arXiv:2304.03972v1 [math.NT] 8 Apr 2023

整数与其模逆元乘积的平均值

Olivier Bordell`es 和 L´aszl´o T´oth

摘要

本文将 Chan（2016）关于整数与其模素数乘法逆元乘积平均值的近期结果推广至合数模数。

1 引言

1.1 背景与研究动机

令 $k \geqslant 2$ 为任意固定的整数。Chan [3] 研究了以下和式

$$S_k(p) := \sum_{\substack{a_1=1 \\ a_1 \cdots a_k \equiv 1 \pmod p}}^{p-1} \cdots \sum_{a_k=1}^{p-1} a_1 \cdots a_k$$

其中 p 为素数，并证明了

$$S_k(p) = 2^{-k} p^k (p-1)^{k-1} + O\left(p^{\vartheta_k} (\log p)^k\right) \tag{1.1}$$

其中，当 $k \geqslant 3$ 时，$\vartheta_2 = \frac{5}{2}$ 和 $\vartheta_k = \frac{3k}{2}$。如 [3, 定理 3], 所示，该结果同样适用于更一般的和式

$$S_k(p, m) := \sum_{\substack{a_1=1 \\ a_1 \cdots a_k \equiv m \pmod p}}^{p-1} \cdots \sum_{a_k=1}^{p-1} a_1 \cdots a_k$$

其中 m 是满足 $(m, p) = 1$ 的任意正整数。本文的主要目标是将 (1.1) 推广到任意合数模数 $n \geqslant 2$。因此，我们研究以下和式

$$S_k(n, m) := \sum_{\substack{a_1=1 \\ a_1 \cdots a_k \equiv m \pmod n}}^{n} \cdots \sum_{a_k=1}^{n} a_1 \cdots a_k \tag{1.2}$$

其中 m 是满足 $(m, n) = 1$ 的任意正整数；约定当存在 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $(a_j, n) > 1$ 时，该和式为零。

1.2 主要结果

如 Chan 的论文中所述，情况 $k = 2$ 似乎更为复杂，还需要进一步研究。我们证明了以下结果。

2020 *Mathematics subject classification.* 主要分类号：11L07，11T23；次要分类号：11A07。

Key words and phrases. 狄利克雷特征，加性特征，波利亚-维诺格拉多夫不等式，模逆。

定理 m 1. 设 $k \geqslant 3$ 为任意固定整数。那么，对于满足 $(m,n) =$ 的 $n \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 1$ 1,

$$S_k(n,m) = 2^{-k} n^k \varphi(n)^{k-1} + O^\star\left((2\sqrt{3})^k n^{3k/2} (\log n)^k\right).$$

当 $k \geqslant 4$ 和 $n \geqslant 3$ 为奇数时，关于奇狄利克雷特征平均值的最新结果使我们能够对上述估计略作改进。

定理 2. 对于奇数 $k \geqslant 4$、 $n \geqslant 3$ 以及满足 $(m,n) = 1$ 的 $m \geqslant 1$,

$$S_k(n,m) = 2^{-k} n^k \varphi(n)^{k-1} + O\left(n^{\frac{3}{2}(k-2)} \varphi(n)^3 (\log n)^{k-4} (\log\log n)^2\right).$$

情形 $k = 2$ 需要涉及加性特征和指数和的特定估计。另一方面，与定理 1 一样，我们能够在此情形下给出完全显式的误差项。

定理 3. 对于所有满足 $(m,n) = 1$ 的 $n \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 1$,

$$S_2(n,m) = 4^{-1} n^2 \varphi(n) + O^\star\left(n^2\, \sigma_{1/2}(n)\, (\tau(n) \log en)^2 + \tfrac{1}{4} n \varphi(n)\right)$$

其中 $\sigma_\lambda(n)$ 是 n 的因子的 λ 次幂之和，而 $\tau(n) = \sigma_0(n)$ 是 n 的因子个数。

为了研究前一结果的尖锐性，考察其误差项的均方可能很有意义。当 n 为奇数时，我们可以证明下面的结果。

定理 4. 对所有奇数 $n \geqslant 3$ 以及所有较小的 $\varepsilon > 0$ ，我们有

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m,n)=1}}^{n} \left|S_2(n,m) - 4^{-1} n^2 \varphi(n)\right|^2 = \frac{5 C_n}{144} \left(n\varphi(n)\right)^3 + O\left(n^{5+\varepsilon}\right)$$

其中常数 C_n 由 (2.2) 给出，且仅依赖于 n。特别地，对于所有充分大的奇数 n ，存在一个整数 $m \in \{1, \dots, n\}$ ，使得 $(m,n) = 1$ ，并且

$$\left|S_2(n,m) - 4^{-1} n^2 \varphi(n)\right| \gg n^{3/2} \varphi(n).$$

注意， $n^{3/2}\varphi(n) \gg n^{5/2}(\log\log n)^{-1}$ ，而 $n^2\, \sigma_{1/2}(n)\, (\tau(n) \log en)^2 \ll n^{5/2+\varepsilon}$。因此，当 n 为奇数时，定理 3 中的误差项除了 n^ε 因子外是尖锐的。

1.3 记号

$n \geqslant 2$、 $k \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 1$ 是整数，我们始终假设 $(m,n) = 1$。对于所有 $x \in \mathbb{R}$，我们定义 $e_n(x) := e^{\frac{2i\pi x}{n}}$ ，其中 $\|x\|$ 表示到最近整数的距离。对于算术函数， μ是M¨obius函数， φ 是欧拉函数；对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 $\sigma_\lambda(n) := \sum_{d|n} d^\lambda$。通常记 $\tau := \sigma_0$。本文研究的主和 $S_k(n,m)$定义于(1.2)式。最后，我们将使用Ramar´e的记号

$$f(n) = M(n) + O^\star(R(n)) \iff \forall n \geqslant 2,\ |f(n) - M(n)| \leqslant R(n).$$

2 定理 1 和定理 2 的证明

2.1 定理 1

根据狄利克雷特征的正交关系，我们推导得出

$$\begin{aligned} S_k(n,m) &= \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{a_1=1}^{n} \cdots \sum_{a_k=1}^{n} a_1 \cdots a_k \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, n)} \overline{\chi}(m)\chi\left(a_1\right) \cdots \chi\left(a_k\right) \\ &= \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, n)} \overline{\chi}(m) \left(\sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right)^k \\ &= \frac{1}{\varphi(n)} \left(\sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} a \right)^k + \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n) \\ \chi \neq \chi_0}} \overline{\chi}(m) \left(\sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right)^k \\ &= 2^{-k} n^k \varphi(n)^{k-1} + R_k(n,m) \end{aligned}$$

并利用阿贝尔求和和波利亚-维诺格拉多夫不等式，我们得到

$$\left| \sum_{a \leqslant n} a\chi(a) \right| \leqslant 2n \max_{A \leqslant n} \left| \sum_{a \leqslant A} \chi(a) \right| \leqslant 2\sqrt{3}\, n^{3/2} \log n \tag{2.1}$$

从而 $|R_k(n,m)| \leqslant (2\sqrt{3})^k n^{3k/2} (\log\ n)^k$。 □

2.2 定理 2

在本节中，我们假设 $k \geqslant 4$ 和 $n \geqslant 3$ 为奇整数。证明依赖于以下结果，即 [4, 引理 9]。

引理 5. 设 $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}$ 为奇数，并令

$$C_q := \prod_{p^\alpha \| q} \left(1 + \frac{2p^3 + p^2 - 1}{(p^2+1)(p^2+p+1)} - \frac{1}{p^{3(\alpha-1)}(p^2+p+1)} \right). \tag{2.2}$$

那么，对于所有 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q) \\ \chi(-1)=-1}} \overline{\chi}\left(2^\ell\right) \left| \sum_{a=1}^{q} a\chi(a) \right|^4 = C_q \frac{(3\ell+5) q^3 \varphi(q)^4}{72 \times 2^{\ell+1}} + O_\ell\left(q^{6+\varepsilon}\right).$$

需要指出的是，对于所有正整数 q，我们有

$$\prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{4}{5p} \right) \leqslant C_q \leqslant \prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{2}{p} \right)$$

特别是， C_q 无界，且 $C_q \ll (\log\log q)^2$。我们将在以下较弱形式中使用这一结果，其中 $q = n$ 且 $\ell = 0$： 在引理的假设下，我们有

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n) \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right|^4 \ll n^3 \varphi(n)^4 (\log\log n)^2. \tag{2.3}$$

现在我们可以证明定理 2。首先注意，对于所有 $\chi \neq \chi_0$，都有恒等式

$$\sum_{a=1}^{q} a\chi(a) = -\chi(-1)\sum_{a=1}^{q} a\chi(a)$$（参见 [1, 定理 12.20]的证明），因此当 χ 为偶数时，这个和为零，从而

$$S_k(n,m) = 2^{-k} n^k \varphi(n)^{k-1} + R_k^{\mathrm{odd}}(n,m)$$

其中

$$R_k^{\mathrm{odd}}(n,m) := \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n) \\ \chi(-1)=-1}} \overline{\chi}(m) \left(\sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right)^k.$$

现在利用（2.1）和（2.3），我们推得

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n) \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right|^k &= \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n) \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right|^{k-4} \left| \sum_{a=1}^{n} a\chi(a) \right|^4 \\ &\ll n^{\frac{3}{2}(k-4)} (\log n)^{k-4} \times n^3 \varphi(n)^4 (\log\log n)^2 \\ &\ll n^{\frac{3}{2}(k-2)} \varphi(n)^4 (\log n)^{k-4} (\log\log n)^2 \end{aligned}$$

从而得到所述估计。 □

3 定理 3 的证明

3.1 技术引理

引理 6. 对于所有满足 $(m,n) = 1$的 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$、 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，

$$\left| \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} a\, e_n(km\overline{a}) \right| \leqslant 2n^{3/2} \tau(n) (n,k)^{1/2} \log(en).$$

证明。由 Weil 界应用于 Kloosterman 和并结合补全技巧，可知[2, (6.21) 第 454] 页：对所有正整数 $t \leqslant n$

$$\left| \sum_{\substack{a \leqslant t \\ (a,n)=1}} e_n(km\overline{a}) \right| \leqslant n^{1/2} \tau(n) (n,mk)^{1/2} \log(en)$$

因此，通过分部求和，我们得到

$$\left| \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} a\, e_n(km\overline{a}) \right| \leqslant 2n \max_{t \leqslant n} \left| \sum_{\substack{a \leqslant t \\ (a,n)=1}} e_n(km\overline{a}) \right| \leqslant 2n^{3/2} \tau(n) (n,mk)^{1/2} \log(en)$$

注意到 $(n,mk) = (n,k)$，因为 $(n,m) = 1$，从而完成证明。 □

The 下一个引理是众所周知的，但为求完整起见，我们在此给出证明 .

引理 7. 设 $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$。若 $q \nmid k$，则

$$\sum_{b=1}^{q-1} b\, e_q(-kb) = \frac{-q}{1 - e_q(-k)}.$$

证明. 若 $z^q = 1, z \neq 1$，则 $\sum_{b=0}^{q-1} z^b = (1-z^q)/(1-z) = 0$。因此

$$\begin{aligned}\left(\sum_{b=1}^{q-1} bz^{b-1}\right)(1-z) &= z + 2z^2 + \cdots + (q-1)z^{q-1} - z^2 - 2z^3 - \cdots - (q-1)z^q \\ &= z + z^2 + \cdots + z^{q-1} - (q-1)z^q = -1 - (q-1) = -q.\end{aligned}$$

□

引理 8. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$,

$$\sum_{\substack{b=1 \\ (b,n)=1}}^{n} b\, e_n(-kb) = -n \sum_{\substack{d \mid n \\ \frac{n}{d} \nmid k}} \frac{\mu(d)}{1 - e_{n/d}(-k)} + \frac{n}{2} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n \\ \frac{n}{d} \mid k}} \mu(d) \left(\frac{n}{d} - 1\right).$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{b=1 \\ (b,n)=1}}^{n} b\, e_n(-kb) &= \sum_{d \mid n} d\mu(d) \sum_{b \leqslant n/d} b\, e_n(-kdb) \\ &= \sum_{d \mid n} d\mu(d) \sum_{b \leqslant n/d} b e_{n/d}(-kb) \\ &= \sum_{d \mid n} d\mu(d) \left(\frac{n}{d} + \sum_{b \leqslant \frac{n}{d} - 1} b\, e_{n/d}(-kb)\right) \\ &= n \underbrace{\sum_{d \mid n} \mu(d)}_{=0, \text{ since } n \geqslant 2} + \left(\sum_{\substack{d \mid n \\ \frac{n}{d} \nmid k}} + \sum_{\substack{d \mid n \\ \frac{n}{d} \mid k}}\right) d\mu(d) \sum_{b \leqslant \frac{n}{d} - 1} b\, e_{n/d}(-kb) \\ &= \sum_{\substack{d \mid n \\ \frac{n}{d} \nmid k}} d\mu(d) \frac{-n/d}{1 - e_{n/d}(-k)} + \sum_{\substack{d \mid n \\ \frac{n}{d} \mid k}} d\mu(d) \sum_{b \leqslant \frac{n}{d} - 1} b \\ &= -n \sum_{\substack{d \mid n \\ \frac{n}{d} \nmid k}} \frac{\mu(d)}{1 - e_{n/d}(-k)} + \frac{n}{2} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n \\ \frac{n}{d} \mid k}} \mu(d) \left(\frac{n}{d} - 1\right)\end{aligned}$$

其中，在倒数第二行的第一个求和式中，我们使用了引理 7。 □

我们将运用以下原理。

引理 9. 设 $f\colon\ \mathbb{Z}_{\geqslant 1} \to \mathbb{C}$ 是任意算术函数。那么，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{d \mid n} \sum_{\substack{h=1 \\ \left(\frac{n}{d}, h\right) = 1}}^{n/d} f(hd).$$

证明. 令 $d = (n,k)$，并对 $d \mid n$ 的所有取值求和。按约定，若 $d \nmid k$，则内层求和为零，由此得到

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{d \mid n} \sum_{\substack{k=1 \\ d \mid k \\ \left(\frac{n}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1}}^{n} f(k).$$

经过这一变换 $k = hd$ ，便得到所要证明的结果。 □

引理10. 设 $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ 和 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$。则

$$\sum_{\substack{a \pmod q \\ q\nmid a\ell}} \frac{1}{|1-e_q(\pm a\ell)|} \leqslant \frac{q}{2}\log\left(\frac{eq}{2(\ell,q)}\right) < \frac{q}{2}\log(eq).$$

证明。不等式 $|e(x) - e(y)| \geqslant 4\|x-y\|$ [2, 练习 114] 和周期性给出

$$\sum_{\substack{a \pmod q \\ q\nmid a\ell}} \frac{1}{|1-e_q(\pm a\ell)|} \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\substack{a=1 \\ q\nmid a\ell}}^{q-1} \frac{1}{\|a\ell/q\|} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{\|j/q\|} \sum_{\substack{a=1 \\ a\ell\equiv j \pmod q}}^{q-1} 1.$$

对于固定的 ℓ、j 和 q，线性同余方程 $a\ell \equiv j$（模 q）在 a 中有解，当且仅当 $(\ell,q) \mid j$；在此情况下，有 (ℓ,q) 个解（模 q）。因此，采用记号 $q/(\ell,q) := r$，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a \pmod q \\ q\nmid a\ell}} \frac{1}{|1-e_q(\pm a\ell)|} &\leqslant \frac{(\ell,q)}{4}\sum_{\substack{j=1 \\ (\ell,q)\mid j}}^{q-1}\frac{1}{\|j/q\|} = \frac{(\ell,q)}{4}\sum_{t=1}^{r-1}\frac{1}{\|t/r\|} \\ &= \frac{(\ell,q)}{4}\left(\sum_{t\leqslant r/2}\frac{r}{t} + \sum_{r/2<t\leqslant r-1}\frac{r}{r-t}\right) \\ &\leqslant \frac{r(\ell,q)}{2}\sum_{t\leqslant r/2}\frac{1}{t} \leqslant \frac{q}{2}\log(er/2) < \frac{q}{2}\log(eq)\end{aligned}$$

即得所需结论。 □

引理11。设 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$，且 d 是 n 的一个因数。则

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \frac{n}{d}\nmid k}}^{n-1} \frac{(n,k)^{1/2}}{\left|1-e_{n/d}(-k)\right|} \leqslant \tfrac{1}{2}\, n^{1/2}\,\sigma_{1/2}(n)\log(en).$$

证明。利用引理 9，我们首先推导出

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \frac{n}{d}\nmid k}}^{n-1} \frac{(n,k)^{1/2}}{\left|1-e_{n/d}(-k)\right|} = \sum_{\substack{\delta\mid n \\ \delta<n}} \delta^{1/2} \sum_{\substack{h=1 \\ (\frac{n}{\delta},h)=1 \\ \frac{n}{d}\nmid h\delta}}^{\frac{n}{\delta}-1} \frac{1}{\left|1-e_{n/d}(-h\delta)\right|} = \sum_{\substack{\delta\mid n \\ \delta<n}} \delta^{1/2} \sum_{\substack{h=1 \\ (\frac{n}{\delta},h)=1 \\ \frac{n}{\delta}\nmid hd}}^{\frac{n}{\delta}-1} \frac{1}{\left|1-e_{n/\delta}(-hd)\right|}.$$

注意到 $\frac{n}{\delta} \geqslant 2$，因为 $\delta \mid n$ 和 $\delta < n$。现在，利用 $q = \frac{n}{\delta}$ 和 $\ell = d$ 应用引理10，得到

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \frac{n}{d}\nmid k}}^{n-1} \frac{(n,k)^{1/2}}{\left|1-e_{n/d}(-k)\right|} \leqslant \frac{n}{2}\sum_{\delta\mid n}\delta^{-1/2}\log\left(\frac{en}{\delta}\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\, n^{1/2}\,\sigma_{1/2}(n)\log(en).$$

□

3.2 定理 3 的证明

加性特征的正交关系给出

$$S_2(n,m) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} a \sum_{\substack{b=1 \\ (b,n)=1}}^{n} b \sum_{k=1}^{n} e_n\left(k(m\overline{a}-b)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} a\, e_n\left(km\overline{a}\right) \sum_{\substack{b=1 \\ (b,n)=1}}^{n} b\, e_n\left(-kb\right).$$

我们先单独取出对应于 $k=n$ 的项，从而得到

$$S_2(n,m)=\tfrac{1}{4}n\left(\varphi(n)\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_n\left(km\overline{a}\right)\sum_{\substack{b=1\\(b,n)=1}}^{n}b\,e_n\left(-kb\right):=\tfrac{1}{4}n\left(\varphi(n)\right)^2+R_2(n,m). \tag{3.1}$$

应用引理 8，我们首先推导出

$$\begin{aligned}R_2(n,m)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_n\left(km\overline{a}\right)\left(-n\sum_{\substack{d|n\\ \frac{n}{d}\nmid k}}\frac{\mu(d)}{1-e_{n/d}(-k)}+\frac{n}{2}\sum_{\substack{d|n\\ d<n\\ \frac{n}{d}|k}}\mu(d)\left(\frac{n}{d}-1\right)\right)\\&=-\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n}{d}\nmid k}}^{n-1}\frac{1}{1-e_{n/d}(-k)}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_n\left(km\overline{a}\right)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{d|n\\ d<n}}\mu(d)\left(\frac{n}{d}-1\right)\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n}{d}|k}}^{n-1}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_n\left(km\overline{a}\right)\\&:=R_{21}(n,m)+R_{22}(n,m).\end{aligned}$$

由引理 6 和引理 11 可得

$$\begin{aligned}|R_{21}(n,m)|&\leqslant\sum_{d|n}\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n}{d}\nmid k}}^{n-1}\frac{1}{\left|1-e_{n/d}(-k)\right|}\left|\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_n\left(km\overline{a}\right)\right|\\&\leqslant 2n^{3/2}\tau(n)\,\log(en)\sum_{d|n}\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n}{d}\nmid k}}^{n-1}\frac{(n,k)^{1/2}}{\left|1-e_{n/d}(-k)\right|}\\&\leqslant n^2\,\sigma_{1/2}(n)\,\tau(n)(\log en)^2\sum_{d|n}1=n^2\,\sigma_{1/2}(n)\left(\tau(n)\log en\right)^2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

现在在对 k in $R_{22}(n,m)$ 求和时令 $k=\frac{hn}{d}$，可得

$$\begin{aligned}R_{22}(n,m)&=\frac{1}{2}\sum_{\substack{d|n\\ d<n}}\mu(d)\left(\frac{n}{d}-1\right)\sum_{h=1}^{d-1}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_d\left(hm\overline{a}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{\substack{d|n\\ 1<d<n}}\mu(d)\left(\frac{n}{d}-1\right)\sum_{h=1}^{d-1}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_d\left(hm\overline{a}\right).\end{aligned}$$

需要指出的是，$d\mid n$ 和 $d>1$ 意味着$d\nmid\overline{a}$。现在交换求和次序，可得对所有满足 $1<d<n$的 $d\mid n$

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{d-1}\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_d\left(hm\overline{a}\right)&=\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\sum_{h=1}^{d-1}e_d\left(hm\overline{a}\right)=\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_d\left(m\overline{a}\right)\times\frac{1-e_d\left((d-1)m\overline{a}\right)}{1-e_d\left(m\overline{a}\right)}\\&=\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_d\left(m\overline{a}\right)\times\frac{1-e_d\left(-m\overline{a}\right)}{1-e_d\left(m\overline{a}\right)}=-\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a\,e_d\left(m\overline{a}\right)\,e_d\left(-m\overline{a}\right)\\&=-\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n}a=-\frac{n\varphi(n)}{2}\end{aligned}$$

因此，由于 $n \geqslant 2$

$$R_{22}(n,m) = -\frac{n\varphi(n)}{4} \sum_{\substack{d\mid n\\ 1<d<n}} \mu(d)\ \left(\frac{n}{d}-1\right) = \frac{n^2\varphi(n)}{4} - \frac{n\varphi(n)^2}{4} - \frac{n\varphi(n)}{4}. \tag{3.3}$$

将 (3.2) 和 (3.3) 代入 (3.1) 即得该结果。 □

4 定理4的证明

设 $n \geqslant 3$ 为奇数。利用狄利克雷特征的正交关系，根据定理 1 的证明可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{n} \left|S_2(n,m) - 4^{-1}n^2\varphi(n)\right|^2 \\
&\quad= \frac{1}{\varphi(n)^2} \sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{n} \left| \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n)\\ \chi\neq\chi_0}} \overline{\chi}(m) \left(\sum_{a=1}^{n} a\chi(a)\right)^2 \right|^2 \\
&\qquad= \frac{1}{\varphi(n)^2} \sum_{\substack{\chi_1 \,(\mathrm{mod}\, n)\\ \chi_1\neq\chi_0}} \sum_{\substack{\chi_2 \,(\mathrm{mod}\, n)\\ \chi_2\neq\chi_0}} \left(\sum_{a=1}^{n} a\chi_1(a)\right)^2 \left(\sum_{a=1}^{n} a\overline{\chi_2}(a)\right)^2 \underbrace{\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{n} \chi_1(m)\,\overline{\chi_2}(m)}_{=\varphi(n)\text{ if }\chi_1=\chi_2,\ 0\text{ otherwise}} \\
&\qquad= \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n)\\ \chi\neq\chi_0}} \left|\sum_{a=1}^{n} a\chi(a)\right|^4 = \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, n)\\ \chi(-1)=-1}} \left|\sum_{a=1}^{n} a\chi(a)\right|^4
\end{aligned}$$

再结合 $\ell = 0$ 应用引理 5，即得证明。 □

致谢

参考文献

[1] T. M. Apostol, 《解析数论导论》，施普林格，UTM，1976年 .

[2] O. Bordellès, 《Arithmetic Tales：高级版》，施普林格，2020年。

[3] T. H. Chan，数与其乘法逆元的乘积、 L-函数的矩与指数和，《Integers》16（2016），A2号文章。

[4] Z. Xu & W. Zhang，特征和的四次方平均值，《Acta Arith.》135（2008），31–4 9.

O.Bordell`es, 2 allée de la combe, 43000 Aiguilhe, France.*E-mail address*: borde43@wanadoo.fr L. T´oth, Department of Mathematics, University of Pécs, Ifjúság útja 6, 7624 Pécs, Hungary.*E-mail address*: ltoth@gamma.ttk.pte.hu