arXiv:2304.03993v1 [math.CV] 8 Apr 2023

一致拓扑下调和拟共形单位圆盘自同构的拓扑特征

Florian Biersack

德国巴伐利亚州维尔茨堡大学复分析教席，埃米尔-菲舍尔大街 40 号，邮编 97074。
电子邮箱：florian.biersack@mathematik.uni-wuerzburg.de

摘要

我们研究类 $HQ(\mathbb{D})$，即复平面中单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上所有调和拟共形自同构构成的集合，并赋予其一致收敛拓扑。本文探讨了这一映射空间的若干重要拓扑性质，例如可分性、紧致性、道路连通性和完备性。

1 引言

研究 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 的调和拟共形自同构这一想法，一方面受到近年来备受关注的一个课题启发：调和拟共形映射。该类特殊的同胚最初由 Martio 于 1968年 提出（参见 [10, 第 238] 页和 [14, 第 366] 页），近来引起了广泛关注；仅举数例，可参见 [3, 引言], [10], [11], [14], [15, 第 10 节3] 及其中的参考文献。尤其是，Kalaj 和 Pavlovi´c 在这一领域进行了深入研究，并取得了众多成果，其中包括若干关于单位圆盘上的调和拟共形自同构的刻画结论（参见 [10, 定理 A，第 239] 页，以及下文的命题 3.8）。另一方面， [2], 的作者研究了复平面中单连通区域的拟共形自同构群。对于这类区域， $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘可视为参照对象，这主要归功于经典的黎曼映射定理（RMT）及其拟共形对应定理——可测黎曼映射定理（参见例如 [13, 映射定理，第 194] 页）。鉴于上述情况，并考虑到 Rad´ó–Kneser–Choquet 定理（参见命题 2.2）这一关于调和映射的同样引人注目的结果，以下讨论将聚焦于 $\mathbb{C}$ 中单位圆盘上的调和拟共形自同构这一特殊情形。本文采用的拓扑是一致拓扑，由上确界度量诱导。

$$d_{\sup}(f,g) := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z) - g(z)|$$

对于（有界）映射 f， g： $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$。

2 定义与基本性质

在 [2], 中，作者研究了以下映射空间：

定义 2.1. 设 $G \subsetneq \mathbb{C}$ 是一个有界单连通域，则

$$Q(G) := \{f : G \longrightarrow G \mid f \text{ is a quasiconformal mapping of } G \text{ onto } G\}$$

文献 [2] 研究了 $d_{\sup}$ 所诱导的一致收敛拓扑下 $Q(G)$ 的若干核心拓扑性质。在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中，通过要求映射具有调和性这一附加性质，可以得到这类映射中一个特别特殊的子类，即考虑

$$HQ(\mathbb{D}) := \{f \in Q(\mathbb{D}) \mid f \text{ is harmonic}\} \tag{1}$$

也就是说， $HQ(\mathbb{D})$ 中的映射是 $\mathbb{D}$ 的调和拟共形自同构。此处及下文中，定义在某个区域上的复值映射 $f = u + iv$ 称为调和映射，当且仅当它的实部和虚部都是实值调和映射；而实值调和映射则通过拉普拉斯方程定义

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

微分多项式 $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，其中拉普拉斯算子。调和映射具有许多重要性质，例如平均值性质和最大值原理（[6, 第 12] 页），而这些性质又通过复分析中的著名结果与全纯函数有着深刻联系。一个直接得到的结论是 $\Sigma(\mathbb{D}) \subseteq HQ(\mathbb{D})$，其中 $\Sigma(\mathbb{D}) := \{f \in Q(\mathbb{D}) \mid f$ 是保角的，$\}$ 表示 $\mathbb{D}$的保角自同构子集。特别地，它是 $\mathrm{id}_{\mathbb{D}} \in HQ(\mathbb{D})$，因此 $HQ(\mathbb{D}) \neq \emptyset$，其中 $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ 是 $\mathbb{D}$上的恒等映射。关于 $\mathbb{C}$ 中的调和映射及其表示，以下由 Radó、Kneser 和 Choquet 给出的结果是一个重要事实（[6, 第 33–34], [7, 页、第 154–156]页以及 [15,定理 1.1，第 5]页）：

命题 2.2 (Radó–Kneser–Choquet)。
设 $G \subsetneq \mathbb{C}$ 是一个凸约当区域，且 $\gamma: \partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial G$ 是一个弱同胚，即从 $\partial\mathbb{D}$ 到 ∂G 的连续映射，使得每个 $\xi \in \partial G$ 的原像 $\gamma^{-1}(\xi)$ 或者是一个点，或者是 $\partial\mathbb{D}$ 的闭子弧。那么，其调和延拓

$$\mathfrak{P}[\gamma](z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \phi) + r^2} \gamma(e^{it})\, \mathrm{d}t,\ z = re^{i\phi} \in \mathbb{D}, \tag{2}$$

定义了从 $\mathbb{D}$ 到 G 的单射调和映射；此外，$\mathfrak{P}[\gamma]$ 是唯一的。反之，若 $G \subsetneq \mathbb{C}$ 是一个严格凸约当区域，且 $f: \mathbb{D} \longrightarrow G$ 是一个单射调和映射，则 f 可连续延拓至 $\mathbb{D}$，并定义从 $\partial\mathbb{D}$ 到 ∂G 的弱同胚。此外，若 $f \in C(\mathbb{D})$ 在$\mathbb{D}$中是调和的，则 $f|_{\mathbb{D}}$ 可写成形式 *(2)*。

对于一个（Jordan）区域 $G \subseteq \mathbb{C}$，令 $\mathcal{H}^*(\partial\mathbb{D},\ \partial G)$ 表示从 $\partial\mathbb{D}$ 到 ∂G的所有弱同胚的集合；在特殊情形 $G = \mathbb{D}$ 下，定义 $\mathcal{H}^*(\partial\mathbb{D}) := \mathcal{H}^*(\partial\mathbb{D},\ \partial\mathbb{D})$。因此，令 $\mathcal{H}^+(\partial\mathbb{D},\ \partial G)$ 和 $\mathcal{H}^+(\partial\mathbb{D})$ 分别表示相应的所有保向同胚的子集。

注 2.3。
由 *（2）* 定义的调和延拓 $\mathfrak{P}[\gamma]$ 也称为 $\gamma \in \mathcal{H}^*$（$\partial\mathbb{D}, \partial G$）的泊松变换，相应的积分核

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$

称为泊松核，参见 *[6, 第 12]* 页及 *[15,* 第 *5–6]* 页。

由 Radó–Kneser–Choquet 定理 2.2，可得如下结论（另见 [11, 第 337–338] 页）：

推论 2.4。

$$HQ(\mathbb{D}) = Q(\mathbb{D}) \bigcap \left\{\mathfrak{P}[\gamma] \,\middle|\, \gamma \in \mathcal{H}^+(\partial\mathbb{D})\right\}$$

回顾一下，每个若尔当域的拟共形自同构都允许同胚边界延拓（见 [12,第 13] 页），推论 2.4 也就有意义了。特别地，由此诱导的边界映射是单射，因此是 $\mathcal{H}^+(\partial\mathbb{D})$ 的一个元素。单位圆盘的一个具体调和自同构如

例 2.5。
对于 $x \in [0, 1]$，考虑如下分段定义的函数

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{2}{3}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{4}] \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

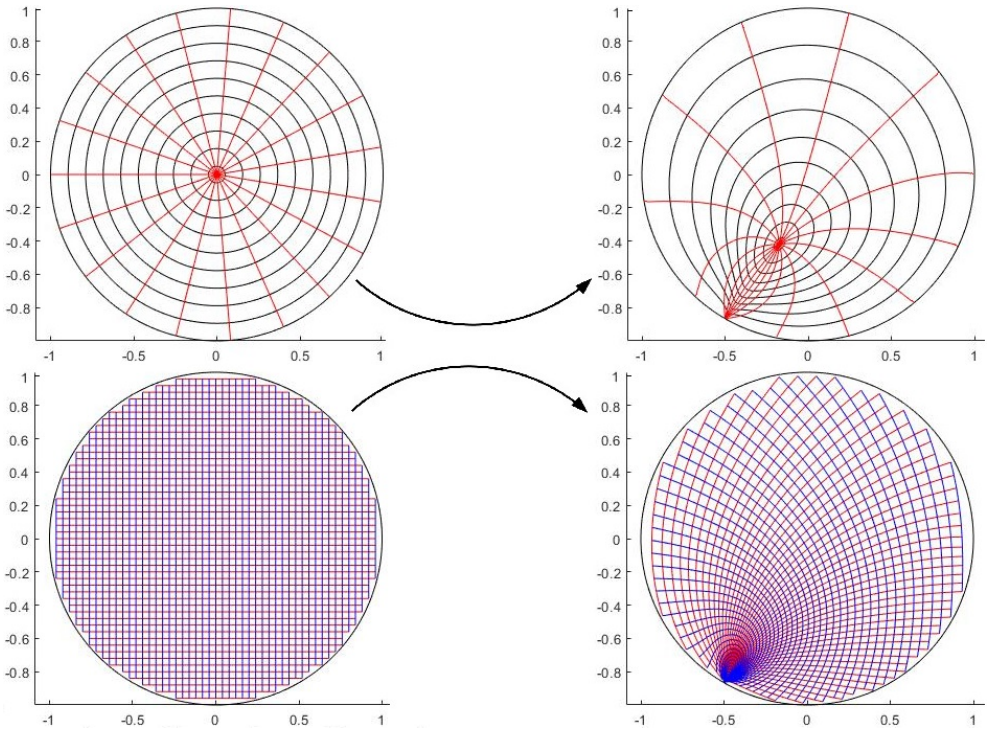


图 1：在 $\mathbb{D}$ 中，由 (3) 定义的 γ 的调和延拓下，同心圆和径向射线（上）的原像（左）与像（右），以及欧几里得网格（下）的原像与像。

很容易看出，该函数将区间 $[0,1]$ 连续地映射到自身，但不是单射，同时保持端点 $x=0$ 和 $x=1$ 不动。通过利用映射$\backsim x \longmapsto t=2\pi x$ 对其进行共轭，将 ϕ 转移到区间 $[0,2\pi]$，可得到一个具有相同性质的函数 $\psi \in C([0,2\pi])$。因此，映射

$$\gamma(e^{it}) = e^{i\tilde{\varphi}(t)} \tag{3}$$

对于 $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$，定义了一个将 $\partial\mathbb{D}$ 映到其自身的弱同胚，即 $\gamma \in \mathcal{H}^*(\partial\mathbb{D})$。因此，命题 *2.2* 给出的相应调和延拓产生了一个将 $\mathbb{D}$ 映到其自身的调和同胚 $\mathfrak{P}[\gamma]$。图 *1* 展示了该调和延拓的（近似）映射行为，并通过原点周围的同心圆、径向射线和欧几里得网格将其可视化。然而，映射 $\mathfrak{P}[\gamma]$ 并非拟共形，因为其边界函数（按构造即为 γ）不是单射；而若它是拟共形映射，则边界函数必然是单射。

注 2.6。
特别是，例 *2.5* 中讨论的调和延拓 $\mathfrak{P}[\gamma]$（其中 γ 由式 *(3)* 给出）提供了一个具体例子：它是单位圆盘上的保向同胚，但不是拟共形的，即

$$\mathfrak{P}[\gamma] \in \mathcal{H}^+(\mathbb{D}) \backslash Q(\mathbb{D}).$$

命题 *4.3* 将给出另一个此类映射的例子。

调和映射理论中的一个基本事实是，两个此类映射的复合未必仍是调和映射（参见 [6, 第 2] 页）。同样，单射调和映射的逆映射通常也不是调和映射，特殊情形除外，正如（参见 [6, 定理，第 145–148] 页）中所述。

命题 2.7 (Choquet–Deny)**.**
设 f 是定义在单连通域上的保向单射调和映射

$G \subseteq \mathbb{C}$，并设 f 既非解析映射，也非仿射映射。那么，逆映射 f^{-1} 是调和映射，当且仅当 f 具有以下形式

$$f(z) = \alpha\left(\beta z + 2i\,\mathrm{Arg}(\gamma - e^{-\beta z})\right) + \delta, \tag{4}$$

其中，α、β、γ、$\delta \in \mathbb{C}$ 为常数，且对所有 $z \in G$，$\alpha\beta\gamma \neq 0$ 和 $\left|e^{-\beta z}\right| < |\gamma|$。

这一结果与前述事实立即推出（另见 [15, 问题 10.1，第 311] 页）

定理 2.8。
$HQ(\mathbb{D})$ 关于映射的复合不构成半群。特别地，$HQ(\mathbb{D})$ 不是 $Q(\mathbb{D})$的子群。

3 $HQ(\mathbb{D})$的拓扑性质

本节旨在研究空间 $HQ(\mathbb{D})$ 的一些核心拓扑性质。由于这一情形在度量空间的背景下已得到解决，空间 $HQ(\mathbb{D})$ 中的许多拓扑概念都可以用收敛序列来表述。因此，关于调和映射的一致收敛序列的某些收敛结果将很有帮助，具体如下

命题 3.1。
设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是区域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个调和映射序列。*(i)* 若 $(f_n)_n$ 在 G 上局部一致收敛于某个函数 f，则 f 是调和函数（魏尔施特拉斯型定理，见 *[1,* 定理 *1.23*，第 *16]* 页）。*(ii)* 若进一步假设所有 f_n 都是单射，且序列 $(f_n)_n$ 在 G 上局部一致收敛于 f，则 f 要么是单射，要么是常值映射，要么 $f(G)$ 的像包含在一条直线上（赫尔维茨型定理，见 *[4,* 定理 *1.5]*）。

关于 $HQ(\mathbb{D})$ 某些拓扑性质的首个结果见

定理 3.2。
空间 $HQ(\mathbb{D})$ 是可分且非紧的。作为一个子空间，它在 $Q(\mathbb{D}$ 中是闭的 $)$.

证明。若 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq HQ(\mathbb{D})$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛到 $f \in Q(\mathbb{D})$，则由命题 3.1(i) 可知 f 是调和的，因此 $f \in HQ(\mathbb{D})$。所以，$HQ(\mathbb{D})$ 在 $Q(\mathbb{D})$ 中是闭的。
关于 $HQ(\mathbb{D})$ 的可分性，只需注意到，环境度量空间 $Q(\mathbb{D})$ 由 [2,定理 6，第 5] 页可知是可分的。因此，由可分度量空间的子空间也可分这一事实可得，$HQ(\mathbb{D})$ 具有所述的可分性。为说明 $HQ(\mathbb{D})$ 是非紧空间，反设 $HQ(\mathbb{D})$ 在一致拓扑下是紧的。由于 $\Sigma(\mathbb{D})$ 是完备的（见 [8, 定理 1，第 229] 页），空间 $\Sigma(\mathbb{D})$ 在环境空间 $HQ(\mathbb{D})$ 中是闭的。然而，这意味着 $\Sigma(\mathbb{D})$ 作为紧空间 $HQ(\mathbb{D})$ 的闭子空间也将是紧的，这与 $\Sigma(\mathbb{D})$ 的非紧性矛盾（见 [8, 定理 1，第 229] 页）。因此，$HQ(\mathbb{D})$ 不是紧的。

□

调和映射与全纯映射相互作用中的一个基本保持性是：全纯函数与调和函数复合后仍为调和函数（参见 [6, p. 2]）。这一事实用于证明

定理 3.3。
空间 $HQ(\mathbb{D})$ 在自身中稠密，即不含任何孤立点。

证明。空间 $Q(\mathbb{D})$ 是一个拓扑群（见 [2, 定理 3，第 3] 页），且不是离散的（[2, 定理 12，第8]页）；特别地，$\Sigma(\mathbb{D})$ 不是离散的（正如 [8, 第 230] 页所指出的）。因此，任取 $h \in HQ(\mathbb{D})$，并选取一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\Sigma(\mathbb{D})\backslash\{\mathrm{id}_{\mathbb{D}}\}$，且收敛到 $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 $g_n := h\circ f_n$ 都是调和拟共形的，因此 $(g_n)_n$ 是 $HQ(\mathbb{D})$ 中的一个序列。拓扑群 $Q(\mathbb{D})$ 中左乘的连续性给出 $d_{\sup}(g_n, h) = d_{\sup}(h\circ f_n, h) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$，这是由于 $d_{\sup}(f_n, \mathrm{id}_{\mathbb{D}}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$。

□

结合定理 3.2 和定理 3.3 可得

推论 3.4。
空间 HQ（$\mathbb{D}$）是完美的，即它在 Q（$\mathbb{D}$）中是闭的，且不含孤立点 $s.$

另一个需要研究的性质是 $HQ(\mathbb{D})$ 的道路连通性。在此背景下，以下积分算子将至关重要（参见 [14, 第 367] 页和 [15, 第 305]页）：

定义 3.5（希尔伯特变换）。
对于周期的 $\varphi \in L^1([0,2\pi])$ 以及 $x \in \mathbb{R}$，表达式

$$\mathfrak{H}(\varphi)(x) := -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{2\tan(t/2)} \, \mathrm{d}\, t \tag{5}$$

称为 φ 的（周期）希尔伯特变换。

注 3.6。
(i) 在傅里叶理论和三角级数中，希尔伯特变换发挥着重要作用。然而，在有关这一主题的浩瀚文献中，算子 $\mathfrak{H}$ 的定义并不完全一致。例如，另一种表述为

$$\mathfrak{H}(\varphi)(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t} \, \mathrm{d}\, t,$$

根据 $2\tan(t/2) - t = 0$（其中 $t \longrightarrow 0$），这种表述至少就存在性问题而言与 *(5)* 等价（参见*[15,* 第 *306]* 页和 *[17,* 第一卷第 *52]* 页）。

(ii) 希尔伯特变换的概念也出现在其他数学领域，例如 $\mathbb{C}$ 中的拟共形映射经典理论（参见 *[13,* 第 ***156–160]*** 页）以及 ***Teichm¨uller*** 空间（参见*[9,* 第 ***319–320]*** 页）。不过，在这些语境中，各种定义在某些方面存在显著差异的情况也同样存在。

由于 (5) 中被积函数的分母含有正切函数，因此会引出 $\mathfrak{H}$ 的存在性问题；相关问题已有部分解答（参见 [14, 第 367] 页和 [17, 第一卷第 52] 页）。

引理 3.7。
对于周期函数 $\varphi \in L^1([0,2\pi])$，几乎处处存在希尔伯特变换 $\mathfrak{H}(\varphi)(x)$。此外，如果 $\varphi'(x)$ 存在且在 $x \in \mathbb{R}$ 处有限，则 $\mathfrak{H}(\varphi)(x)$ 也存在。

现在将阐明希尔伯特变换 $\mathfrak{H}$ 与 $HQ(\mathbb{D})$ 之间的联系。根据 Rad´o– Kneser–Choquet 定理 2.2，每个映射 $\gamma = e^{i\varphi} \in \mathcal{H}^+(\partial\mathbb{D})$ 都通过泊松变换 $\mathfrak{P}[e^{i\varphi}]$ 定义了 $\mathbb{D}$ 的一个调和自同构（即使对于 $\gamma \in \mathcal{H}^*(\partial\mathbb{D})$，这一结论仍然成立；另见 [11,(1.3), 第 338] 页）。关于这种调和延拓是否为拟共形映射的问题，Pavlovi´c 在 [14]，中以刻画的方式给出了答案，并陈述于（见 [15, 定理 10.18，第 305] 页）

命题 3.8。
设 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ 是一个将单位圆盘映到其自身的保向调和同胚。那么，以下条件等价：

(i) f 是拟共形的，即 $f \in HQ(\mathbb{D})$；*(ii)* $f = \mathfrak{P}[e^{i\varphi}]$，其中函数 φ 具有以下性质：*(a)* $\varphi(t+2\pi) - \varphi(t) = 2\pi$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立；*(b)* φ 严格递增且双 ***Lipschitz***；*(c)* φ' 的希尔伯特变换属于 $L^\infty(\mathbb{R})$。

度量空间（X，d_X）与（Y，d_Y）之间的映射 g：$X \longrightarrow Y$ 称为双利普希茨 映射，若存在常数 $L \in [1, +\infty)$ 使得

$$\frac{1}{L} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(g(x_1), g(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)$$

对所有 $x_1,\ x_2 \in X$，从而细化了利普希茨连续映射的经典概念。根据推论 2.4 和命题 3.8，空间 $HQ(\mathbb{D})$ 中元素的如下刻画成立：调和（保向）同胚 $\mathfrak{P}[e^{i\varphi}]$ 从 $\mathbb{D}$ 到其自身是拟共形的，当且仅当相应的映射 φ 是

$$\mathcal{H}^+_{qc} := \left\{ \varphi \in C([0,2\pi]) \;\middle|\; \varphi \text{ is strictly increasing and bi–Lipschitz, } \varphi(2\pi)-\varphi(0)=2\pi,\ \mathfrak{H}(\widetilde{\varphi}') \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

这里，$\widetilde{\varphi}$ 表示通过以下方式将 $\varphi \in \mathcal{H}^+_{qc}$ 典范延拓到整个 $\mathbb{R}$

$$\widetilde{\varphi}(t+2k\pi) := \varphi(t) + 2k\pi$$

对于所有 $t \in [0,2\pi]$ 及每个 $k \in \mathbb{Z}$，由严格递增性的要求可知，每个映射$\varphi \in \mathcal{H}^+_{qc}$ 在 $[0,2\pi]$（内部）几乎处处可微。因此，根据构造，每个延拓映射$\widetilde{\varphi} \in C(\mathbb{R})$在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可微，且 $\widetilde{\varphi}'$ 为 2π–周期的。此外，假设 φ 是双 Lipschitz 的，可得 $\varphi' \in L^1([0,2\pi])$（见 [16, 定理 10，第 124]页）。因此，条件 $\mathfrak{H}(\widetilde{\varphi}') \in L^\infty(\mathbb{R})$是合理的。鉴于 $HQ(\mathbb{D})$的道路连通性，这里首先要指出的重要观察是

引理 3.9。
子集 $\mathcal{H}^+_{qc} \subsetneq C([0,2\pi])$ 是凸的。特别地，$\mathcal{H}^+_{qc}$ 在巴拿赫空间 $C([0,2\pi])$ 中是路径连通的。

证明。设 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}^+_{qc}$, $\lambda \in [0,1]$ 并考虑映射 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$。

(i) **单调性：** 对于 $t, t' \in [0,2\pi]$ 满足 $t < t'$，有

$$\lambda\varphi_1(t) + (1-\lambda)\varphi_2(t) < \lambda\varphi_1(t') + (1-\lambda)\varphi_2(t')$$

由于 $\lambda,\ (1-\lambda) \geq 0$，因此 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ 严格递增。

(ii) **双利普希茨性质：** 设 $t,\ t' \in [0,2\pi]$ 和 $L := \max\{L_1, L_2\}$，其中 L_j 表示 φ_j的双利普希茨常数，$j = 1, 2$。于是，一方面，根据三角不等式，有

$$\begin{aligned}|\lambda\varphi_1(t) + (1-\lambda)\varphi_2(t) - \lambda\varphi_1(t') - (1-\lambda)\varphi_2(t')| &\leq \lambda\,|\varphi_1(t) - \varphi_1(t')| + (1-\lambda)\,|\varphi_2(t) - \varphi_2(t')| \\ &\leq \lambda L|t-t'| + (1-\lambda)L|t-t'| = L|t-t'|.\end{aligned}$$

因此 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ 是利普希茨连续的，其利普希茨常数为 L。不妨设 $t > t'$，另一方面，有（回顾 (i) 中 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ 严格递增）

$$\begin{aligned}\lambda\varphi_1(t) + (1-\lambda)\varphi_2(t) - \lambda\varphi_1(t') - (1-\lambda)\varphi_2(t') &= \lambda(\varphi_1(t) - \varphi_1(t')) + (1-\lambda)(\varphi_2(t) - \varphi_2(t')) \\ &\geq \lambda\frac{1}{L}(t-t') + (1-\lambda)\frac{1}{L}(t-t') = \frac{1}{L}(t-t').\end{aligned}$$

最后，交换 t 和 t' 的角色可得，$\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ 在 $[0,2\pi]$上是双利普希茨连续的，其双利普希茨常数为 L。

(iii) **像区间长度为 2π：** 它是

$$\begin{aligned}&\lambda\varphi_1(2\pi) + (1-\lambda)\varphi_2(2\pi) - (\lambda\varphi_1(0) + (1-\lambda)\varphi_2(0)) \\ &= \lambda(\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)) + (1-\lambda)(\varphi_2(2\pi) - \varphi_2(0)) \\ &= \lambda 2\pi + (1-\lambda)2\pi = 2\pi.\end{aligned}$$

(iv) **希尔伯特变换：** 首先，根据 (i)，$\lambda\widetilde{\varphi_1} + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}$ 在 $\mathbb{R}$ 中几乎处处可微，且

$$(\lambda\widetilde{\varphi_1} + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2})' = \lambda\widetilde{\varphi_1}' + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}'.$$

函数 $\lambda\varphi_1' + (1-\lambda)\varphi_2'$ 作为此类元素的线性组合，包含于 $L^1([0,2\pi])$ 中。根据定义 3.5，$\lambda\widetilde{\varphi_1}' + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_1}'$ 的希尔伯特变换为

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(\lambda\widetilde{\varphi_1}' + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}')(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\pi} \frac{\lambda\widetilde{\varphi_1}'(x+t) + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}'(x+t) - \lambda\widetilde{\varphi_1}'(x-t) - (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}'(x-t)}{2\tan(t/2)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\pi} \frac{\lambda(\widetilde{\varphi_1}'(x+t) - \widetilde{\varphi_1}'(x-t)) + (1-\lambda)(\widetilde{\varphi_2}'(x+t) - \widetilde{\varphi_2}'(x-t))}{2\tan(t/2)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{H}^+_{qc}$，根据集合 $\mathcal{H}^+_{qc}$ 的定义，有 $\mathfrak{H}(\widetilde{\varphi_1}')\ \mathfrak{H}(\widetilde{\varphi_2}') \in L^\infty(\mathbb{R})$，因此利用（广义）积分的线性性质，前一个等式可改写为

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(\lambda\widetilde{\varphi_1}' + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}')(x) &= -\frac{\lambda}{\pi}\int_{0^+}^{\pi}\frac{\widetilde{\varphi_1}'(x+t)-\widetilde{\varphi_2}'(x-t)}{2\tan(t/2)}\,\mathrm{d}t - \frac{1-\lambda}{\pi}\int_{0^+}^{\pi}\frac{\widetilde{\varphi_2}'(x+t)-\widetilde{\varphi_2}'(x-t)}{2\tan(t/2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\mathfrak{H}(\widetilde{\varphi_1}')(x) + (1-\lambda)\mathfrak{H}(\widetilde{\varphi_2}')(x).\end{aligned}$$

由于 $L^\infty(\mathbb{R})$ 是一个 $\mathbb{R}$–向量空间，前一个方程得到 $\mathfrak{H}(\lambda\widetilde{\varphi_1}' + (1-\lambda)\widetilde{\varphi_2}') \in L^\infty(\mathbb{R})$。
总而言之，对于每个 λ，映射 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ 都包含于 $\mathcal{H}^+_{qc}$ 中，因此 $\mathcal{H}^+_{qc}$ 是凸集。于是，作为赋范向量空间 $C([0,2\pi])$ 的子集，$\mathcal{H}^+_{qc}$ 也是道路连通的。 □
继续研究，现在集合 $\mathcal{H}^+_{qc}$ 引出了对映射的考察

$$\Lambda : \mathcal{H}^+_{qc} \longrightarrow HQ(\mathbb{D}),\ \varphi \longmapsto \left(\mathbb{D} \ni z \longmapsto \Lambda(\varphi)(z) := \mathfrak{P}[e^{i\varphi}](z)\right). \tag{6}$$

根据推论 2.4 和 Pavlovi´c 的命题 3.8，映射 Λ 是满射。赋予（6）中的相关集合以各自的度量结构后，可得

定理 3.10。
该映射 $\Lambda : (\mathcal{H}^+_{qc}, d_{\sup}) \longrightarrow (HQ(\mathbb{D})\ d_{\sup})$ 如式 (6) 所定义，具有连续性且是满射.

证明。 Λ 是满射这一事实已在上文提及。因此，设 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{H}^+_{qc}$ 中收敛于 $\varphi \in \mathcal{H}^+_{qc}$。命题 3.8 中关于 $HQ(\mathbb{D})$ 元素的刻画表明，$(\Lambda(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$是 $HQ(\mathbb{D})$ 中的一个序列，并且 $\Lambda(\varphi) \in HQ(\mathbb{D})$。特别地，$\Lambda(\varphi_n)$ 和 $\Lambda(\varphi)$ 是 $\mathbb{D}$的调和拟共形自同构，在$\mathbb{D}$ 上连续，且分别与 $e^{i\varphi_n}$ 和 $e^{i\varphi}$ 在 $\partial\mathbb{D}$上重合（另见 [6, 第 12] 页）。因此，由于 $\Lambda(\varphi_n) - \Lambda(\varphi)$ 也是调和映射，调和映射的最大值原理适用，从而得到

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}}|\Lambda(\varphi_n)(z) - \Lambda(\varphi)(z)| &= \sup_{z\in\partial\mathbb{D}}|\Lambda(\varphi_n)(z) - \Lambda(\varphi)(z)|\\ &= \sup_{t\in[0,2\pi]}\left|e^{i\varphi_n(t)} - e^{i\varphi(t)}\right|\\ &\le \sup_{t\in[0,2\pi]}|\varphi_n(t) - \varphi(t)| = d_{\sup}(\varphi_n,\varphi).\end{aligned}$$

在估计中，对 $x,\ y \in \mathbb{R}$ 使用了初等不等式 $|e^{ix} - e^{iy}| \le |x-y|$。当 $n\to\infty$时，最后一个表达式趋于零，这证明了 Λ的连续性。 □

最后，结合引理 3.9 和定理 3.10 的结论可得

定理 3.11。
空间 $HQ(\mathbb{D})$ 是道路连通的。

4 不完 $HQ(\mathbb{D})$的不完备性：陈述、辅助结果与证明 f

本节将证明以下陈述:

定理 4.1。
空间 $HQ(\mathbb{D})$ 不完备。

为证明这一论断，下面汇集了一些有用的结果。定理 4.1 的证明主要思路是构造一列从区间 $[0,1]$ 到其自身的同胚映射，使其一致地收敛到**康托函数** $\mathcal{C}$：$[0,1] \longrightarrow [0,1]$；关于此函数的基础信息，参见[5] 和 [16, 第 2.7 节，第 49–53] 页。Bo˘zin 和 Mateljevi´c 的一项结果表明，通过泊松变换，映射 $\mathcal{C}$ 的一个经过适当修改的变体会导出单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到其自身的调和同胚，该同胚并非拟共形（见命题 4.3）。然而，这个调和同胚

将会看到，它是 $\mathbb{D}$ 上一列调和拟共形自同构的一致极限，因此这意味着 $HQ(\mathbb{D})$并不完备。

首先，陈述一个关于康托函数的逼近过程 $\mathcal{C}$ ，该过程以某个递归定义的序列为基础，且将起到核心作用（见 [5, 命题 4.2，第 9] 页）：

引理 4.2。
设 $B([0,1])$ 表示定义在 $[0,1]$ 上的有界实值函数所构成的巴拿赫空间。康托函数 $\mathcal{C}$ 是 $B([0,1])$ 中满足下式的唯一元素：

$$\mathcal{C}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathcal{C}(3x), & 0\le x\le\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathcal{C}(3x-2), & \frac{2}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

此外，对于任意的 $\psi_0\in B([0,1])$，由下式定义的序列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$：

$$\psi_{n+1}(x):=\begin{cases}\frac{1}{2}\psi_n(3x), & 0\le x\le\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\psi_n(3x-2), & \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}\tag{7}$$

当 $n\in\mathbb{N}_0$ 时，在 $[0,1]$ 上一致地收敛到 $\mathcal{C}$。

图2展示了利用式 (7) 给出的递归定义的序列对康托函数进行的逼近。基本上，逼近过程和映射 ψ_n 的核心思想是，将初始映射 ψ_0 “复制”并“按比例缩放后复制”，随着指标增大，越来越多次地将其添加到 ψ_n 的图像中。图2右侧的图示呈现了这一过程：在第一步（蓝色）中，可以看到按比例缩放后的初始映射 ψ_0 出现了两次，分别位于区间 $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 上。经过第二次迭代（橙色）后，映射 ψ_0 以缩放形式出现了四次。最后，在第三步（黄色）中，经过适当缩放的 ψ_0 出现了八次。特别是，由此显而易见，关于 ψ_n 的所有连续性和可微性问题，都完全取决于初始映射 ψ_0 在起始区间的边界点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的行为（以及可能存在的导数）。

此外，引理 4.2 中所述的逼近部分以及关于 $\mathcal{C}$ 的相关唯一性，是基于巴拿赫不动点定理的（见 [16, 第 216] 页）。下述命题包含了 Bo˘zin/Mateljevi´c 关于一个非拟共形调和同胚的相关结果（见 [3,例 3.2，第 29–30]页）：

命题 4.3。
对于 $t\in[0,2\pi]$，定义 $\varphi_{\mathcal{C}}(t):=\pi(\mathcal{C}(\frac{t}{2\pi})+\frac{t}{2\pi})$ 以及 $\gamma_{\mathcal{C}}(t):=e^{i\varphi_{\mathcal{C}}(t)}$。那么，函数 $h_{\mathcal{C}}:=\mathfrak{P}[\gamma_{\mathcal{C}}]$ 是一个将 $\mathbb{D}$ 映 *onto itself* 的调和同胚，但它不是拟共形的。

现在一切准备就绪，可以证明定理 4.1 的论断：

定理 *4.1* 的证明。考虑多项式函数

$$\psi_0:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\psi_0(x):=6x^5-15x^4+10x^3$$

其一阶和二阶导数满足

$$\psi_0'(0)=\psi_0'(1)=0=\psi_0''(0)=\psi_0''(1).\tag{8}$$

此外，ψ_0 在 (0,1) 上严格递增，并固定边界点——换言之，ψ_0 将[0,1] 同胚地映射到自身。引理 4.2 表明，通过 (7) 定义的相应序列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 在 $[0,1]$ 上一致地收敛到康托函数 $\mathcal{C}$；根据构造，由于 (8)，对于每个 $n\in\mathbb{N}_0$，它都是 $\psi_n\in C^2([0,1])$。通过将 ψ_n 转移到区间 $[0,2\pi]$，借助

$$\varphi_n(t):=\pi\left(\psi_n\left(\frac{t}{2\pi}\right)+\frac{t}{2\pi}\right),\ t\in[0,2\pi],\tag{9}$$

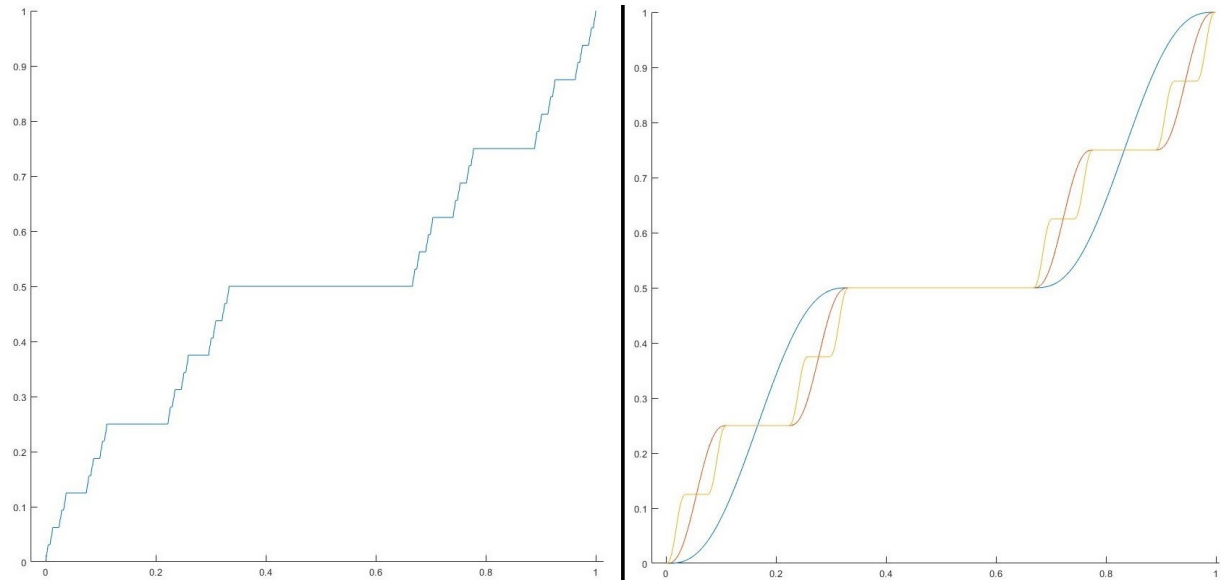


图2：左：使用引理 4.2 中描述的递归定义的序列 $(\psi_n)_n$，对康托函数 $\mathcal{C}$ 进行近似。初始函数为 $\psi_0(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$，其中 $x \in [0,1]$；对于该近似，选取了指标值 $n = 15$。右：近似序列 $(\psi_n)_n$中的前三个函数： ψ_1 为蓝色， ψ_2 为橙色， ψ_3 为黄色。

得到一个由 C^2– $[0, 2\pi]$ 到其自身的同胚序列 $(\varphi_n)_n$。因此，这个序列 $(\varphi_n)_n$ 显然在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛于命题 4.3 中定义的映射 $\varphi_{\mathcal{C}}$。下一步，将映射φ_n 和 $\varphi_{\mathcal{C}}$ 扩展到整个 $\mathbb{R}$，方法是令

$$\varphi_n(t + 2k\pi) := \varphi_n(t) + 2k\pi \tag{10}$$

对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $t \in [0, 2\pi]$，得到序列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq C^2(\mathbb{R})$；同样，映射 ψ_n 和 $\mathcal{C}$ 也以相同方式扩展（扩展后的映射仍用相同字母表示）。特别地，φ_n 可微，且对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\varphi_n'(t + 2k\pi) = \varphi_n'(t)$，这是由构造方式决定的；也就是说， φ_n' （以及 φ_n''）是连续的 2π–周期映射。将这些映射提升到单位圆上

$$\gamma_n(e^{it}) := e^{i\varphi_n(t)}$$

对于 $t \in [0, 2\pi]$，每个 $n \in \mathbb{N}$ 都会产生将 $\partial\mathbb{D}$ 映到其自身的保向同胚，因此，根据 Rad´o–Kneser–Choquet 定理 2.2，调和延拓 $\mathfrak{P}[\gamma_n]$ 是将 $\mathbb{D}$ 映到其自身的（保向）调和同胚。为了直观展示这一过程，并说明一种具体的此类映射，图3展示了调和单位圆盘自同构 $\mathfrak{P}[\gamma_4]$ 的映射行为。

此外，根据 Pavlovi´c 在命题 3.8 中给出的刻画结果，映射 $\mathfrak{P}[\gamma_n]$ 实际上定义了 $\mathbb{D}$ 的拟共形自同构，证明如下：

根据构造，对所有 $t \in \mathbb{R}$， $\varphi_n \in C^2(\mathbb{R})$ 都严格递增，且 $\varphi_n(t + 2\pi) = \varphi_n(t) + 2\pi$，见（9）和（10）。此外，作为 C^2–同胚，每个映射 φ_n 都是利普希茨连续的；根据（8），相应的逆映射 φ_n^{-1} 也按构造满足 C^2，因此同样是利普希茨连续的。因此，映射 φ_n 是双利普希茨的。于是，根据命题 3.8(ii)，需要验证希尔伯特变换条件 (c)。因此，令 $x \in \mathbb{R}$，则有

$$|\varphi_n'(x + t) - \varphi_n'(x - t)| \le L_n \cdot |x + t - (x - t)| = 2L_n|t|,$$

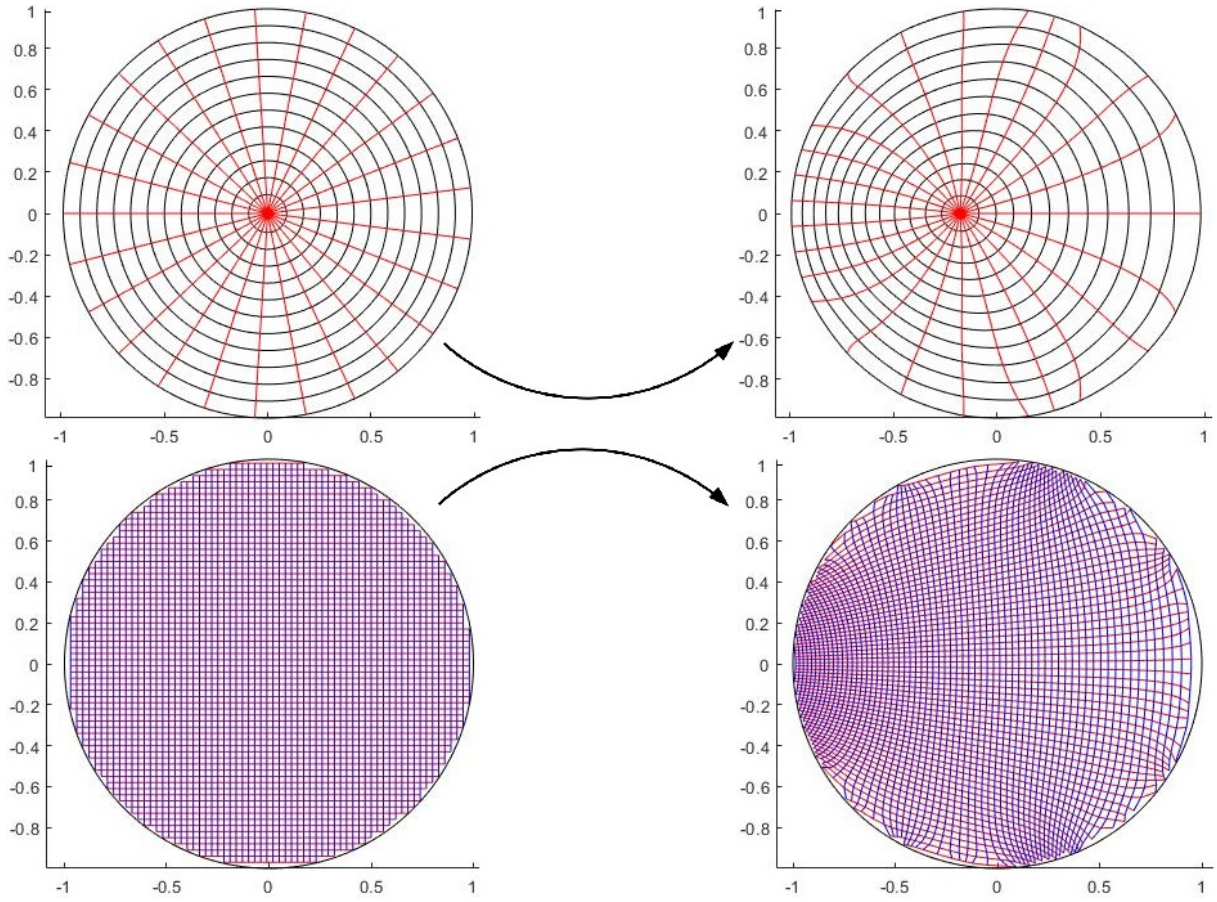


图3：左侧：单位圆盘中同心圆和径向射线（上方）以及欧几里得网格（下方）的原像。右侧：在 $\mathbb{D}$ 中，同心圆、径向射线和欧几里得网格在映射 $\mathfrak{P}[\gamma_4]$下的像。

由于 $\varphi_n \in C^2(\mathbb{R})$，因此 φ_n' 在 $\mathbb{R}$ 上是利普希茨连续的，利普希茨常数为 $L_n \in \mathbb{R}^+$。由此得到

$$\left| \int_{0^+}^{\pi} \frac{\varphi_n'(x+t) - \varphi_n'(x-t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{0^+}^{\pi} \frac{|\varphi_n'(x+t) - \varphi_n'(x-t)|}{t} \mathrm{d}t \leq \int_{0^+}^{\pi} \frac{2L_n t}{t} \mathrm{d}t = 2\pi L_n < +\infty,$$

现在，注释 3.6(i) 表明，对于 φ_n，$n \in \mathbb{N}_0$，$\mathfrak{H}(\varphi_n')$ 是（本质）有界的（注意，由于 φ_n' 和 φ_n'' 在 $\mathbb{R}$ 上是周期且连续的，这一结论也可由引理 3.7 得出）。因此，命题 3.8 表明，映射 $\mathfrak{P}[\gamma_n]$ 是 $\mathbb{D}$ 的拟共形自同构。

最后，将证明映射 $\mathfrak{P}[\gamma_n]$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于命题 4.3 中所讨论的非拟共形映射 $h_{\mathcal{C}}$；这一证明基本上沿用定理 3.10 的证明思路：将调和函数的最大值原理应用于 $\mathfrak{P}[\gamma_n] - h_{\mathcal{C}}$，得到

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |\mathfrak{P}[\gamma_n](z) - h_{\mathcal{C}}(z)| = \max_{z \in \partial\mathbb{D}} |\mathfrak{P}[\gamma_n](z) - \mathfrak{P}[\gamma_{\mathcal{C}}](z)| = \max_{t \in [0,2\pi]} \left| e^{i\varphi_n(t)} - e^{i\varphi_{\mathcal{C}}(t)} \right| \leq \max_{t \in [0,2\pi]} |\varphi_n(t) - \varphi_{\mathcal{C}}(t)| .$$

由于 φ_n 在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛到 φ，结论得证：序列 $(\mathfrak{P}[\gamma_n])_{n \in \mathbb{N}_0}$ 在 $HQ(\mathbb{D})$ 中一致收敛到 $h_{\mathcal{C}} \notin HQ(\mathbb{D})$，这表明空间 $HQ(\mathbb{D})$ 不完备。 □

参考文献

[1] AXLER, S.、BOURDON, P.、RAMEY, W.：《调和函数论》，第2版。《数学研究生教材》第137卷。Springer–Verlag New York，2001年。[2] BIERSACK, F.、LAUF, W.：拟共形自同构群的拓扑性质，《分析学杂志》，待发表。[3] BOˇZIN, V.、MATELJEVI ´C, M.：与 HQC 映射理论相关的一些反例。《Filomat》24(4)，第25–34页（2010年）。[4] BSHOUTY, D.、HENGARTNER, W.：平面上的单叶调和映射。《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学年刊》，A辑——数学，48(3)，第12–42页（1994年）。[5] DOVGOSHEY, O.、MARTIO, O.、RYAZANOV, V.、VUORINEN, M.：康托函数。《数学论丛》24(1)，第1–37页（2006年）。[6] DUREN, P.：平面上的调和映射。《剑桥数学丛书》第156号。剑桥大学出版社，2004年。[7] DUREN, P.、SCHOBER, G.：调和映射到凸区域的变分方法。《复变数》9(2–3)，第153–168页（1987年）。.[8] GAIER, D.：平面区域共形自映射的空间。《数学杂志》187(2)，第227–257页（1984年）。[9] GARDINER, F.P.、LAKIC, N.：拟共形 Teichmüller 理论。《美国数学学会数学综述与专著》第76卷。美国数学学会，2000年。[10]KALAJ, D.：约旦区域之间的拟共形映射与调和映射。《数学杂志》260(2)，第237–252页（2008年）。[11] KRZYZ, J.G.、NOWAK, M.：单位圆盘的调和自同构。《计算与应用数学杂志》105(1–2)，第337–346页（1999年）。[12] LEHTO, O.：单叶函数与 Teichmüller 空间。《数学研究生教材》第109卷。Springer–Verlag New York，1987年。[13] LEHTO, O.、VIRTANEN, K.I.：平面上的拟共形映射，第2版。《数学科学基础丛书》第126卷。Springer–Verlag 柏林、海德堡、纽约，1973年。

[14] PAVLOVI´C, M.：单位圆盘的调和拟共形同胚下的边界对应。《Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica》第27卷，第365–372页（2002年）。[15] PAVLOVI´C, M.：单位圆盘上的函数类：导论。《德格鲁伊特数学研究》第52卷。Walter de Gruyter，柏林/波士顿，2014年。[16] ROYDEN, H.L.、FITZPATRICK, P.M.：实分析，第4版。Prentice Hall，2010年。[17] ZYGMUND, A.：三角级数，第3版，第一、二卷合订本，R. Fefferman 作序。《剑桥数学文库》。剑桥大学出版社，2002年。