；并且对所有 $s-1 \leqslant j \leqslant t-1$，$\mathrm{Ext}_R^j(M,M) = 0$。(4) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2t+1$ 和 $s-1 \leqslant j \leqslant t-1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = \mathrm{Ext}_R^j(M,M) = 0$。

证明。只需证明对于 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$ 是一个自由 $R_\mathfrak{p}$-模。因此，我们可以假设 R 是局部的。我们对 $d = \dim R$ 使用归纳法来证明该推论。根据假设，我们知道该断言对 $d \leqslant 1$ 成立。假设 $d \geqslant 2$。我们可以假设 $X \neq \mathrm{Spec}\, R$。根据归纳假设，M 在 R 的去心谱上是局部自由的。由于 R 满足 (S_2)，我们有深度 $R \geqslant 2$。在情形 (1)、(3) 和 (4) 中，推论 2.5 和命题 2.8 分别推出 M 是自由的。在情形 (2) 中，根据[6, 定理 3.6], ，我们看到 M 是自反的。因此，由 (1) 可知 M^* 是自由的，从而 M 也是自由的。■

注 2.11。若对于 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，都有深度 $R_\mathfrak{p} \geqslant \dim R_\mathfrak{p}$，则称环 R 为 Cohen-Macaulay 环。设 R 是一个 d 维 Cohen-Macaulay 环。对于任意整数 $1 \leqslant n \leqslant d-1$，容易看出 $\inf\{\text{深度}\, R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ R \setminus \mathrm{X}^n(R)\} = n+1$，且 $\sup\{\text{深度}\ R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ R \setminus \mathrm{X}^n(R)\} = d$。

特别地，注意到注 2.7，我们得到第 1 节中提到的定理 1.1，它是命题 2.10 的一个简单推论。

推论 2.12. 假设 R 满足 (S_2)，并且 M 在 $\mathrm{X}^1(R)$ 上局部具有有限投射维数。那么，如果满足以下四个条件之一，M 就是投射的，其中 $d =$ 维数 R。

(1) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant d$ 和 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = \mathrm{Ext}_R^j(M^*, M^*) = 0$。(2) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant d$ 和 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M^*, R) = \mathrm{Ext}_R^j(M,M) = 0$，并且 M 满足 (S_2)。(3) 对某些 m、$n \geqslant 0$，$M \in \mathcal{G}_{m,n}$ 满足 $m+n = 2d+1$，且对所有 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\mathrm{Ext}_R^j(M,M) = 0$。(4) 对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2d+1$ 和 $1 \leqslant j \leqslant d-1$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = \mathrm{Ext}_R^j(M,M) = 0$。

下面两个推论可分别仿照推论 [10, 3.10 和推论 3.11], 的证明给出。

推论 2.13. 假设 R 满足 (S$_2$)，且在余维一处局部为完全交。那么，在以下两种情形下， M 均为投射的，其中 $d=$ 维数 R。
(1) 对所有 $1\leqslant i\leqslant d$ 和 $1\leqslant j\leqslant \max\{2,d-1\}$，$\operatorname{Ext}^i_R(M^*,R)=\operatorname{Ext}^j_R(M,M)=0$，且 M 满足 (S$_2$)。
(2) 对所有 $1\leqslant i\leqslant 2d+1$ 和 $1\leqslant j\leqslant \max\{2,d-1\}$，$\operatorname{Ext}^i_R(M,R)=\operatorname{Ext}^j_R(M,M)=0$。

证明。与推论 3.10] 的证明类似，可知 M 在 $\mathrm{X}^1(R)$ 上局部自由。由推论 2.12 可得结论。■

推论2.14。设 S 是一个维数为 d 的局部优良环，并且在余维一处局部为完全交。设 $\boldsymbol{x}=x_1$、…、x_n 是 S 中一列元素，在 V($\boldsymbol{x}$) 上局部正则。假设 $R=S/(\boldsymbol{x})$，且 S 在 V($\boldsymbol{x}$) 上局部满足 (S$_2$)。若对所有 $1\leqslant i\leqslant 2d+1$ 和 $1\leqslant j\leqslant \max\{2,d-1\}$，$\operatorname{Ext}^i_R(M,R)=\operatorname{Ext}^j_R(M,M)=0$，则 M 是投射模。

证明。类似于 [10, 推论 3.11]，的证明，可以看出 M 是投射的；在 [10, 推论 3.11] 的证明中，用推论 2.13(2) 替换 [10,推论3.10(2)] 。■

回顾 Auslander 和 Reiten 提出的一个著名且由来已久的猜想 [4]。

猜想 2.15（Auslander–Reiten）。每个满足 $\operatorname{Ext}^{>0}_R(M,M\oplus R)=0$ 的 R-模 M 都是投射的。

推论 2.12 得出以下结果，它对猜想 2.15 给出了肯定的回答 .

推论 2.16。假设 R 满足 (S$_2$)。
(1) 若 $\operatorname{Ext}^{>0}_R(M,M\oplus R)=0$ 且 M 在余维一处局部具有有限投射维数，则 M 是投射的。(2) 若猜想 2.15 在余维一处对 R 局部成立，则猜想 2.15 对 R 成立。(3) 猜想 2.15 对每个正规环都成立。

证明。我们可以假设 R 是局部环。断言 (1) 由推论 2.12(4) 得出，并由此可知 (2) 成立。由于任意正则局部环都满足猜想 2.15，(2) 蕴含 (3) 成立。■

本文得到的结果细化（或重新证明）了文献中的许多结果 e.

注 2.17. (1) 命题 2.8(2) 是 [1, 推论 10] 的非 Gorenstein 版本。事实上，设 R 为维数 $d\geqslant 2$ 的 Gorenstein 环。可以看出，对所有 $i>d$，$\operatorname{Ext}^i_R(M,R)=0$；并且 M 是极大 Cohen–Macaulay，当且仅当对所有 $1\leqslant j\leqslant d$，$\operatorname{Ext}^j_R(M,R)=0$。(2) 命题 2.10(3)（分别地，(4)）改进了 [10, 定理 3.9(1)] （分别地， [10, 定理 3.9(2)]），也就是说，命题 2.10(3)（分别地，(4)）放宽了对 R 为 Cohen–Macaulay 的假设，改为要求 R 满足 (S$_2$)；见注 2.11。(3) 命题 2.10(4) 大幅细化了 [2, 推论 1.6]。设对于某个 $1\leqslant n\leqslant d-1$， R 和 M 如 [2, 推论 1.6] 中所述。与 (1) 类似，对所有 $i>0$，我们有 $\operatorname{Ext}^i_R(M,R)=0$，因此由命题 2.10(4) 和注 2.11， M 是自由的。(4) 命题 2.10(4) 部分细化了 [13, 推论 1.5]。当 R 满足 (S$_2$) 时， [13, 推论 1.5] 对于 $X=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R\mid$ 下的 $R_\mathfrak{p}$-模 $M_\mathfrak{p}$ 是自由的}，在一定程度上给出了与命题 2.10(4) 几乎相同的结论，其假设是 R 一般点处为 Gorenstein，$\operatorname{Ext}^{>0}_R(M,R)=0$，并且对所有 $n<i\leqslant$，要么 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Hom}_R(M,M)\ R)=0$，其中 depth R，要么 $\operatorname{Hom}_R(M,M)$ 具有有限 G-维数。(5) 推论 2.12(4) 通过假设 Ext 模有更多消失条件，得出了与 [5, 定理 3.14] 相同的结论，同时去除了 R 是某个正则局部环的商环、在余维一处局部为 Gorenstein 且包含 $\mathbb{Q}$ 这一假设；见注 2.7。(6) 推论 2.13 在假设环 R 满足 (S$_2$) 的情况下，得出了与 [10, 定理 3.10] 相同的结论；这一假设弱于要求 R 为 Cohen–Macaulay。特别是，推论 2.13(1) 大幅细化了 [8, 定理 1.3]，；而在假设 Ext 模有更多消失条件的情况下，(2) 大幅改进了 [5,定理 3.16]；见注 3.14] 的 (5) 和 (6)。(7) 在假设 Ext 模有更多消失条件的情况下，可以由推论 2.13(2) 推出与 [7, 定理 1.5(2)] 相同的结论，同时去除 R 为 Cohen–Macaulay、 M 为秩一极大 Cohen–Macaulay R-模的假设，并将正规性放宽为余维一处的局部完全交性质。

(8) 在适当假设 Ext 模消失的情况下，由推论 2.13(2) 可以去除 [13, 推论 1.6] 中的以下假设：对所有 $2 \leqslant i \leqslant$，要么 $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_R(M,M)\ R) = 0$，其中 depth R；要么 $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ 具有有限 G-维数。(9) 设 S、$\boldsymbol{x}$ 和 R 如 [10, 推论 3.11] 中所述。由此可知，S 在 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 上局部满足 (S_2)，因为 $R = S/(\boldsymbol{x})$ 是 Cohen–Macaulay，且 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 上局部正则。因此，推论 2.14 改进了 [10, 推论 3.11]，从而也改进了 [8, 主要定理]；见 [10, 注 3.14(7)]。(10) 与上一项 (9) 类似，我们可以看到，推论 2.16 的 (1) 和 (2) 将推论 3.13] 的 (1) 和 (2) 的适用范围从 Cohen–Macaulay 环扩展到了满足 (S_2) 的环。(11) 根据 [10, 推论 1.3]，已知猜想 2.15 对每个 Cohen–Macaulay 正规环都成立。推论 2.16(3) 表明，该猜想对任意正规环也成立，即它细化了[10, 推论 1.3]。(12) 若 R 是正则局部环的商环，且是包含 $\mathbb{Q}$[5, 定理 3.14] 的正规环，则猜想 2.15 成立。特别地，每个等特征零的完备正规局部环都满足该猜想。注意，由于正规性在完备化下未必保持，因此要从这些结果中去除 R 是正则局部环的商环或 R 完备这一假设并不容易。然而，推论 2.16(3) 确实做到了这一点。

致谢 。作者谨向导师高桥亮致谢，感谢他提出的宝贵意见 .

References

[1] T. Araya, Gorenstein环上的Auslander–Reiten猜想, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009年), 第6期, 1941–1944。
[2] T. Araya; O. Celikbas; A. Sadeghi; R. Takahashi, Cohen–Macaulay局部环上自扩张的消失, *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** (2018年), 第11期, 4563–4570。[3] M. Auslander; M. Bridger, 稳定模理论, 美国数学会回忆录
94 *American* , , , , 。
Mathematical Society Providence R.I. 1969
[4] M. Auslander; I. Reiten, 关于中山猜想的一个推广版本, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52**(1975年), 69–74。
[5] H. Dao; M. Eghbali; J. Lyle, Hom与Ext, 回顾, *J. Algebra* **571**(2021年), 75–93。[6] E. G. Evans; P. Griffith, Syzgy, 伦敦数学会讲义丛书
106 *Cambridge University* ,
Press 1985
Cambridge, 。
[7] S. Goto; R. Takahashi *Proc. Amer. Math.* , 关于
Soc. **145** 2017 3296
Cohen–Macaulay局部环上的Auslander–Reiten猜想, （） , 第8期, 3289–。[8] C. Huneke; G. J. Leuschke, 关于Auslander和Reiten的一个猜想, *J. Algebra* **275** (2004), 第2期, 781–790。[9] O. Iyama, 极大正交子范畴上的高维Auslander–Reiten理论,
Adv. Math. **210** (2007年), 第1期, 22–50。
[10] K. Kimura; Y. Otake; R. Takahashi *Bull.* , 极大
Lond. Math. Soc. **54** 2022 6, 2456 2468
Cohen–Macaulay张量积与Ext模的消失, （） , 第–期。[11] H. Lindo, 交换环上模的迹理想与自同态环的中心, *J. Algebra* **482** (2017年), 102–130。[12] H. Matsumura, 交换环论, 由M. Reid从日文翻译, 第二版, 剑桥高等数学研究丛书8,
Cambridge University Press Cambridge, 1989年。[13] A. Sadeghi; R. Takahashi, Auslander–Reiten对偶的两种推广及其应用,
Illinois J. Math. **63** (2019年), 第2期, 335–351。[14] R. Takahashi, 关于由G-投射模逼近的模的注记, *J. Algebra* **301** (2006年), 第2期, 748–780。[15] Y. Yoshino, Cohen–Macaulay环上的Cohen–Macaulay模, 修订版, 伦敦数学会讲义丛书146,
Cambridge University Press Cambridge, 1990年。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Jap an
Email address: m21018b@math.nagoya-u.ac.jp