arXiv:2304.03961v1 [math.CV] 8 Apr 2023

УДК 517.574 + 517.982.1+517.55 + 517.987.1

关于次调和函数与多重次调和函数凸子锥的下包络[1]

Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин

文献[1]和 [2], 中的部分泛函分析结果（其中对问题的历史及丰富的参考文献作了相当详尽的介绍），被应用于由（多重）次调和函数构成的凸锥之包络的对偶刻画。

集合 $\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示自然数、实数、复数， $\mathbb{N}_0:=\{0\}\cup\mathbb{N}$ 和 $\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$，其中 $-\infty:=\inf\mathbb{R}=\sup\emptyset$以及 $+\infty:=\sup\mathbb{R}=\inf\emptyset$ 对空集 $\emptyset$作如下约定，并赋予其自然结构。 $\mathbb{R}^d$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 $d\in\mathbb{N}$ 维欧几里得空间，配有勒贝格测度 $\mathfrak{m}_d$； $\bar{B}_o(r)$是 $\mathbb{R}^d$ 中以 $o\in\mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 $r>0$的闭球。 $C(D)$是定义在 $D\subset\mathbb{R}^d$上的实值连续函数构成的 $\mathbb{R}$向量空间。下文中， $D\subset\mathbb{R}^d$表示区域， $\bar{B}_o(r)\subset D$, $\mathrm{Meas}_0^+(D)$表示所有在 D中具有紧支集的正有限博雷尔测度类，$\mathrm{sbh}(D)$表示 D 上所有次调和函数构成的凸锥。关于积分的可积性，以及几乎处处（a.e.）等式 $=$ 和几乎处处不等式 $\leqslant^{\text{п.в.}}$ 的概念，以下均相对于勒贝格测度 $\mathfrak{m}_d$而言。常数$c\in\overline{\mathbb{R}}$ 也视为恒等于 c的函数。下面的结果解决了[1, 第2.3节中的问题1–2], [2, 第1.2.3节中的问题1–2]，适用于$\mathrm{sbh}(D)$中广泛的一类凸子锥。

定理 1. 设凸子锥 $H\subset\mathrm{sbh}(D)$ 包含常数0 和 -1，且对于任意在 D 上局部有上界的$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 函数序列 $h_k\in H$ ，该序列逐点上极限的上半连续正则化属于 H。那么，对于 D 上几乎处处有定义的函数 f ，若它几乎处处等于 $C(D)+H-H$ 中的某个函数，则有等式

$$\sup\left\{\int_{\bar{B}_o(r)}h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d\;\middle|\;-\infty\neq h\in H, h\leqslant^{\text{п.в.}} f\ \text{на}\ D\right\}=\inf_{\mu\in J_H}\int_D f\,\mathrm{d}\mu,\qquad(1)$$

где

$$J_H:=\left\{\mu\in\mathrm{Meas}_0^+(D)\;\middle|\;\int_{\bar{B}_o(r)}h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d\leqslant\int_D h\,\mathrm{d}\mu\ \text{для всех}\ h\in H\right\}.\qquad(2)$$

[1]本研究由俄罗斯科学基金会资助， гранты编号为 22-21- 00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/

特别地，满足以下要求的函数 $h \in H$ 的存在性

$$-\infty \neq h \leqslant^{n.e.} f \quad на\ D$$

等价于对式(1) 右侧的下确界 $\mu \in J_H$ 不等于 $-\infty$。

满足定理1条件的锥 H，例如锥 sbh(D)；所有在 $D \subset \mathbb{C}^d$ 上亚调和的函数构成的锥 psbh(D) $\subset$ sbh(D)，其中 $\mathbb{C}^d$ 与 $\mathbb{R}^{2d}$等同；这些锥中由在 D的某个固定开子集上满足非正条件 6 0 而确定的凸子锥，或关于某些变换 D 不变的凸子锥，等等。定理1中，最重要的是可以广泛地选取 f，使其属于 $H - H + C(D)$。关于 $f \in C(D)$的情形，先前已在 [1, 推论 8.1], [2,推论3.2.1], [4, 定理7.2]中得到了完整论述。当 $H :=$psbh(D)时，对于 [5]–[31]中关于 f 的形如(1)的等式，通常要求在区域 D上局部上有界性。然而，对于后续应用中极为重要的情形 $f \in H - H$，局部上有界性往往并不成立，因为 $-H$ 中的函数甚至在 D 的一个稠密子集上也可能没有上界。关于 H，局部下有界性也存在同样的问题。

推论1. 设 $D \subset \mathbb{C}^d$ —区域， v 和 $M \neq -\infty$ 是一对定义在 $D \subset \mathbb{C}^d$上的多重次调和函数。存在满足约束条件的 $h \neq -\infty \in$psbh(D)

$$v + h \leqslant M \quad на\ D$$

等价于条件

$$\sup_{\mu \in J_{\mathrm{psbh}(D)}} \int (v - M)\, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

其中，最后一个不等式中的上确界取遍 J_H中由 (2)定义的类；当 $H :=$psbh(D)。

定理 1的证明。 我们需要以下概念，以及关于它们的一些事实，见 [1]–[4]。

关于序关系 $\leq$ 的域 $\mathbb{R}$ 上的有序向量空间 $(X, \leq)$，若对任意有限的 $F \subset X$，都存在向量格，即精确上确界X- sup $F \in X$。对于一对向量格 X 和 Y，我们用 $\mathrm{lin}^+ Y^X$ 表示线性正函数的凸锥，或递增函数 l: $X \to Y$。设 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ —

向量格 $(X_n, \leq_n)$ 的序列，

$$\prod X_n := \prod_{n=0}^{\infty} X_n$$

——它们的乘积，并且对于

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod X_n$$

通过

$$\operatorname{pr}_n x = x_n \in X_n,$$

将 x 在.....上的投影记为.....。有如下不等式

$$x \leqslant x' \quad \text{в} \quad \prod X_n, \quad \text{если } \operatorname{pr}_n x \leq_n \operatorname{pr}_n x' \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}_0.$$

设

$$p_n \in \operatorname{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$$

и

$$X_n\text{-}\sup p_n(F_{n+1}) = p_n\big(X_{n+1}\text{-}\sup F_{n+1}\big)$$

对每个有限的 $F_{n+1} \subset X_{n+1}$。那么

$$\operatorname{proj}\lim X_n p_n := \Big\{x \in \prod X_n \;\Big|\; \operatorname{pr}_n x = p_n(\operatorname{pr}_{n+1} x) \quad npu\ всех\ n \in \mathbb{N}_0\Big\}$$

在相同的序关系下，6——一个向量格，称为序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 关于 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$的射影极限。可以认为 [1, 命题 3.1], [2, 命题 2.1.1],即

$$\operatorname{pr}_n X := \big\{\operatorname{pr}_n x \;\big|\; x \in X\big\} = X_n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

子集 $B \subset X$ 在 中有下界（上界），如果存在，使得对于所有 ，都有 （相应地，），并且 在 中有界，如果 B 在 X 中既有下界又有上界。

定理 2 ([1, 定理 2，推论 6.1 和 3。1], [2, 定理 2.4.1，推论 2.4.1 和 2.1。1])。设 $H_* \subset X :=$ 投影极限 $X_n p_n$ 是一个凸锥，且 $0 \in H_*$；对于任意在 X 中有界的序列 $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$，$h^{(k)} \in H_*$，存在一个属于 H_* 的上极限

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H_*. \tag{3}$$

设 $S \subset X$ 是包含 H_* 的向量子空间，并且对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，对于任意 $s_n \in \operatorname{pr}_n S$，都存在满足不等式 $h_n \leq_n s_n$ 于 X_n 的 $h_n \in \operatorname{pr}_n H_*$。

设对于 $q_0 \in \lin^+ \mathbb{R}^{X_0}$ 以及复合

$$q := q_0 \circ \mathrm{pr}_0 \in \lin^+ \mathbb{R}^X$$

对于任意在 X 中递减的序列 $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $h^{(k)} \in H_*$，当其有限时

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R}$$

该序列 $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有下界，且

$$q\big(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\big) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}).$$

那么，对于每个 $s \in S$，量

$$\sup\big\{q(h) \;\big|\; H_* \ni h \leqslant s\big\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

等于量

$$\inf\left\{(l_n \circ \mathrm{pr}_n)(s) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, l_n \in \lin^+ \mathbb{R}^{\mathrm{pr}_n S}, q(h) \underset{\forall h\in H_*}{\leqslant} (l_n \circ \mathrm{pr}_n)(h)\right\} \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (4)$$

对于 $D \subset \mathbb{R}^d$，选取由序列 $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 个区域 $D_n \subset \mathbb{R}^d$构成的穷尽列，使得 $\overline{B}_o(r) \subset D_0$，闭包 $\operatorname{clos} D_n$ 区域 D_n 包含于区域 D_{n+1}，对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n$ 均成立。

对于 $n \in \mathbb{N}_0$，考虑空间 $X_n := L^1(\operatorname{clos} D_n)$ 上可积函数构成的空间，赋予逐点预序 $\leq_n^{\text{п.в.}}$；将其按几乎处处关系 $\overset{\text{п.в.}}{=}$ 取商后记为 X_n，此时 $\leq_n^{\text{п.в.}}$已是序关系。作为线性正函数$p_n \in \lin^+ X_n^{X_{n+1}}$，选取“函数”在 X_{n+1} 上的 $\operatorname{clos} D_{n+1}$的限制，这样它们就成为 X_n中的向量。此时，向量格的投影极限 $\operatorname{proj\,lim} X_n p_n$ 是局部可积函数空间按几乎处处关系 $\overset{\text{п.в.}}{=}$ 取商所得的空间，其上的序关系为 $\leqslant^{\text{п.в.}}$，记作 $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$。

对于凸锥 $H \subset \operatorname{sbh}(D)$，令

$$H_* := H \setminus \{-\infty\} \subset \operatorname{sbh}(D) \setminus \{-\infty\} \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D).$$

区域内次调和函数序列上极限的上半连续正则化——如果该上极限不等于 $-\infty$，——一方面给出一个次调和函 $\mathfrak{m}_d$函数，另一方面与上极限的差异至多发生在一个零 H_* 测度集上，甚至更小。因此，对于这个锥，满足以关系式 (3) 结束的条件。

设

$$S := C(D) + H_* - H_* \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D).$$

显然， $H_* \subset S$。设 $s_n \in S$，即

$$s_n = g_n + h_n - h'_n, \text{ где } g_n \in C(\operatorname{clos} D_n),$$

而 $h_n \in \mathbf{pr}_n H_*$ 和 $h'_n \in \mathbf{pr}_n H_*$ 是 H_* 中函数在 $\operatorname{clos} D_n$ 上的限制。于是存在正数 c 和 c'，使得 $g_n \geqslant -c$ 在 $\operatorname{clos} D_n$ 上，且 $h'_n \leq_n c'$ 在 $\operatorname{clos} D_n$ 上。因此，

$$h_n - c - c' \leq_n s_n, \text{ где } h_n \in \mathrm{pr}_n H_*,$$

而且负常数 $-c - c' = (c + c')(-1)$ 属于 $\mathbf{pr}_n H$，因为根据条件 $-1 \in H$。因此，关于子空间 S 的定理条件均已满足。

作为 q_0 定理 2 中测度的限制 $\mathfrak{m}_d$ 到 $\overline{B}_o(r)$ ，其含义是

$$q_0(f_0) := \int_{\overline{B}_o(r)} f_0 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}_d \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } f_0 \in X_0 = \mathrm{pr}_0 L^1_{\mathrm{loc}}(D). \tag{5}$$

若函数 $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ 几乎处处次调和 于 D 上，即它几乎处处与一个次调和函数相等，则称其为几乎次调和函数。对于任意几乎处处递减的序列 $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ，若其为 D 上的几乎次调和函数$h^{(k)}$ ，则条件

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R} \quad \text{для } q := q_0 \circ \mathrm{pr}_0$$

意味着，

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \int_{\overline{B}_o(r)} h^{(k)} \, \mathrm{d}\mathfrak{m}_d > -\infty. \tag{6}$$

因此，该序列的极限在 D上给出一个几乎次调和函数。对于递减序列$(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$，其中各项属于锥 $H_* \subset \operatorname{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$，这一点更是成立。递减序列的上极限（3）就是该序列的下确界。因此，根据定理 1 的条件，对于满足条件（$(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$，且满足条件（6）的序列，我们得到

$$-\infty \neq \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H.$$

特别地，当 (6) 递减序列 $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 H_*时，显然，它被函数 $h^{(1)}$从上方所界，且被函数

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H_*.$$

此时可以认为所有函数 $h^{(k)}$ 都是上半连续的。对于这样一个递减函数序列，$\inf_{k\in\mathbb{N}}$ 可以移入积分号下：

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \int_{\overline{B}_o(r)} h^{(k)} \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d = \int_{\overline{B}_o(r)} \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d.$$

这意味着满足

$$q\big(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\big) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \quad \text{для } q := q_0 \circ \mathrm{pr}_0.$$

因此，由定理1 的条件可推出定理2的所有条件。容易看出，

$$\sup\big\{q(h) \;\big|\; H_* \ni h \leqslant s\big\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

——这是（1）的左边。下面验证，在所讨论的情形下，（4）是（1）的右边。

设如（4）中那样，$l_n \in \mathrm{lin}^+\,\mathbb{R}^{\mathrm{pr}_n S}$，其中 $S = C(D) + H_* - H_*$。则

$$l_n \in \mathrm{lin}^+\,\mathbb{R}^{\mathrm{pr}_n C(D)} = \mathrm{lin}^+\,\mathbb{R}^{C(\mathrm{clos}\, D_n)},$$

由里斯定理 l_n 在 $C(\mathrm{clos}\, D_n)$ 可表示为某个正的有限博雷尔测度 μ 在 D 上，其紧支集包含于$\mathrm{clos}\, D_n$中。（4）中形如

$$q(h) \leqslant (l_n \circ \mathrm{pr}_n)(h) \quad \text{при всех } h \in H_*$$

对于 $q = q_0 \circ \mathrm{pr}_0$，根据（5），用测度 μ 可以写成 к

$$\int_D h \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D h \,\mathrm{d}\mu \quad \text{при всех } h \in H_*.$$

由此可推出积分有限

$$\int_D h \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } h \in H_*.$$

因此，以这种方式得到的测度 $\mu \in \mathrm{Meas}_0^+(D)$在 $S = C(D)+H_*-H_*$ 上定义良好，且恰好遍历 $J_{H_*} = J_H$（2）中的所有测度，因为从 $-\infty$ 中 H 移除常数项不会改变（1）–（2）。因此，等式（1）得证，而定理1 的最后一项断言是该等式的显然推论。 □

推论1的证明。只需考察 $v \neq -\infty$。对于任意一对函数 $u_1, u_2 \in \operatorname{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$，由不等式 $u_1 \leqslant^{\text{п.в.}} u_2$在 D 上可得 $u_1 \leqslant u_2$ 在 D上处处成立。因此，函数$h \in \operatorname{psbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ 的存在性，其限制为

$$v + h \leqslant M \quad \text{на } D$$

等价于存在函数 $h \in \operatorname{psbh}(D) \setminus \{-\infty\}$，且其满足约束

$$h \leqslant^{\text{п.в.}} (M - v) =: f \quad \text{на } D,$$

而这等价于左侧（1）有限，且 $H := \operatorname{psbh}(D)$。根据定理 1 的推论，这等价于条件

$$\inf_{\mu \in J_H} \int_D f \, \mathrm{d}\mu > -\infty,$$

这等价于条件

$$\sup_{\mu \in J_H} \int_D (v - M) \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

推论得证。 □

参考文献

[1] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б.,《哈恩–巴拿赫定理与包络的序版本。II. 函数论中的应用》，《复分析与数学物理》，《科学与技术成果》系列《现代数学及其应用》专题综述，162，俄罗斯科学院全俄科学技术信息研究所，莫斯科，2019年，93–135；Khabibullin B. N., Rozit A. P., Khabibullina E. B.,《哈恩–巴拿赫定理与包络的序版本。II. 函数论中的应用》，《数学科学杂志》，257:3 (2021年)，366–409。[2] Хабибуллин Б.Н.，《函数论中的包络》，巴什基尔国立大学出版中心，乌法，2021年，https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/envkhbn.pdf。[3] Хабибуллин Б. Н.，《超线性泛函的对偶表示及其在函数论中的应用。I》，俄罗斯科学院通报：数学系列，65:4 (2001年)，205–224；B. N. Khabibullin,《超线性泛函的对偶表示及其在函数论中的应用。I》，数学通报，65:4 (2001年)，835–85。[4] Б. Н. Хабибуллин，《超线性泛函的对偶表示及其在函数论中的应用。II》，俄罗斯科学院通报：数学系列，65:5 (2001年)，167–190；B. N. Khabibullin,《超线性泛函的对偶表示及其在函数论中的应用。II》，数学通报，65:5 (2001年)，1017–1039。

[5] Poletsky E. A.，《多重次调和函数作为变分问题的解》，纯数学研讨会论文集，52，1991，163–171。[6] Б. Н. Хабибуллин，《最小多重超调和主函数与整函数的乘子。I》，《西伯利亚数学杂志》，**33**:1 (1992)，173–178；B. N. Khabibullin，《最小多重超调和主函数与整函数的乘子。I》，《西伯利亚数学杂志》，33:1 (1992)，144–148。[7] Bu S., Schachermayer W.，《用全纯函数的像测度逼近詹森测度及其应用》，《美国数学会汇刊》，331:2 (1992)，585–608。[8] Хабибуллин Б. Н.，《最小主函数定理及其应用。I. 整函数与亚纯函数》，俄罗斯科学院通报：数学系列，**57**:1 (1993)，129–146；B. N. Khabibullin，《最小主函数定理及其应用。I. 整函数与亚纯函数》，《俄罗斯科学院数学汇报》，42:1 (1994)，115–131。[9] Poletsky E. A.，《全纯流》，《印第安纳大学数学杂志》，42:1 (1993)，85–144。[10] B. J. Cole, T. J. Ransford，《不具上半连续性的次调和性》，《泛函分析杂志》，147 (1997)，420–442。[11] E. A. Poletsky，《函数的圆盘包络，I》，《当代数学中的复分析》，E. M. Chirka 编，Fasis，莫斯科，1997。[12] Larusson F., Sigurdsson R.，《流形上的多重次调和函数与解析圆盘》，《纯粹与应用数学杂志》，501 (1998)，1–39。[13] E. A. Poletsky，《函数的圆盘包络，II》，《泛函分析杂志》，163:1 (1999)，111–132。[14] C. O. Kiselman，《多复变量中的多重次调和函数与位势理论》，《1950—2000年数学的发展》，Birkh¨auser，巴塞尔，2000，655–714。[15] E. A. Полецкий，《函数的圆盘包络》，《当代数学中的复分析》，纪念Б.В. Шабат诞辰80周年，ФАЗИС，莫斯科，2001，47–55。[16] B. J. Cole, T. J. Ransford，《詹森测度与调和测度》，《纯粹与应用数学杂志》，541 (2001)，29–53。[17] T. J. Ransford，《詹森测度》，《逼近、复分析与位势理论》，2000年北约高级研究所论文集（加拿大魁北克省蒙特利尔），北约科学丛书第二辑：数学、物理与化学，37，N. U. Arakelyan、P. M. Gauthier 编，Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，2001，221–237。[18] F. Wikstr¨om，《多重次调和函数的詹森测度与边界值》，Ark. Mat.，39 (2001)，181–200。[19] J.-P. Rosay，《全纯流形上的圆盘 Poletsky 理论》，Indiana Univ. Math. J.，52:1 (2003)，157–169。[20] A. Edigarian，《关于 J. P. Rosay 论文“全纯流形上的圆盘 Poletsky 理论”的一则注记》，《波兰数学年刊》，80 (2003)，125–132。[21] E. A. Poletsky，《詹森测度与解析多值函数》，Ark. Mat.，42 (2004)，335–352。[22] S. Roy，《极端詹森测度》，Ark. Mat.，46 (2008)，153–182。

[23] B. Magn´usson, 《极值 ω多重次调和函数作为圆盘泛函的包络》, Ark. Mat., 49（2011年）, 383–399。[24] Poletsky E. A.、Sigurdsson R., 《紧集上多重次调和函数的狄利克雷问题》, Math. Zeitschrift, 271:3–4（2012年）, 877–892。[25] B. Magn´usson, 《极值 ω多重次调和函数作为圆盘泛函的包络——推广及其在局部理论中的应用》, Math. Scand., 111（2012年）, 296–319。. [26] B.D. Drnov˘sek、F. Forstneri˘c, 《奇异复空间上的 Poletsky-Rosay 定理》, Indiana Univ. Math. J., 61:4（2012年）, 1407–1423。[27] Finnur Larusson、Evgeny Poletsky, 《多重次调和次延拓作为圆盘泛函的包络》, Michigan Math. J., 62:3（2013年）, 551–565。[28] B. S. Magn´usson, 《射影空间中的解析圆盘、全局极值函数与射影包》, Illinois J. Math., 58:2（2014年）, 391–404。[29] W. Hansen、I. Netuka, 《流形上多重次调和次延拓的圆盘公式》, J. Geom. Anal., 25（2015年）, 1401–1408。[30]W. Hansen、I. Netuka, 《约化函数与詹森测度》, Proc. Amer. Math. Soc., 146:1（2018年）, 153–160。[31] U. Kuzman, 《紧流形上的 Poletsky 圆盘理论》, Proc. Amer. Math. Soc., 146（2018年）, 4767–4774。

俄罗斯科学院乌法联邦研究中心数学研究所（含计算中心）电子邮箱: enzha@list.ru khabib-bulat@mail.ru