arXiv:2304.04001v1 [math.DS] 8 Apr 2023

莫比乌斯变换的动力系统：实数、 p-进数与复变量

E.T. ALIEV，U.A. ROZIKOV

摘要。本文研究定义在三个域上的函数 $f(x) = \frac{x+a}{bx+c}$（其中 $b \neq 0, c \neq ab$, $x \neq -\frac{c}{b}$ 分别属于实数、 p-进数和复数）。我们分别研究该函数在每个域上生成的动力系统，并给出一些比较性评述。

- 对于实变量情形，我们证明，该函数的实动力系统取决于参数 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$。具体而言，我们将参数分为三类，并证明：对于第一类参数，轨道有定义的每个点都是 f 的周期点；对于第二类参数，在 f 下的任意轨道都收敛到某个不动点（不动点至多有两个）；对于第三类参数，任意轨道在 $\mathbb{R}$ 中稠密。

- 对于 p-进变量，我们回顾函数 f 的动力系统的已知结果。随后，我们采用一种近期提出的方法，为这些结果给出简明的新证明，并证明一些与不收敛轨道有关的新结论。
- 对于复变量，我们回顾已知结果。

数学主题分类（2010年）。46S10, 12J12, 11S99,30D05,54H20.

关键词。有理动力系统；不动点；不变集；西格尔圆盘；复 p-进域。

1. 引言

由有理函数生成的动力系统出现在自然科学的若干问题中（例如参见 [4], [16], [17]及其中的参考文献）。根据生物学或物理系统中所研究问题的性质，有理函数可以定义在实数域、 p-进数域或复数域上。

本文研究上述各个域上的有理函数 $f(x) = \frac{x+a}{bx+c}$，其中 $b \neq 0$, $c \neq ab$, $x \neq -\frac{c}{b}$。主要目标是研究该函数对域中每个点的迭代。回顾一下，对某一点进行函数迭代所形成的序列称为离散时间动力系统，或该点的轨道。动力系统理论的主要问题是描述每条轨道的所有极限点构成的集合。

在复数域上，这个问题已得到充分研究（例如参见 [4]）。据我们所知，目前尚无论文对实数域上的 f 动力系统进行全面分析。本文将对这类实动力系统进行全面研究。

在 [3], [2], [5], [9], [10] 中，介绍了 p-adic 动力系统在生物系统和物理系统中的一些应用。研究 p-adic 吉布斯测度 [6], [8], [12], [13] 时会出现有理 p-adic 动力系统。

本文研究了 [14] 在复p-进域 $\mathbb{C}_p$ 上经过有理函数 f 作用后的轨道行为。文中描述了西格尔圆盘和吸引子盆。

本文给出了这些结果的简明新证明。此外，我们还给出了轨道不收敛时极限点相关的一些新结果。此外，我们简要回顾了定义在复数集上的 f 动力系统。

2. 预备知识

下面给出与动力系统相关的主要定义和问题（见 [7],[18,第 1] 章）。

2.1. 动力系统。 设 f 是定义在拓扑空间 X 上的函数。记作 $f^n(x)$，表示将 f 迭代应用于 $x \in X$ 共 n 次。

设 A 是 X 的一个子集。那么 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$。

如果 $f(A) \subset A$，则称 A 为函数 f 下的不变集。

点 $x \in X$ 称为 f 的不动点，当且仅当 $f(x) = x$.

点 $x \in X$ 是 f 的周期为 m 的周期点，当且仅当 $f^m(x) = x$. 使 $f^m(x) = x$ 成立的最小正 m 称为 x.的最小周期

我们将所有周期为 m （不一定是最小周期）的周期点构成的集合记为 $\mathrm{Per}_m(f)$，将所有不动点构成的集合记为 $\mathrm{Fix}(f)$。

对于给定的拓扑空间 X、 $x^{(0)} \in X$ 和 $f : X \to X$ 离散时间动力系统定义为

$$x^{(0)}, \quad x^{(1)} = f(x^{(0)}), \quad x^{(2)} = f^2(x^{(0)}), \quad x^{(3)} = f^3(x^{(0)}), \dots \tag{2.1}$$

主要问题： 对于给定的动力系统，问题在于描述任意给定 $x^{(0)}$对应的 $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ 的极限点。

本文目的： 本文关注由莫比乌斯变换生成的动力系统，该变换是形如以下形式的有理映射

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad c - ab \neq 0.$$

在这里，对于 X ，我们考虑三种情况：实数域、p进数和复数。针对每种情况，我们汇集关于莫比乌斯变换动力系统的已知结果，并给出我们的新结果。此外，我们还对各种方法和结果进行了一些比较。

2.2. p进数。 设 $\mathbb{Q}$为有理数域。正整数 n 和 m 的最大公约数记为 (n, m)。对于一个固定的素数 p，每个有理数 $x \neq 0$ 都可以表示为 $x = p^r \frac{n}{m}$，其中r、$n \in \mathbb{Z}$、 m为正整数，$(p, n) = 1$，$(p, m) = 1$。

x 的 p进范数定义为

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{for } x \neq 0, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

它具有以下性质：

1) $|x|_p \geq 0$ 和 $|x|_p = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

2) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$, 3) 强三角不等式

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

更准确地说

3.1) 若 $|x|_p \neq |y|_p$ 则 $|x+y|_p =$ 最大$\{|x|_p, |y|_p\}$,
3.2) 如果 $|x|_p = |y|_p$、 $p \neq 2$，则 $|x+y|_p \leq |x|_p$, 且 $|x+y|_2 \leq \frac{1}{2}|x|_2$。

关于 p-进范数对 $\mathbb{Q}$ 的完备化定义了 p-进域，记作 $\mathbb{Q}_p$ （见 [11]）。

$\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包记作 $\mathbb{C}_p$ ，称为复 p进数。注意（见 [11]）， $\mathbb{C}_p$ 是代数闭域, 是 $\mathbb{Q}_p$上的无限维向量空间。

对于任意 $a \in \mathbb{C}_p$ 和 $r > 0$ ，记作

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p < r\}, \quad V_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p \leq r\},$$
$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p = r\}.$$

2.3. **动力系统定义于** $\mathbb{C}_p$. 为定义一个动力系统，我们考虑 $X = \mathbb{C}_p$和一个函数 f: $x \in U \to f(x) \in U$ (参见 [15])。

不动点 x_0 被称为一个 吸引子 ，如果存在一个邻域 $U(x_0)$，属于 x_0，使得对于所有点 $x \in U(x_0)$，都有 $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$。如果 x_0是一个吸引子，那么它的吸引域 是

$$\mathcal{A}(x_0) = \{x \in \mathbb{C}_p : \ f^n(x) \to x_0, \ n \to \infty\}.$$

若存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得对 $x \in U(x_0)$有 $|f(x) - x_0|_p > |x - x_0|_p$， $x \neq x_0$，则称不动点 x_0 为排斥子 。

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的不动点。令 $\lambda = f'(x_0)$。若 $0 < |\lambda|_p < 1$，则点 x_0 是吸引的；若 $|\lambda|_p = 1$，则为 中性的；若 $|\lambda|_p > 1$，则为排斥的。

如果球 $U_r(x_0)$ 中的每个球面 $S_\rho(x_0)$、 $\rho < r$ 都是 $f(x)$ 的不变球面，即对所有 $n = 0$，1、2.....，均有 $f^n(x) \in S_\rho(x_0)$，则称该球为西格尔圆盘。所有以 x_0 为中心的西格尔圆盘的并集称为最大西格尔圆盘，记作$SI(x_0)$。

3. Dynamics on the set of real numbers

本节考虑与函数f 相关联的实动力系统： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0, \quad ab - c \neq 0, \tag{3.1}$$

其中 $x \neq \hat{} x = -\frac{c}{b}$。

引理 1. 由 *(3.1)* 给出的函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{\hat{} x\}$ 上可逆。

证明. 由 $ab - c \neq 0$ 可知，对于任意 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\hat{} x\}$，都有 $f(x) \neq \frac{1}{b}$。因此， f 的逆函数为

$$f^{-1}(x) = \frac{a - cx}{bx - 1}, \quad x \neq \frac{1}{b}.$$

□

引入 f 的“坏”点集:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \cup 0, f^n(x) = \hat{x}\}, \tag{3.2}$$

由引理 1 可得

$$\mathcal{P} = \{f^{-n}(\hat{x}) : n \in \mathbb{N} \cup 0\}. \tag{3.3}$$

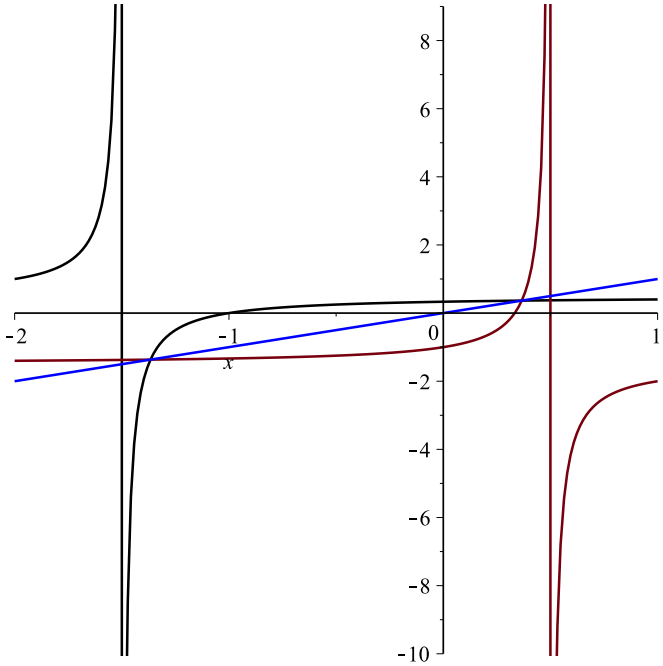

图1.在情形 $a=1$、 $b=2$、 $c=3$下，函数 $f(x)$（黑色）、 $f^{-1}(x)$（红色）和 $y=x$ （蓝色）的图像。

若 $(c-1)^2+4ab\geq 0$ 我们定义

$$x_1=\frac{1-c+\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2b},\quad x_2=\frac{1-c-\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2b}. \tag{3.4}$$

注意，函数 (3.1) 的不动点集合为

$$\mathrm{Fix}(f)=\{x:f(x)=x\}=\begin{cases}\{x_1,x_2\}, & \text{if } (c-1)^2+4ab>0\\ \{x_1\}, & \text{if } (c-1)^2+4ab=0\\ \varnothing, & \text{if } (c-1)^2+4ab<0.\end{cases}$$

为了研究（3.1）的动力系统（2.1），我们使用以下关于 $f^n(x),n\geq 1$ 的公式（参见[1]）：

$$f^n(x)=\frac{1}{b}+\frac{ab-c}{b}\cdot\begin{cases}\frac{(bx-1+\alpha)\alpha^{n-1}-(bx-1+\beta)\beta^{n-1}}{(bx-1+\alpha)\alpha^{n}-(bx-1+\beta)\beta^{n}}, & \text{if } \alpha\neq\beta\\ \frac{(bx-1)(n-1)+n\alpha}{\alpha[(bx-1)n+(n+1)\alpha]}, & \text{if } \alpha=\beta,\end{cases} \tag{3.5}$$

其中

$$\alpha\equiv\alpha(a,b,c)=\frac{1+c+\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2},\quad \beta\equiv\beta(a,b,c)=\frac{1+c-\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2}. \tag{3.6}$$

备注 1。 注意，公式（*3.5*）可以通过数学归纳法证明。此外，即使在 $(c-1)^2+4ab<0$ 的情形下，它也成立。

[1]https://en.wikipedia.org/wiki/Iterated_function

对于 $q \geq 1$ 表示

$$K_q \equiv K_q(a,b,c) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{q-j-1}\beta^j. \tag{3.7}$$

下面给出一些 K_q 的例子:

$$K_q \equiv K_q(a,b,c) = \begin{cases} 1 \text{ if } q=1 \\ 1+c \text{ if } q=2 \\ 1+c+c^2+ab, \text{ if } q=3 \\ (1+c)(1+2ab+c^2) \text{ if } q=4. \end{cases}$$

定理 1。 设函数 f 由满足 *(3.1)* 的参数 $(a、b、c) \in \mathbb{R}^3$ 给出。

- 如果 $K_q(a,b,c) \neq 0$ 那么 每个$q(f) \setminus \text{Fix}(f) = \emptyset$.
- 如果 $K_q(a,b,c) = 0$，那么任意 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{P}$ 都是 q-周期的，即 $\text{Per}q(f) = \mathbb{R} \setminus \mathcal{P}$。

证明。A q-周期点的 f （其中 $q \geq 1$）是方程 $f^q(x) = x$的解。由于 $f^q(x)$ 具有如下形式（见 (3.5)）：

$$f^q(x) = \frac{a_q x + b_q}{c_q x + d_q}$$

我们有

$$f^q(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad P_{2,q}(x) = c_q x^2 + (d_q - a_q)x - b_q = 0.$$

注意， $f(x) = x$（即不动点）的任意一个解也是 $f^q(x) = x$的解。因此, $P_{2,\ 1}(x) = bx^2+(c-1)x-a$ 整除 $P_{2,\ q}(x)$, 即存在 $K_q(a,b,c)$（与 x无关），使得

$$P_{2,q}(x) = K_q(a,b,c)P_{2,1}(x). \tag{3.8}$$

因此，存在一个不同于不动点的 q-周期点，当且仅当$K_q(a,b,c) = 0$。此外，若 $K_q(a,b,c) = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{P}$，都有 $P_{2,\ q}(x) = 0$。现在只需证明 K_q 具有形式（3.7）。由（3.8）可得

$$c_q = bK_q, \quad d_q - a_q = (c-1)K_q, \quad b_q = aK_q \tag{3.9}$$

此外，对于 f^{q+1}，我们有

$$f^{q+1}(x) = \frac{a_{q+1}x + b_{q+1}}{c_{q+1}x + d_{q+1}} = \frac{(a_q + bb_q)x + (aa_q + cb_q)}{(c_q + bd_q)x + (ac_q + cd_q)}.$$

因此

$$\begin{aligned} a_{q+1} &= a_q + bb_q \\ b_{q+1} &= aa_q + cb_q \\ c_{q+1} &= c_q + bd_q \\ d_{q+1} &= ac_q + cd_q, \end{aligned} \tag{3.10}$$

初始条件为 $a_1 = 1$、 $b_1 = a$、 $c_1 = b$ 和 $d_1 = c$。

根据（3.10）中的（3.9），我们得到

$$K_{q+1} = K_q + d_q, \quad d_{q+1} = abK_q + cd_q. \tag{3.11}$$

由 (3.11) 的第一个方程求出 d_q，并将其代入第二个方程，得到

$$K_{q+2} - (c+1)K_{q+1} + (c-ab)K_q = 0. \tag{3.12}$$

方程 (3.12) 的通解为

$$K_q = \begin{cases} A\alpha^q + B\beta^q, & \text{if } \alpha \neq \beta \\ (A+qB)\alpha^q, & \text{if } \alpha = \beta, \end{cases} \tag{3.13}$$

其中， α 和 β 定义见（3.6）。

由（3.13）中的 $K_1 = 1$ 和 $K_2 = 1 + c$，可以找到相应的 A 和 B，并可知 K_q 与（3.7）中的相同。□

记

$$\mathbb{K}_q = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : K_q(a,b,c) = 0\}.$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{q=2}^{+\infty} \mathbb{K}_q.$$

定理2. 设函数 f 由满足（*3.1*）的参数$(a,\ b,\ c) \in \mathbb{K}$ 给出。则有以下等式:

1) 如果$(c-1)^2 + 4ab > 0$，那么对于任意 $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathrm{Fix}(f) \cup \mathcal{P})$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \begin{cases} x_2, & \text{if } \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \\ x_1, & \text{if } \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| > 1. \end{cases}$$

2) 如果$(c-1)^2 + 4ab = 0$ 则对于任意 $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathrm{Fix}(f) \cup \mathcal{P})$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_1 = \frac{1-c}{2b}.$$

3) 如果$(c-1)^2+4ab < 0$，那么对于任意 $x \in \mathbb{R}\setminus(\mathrm{Fix}(f)\cup\mathcal{P})$，轨道 $\{f^n(x)\}_{n\geq 1}$在 $\mathbb{R}$中稠密。

证明。1) 令$|\frac{\alpha}{\beta}| < 1$。我们可以将 $f^n(x)$ 写成如下形式:

$$f^n(x) = \frac{1}{b}\left[1 + (ab-c)\cdot \frac{(bx-1+\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - (bx-1+\beta)}{(bx-1+\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\alpha - (bx-1+\beta)\beta}\right].$$

由于$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} = 0$，我们得到 $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{ab-c}{\beta}\right) = x_2$。情形 $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| > 1$ 同理可证。

2) 由公式（3.5）的第二行可得。

3）若 $(c-1)^2 + 4ab < 0$ 则 $ab < 0$ 且

$$1 - 2\sqrt{-ab} < c < 1 + 2\sqrt{-ab}.$$

因此,

$$(1-\sqrt{-ab})^2 < c - ab < (1+\sqrt{-ab})^2.$$

此外，很容易看出， α 和 β 是复数，且

$$r := |\alpha| = |\beta| = \sqrt{c-ab}.$$

$$\theta = \arg(\alpha) = -\arg(\beta) = \arctan\left(\frac{\sqrt{-(c-1)^2 - 4ab}}{c+1}\right). \tag{3.14}$$

由此得到极坐标形式，根据棣莫弗公式可得:

$$\alpha^k = r^k[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)], \quad \beta^k = r^k[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

使用 (3.5) 中的这些公式，我们得到

$$f^n(x) = \frac{(bx-1)\sin((n-1)\theta) + r\sin(n\theta)}{r[(bx-1)\sin(n\theta) + r\sin((n+1)\theta)]}$$

$$= \frac{\{(bx-1)\cos(\theta) + r\}\sin(n\theta) - (bx-1)\sin(\theta)\cos(n\theta)}{r[\{bx-1+r\cos(\theta)\}\sin(n\theta) + r\sin(\theta)\cos(n\theta)]}.$$

记

$$g(t) \equiv g(t, r, bx, \theta) = \frac{\{(bx-1)\cos(\theta) + r\}t - (bx-1)\sin(\theta)}{r[\{bx-1+r\cos(\theta)\}t + r\sin(\theta)]}$$

和 $t_n = \tan(n\theta)$。因此 $f^n(x) = g(t_n)$。于是对于任意 $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathrm{Fix}(f) \cup \mathcal{P})$，我们得出序列 $\{f^n(x)\}_{n\geq 1}$ 的极限点集可由序列 $\{t_n = \tan(n\theta)\}_{n\geq 1}$ 的极限点集给出。下面的引理给出了 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ 的极限点集。

引理 2。以下结论成立

1. 如果 $\theta \in \mathbb{R}$ 是有理数，那么 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ 是周期性的。此外，如果 $\theta = s/q$，那么周期长度等于 q。2. 如果 $\theta \in \mathbb{R}$ 是无理数，那么 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ 在 $\mathbb{R}$中稠密。换句话说，对于任意 $a \in \mathbb{R}$，都存在一个自然数序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = a.$$

引理的证明。我们将使用圆形台面上的数学台球定理（见 [18, 第 2 节2]）。在这样的台面上，台球轨迹完全由与圆周所成的角 θ 决定。定义 T_θ : $[0,1] \to [0,1]$ 使得$T_\theta(x) = x + \theta(mod\,1)$，其中 $x \in [0,1]$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$。这里 θ 表示沿圆周的旋转角。映射 T_θ 的 n次迭代如下给出:

$$T_\theta^n(x) = x + n\theta(mod\,1). \tag{3.15}$$

根据 [18, 定理2。1] 已知以下内容

(i) 如果 $\theta \in \mathbb{R}$ 是一个有理数，那么映射 $T_\theta(x)$的每条轨道都是周期性的。此外，如果 $\theta = p/q$，那么周期长度等于 q。(ii) 如果 $\theta \in \mathbb{R}$ 是一个无理数，那么对于每个 $x \in [0,1]$，序列$\{T_\theta^n(x)\}_{n\geq 0}$ 在 $[0,1]$中稠密。

为了证明该引理，考虑半径为 1 的圆上的弹球运动，它对应于旋转数 θ 弧度。于是序列

$$t_0 = 0, t_1 = \tan(\theta), t_2 = \tan(2\theta), t_3 = \tan(3\theta), ...$$

在 $\mathbb{R}$ 上对应于以起点 0 开始的台球轨道 $0, \theta, 2\theta, 3\theta$,...。因此，引理由上述性质 (i) 和 (ii) 得出。引理得证。

现在我们继续证明定理的第 3) 部分。根据定理的假设 $(a, b, c) \in \mathbb{K}$，在 (3.14) 中定义的量 θ 是一个无理数。由于 $g(t)$ 将 $\mathbb{R}$映射到自身，第 3) 部分由引理 2 的第 2 部分得证。□

4. 复 p进数集合上的 $f(x)$

本节中，我们考虑与函数 $f:\mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ 相关的动力系统，其定义如下：

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq ab, \quad a,b,c \in \mathbb{C}_p, \tag{4.1}$$

其中 $x \neq \hat{} x = -c/b$。

4.1. 关于 p<style>-进动力系统的已知结果。下文 [14]给出由（4.1）生成的动力系统的已知结果。

由于 $\mathbb{C}_p$ 是代数闭域，点(3.4)对于 f 的 p-进版本而言也同样是不动点。

4.1.1.情形： $|f'(x_1)|_p = 1$。

定理 3。 *[14]*若

$$\left|\frac{b}{\sqrt{c-ab}}\right|_p < 1 \quad and \quad |f'(x_i)|_p = \left|\frac{c-ab}{(bx_i+c)^2}\right|_p = 1, \quad i = 1,2. \tag{4.2}$$

Then

$$SI(x_i) = U_{1+\varepsilon_c}(x_i), \quad i = 1,2,$$

其中 $\varepsilon_c = \left|\frac{\sqrt{c-ab}}{b}\right|_p - 1$。

下述定理给出了 Siegel 圆盘 $SI(x_i)$、 $i = 1$ 与 2 之间的关系。

定理 4。 *[14]* 若条件 *(4.2)* 成立，则

1. *If* $\left|\frac{\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{b}\right|_p \geq 1+\varepsilon_c$, *then* $SI(x_1) \cap SI(x_2) = \varnothing$;
2. *otherwise* $SI(x_1) = SI(x_2)$.

4.1.2. 情形： $|f'(x_1)|_p \neq 1$。 记

$$\delta_2 = \left|\frac{bx_1+c}{b}\right| - 1.$$

定理5。 *[14]*若

$$\left|\frac{c-ab}{(bx_1+c)^2}\right|_p < 1 \quad and \quad \left|\frac{b}{bx_1+c}\right|_p < 1. \tag{4.3}$$

Then

$$\bigcup_{\delta:0\leq\delta\neq 1+\delta_2} S_\delta(x_1) \subset \mathcal{A}(x_1).$$

定理6。 *[14]*设条件（*4.3*）得到满足。那么

$$\mathcal{A}(x_1) = \mathbb{C}_p \setminus \{\hat{x}, x_2\}.$$

4.2. 关于 p-adic 情形的新方法。 我们考虑函数 **(4.1)**，并运用 [1], [19] - [23] 中发展的方法研究 **(4.1)** 的动力系统。

4.2.1. 唯一的不动点。 若 $D = (c-1)^2 + 4ab = 0$，则函数 **(4.1)** 有唯一的不动点：$x_0 = \frac{1-c}{2b}$。现在我们求 $|f'(x_0)|_p$：

$$|f'(x_0)|_p = \left|\frac{c-ab}{(bx_0+c)^2}\right|_p = \left|\frac{c-ab}{(b\cdot\frac{1-c}{2b}+c)^2}\right|_p = \left|\frac{4(c-ab)}{(1+c)^2}\right|_p =$$

$$= \left|\frac{4c-4ab}{(1+c)^2}\right|_p = \left|\frac{4c+(c-1)^2}{(1+c)^2}\right|_p = \left|\frac{(1+c)^2}{(1+c)^2}\right|_p = 1.$$

因此，x_0 是一个中性的不动点。

利用等式 $(c-1)^2 + 4ab = 0$ 和 $x_0 = \frac{1-c}{2b}$，我们得到以下结果：

$$|f(x) - x_0|_p = |x - x_0|_p \cdot \left|\frac{\frac{c+1}{2b}}{(x-x_0)+\frac{c+1}{2b}}\right|_p. \tag{4.4}$$

记以下内容为

$$\mathcal{P}_p = \{x \in \mathbb{C}_p : \exists n \in \mathbb{N}\cup 0, f^n(x) = \hat{x}\}, \tag{4.5}$$

$$\alpha = \left|\frac{c+1}{2b}\right|_p.$$

对于 $\alpha \geq 0$，定义函数 ψ_α： $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为

$$\psi_\alpha(r) = \begin{cases} r, & \text{if } r < \alpha \\ \alpha^*, & \text{if } r = \alpha \\ \alpha, & \text{if } r > \alpha \end{cases},$$

其中，α^* 是满足 $\alpha^* \geq \alpha$ 的正数。

引理 3. 如果 $x \in S_r(x_0) \setminus \mathcal{P}_p$，则对于函数 ***(4.1)***，以下公式成立

$$|f^n(x) - x_0|_p = \psi_\alpha^n(r).$$

证明。由于 $|x-x_0|_p = r$, $\left|\frac{c+1}{2b}\right|_p = \alpha$，利用公式 **(4.4)** 以及 p-进范数的强三角不等式，我们得到如下结果

$$|f(x) - x_0|_p = |x-x_0|_p \cdot \left|\frac{\frac{c+1}{2b}}{(x-x_0)+\frac{c+1}{2b}}\right|_p = \varphi_\alpha(r) = \begin{cases} r, & \text{if } r < \alpha \\ \alpha^*, & \text{if } r = \alpha \\ \alpha, & \text{if } r > \alpha. \end{cases} \tag{4.6}$$

现在考虑 $n = 2.$ 情形。由于 $|f(x) - x_0|_p = \psi_\alpha(r)$（根据（4.6）），我们得到n

$$|f^2(x)-x_0|_p = |f(x)-x_0|_p \cdot \left|\frac{\frac{c+1}{2b}}{(f(x)-x_0)+\frac{c+1}{2b}}\right|_p = \psi_\alpha(\psi_\alpha(r)) = \begin{cases} \psi_\alpha(r), & \text{if } \psi_\alpha(r) < \alpha \\ \geq \alpha^*, & \text{if } \psi_\alpha(r) = \alpha \\ \alpha, & \text{if } \psi_\alpha(r) > \alpha. \end{cases}$$

对任意 $n \geq 1$ 和任意 $x \in S_r(x_0) \setminus \mathcal{P}$ 重复这一论证，我们得到以下公式

$$|f^n(x) - x_0|_p = \psi_\alpha^n(r).$$

□

引理 4. 函数 ψ_α 具有以下性质。

1. Fix$(\psi_\alpha) = \{r : \ 0 \leq r < \alpha\} \cup \{\alpha :$ 若 $\alpha^* = \alpha\}$。2. 若 $r > \alpha$ 则 $\psi_\alpha(r) = \alpha$。

3. 若 $r=\alpha$ 且 $\alpha^*>\alpha$，则 $\psi_\alpha^2(\alpha)=\alpha$。

证明。1) 这是对方程 $\psi_\alpha(r)=r$. 的简单观察

2）如果 $r>\alpha$，那么根据函数 ψ_α 的定义，我们有

$$\psi_\alpha(r)=\alpha.$$

3) 如果 $r=\alpha$，那么根据函数 ψ_α 的定义，我们有 $\psi_\alpha(r)=\alpha^*$ 并且由于 $\alpha^*>\alpha$ 根据本引理的第 2 部分，我们得到 $\psi_\alpha(\alpha^*)=\psi_\alpha(\psi_\alpha(r))=\psi_\alpha^2(r)=\alpha$。 □

记作

$$\alpha^*(x)=|f(x)-x_0|_p,\quad \text{if}\quad x\in S_\alpha(x_0).$$

通过应用引理3 和引理 4，我们得到由函数 (4.1) 构成的 p-进动力系统的以下性质。

定理 7. 由函数 *(4.1)* 生成的 p-进动力系统具有以下性质：

1. $SI(x_0)=U_\alpha(x_0)$。*2.* 如果 $r>\alpha$ 且 $x\in S_r($ $x_0)$，那么 $f(x)\in S_\alpha(x_0)$。*3.* 令 $x\in S_\alpha(x_0)\setminus\mathcal{P}_p$。

3.1) 如果 $\alpha^*(x)=\alpha$，那么 $f(x)\in S_\alpha(x_0)$。

3.2) 如果 $\alpha^*(x)>\alpha$，那么 $f^2(x)\in S_\alpha(x_0)$。

注记2。 我们注意到，定理 *7*的第 *1* 部分与定理 *3*一致，因为由 $(c-1)^2+4ab=0$ 可推出 $\alpha=1+\varepsilon_c$。第 *2*和第 *3* 部分意味着，从 $U_\alpha(x_0)$ 外部取出的任意点，在对 *(4.1)* 至多进行两步迭代后都会进入球 $S_\alpha(x_0)$。

4.2.2. 两个不动点。如果 $D=(c-1)^2+4ab\neq 0$，那么我们有两个不动点x_1,x_2。对于任意 $x\in\mathbb{C}_p, x\neq\hat{}x$，通过简单计算可得

$$|f(x)-x_i|_p=|x-x_i|_p\cdot\frac{|\alpha(x_i)|_p}{|\beta(x_i)+x-x_i|_p},\quad i=1,2, \tag{4.7}$$

其中

$$\alpha(x)=\frac{1-bx}{b},\quad \beta(x)=\frac{bx+c}{b}.$$

定义

$$\alpha_i=|\alpha(x_i)|_p,\quad \beta_i=|\beta(x_i)|_p,\quad i=1,2.$$

对于 $\beta>0$，定义函数 $\varphi_{\alpha,\beta}$：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，其定义为

$$\varphi_{\alpha,\beta}(r)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta}r, & \text{if}\quad r<\beta\\ \beta^*, & \text{if}\quad r=\beta\\ \alpha, & \text{if}\quad r>\beta\end{cases}$$

其中 β^* 是给定的正数，且满足 $\beta^*\geq\alpha$.

对于 $\beta=\alpha\geq 0$，我们有 $D=(c-1)^2+4ab=0$，这是上文研究过的情形，此时函数有唯一不动点。因此，我们假设 $\alpha\neq\beta$。

使用公式（4.7），我们很容易得到以下结果：

引理 5. 若 $x\in S_r(x_i)$，则下列公式成立

$$|f^n(x)-x_i|_p=\varphi_{\alpha_i,\beta_i}^n(r),\quad n\geq 1,\quad i=1,2.$$

因此， p-进动力系统 $f^n(x)$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{C}_p$, $x \neq \hat{}x$ 与由 $\varphi_{\alpha,\beta}$ 生成的实动力系统相关。现在我们将研究这个（实）动力系统。

引理6。 由 $\varphi_{\alpha,\beta}(r)$生成的动力系统具有以下性质:

1. $\mathrm{Fix}(\varphi_{\alpha,\beta}) = \{0\} \cup \begin{cases} \{\beta^* : \text{if } \beta = \beta^*\} & \text{for } \alpha < \beta \\ \{\alpha\} & \text{for } \alpha > \beta. \end{cases}$
2. $\lim_{n\to\infty} \varphi^n_{\alpha,\beta}(r) = \begin{cases} 0, & \text{for any } r \geq 0, \quad \text{if } \alpha < \beta \\ \alpha, & \text{for any } r \geq 0, \quad \text{if } \alpha > \beta. \end{cases}$

证明。 1. 这是对方程 $\varphi_{\alpha,\ \beta}(r) = r$ 的简单分析结果。 2. 由于 $\varphi_{\alpha,\ \beta}(r)$ 是分段线性函数，证明包括简单的计-算，利用改变参数 α, β 时的图像。

□

利用引理5和引理6，我们得到以下结果:

定理8。 如果 $x \in \mathbb{C}_p \setminus (\mathcal{P}_p \cup \{x_2\})$ （分别地， $x \in \mathbb{C}_p \setminus (\mathcal{P}_p \cup \{x_1\})$），则由 f 生成的 p-进动力系统具有以下性质:

1. $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_1$ 当 $\alpha_1 < \beta_1$时。（分别地，
$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_2$ 当 $\alpha_2 < \beta_2$时。） 2. $\lim$
$_{n\to\infty} f^n(x) \in S_{\alpha_i}(x_i)$ 当 $\alpha_i > \beta_i$时。

注记3。 我们注意到，定理*8*的第*1*部分是定理*6*的重新表述。此外，第*2*部分给出了一个额外结果，这在 *[14]*中未曾提及。

4.3. 公式（3.5）在 p-adic 情形中的应用。 我们注意到，在上一小节中，我们的方法是将 p-adic 动力系统归约为实数情形，其中实数值是以不动点为中心的球的半径。在本小节中，我们将公式（3.5）应用于 p-adic 函数（4.1），从而可以通过直接计算极限点来解决该动力系统的主要问题。

我们注意到，以下定理 1 的 p-adic 版本成立

Th定理9。 设函数 f 由满足（*4.1*）的参数$(a, b, c) \in \mathbb{C}_p$ 给定。

- 若 $K_q(a, b, c) \neq 0$ 则 $\mathrm{Per}_q(f) \setminus \mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.
- 若 $K_q(a, b, c) = 0$ 则任意 $x \in \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{P}_p$ 是 q-周期的。

记作

$$\mathbb{K}^{(p)}_q = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}_p : K_q(a, b, c) = 0\}.$$

$$\mathbb{K}^{(p)} = \mathbb{C}_p \setminus \bigcup_{q=2}^{+\infty} \mathbb{K}^{(p)}_q.$$

下面我们将(3.6) 中定义的 α 和 β 视为 p-进数，它们由 $\mathbb{C}_p$ 给出。

定理10.令函数 f 由参数 $(a, b, c) \in \mathbb{K}^{(p)}$ 给出，满足 *(4.1)*。则以下等式成立:

a) 若$(c-1)^2 + 4ab \neq 0$，则对于任意 $x \in \mathbb{C}_p \setminus (\mathrm{Fix}(f) \cup \mathcal{P}_p)$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \begin{cases} x_2, & \text{if } \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|_p < 1 \\ x_1, & \text{if } \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|_p > 1. \end{cases}$$

b) 若$(c-1)^2+4ab=0$，则对于任意 $x\in\mathbb{C}_p\setminus(\mathrm{Fix}(f)\cup\mathcal{P}_p)$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=x_1=\frac{1-c}{2b}.$$

证明。 与定理 1 的证明类似，只需将 $|\cdot|$ 替换为 $|\cdot|_p$。 □

注记 4. 由于 $\mathbb{C}_p$ 是代数闭的，函数 *(4.1)* 总有不动点，因此定理 *9* 中没有出现定理 *1* 第 *3* 部分的类似表述。

注5。 注意到，有许多论文致力于研究由函数 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$生成的动力系统，其中 $z\in\mathbb{C}$，即一个复数，被称为复平面的莫比乌斯变换（参见[2] 以了解该函数的详细性质）。在 *[4,* 第 *1],* 章中，利用（*3.5*），证明了

- 如果 f 有唯一不动点 ξ，那么对于任意 $z\in\mathbb{C}$， $f^n(z)$ 收敛到 ξ。
- 如果 f 有两个不动点，那么或者 $f^n(z)$ 收敛到其中一个不动点，或者它们在一个有限点集（周期点）中循环移动，或者它们构成某个圆的稠密子集。

参考文献

[1] S. Albeverio、U.A. Rozikov、I.A. Sattarov。 p进（2, 1）有理动力系统。《数学分析与应用杂志》398(2)（2013），553–566。[2] S. Albeverio、A. Khrennikov 和 P.E. Koloeden，记忆提取作为一种 p进动力系统，《生物系统》49（1999），105–115。[3] V.A. Avetisov、A.H. Bikulov、S.V. Kozyrev 和 V.A. Osipov，受层级能量景观约束的超度量扩散的 p进模，《J. Phys. A: Math.Gen.》35（2002），177–189。[4] A.F. Beardon，《有理函数的迭代》。复解析动力系统。《数学研究生教材》第132卷。施普林格出版社，纽约，1991。[5] D. Dubischer、V.M. Gundlanch、A. Khrennikov 和 O. Steinkamp， p进数上的随机动力系统的吸引子及“噪声”认知过程模型，《物理学 D》130（1999），1–12。[6] N.N. Ganikhodjaev、F.M. Mukhamedov、U.A. Rozikov，Potts p进模型在集合 $\mathbb{Z}$上的相变存在性，《理论与数学物理》130（2002），425–431。[7] R.L. Hasselblatt、A. Katok，《动力学入门：兼论近期发展概览》。剑桥大学出版社，2003。[8] M. Khamraev、F.M. Mukhamedov、U.A. Rozikov，关于凯莱树上非齐次p进 λ模型的吉布斯测度唯一性，《数学物理快报》70（2004），17–28。[9] A.Yu. Khrennikov，《非阿基米德分析：量子悖论、动力系统与生物模型》，克吕维尔，荷兰，1997。[10] A.Yu. Khrennikov，关于用 p进动力系统描述 Grain 的功能，鲁尔大学波鸿分校预印本，SFB-237，第355号。[11] N. Koblitz，《 p进数、 p进分析与ζ函数》，施普林格，柏林，1977。[12] F.M. Mukhamedov、U.A. Rozikov，关于凯莱树上 p进 Potts 模型的吉布斯测度，《数学研究》（新系列）15（2004），85–100。[13] F.M. Mukhamedov、U.A. Rozikov，关于凯莱树上的非齐次 p进 Potts 模型，《无限维分析、量子概率及相关专题》8（2005），277–290。[14] F.M. Mukhamedov、U.A. Rozikov，关于有理 p进动力系统，《函数分析与拓扑方法》10（2004），第2期，21–31。[15] H.-O. Peitgen、H. Jungers 和 D. Saupe，《混沌与分形》，施普林格，海德堡—纽约，1992。[16] U.A. Rozikov，《生物学与物理学中的吉布斯测度：Potts 模型》。World Sci. Publ.，新加坡，2022年，368页。[17] U.A. Rozikov，《种群动力学：代数与概率方法》。World Sci. Publ.，新加坡，2020年，460页。

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_变换

[18] U.A. Rozikov，《数学台球导论》。World Sci. Publ.，新加坡，2019年，224页。[19] U.A. Rozikov、I.A. Sattarov，关于一个非线性 p进动力系统。 p-进数、超度量分析与应用，**6**(1)（2014），53–64。[20] U.A. Rozikov、I.A. Sattarov，具有唯一不动点的（2,2）有理函数的 p进动力系统。《混沌、孤子与分形》，**105** （2017），260–270。[21] U.A. Rozikov、I.A. Sattarov，具有两个不动点的 p进（2,2）有理函数动力系统。《数学研究成果》，**75:100** （2020），1–37。[22] U.A. Rozikov、I.A. Sattarov、S. Yam，函数 $\frac{ax}{x^2+a}$的 p进动力系统。 p-进数、超度量分析与应用，**11**(1)（2019），77–87。[23] I.A. Sattarov， p进（3,2）有理动力系统。 p-进数、超度量分析与应用，**7**(1)（2015），39–55。

E.T. ALIEV，纳曼干工程技术学院，科松索伊街7号，邮编160115，纳曼干，乌兹别克斯坦。

电子邮箱地址: aliev-erkinjon@mail.ru

U.A. ROZIKOV[a, b, c] V.I.罗曼诺夫斯基数学研究所，Universitet 街 9 号，100174，乌兹别克斯坦塔什干；[b] 新乌兹别克斯坦大学，Mustaqillik 大道 54 号，100007，乌兹别克斯坦塔什干；[c] 乌兹别克斯坦国立大学，Universitet 街 4 号，100174，乌兹别克斯坦塔什干。

电子邮件地址: rozikovu@yandex.ru