arXiv:2304.04035v2 [math.MG] 5 Aug 2023

迈斯纳多面体的稠密性

Ryan Hynd*

2023年8月8日

摘要

我们研究 $\mathbb{R}^3$中的迈斯纳多面体。这些等宽体的边界由球面片段和纺锤环面组成。我们通过取全等球的适当交集来定义这些形状，并证明在豪斯多夫拓扑下，它们在等宽体空间中是稠密的。这一稠密性断言本质上由 Sallee 建立。然而，我们提供了一个现代视角，考虑到近期在理解球多面体以及基于这些形状构造等宽体方面取得的进展。

目录

1 引言 **2**

2 纺锤体 **5**

2.1 一个定义性不等式.6 2.2 短弧.11 2.3 纺锤凸性.13

3 勒洛多面体 16

3.1 球多面体.17 3.2 V´azsonyi 问题.18 3.3 示例.20

4 梅斯纳多面体 32

4.1 楔形体.32 4.2 等宽性质.39

*数学系，宾夕法尼亚大学。本研究部分得到了美国数学会克莱托–吉尔默奖学金的资助。

5 稠密性定理 **43**
5.1 第一次近似.44 5.2 两个引理.45 5.3 第二次近似.46

迈斯纳四面体的体积 **48**
A.1 内角.48 A.2 高斯-博内公式.50 A.3 纺锤体的周长.52 A.4 体积计算.53

B 绘图 54

1 引言

凸体 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的凸且紧子集。我们称 K 具有 定宽，如果 K 的每一对平行支撑平面相距单位距离。最简单的例子是半径为 $1/2$ 的闭球。正如我们将在下文看到的，还有许多其他等宽形状。本文旨在讨论 $\mathbb{R}^3$ 中的一族等宽体，它们逼近所有其他三维等宽形状。

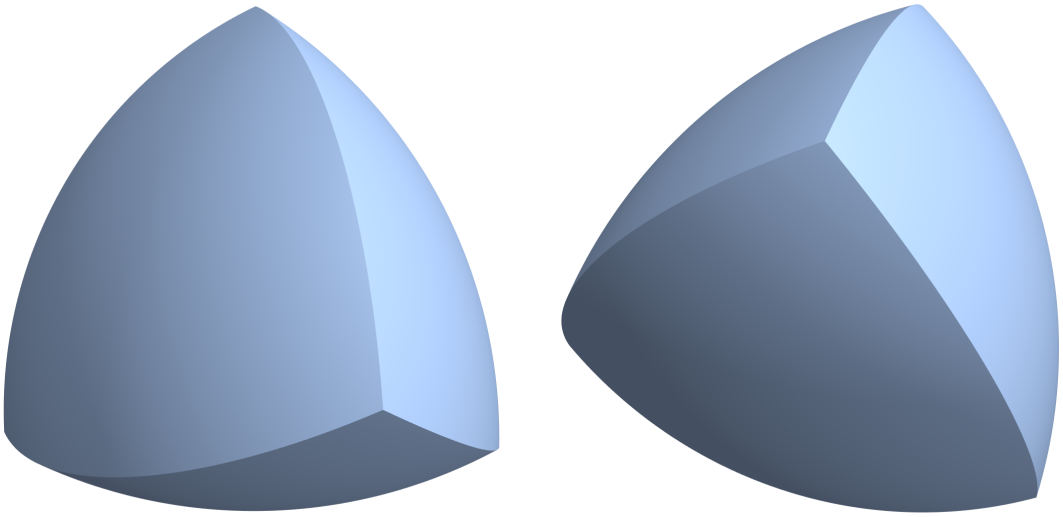


图 1：这里展示了勒洛四面体的两个视图。它是以正四面体的顶点为中心、半径为一的四个球的交集。

由于它将启发后文的大部分内容，让我们回顾一下梅斯纳和席林所提出的两个等宽体的几何构造 [11]。考虑该形状

$$R = B(a_1) \cap B(a_2) \cap B(a_3) \cap B(a_4),$$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^3$ 和

$$|a_i - a_j| = 1$$

对于 $i \neq j$。这里， $|x|$ 表示 $x \in \mathbb{R}^3$ 的欧几里得范数，而 $B(x) \subset \mathbb{R}^3$ 表示以 x 为中心、半径为一的闭球。显然， $R \subset \mathbb{R}^3$ 是一个凸体，称为勒洛四面体。

与 $\mathbb{R}^3$ 中的正四面体类似， R 有四个顶点、六条边和四个面。见图 1。 R 的顶点是中心 a_1, a_2, a_3, a_4。 R 的每个面都是以一个对顶点为中心的球面的一部分。事实证明，这些面在各自的球面上都是测地凸的。例如，与顶点 a_1相对的面 $\partial B(a_1) \cap R$ 是 $\partial B(a_1)$中的测地凸子集。每条边都是两个面的交集，并且是确定这两个面的两个球面上的圆弧。例如，连接 a_2 和 a_3 的边是面 $\partial B(a_1) \cap R$ 和 $\partial B(a_4) \cap R$的交集。

我们可以如下改变 R 靠近连接 a_2 和 a_3 的边附近的边界。考虑

$$\gamma_1 \subset \partial B(a_1) \text{ the geodesic joining } a_2 \text{ to } a_3$$

and

$$\gamma_4 \subset \partial B(a_4) \text{ the geodesic joining } a_2 \text{ to } a_3.$$

如上所述， γ_1 和 γ_4 是包含在 ∂R中的曲线。接着，我们可以将 ∂R 中包含 a_2 与 a_3 之间那条边、且由 γ_1 和 γ_4 围成的区域替换为纺锤环面的一部分；也就是说，可以用绕着经过 a_2 和 a_3的直线将 γ_1 旋转至 γ_4 所得到的曲面，替换 ∂R 的这一部分。由此得到的形状围成一个凸体，且该凸体是 R的子集。见图2。

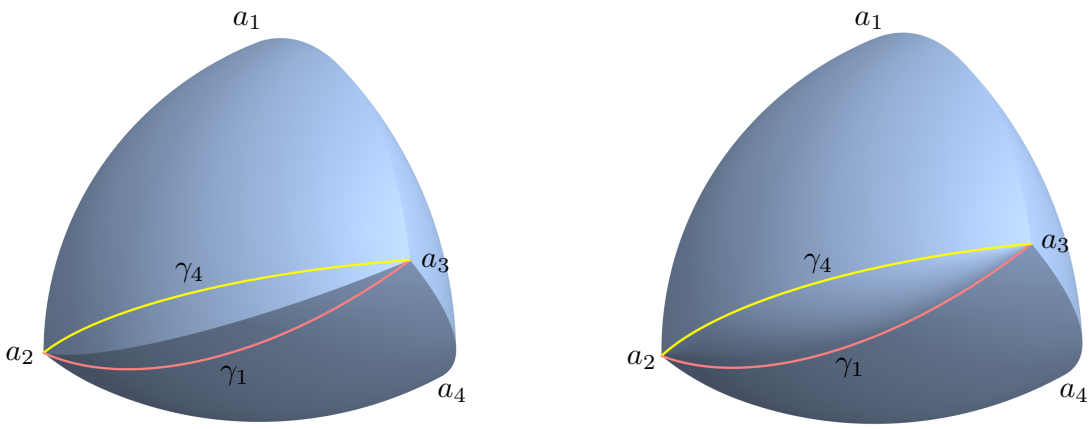


图2：左侧是带有测地线曲线 γ_1 和 γ_4的勒洛四面体 R。右侧是将 γ_1 绕经过 a_2 和 a_3的直线旋转至 γ_4 后得到的形状，替换 ∂R 中由 γ_1 和 γ_4 围成的区域所得的图形。这是一种基本的手术操作。

如果我们在 ∂R 附近任意三条边所在的区域进行这种手术，而这三条边要么共享一个顶点，要么共享一个公共面，就会得到两种迈斯纳四面体中的一种。

参见图3和图4；我们还请读者参阅Yaglom和Boltyanskii的经典著作中的图示106和107 [6]，其中有这些构造的图像。事实证明，这些形状具有定宽。此外，多年来，这些形状一直受到特别关注，因为人们猜想，在所有等宽形状中，它们所包围的体积最小。关于这些形状的最新综述，请参见Kawohl和Weber的文章 [8]。

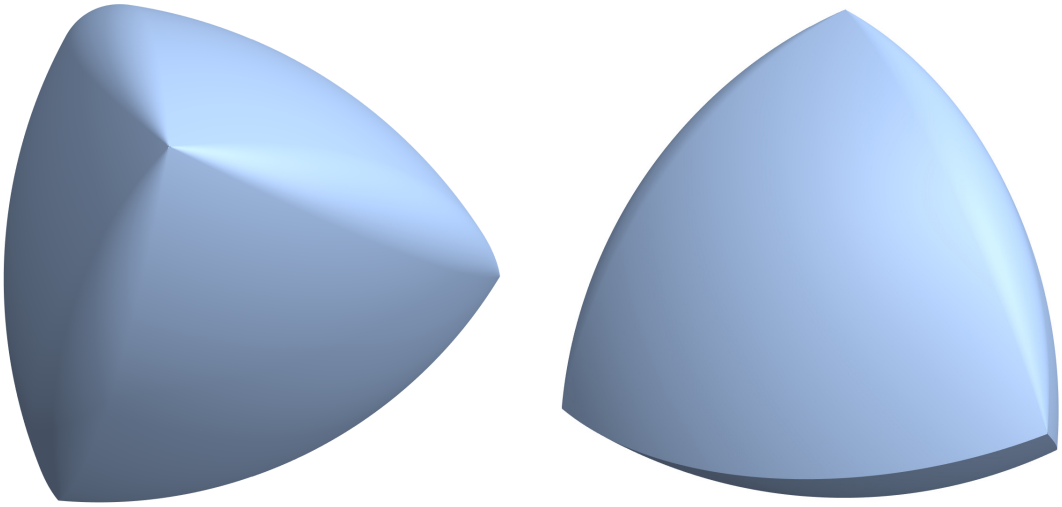


图 3：一个光滑化边共享同一顶点的迈斯纳四面体。

接下来，我们将讨论 $\mathbb{R}^3$ 中的一族定宽形状；这些形状的设计类似于上文构造的两个梅斯纳四面体。它们被称为迈斯纳多面体，其原型是 Montejano 和 Rold´an- Pensado [12] 以相同名称引入的形状类。不过，我们将通过交集来定义这些形状，而不是对边界进行手术。例如，如果 e_{ij} 表示连接 a_i 和 a_j 的 R 的边，

$$\bigcap \{B(x) : x \in e_{12} \cup e_{13} \cup e_{14}\}$$

这是一个迈斯纳四面体，其中与公共面 $\partial B(a_1) \cap R$ 相邻的边 e_{23}, e_{24}, e_{34} 已经过光滑化处理。同样，

$$\bigcap \{B(x) : x = a_1 \text{ or } x \in e_{23} \cup e_{24} \cup e_{34}\},$$

这是一个迈斯纳四面体，其中顶点 a_1 附近、共享该顶点的边周围区域经过了光滑化处理。

我们之所以倾向于使用交集，是因为这使我们能够证明，迈斯纳多面体族在下文所述的某种意义下是稠密的。这类结果最早由 Sallee [15], 提出，他证明了某一类等宽形状同样是稠密的。我们尚不清楚，他所研究的形状族与迈斯纳多面体之间究竟有何关系。不过，我们的论证主要基于 Sallee 的思想，以及近年来对纺锤凸形状的理解所取得的发展。

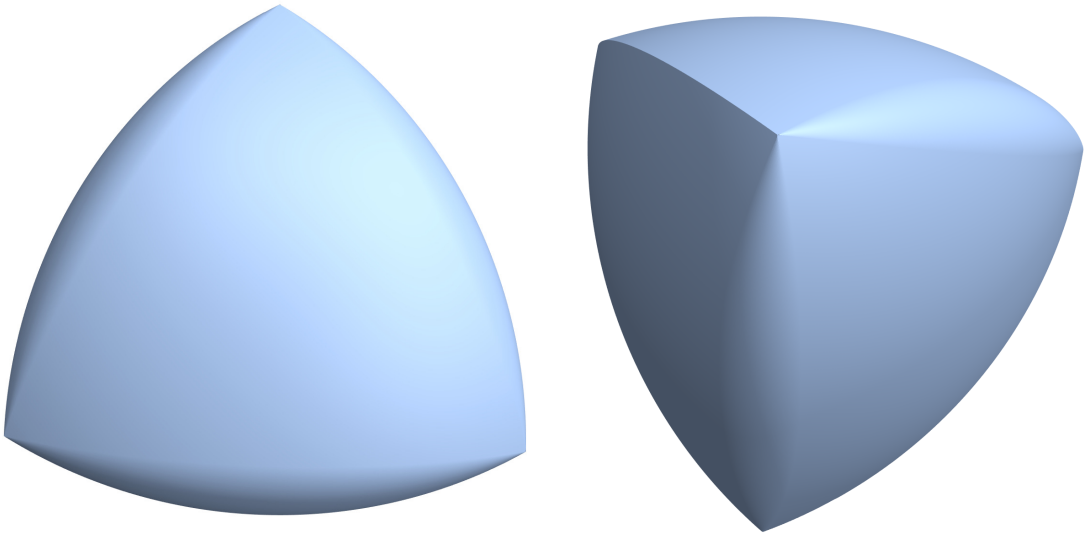


图 4：一个迈斯纳四面体，其中光滑化边共享一个公共面。

我们回顾一下，两个凸体之间的豪斯多夫距离 K_1， $K_2 \subset \mathbb{R}^3$ 为

$$d(K_1, K_2) := \inf \{r \geq 0 : K_1 \subset K_2 + B_r(0), K_2 \subset K_1 + B_r(0)\}.$$

这里 $K + B_r(0) := \{x + z \in \mathbb{R}^3 : \ x \in K, z \in B_r(0)\}$ 是 K 和$B_r(0)$的闵可夫斯基和； $B_r(0)$是以原点为中心、半径为 r 的闭球。此外，我们注意到， d是凸体空间上的完备度量。本文的主要结果如下。

稠密性定理。假设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个等宽体，并且 $\epsilon > 0$。存在一个迈斯纳多面体 $M \subset \mathbb{R}^3$，使得

$$d(K, M) \leq \epsilon.$$

本文组织如下。在下一节中，我们将考察纺锤环面和纺锤凸性的概念。这些思想将帮助我们描述球多面体和等宽形状的一些基本性质。然后在第 3节中，我们研究勒洛多面体，它是一族包含勒洛四面体的球多面体。这些是迈斯纳四面体的构造基元，迈斯纳四面体将在第 4 节中定义。最后，我们在第 5 节中验证稠密性定理。此外，我们还计算迈斯纳四面体的体积，并展示如何使用 `Mathematica`在附录中绘制这些图形。这些形状的体积此前已有所知；不过，由于现有文献中似乎没有容易获得的详细计算过程，我们仍将这一计算列出。

2 Spindles

在本节中， $n \geq 2$ 将是一个固定的自然数。设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|x-y| \leq 2$。由 x 和 y 确定的纺锤体 是所有同时包含 $n \geq 2$ 和 x、半径为一的闭球的交集。

包括 x 和 y。我们将写出

$$\mathrm{Sp}(x,y) := \bigcap_{x,y\in B(z)} B(z)$$

对于这组点。再次使用记号 $B(z)$ 表示以 $z\in\mathbb{R}^n$ 为中心、半径为一的闭球。显然，$\mathrm{Sp}(x,\ y)$ 是一个凸体。我们将看到，$\mathrm{Sp}(x,\ x)=\{x\}$，并且如果 $|x-y|=2$，那么 $\mathrm{Sp}(x,\ y)=B((x+y)/2)$。

对于给定的 $X\subset\mathbb{R}^n$，使用以下记号也会很方便

$$B(X) := \bigcap_{x\in X} B(x).$$

例如，由于 $x,y\in B(z)$当且仅当 $z\in B(x)\cap B(y)$，我们可以写成

$$\mathrm{Sp}(x,y) = B(B(x)\cap B(y)).$$

在本节中，我们将推导纺锤体的一些基本性质。我们还将定义纺锤凸形状，并解释它们与定宽形状之间的关系。

2.1 一个定义性不等式

回顾一下，在 $\mathbb{R}^3$ 中，纺锤环面是一种旋转面，其母线是一条与旋转轴相交的圆。这类环面的“内侧”部分就是本文所讨论的纺锤体的边界。参见图 5a 和图 5b。

命题 2.1。设 $0\le a\le 1$。则

$$\mathrm{Sp}(ae_n,-ae_n) = \left\{ x\in\mathbb{R}^n : \left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}+\sqrt{1-a^2}\right)^2 + x_n^2 \le 1 \right\}. \tag{2.1}$$

注记 2.2。我们将用 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 表示给定 $x\in\mathbb{R}^n$ 的坐标，并用$e_1,\ldots,e_n$表示 $\mathbb{R}^n$中的标准基向量。

证明 $\subset$在 (2.1)中。令 $x\in\mathrm{Sp}(ae_n,\ -ae_n)$。首先假设 $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2>0$并选择

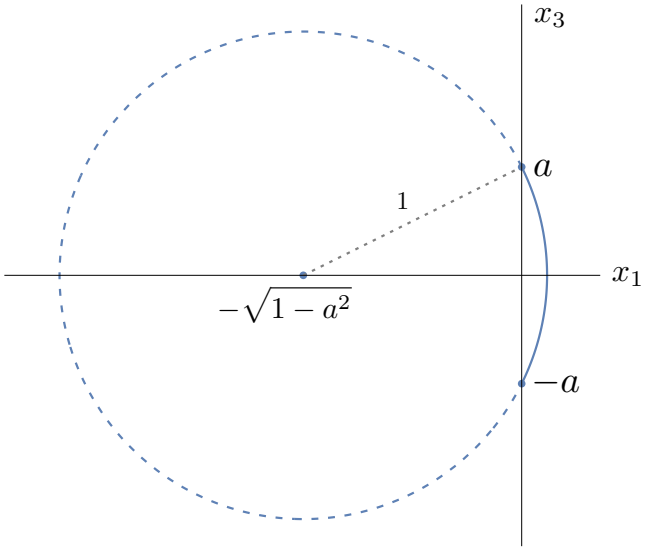
$$z_i = -\sqrt{1-a^2}\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}}$$

对于 $i=1,\ \ldots,\ n-1$和 $z_n=0$。由于 $|z\pm ae_n|=1$,

$$\begin{aligned} 1 &\ge |x-z|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(x_i-z_i)^2+(x_n-z_n)^2 \end{aligned}$$



(a) $\mathbb{R}^3$中的一个纺锤体。



(b) 连接 ae_3 和 $-ae_3$ 的粗体曲线是 x_1x_3 平面上的一段圆弧，可绕 x_3 轴旋转以得到 $\partial\mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$。

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i + \sqrt{1-a^2} \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}} \right)^2 + x_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} + \sqrt{1-a^2} \right)^2 + x_n^2 \\
&= \left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} + \sqrt{1-a^2} \right)^2 + x_n^2.
\end{aligned}
$$

或者，如果 $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 0$，我们选择任意满足 $z_n = 0$ 且 $|z| = \sqrt{1-a^2}$ 的 z，仍然可以发现 x 属于 (2.1) 的右侧。 □

证明 $\supset$ 在(2.1)。 步骤 1：我们需要证明

$$|x - z| \le 1 \tag{2.2}$$

对于属于（2.1）右侧的任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $z \in B(ae_n) \cap B(-ae_n)$。由于范数是凸函数，且（2.1）的右侧和 $B(ae_n) \cap B(-ae_n)$都是凸的，最大的 $|x - z|$ 可在 x 属于（2.1）右侧的边界且 $z \in \partial(B(ae_n) \cap B(-ae_n))$ 时取得。因此，只需在以下情况下验证（2.2）：

$$\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} + \sqrt{1-a^2} \right)^2 + x_n^2 = 1$$

以及 $z \in \partial(B(ae_n) \cap B(-ae_n))$。我们将通过一系列观察，进一步简化推导 (2.2) 的过程。

步骤 2：注意到 (2.1) 的右侧和 $B(ae_n)\cap B(-ae_n)$ 均关于 x_n-轴轴对称，且关于$x_n=0$ 超平面的反射对称。因此，我们只需证明 $x=x_1e_1+x_ne_n$ 满足以下条件时的 (2.2)：

$$\begin{cases}\left(x_1+\sqrt{1-a^2}\right)^2+x_n^2=1\\ x_1\geq 0\\ x_n\geq 0.\end{cases}\tag{2.3}$$

事实上，若 x' 属于 (2.1) 右侧的边界且 $z'\in\partial(B(ae_n)\cap B(-ae_n))$，则存在一个正交变换 $O:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得：$x=Ox'$ 满足 (2.3)，$z=Oz'\in\partial(B(ae_n)\cap B(-ae_n))$，且 $|x'-z'|=|x-z|$。因此，在本证明余下部分中，我们将假设 x 满足这些条件。

步骤 3：接下来注意，由于 $z\in\partial(B(ae_n)\cap B(-ae_n))$，因此要么 $z\in\partial B(ae_n)\cap B(-ae_n)$，要么 $z\in B(ae_n)\cap\partial B(-ae_n)$。若 $z\in B(ae_n)\cap\partial B(-ae_n)$，则 $z_n\geq 0$。在这种情况下，$w=z-2z_ne_n\in\partial B(ae_n)\cap B(-ae_n)$，并且

$$\begin{aligned}|x-w|^2&=|x-z+2z_ne_n|^2\\&=|x-z|^2+4z_n^2+2z_n(x_n-z_n)\\&=|x-z|^2+2z_n^2+2z_nx_n\\&\geq|x-z|^2.\end{aligned}$$

因此，我们可以考虑针对 $z\in\partial B(ae_n)\cap B(-ae_n)$ 的 (2.2)，这意味着 $z_n\leq 0$。接下来选择

$$w=-\sqrt{z_1^2+\cdots+z_{n-1}^2}e_1+z_ne_n.$$

容易验证 $w\in\partial B(ae_n)\cap B(-ae_n)$，并注意

$$\begin{aligned}|x-w|^2&=\left(x_1+\sqrt{z_1^2+\cdots+z_{n-1}^2}\right)^2+(x_n-z_n)^2\\&=\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}+\sqrt{z_1^2+\cdots+z_{n-1}^2}\right)^2+(x_n-z_n)^2\\&\geq|x-z|^2.\end{aligned}$$

该不等式由将三角不等式应用于 $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ 和 $(z_1,\ldots,z_{n-1})$得出。因此，我们将为形如 $z=z_1e_n+z_ne_n$ with的 $z\in\partial B(ae_n)\cap B(-ae_n)$ 推导 (2.2)。

$$\begin{cases}z_1^2+(z_n-a)^2=1\\ z_1\leq 0\\ z_n\leq 0.\end{cases}\tag{2.4}$$

步骤 4：可以直接验证，（2.3）和（2.4）等价于

$$x=x(\theta):=u(\theta)-\sqrt{1-a^2}e_1\quad\text{and}\quad z=z(\phi):=u(\phi)+ae_n$$

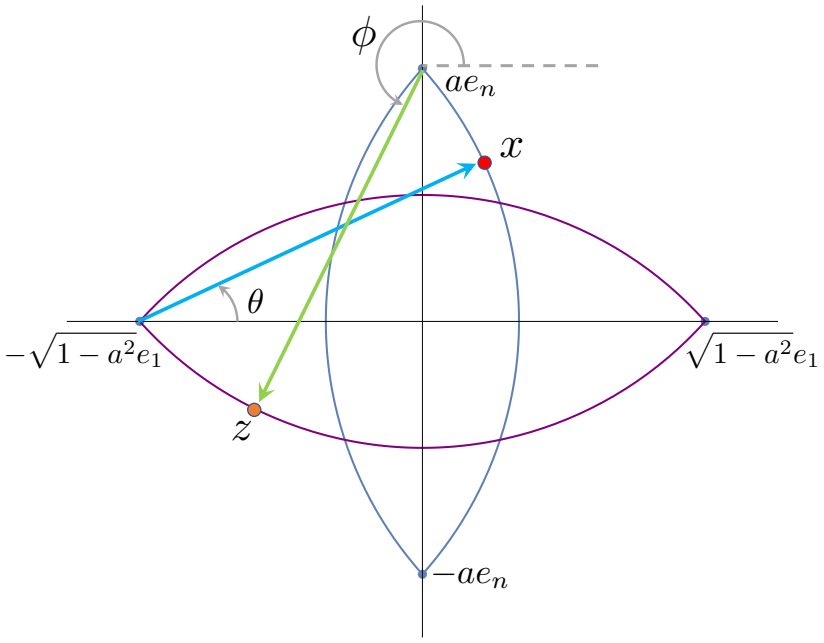


图6：该图说明了 $x = u(\theta) - \sqrt{1-a^2}e_1$ 和 $z = u(\phi) + ae_n$，它们用于我们证明命题2.1的第4步。这里 $\theta \in [0, \sin^{-1}(a)]$ 和 $\phi \in [\pi + \sin^{-1}(a), 3\pi/2]$。这些观察对于证明公式(2.1)中的“$\supset$”成立至关重要。

其中 $u(t) = \cos(t)e_1 + \sin(t)e_n$，对于某个

$$\theta \in [0, \sin^{-1}(a)] \quad \text{and} \quad \phi \in [\pi + \sin^{-1}(a), 3\pi/2].$$

参见图 6。如果 $\theta = \sin^{-1}(a)$，$x(\theta) = ae_n$。在此情况下，不等式 (2.2) 为$z(\phi) \in \partial B(ae_n) \cap B(-ae_n)$。否则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\frac{1}{2}|x(\theta) - z(\phi)|^2 &= (x(\theta) - z(\phi)) \cdot x'(\theta) \\
&= \left(u(\theta) - \sqrt{1-a^2}e_1 - z(\phi)\right) \cdot u'(\theta) \\
&= \left(-\sqrt{1-a^2}e_1 - z(\phi)\right) \cdot u'(\theta) \\
&= \left(-(\sqrt{1-a^2}e_1 + ae_n) - u(\phi)\right) \cdot u'(\theta) \\
&= \left(u(\pi + \sin^{-1}(a)) - u(\phi)\right) \cdot u'(\theta) \\
&= \sin(\pi + \sin^{-1}(a) - \theta) - \sin(\phi - \theta) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

as

$$\pi \leq \pi + \sin^{-1}(a) - \theta \leq \phi - \theta \leq 3\pi/2$$

且sin在 $[\pi, 3\pi/2]$ 上递减。因此，$|x(\theta) - z(\phi)|^2 \leq |x(\sin^{-1}(a)) - z(\phi)|^2 = 1$。 □

注记 2.3。 我们的证明实际上表明$\mathrm{Sp}(ae_n,\ -ae_n) = B(\partial B(ae_n) \cap \partial B(-ae_n))$。

事实证明，对于适当选择的 a，每个纺锤体 $\mathrm{Sp}(x,\ y)$ 都与 $\mathrm{Sp}(ae_n,\ -ae_n)$ 简单相关。

命题 2.4。 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 满足 $0 < |x-y| \le 2$。进一步假设 $O:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个正交变换，且

$$Oe_n = \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Then

$$\mathrm{Sp}(x,y) = \frac{x+y}{2} + O\mathrm{Sp}\left(\frac{|x-y|}{2}e_n, -\frac{|x-y|}{2}e_n\right).$$

此外，若 $|x-y| = 2$，则 $\mathrm{Sp}(x, y) = B((x+y)/2)$。

证明。 首先，我们断言

$$\mathrm{Sp}(Ox+c, Oy+c) = c + O\mathrm{Sp}(x,y) \tag{2.5}$$

对于任意正交变换 O，以及固定的 $c \in \mathbb{R}^n$，该结论均成立。设 $w \in \mathrm{Sp}(Ox+c,\ Oy+c)$，且 $z' \in B(x) \cap B(y)$。令 $z = Oz' + c$，并注意到 $|z-(Ox+c)| \le 1$ 和 $|z-(Oy+c)| \le 1$。由此可得

$$1 \ge |w-z| = |O^t(w-c) - z'|.$$

因此，$O^t(w-c) \in \mathrm{Sp}(x,\ y)$。也就是说，$w \in c + O\mathrm{Sp}(x,\ y)$，并且

$$\mathrm{Sp}(Ox+c, Oy+c) \subset c + O\mathrm{Sp}(x,y).$$

反向包含关系同理成立。

现在假设 O 是本命题陈述中的正交变换。注意，该映射

$$w \mapsto Ow + \frac{x+y}{2}$$

将 $\frac{|x-y|}{2}e_n$ 映射到 x，并将 $-\frac{|x-y|}{2}e_n$ 映射到 y。根据 (2.5),

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(x,y) &= \mathrm{Sp}\left(O\left(\frac{|x-y|}{2}e_n\right) + \frac{x+y}{2}, O\left(-\frac{|x-y|}{2}e_n\right) + \frac{x+y}{2}\right)\\ &= \frac{x+y}{2} + O\mathrm{Sp}\left(\frac{|x-y|}{2}e_n, -\frac{|x-y|}{2}e_n\right).\end{aligned}$$

最后，注意到 (2.1) 得出 $\mathrm{Sp}(e_n,\ -e_n) = B(0)$；因此，如果 $|x-y| = 2$，那么

$$\mathrm{Sp}(x,y) = \frac{x+y}{2} + O\mathrm{Sp}(e_n, -e_n) = \frac{x+y}{2} + B(0) = B((x+y)/2).$$

□

注记 2.5。 公式 (2.1)还意味着Sp(0，0) $= \{0\}$。将 I_n 记作 $\mathbb{R}^n$ 的恒等映射，我们还有

$$\mathrm{Sp}(x,x) = \mathrm{Sp}(I_n 0 + x, I_n 0 + x) = x + I_n \mathrm{Sp}(0,0) = \{x\}$$

由（2.5）可得。

注记2.6。公式 (2.5) 为我们提供了另一种方式来说明 Sp(ae_n， $-ae_n$) 具有圆柱对称性。事实上，如果 $O^tO = I_n$ 且 $Oe_n = e_n$，那么

$$O\mathrm{Sp}(ae_n, -ae_n) = \mathrm{Sp}(ae_n, -ae_n).$$

上述命题意味着，Sp(x， y) 关于经过 x 和 y 的直线呈圆柱对称。此外，我们可以写出（2.1）的通常形式。

推论 2.7. 假设 $0 < |x-y| \le 2$。那么 $w \in \mathrm{Sp}(x,y)$ 当且仅当

$$\left| w - \frac{x+y}{2} - \left(\left(w - \frac{x+y}{2} \right) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right) \frac{x-y}{|x-y|} \right| + \sqrt{1 - \left| \frac{x-y}{2} \right|^2}$$
$$\le \sqrt{1 - \left(\left(w - \frac{x+y}{2} \right) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right)^2}.$$

证明。选取一个正交变换 O，如命题 2.5 的陈述中所述。Then$w \in$Sp(x,y) 当且仅当存在 $v \in$Sp $\left(\frac{1}{2}|x-y|e_n, -\frac{1}{2}|x-y|e_n\right)$，使得 $w =$($x+y$)$/2 + Ov$。所断言的不等式等价于 v 属于 (2.1) 的右端，其中 $a = \frac{1}{2}|x-y|$。 □

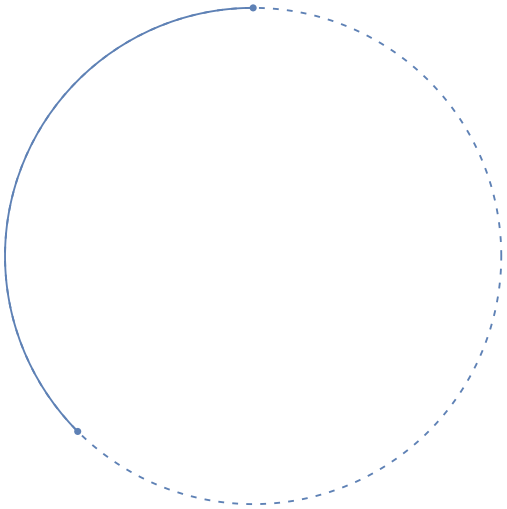
2.2 短弧

若圆 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的二维子空间中的一个圆。设 C 的半径为r，且 x， $y \in C$。 C 的一条短圆弧 连接 x 和 y，是C 中连接这两点的两条圆弧中较短的一条。当然，如果 $|x-y| < 2r$，则C 中连接这两点的短弧是唯一的；否则将有两条。我们还将 x 和 y 之间的线段视为半径为 $r = \infty$的圆的短弧。

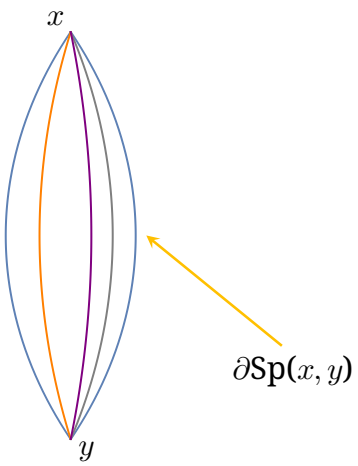
命题 2.8。 设 $|x-y| \le 2$。则$\mathrm{Sp}(x,y)$ 是所有半径至少为一且连接 x和 y的圆的短弧之并。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $x = ae_n$ and $y = -ae_n$ for $0 \le a \le 1$。设 $w \in$Sp($ae_n, -ae_n$)。若 $w_1 = \cdots = w_{n-1} = 0$，则 $w = w_n e_n$ with $|w_n| \le a$；因此 w 位于从 ae_n 到 $-ae_n$的线段上。或者，设 $w \in$Sp($ae_n, -ae_n$)，其中 w不在线段 ae_n 到 $-ae_n$之间。存在一个正交映射 $O\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，它固定 e_n 方向，并且使得 $z = Ow$ 满足

$$z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0 \text{ and } z_1 > 0. \tag{2.6}$$



(a) 此图展示了一个圆的短弧示例，实线表示该短圆弧。包含这段短弧的圆以虚线表示。



(b) 此图展示了纺锤体 $\mathrm{Sp}(x, y)$ 的一个剖面，其中有三段半径至少为一、连接 x 和 y的短弧。命题 2.8 断言，该纺锤体是所有此类短弧的并集。

只需证明该点 z 位于一段半径至少为一、连接 ae_n 和 $-ae_n$的圆短圆弧上。事实上，我们可以将 O^{-1} 应用于这段圆弧，从而得到 w所需的短圆弧。

现在假设 $z \in \mathrm{Sp}(ae_n, -ae_n)$ 满足 (2.6)。于是我们有

$$z_1^2 + 1 - a^2 + 2z_1\sqrt{1-a^2} + z_n^2 = \left(z_1 + \sqrt{1-a^2}\right)^2 + z_n^2 \leq 1.$$

这个不等式给出

$$\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2 - z_1^2 - z_n^2}{2z_1} = \sqrt{r^2 - a^2}$$

对于某个 $r \geq 1$。也就是说，

$$\left(z_1 + \sqrt{r^2-a^2}\right)^2 + z_n^2 = r^2.$$

然后 z 是 属于半径为 $r \geq 1$ 、连接 ae_n 与 $-ae_n$的短圆弧。

反之，假设 z 属于圆 C 的短圆弧，该圆的半径为 $r \geq 1$，它连接 ae_n 与 $-ae_n$。不失一般性，我们可以假设 C 是 x_1x_n 平面的子集，并且 $z_1 \geq 0$。注意

$$z_1^2 + r^2 - a^2 + 2z_1\sqrt{r^2-a^2} + z_n^2 = \left(z_1 + \sqrt{r^2-a^2}\right)^2 + z_n^2 = r^2,$$

可表示为

$$z_1^2 - a^2 + 2z_1\sqrt{r^2-a^2} + z_n^2 = 0$$

由于 $z_1 \geq 0$ 和 $r \geq 1$，我们有

$$z_1^2 - a^2 + 2z_1\sqrt{1-a^2} + z_n^2 \leq 0.$$

也就是说，

$$\left(z_1 + \sqrt{1-a^2}\right)^2 + z_n^2 \leq 1.$$

我们得出结论： $z \in \mathrm{Sp}(ae_n, -ae_n)$。 □

2.3 纺锤凸性

我们称直径小于或等于 2 的子集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是纺锤凸的，如果对于任意 $x, y \in K$，都有 $\mathrm{Sp}(x, y) \subset K$。等价地，当且仅当对每个$x, y \in K$，以及连接 x 和 y 的半径至少为 1 的圆上的短圆弧 γ，都有 $\gamma \subset K$，该集合 K 才是纺锤凸的。还要注意， K 是严格凸的，因为连接 x 和 y 的线段的内部位于 $\mathrm{Sp}(x, y)$ 的内部。

每个半径为 1 的闭球 B 都是纺锤凸的。事实上，若 $x, y \in B$，则根据定义

$$\mathrm{Sp}(x, y) = \bigcap_{x,y \in B(z)} B(z) \subset B.$$

也很容易验证，任意一族纺锤凸集的交集仍然是纺锤凸的。因此，任意一族半径为 1 的闭球的交集都是纺锤凸的。由此又可推出，每个纺锤体 $\mathrm{Sp}(x, y)$ 本身都是纺锤凸的，因为它是半径为 1 的闭球的交集。

我们将验证“半径为一的闭球的交集是纺锤凸的”这一观察的逆命题。也就是说，我们将证明任何纺锤凸 K 都是半径为一的闭球的交集。为此，我们称 ∂B 为经过x 的支撑球，如果 B 是一个半径为一的球， $x \in \partial B \cap \partial K$，并且 $K \subset B$。以下命题已在 [1], 引理 3.1和 [9], 定理3.1以及 [10]定理 6.1.5中得到证明。不过，为了完整起见，我们仍将给出证明。

命题 2.9。 假设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是直径至多为二的凸体。以下陈述等价。

(i) K 是纺锤凸。

(ii) 对于每个 $x \in \partial K$ 和 K 在 x处的支撑平面 L，存在一个经过x的支撑球，它与 L 相切，并且位于 L 与 K 相同的一侧。

(iii) K 是半径为一的闭球的交集。

证明。$(i) \Longrightarrow (ii)$假设 $x \in \partial K$， H 是一个半空间，使得 ∂H 是 ∂K 在 x处的支撑平面，并且 $K \subset H$。令 B 为半径为一的 Ball，使得 ∂B 在 x 处与 ∂H相切，并且 $B \subset H$。我们断言， ∂B 是 K 在 x处的支撑球。否则，存在$y \in K$ 满足 $y \notin B$。考虑二维平面 Π，它由经过 B 的中心和 x 的直线，以及经过 B 的中心和 y的直线所确定。由于 $y \notin B$ 和

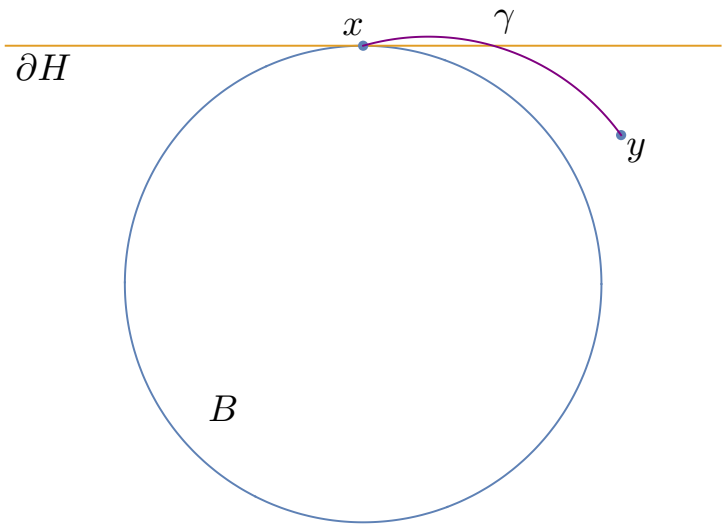


图 8：这里 B 是一个半径为一的 Ball，包含于半空间 H 中，且满足$x \in \partial H \cap \partial B$。如果 $y \notin B$、$y \in H$ 和 $|x-y| \leq 2$，则存在一段半径为一的圆上的短圆弧 γ，连接 x 和 y，且不完全包含于 H 中。

K 的直径小于或等于二时，存在半径为一的短圆弧 $\gamma \subset \Pi$ 连接 x 和 y，且不包含于 H；见图 8。特别地，存在不属于 K的 $z \in \gamma$。然而，这与我们的假设相矛盾，即 K 是纺锤凸的。

$(ii) \implies (iii)$ 显然

$$K \subset \bigcap \{B : \partial B \text{ is a supporting sphere for } K \text{ at some } x \in \partial K\}.$$

现在假设 $y \notin K$。由于 K 是一个凸体，存在支撑平面 L，其对应的凸体为 K，该平面在某个 $x_0 \in \partial K$ 处分隔 K 和 y。根据假设，存在一个属于 K 的支撑球 ∂B_{x_0}，它位于 L 的与 K 相同的一侧。因此，$y \notin B_{x_0}$。特别地，y 不属于边界为 K 的支撑球的球的交集。我们得出结论

$$K^c \subset \left(\bigcap \{B : \partial B \text{ is a supporting sphere for } K \text{ at some } x \in \partial K\}\right)^c.$$

$(iii) \implies (i)$ 如前所述，一组半径为一的球的交集必然是纺锤凸的。

□

关于纺锤凸形状的另一个基本事实（曾在 [1] 第 5 节和 [9]，第 4 节中讨论）如下。

引理 2.10. 假设 B 是半径为 *1* 的闭球，且 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是纺锤凸的。那么$K \cap \partial B$ 在 ∂B中是测地凸的。并且，如果 $K \neq B$, $K \cap \partial B$ 是∂B的某个半球的子集。

证明. 假设 $x, y \in K \cap \partial B$。存在一条连接 x 和 y的最短测地线 $\gamma \subset \partial B$。由于 γ 是半径为 1 的圆上的一段短圆弧，因此 $\gamma \subset K$。所以， $\gamma \subset K \cap \partial B$。

让我们假设 B 是单位球，并且 $K \neq B$。由于 K 是纺锤凸集，它是另一个半径为 1、中心位于 $a \in \mathbb{R}^n$ 且不同于原点的球的子集。如果$x \in K \cap \partial B$，那么 $|x - a| \leq 1$ 和 $|x| = 1$。因此，

$$|x|^2 - 2a \cdot x + |a|^2 \leq 1 = |x|^2.$$

也就是说， $|x| = 1$ 和 $x \cdot a > 0$。因此， x 属于 ∂B 的一个半球。 □

我们还可以确定哪些纺锤凸形状具有定宽。下面的定理通常归功于Eggleston [2], ，而 Eggleston 又将功劳归于Jessen [7]。在下面的表述中，我们将使用 $z \in K$ 处法锥的概念，其定义为

$$N_K(z) = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot (v - z) \leq 0 \text{ for all } v \in K\}.$$

定理 2.11. 假设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体。那么 K 具有定宽当且仅当

$$K = B(\partial K).$$

证明。首先假设 K 具有定宽。不难看出， K 的直径为一。由于对于任意 $x \in K$ 和 $y \in \partial K$， $|x - y| \leq 1$，可得 $K \subset B(\partial K)$。接下来假设$y \notin K$。于是存在一个 K 的支撑平面 L，将 K 和 y分隔开。令 u 为 L 的外单位法向量，并选取 $x \in \partial K$，使得 $u \in N_K(x)$。由于 K 具有定宽，还存在 $w \in \partial K$，满足 $|x - w| = 1$ 且 $-u \in N_K(w)$。注意， $B(w)$不包含 y，因为 $B(w)$与 K 位于 L 的同一侧。见图 9。因此， $y \notin B(\partial K)$。我们得出 $K^c \subset B(\partial K)^c$。

反过来，设 $K = B(\partial K)$。不难验证， $K = B(\partial K)$意味着 K的直径至多为一。设 L, L' 是 K 和 $x \in L \cap \partial K$的平行支撑平面。注意， L 与 L' 之间的距离不超过一，因为 $\operatorname{diam}(K) \leq 1$。由于 K 是纺锤凸的，存在一个支撑球 $\partial B(w)$，它在 x 处支撑 K，且 $B(w)$与 K 位于 L 的同一侧。特别注意，由于 $\partial K \subset K \subset B(w)$， $w \in B(\partial K)$。还要注意，如果 L 与 L' 之间的距离小于一， w 就不可能属于K。我们再次参见图 9。根据假设 $B(\partial K) = K$， L 与 L' 之间的距离必定等于一。由此得出， K 是定宽的。 □

注记 2.12。 如果我们将 $\operatorname{ext}(K)$ 表示为凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的极点，那么$B(K) = B(\operatorname{ext}(K))$。 因此，

$$B(\partial K) = B(K)$$

对于任意严格凸的 K。特别地，对于每个定宽 K， $K = B(K)$。

注记 2.13。我们在上面的证明中使用了几项对于给定凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 而言值得重复说明的内容。包含关系 $K \subset B(\partial K)$ 等价于 K 的直径至多为一。并且， $K \supset B(\partial K)$ 当且仅当 $K \subset B(y)$ 蕴含 $y \in K$。

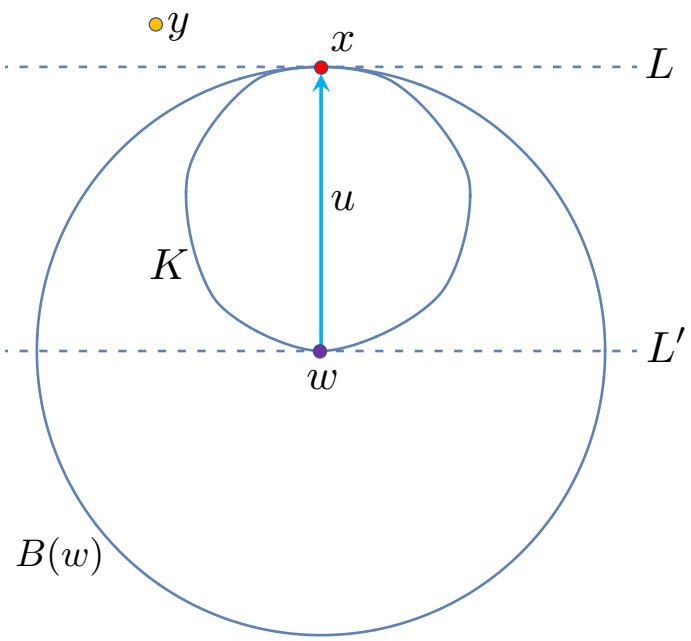


图9：这里有一个凸体 K，其具有 $x \in \partial K$。注意， L 是K 在 x 处、具有外单位法向量 u 的支撑平面，而 ∂B（w）是 K 在 x 处的支撑球，后者位于 L 与 K 所在的同一侧。此外， L 将 y 与 K 分隔开，并且 L' 是一个平行于 L的平面。

注记 2.14。在下文中，我们还将使用一个基本事实：如果 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $X' \subset X$ 是稠密的，那么

$$B(X) = B(X').$$

为说明这一点，令 $y \in B(X')$、 $x \in X$，并选择 $x_n \in X'$ 收敛于 x，当 $n \to \infty$时。于是$|y - x| = \lim_{n\to\infty} |y - x_n| \leq 1$，且 $y \in B(X)$。由此可得 $B(X') \subset B(X)$。显然， $B(X) \subset B(X')$，当 $X' \subset X$ 时。

3 勒洛多面体

假设 a_1、 a_2、 a_3、 $a_4 \in \mathbb{R}^3$ 满足 $|a_i - a_j| = 1$，其中 $i \neq j$。正如我们在引言中所述，相应的勒洛四面体 $R = B(\{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ 有四个顶点、六条圆弧棱和四个球面。此外， R 的顶点恰好是定义 R的球的中心。本节将定义一类具有这些性质的广义对象，并称之为勒洛多面体。具体而言，我们主要介绍相关主题，并综述 Kupitz、Martini 和 Perles 的开创性论文 [9]中的成果。Martini、Montejano 和 Oliveros 的专著 [10]第6章也详细讨论了这些思想。

3.1 球多面体

我们将称 $B(X) \subset \mathbb{R}^3$ 是一个球多面体，当 $X \subset \mathbb{R}^3$ 非空且有限，并且

$$\operatorname{diam}(X) \leq 1.$$

一个初步的观察如下。

引理3.1. 假设 $B(X)$ 是一个球多面体。那么 $X \subset B(X)$，$B(X) \subset \mathbb{R}^3$ 是纺锤凸的，并且 $B(X)$ 具有非空内部。

证明。由于 $\operatorname{diam}(X) \leq 1$，可立即得到 $X \subset B(X)$。此外，容易验证$\operatorname{diam}(B(X)) \leq 2$。由于 $B(X)$ 是半径为一的球的交集，因此它是纺锤凸的。

荣格定理意味着，对于 $\delta = \sqrt{3/8}$ 和某个 $y \in \mathbb{R}^3$，有 $X \subset B_\delta(y)$。如果 $w \in B_{1-\delta}(y)$且 $x \in X$，那么

$$|w - x| \leq |w - y| + |y - x| \leq 1 - \delta + \delta = 1.$$

由此可得 $w \in B(X)$。因此，$B_{1-\delta}(y) \subset B(X)$。 □

识别球多面体的定义中何时不存在冗余，对我们会很有帮助。为此，我们称 $x \in X$ 是本质的，如果红黑大战

$$B(X) \subsetneq B(X \setminus \{x\}).$$

这意味着，若将 x 从 X移除，则 $B(X)$ 不再等于 $B(X \setminus \{x\})$。当且仅当存在 $y \in \mathbb{R}^3$，使得 $X \setminus \{x\} \subset B(y)$而 $x \notin B(y)$ 时，情况才是如此。我们还将称 X 是紧的，前提是每个 $x \in X$ 都是本质的。

以下 关于本质点的翼部观察见 [9] 的第 5 节 .

引理3.2. 假设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是一个直径为一的有限点集。(i) 如果 $x \in X$ 是本质的，则存在 $y \in \mathbb{R}^3$，使得对于每个 $z \in X \setminus \{x\}$都有 $|y-x| = 1$和 $|y-z| < 1$。(ii) 如果 $Y \subset X$ 是 X的本质点的集合，则 $B(Y) = B(X)$。(iii) 如果 $x \in X$，并且存在互不相同的 y、$z \in X$，使得 $|x - z| = |x - y| = 1$，则 x 是本质的。

现在假设 $B(X)$ 是一个球多面体，且 X 是紧的。我们希望描述 $B(X)$ 的边界。正如上文讨论勒洛四面体时所见，我们将看到，$B(X)$ 的边界由有限多个顶点、圆弧棱和球面组成。为此，我们将记

$$\operatorname{val}(x, X) = \#\{y \in X : |x - y| = 1\}$$

为下文定义的顶点 $x \in B(X)$ 的价。

面。注意，y 属于 $B(X)$的内部，当且仅当 $|y - x| < 1$ 对于

所有 $x \in X$。因此， y 属于 $B(X)$的边界，当且仅当存在某个 $x \in X$，使得 $y \in B(X)$ 且 $|y-x|=1$。这意味着

$$\partial B(X) = \bigcup_{x \in X} (B(X) \cap \partial B(x))$$

我们将 $B(X) \cap \partial B(x)$ 定义为与 x 相对的 $B(X)$面。由引理 2.10， $B(X) \cap \partial B(x)$ 是 $\partial B(x)$ 的球面凸子集。由引理 3.2(i)， $B(X)$ 的不同面数量与 X 中元素的数量相同。我们将 $B(X)$ 的面记为 face($B(X)$)。

顶点。若 val(y<style id="8">， $X) \geq 3$，则点 $y \in B(X)$ 是一个主顶点。也就是说，若 y 属于 $B(X)$ 的至少三个面，则 $y \in B(X)$ 是一个主顶点。我们还将满足 val(y<style id="21">， $X) = 2$ 的 $y \in X$ 定义为悬垂顶点。也就是说， $y \in X$ 和 y 恰好属于 $B(X)$ 的两个面。主顶点与悬垂顶点构成 $B(X)$ 的顶点集合，记为 vert($B(X)$)。引理 3.2（iii）表明，每个悬垂顶点都是本质的；此外，若一个主顶点属于 X，则它也是本质的。

边。令 x， $y \in \mathbb{R}^3$ 并回忆， $z \in \partial B(x) \cap \partial B(y)$ 当且仅当

$$\left| z - \frac{x+y}{2} \right| = \sqrt{1 - \left| \frac{x-y}{2} \right|^2}$$

and

$$\left(z - \frac{x+y}{2} \right) \cdot (x-y) = 0.$$

特别地， $\partial B(x) \cap \partial B(y)$ 是一个圆。 $B(X)$ 的一条边是$\partial B(x) \cap \partial B(y) \cap B(X) \setminus$ vert($B(X)$) 的一个连通分支，它在某些$x, y \in X$对应的 $\partial B(x) \cap \partial B(y)$ 中具有非空内部。 $B(X)$ 的边记作 edge($B(X)$)。注意，一条边恰好被 $B(X)$ 的两个面共享， $\partial B(x) \cap \partial B(y) \cap B(X)$ 的每个相对边界点都是一个主顶点，而一个悬垂顶点属于 $\partial B(x) \cap \partial B(y) \cap B(X)$ 的相对内部。

$\mathbb{R}^3$ 中球多面体的一个重要性质是，其顶点、边和面满足一个欧拉型公式。这在 [9] 的命题 6.2 中得到了证明；另请参见 [1] 的推论 6.10。

定理 3.3. 设 $B(X) \subset \mathbb{R}^3$ 是一个球多面体， X 是紧的，且 X 至少包含三个点。那么

$$V - E + F = 2,$$

其中 $V =$#顶点($B(X)$)， $E =$#边($B(X)$)，以及 $F =$#面($B(X)$)。

3.2 V´azsonyi 问题

假设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是一个含有 m 个元素且直径等于一的有限集合。一个自然的问题是确定有多少对点 x， $y \in X$ 满足 $|x-y|=1$。我们

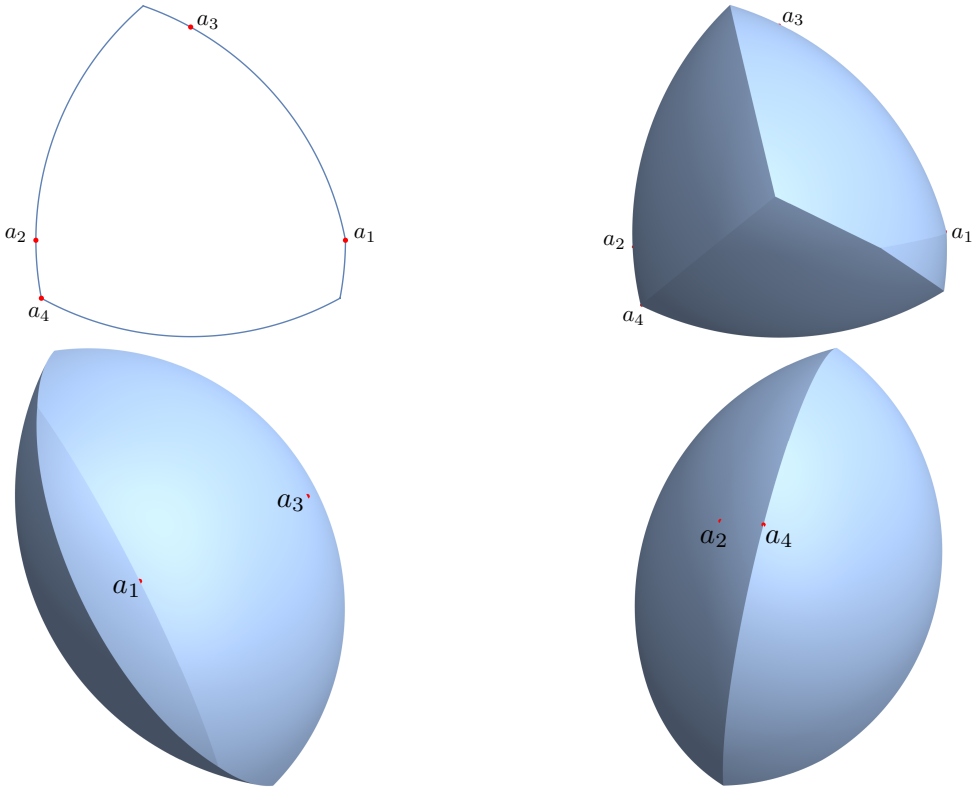


图10：这是一个球多面体 $B(\{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ 的例子，其中 a_1, a_2, a_3, a_4 属于同一平面，且 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 是紧的。左上图是 $B(\{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ 的截面， a_1 和 a_4 是悬垂顶点，并且有四个不属于 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的主顶点。因此， $V = 6$、 $E = 8$, 以及 $F = 4$。

将称 X 为极值的，如果在直径为 1 且含有 m 个元素的有限集中，它具有尽可能多的直径对。我们用 $e(X)$ 表示 X的直径对数量。V´azsonyi 猜想，

$$e(X) \leq 2m - 2.$$

这一猜想由 Gr¨unbaum [3], Heppes [5], 和 Straszewicz[16] 独立验证；关于这一结果的简要讨论，见 [14] 的第13章。这一定理后来也由 Kupitz、Martini 和 Perles [9] 推广如下。

定理 3.4。 设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是一个含有 $m \geq 4$ 个点的有限集合，且 $\mathrm{diam}(X) = 1$。以下各项等价。
(i) X 是极值的。(ii) e
(X) $= 2m - 2$。(iii)
X =vert($B(X)$)。

例3.5。 极值集的一个基本例子是 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，其中 $a_1, \ldots, a_4$ 是边长为一的正四面体的四个顶点。注意，对于所有 $|a_i - a_j| = 1$

$i \neq j$并且这样的直径对有六对 $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$。由于 $2 \cdot 4 - 2 = 6$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 确实是极值的。此外，我们可以向该集合添加点，从而构造一个点数任意多的极值集。考虑连接 a_3 和 a_4的边 e。对于任意 $a_5 \in e$, $|a_5 - a_1| = |a_5 - a_2| = 1$ 和 $|a_5 - a_i| < 1$，当 $i = 3$，4 时。因此， $\{a_1, \ldots, a_5\}$ 有 $2 + 6 = 8 = 2 \cdot 5 - 2$ 对直径对；见下文例 3.8。此外，我们可以向 e 添加任意数量的互不相同的点，并由此推得 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 是极值集。

假设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 有 $m \geq 4$ 个点，且 X 是极值的。根据定理 3.4， $X = \text{vert}(B(X))$，因此 $B(X)$有 m 个顶点。我们已经看到， $B(X)$有 m 个面。根据定理3.3 中讨论的欧拉公式, $2 = V - E + F = 2m - E$。也就是说， $B(X)$有

$$E = 2(m - 1)$$

边。Kupitz、Martini和Perles的另一项重要观察（ [9] 的定理 8.1）是， $B(X)$的边自然地分组为对。我们将把如下定理中所述的任意两条这样的边称为一个对偶边对。根据上述对 E 的计算， $B(X)$ 有 $m - 1$ 个对偶边对。

定理3.6. 假设一个有限的 $X \subset \mathbb{R}^3$，其中至少有四个点，直径$(X) = 1$，且 X 是极值的。进一步假设 $e \subset \partial B(x) \cap \partial B(y) \cap B(X)$是 $B(X)$的一条边，其端点为 x'、$y' \in X$。则 $B(X)$ 存在唯一的一条边 $e' \subset \partial B(x') \cap \partial B(y') \cap B(X)$，其端点为 x、y。

假设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是有限集，且至少包含四个点，并且 X 的直径等于一。沿用 Montejano、Rold´an-Pensado [12] 和 Sallee [15], 的说法，若 X 是极值的，我们就称球多面体 $B(X)$为勒洛多面体 。正如梅斯纳四面体是由勒洛四面体构造而成，各种等宽形状也可以从勒洛多面体出发构造。稠密性定理断言，几乎所有等宽形状都可以通过这种方式构造。

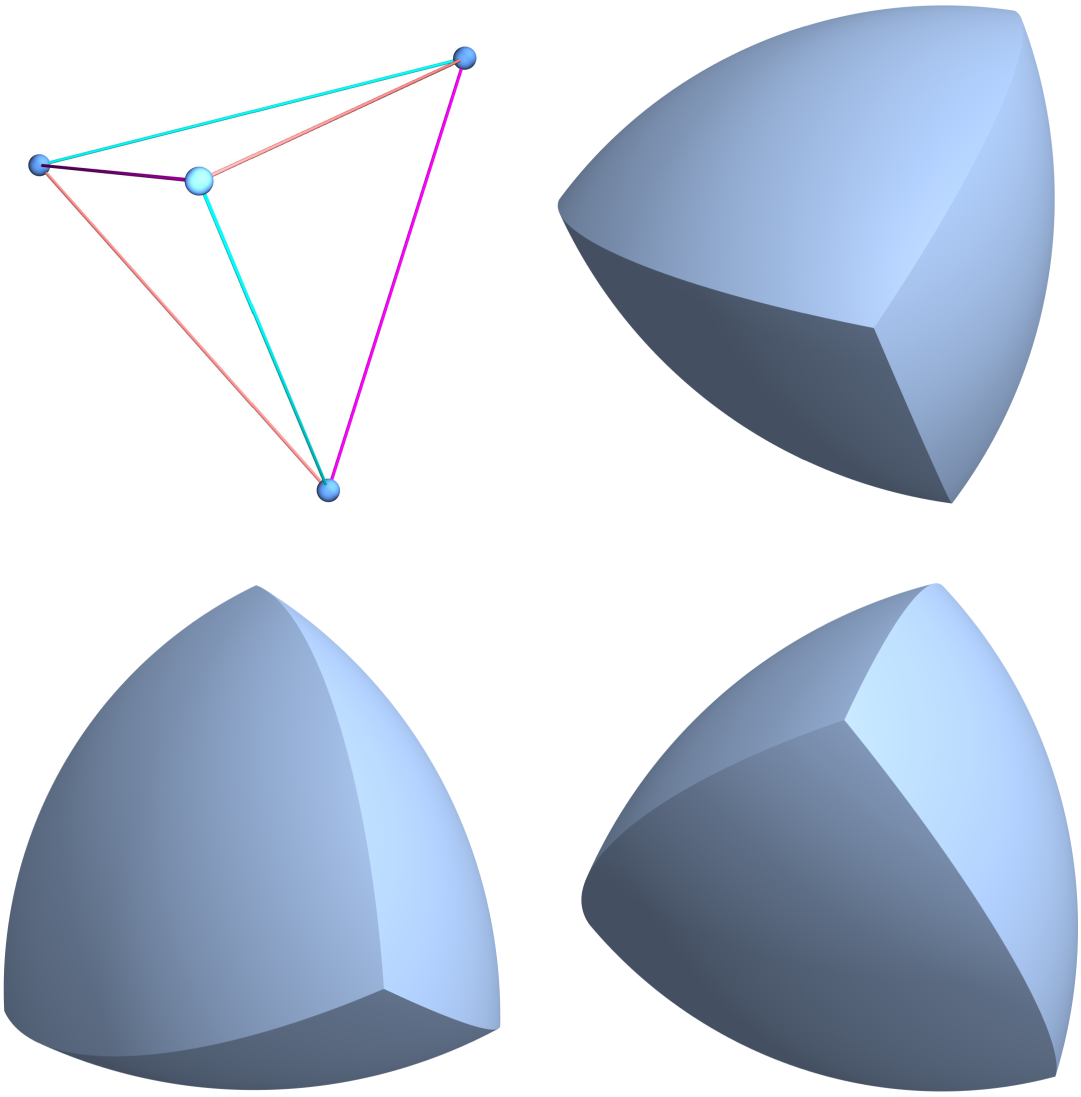
不过要注意，Montejano、Rold´an-Pensado [12] 和 Sallee [15] 将他们的定义限制在 $B(X)$没有悬垂顶点的情形（Sallee 将这些形状称为框架 ，并将术语“勒洛多面体”留给另一类等宽形状）。在这种情况下， X 等于 $B(X)$的主顶点，我们称 X 为临界。例如，在上文的例3.5中， $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 是极值的，而$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 是临界的。

3.3 示例

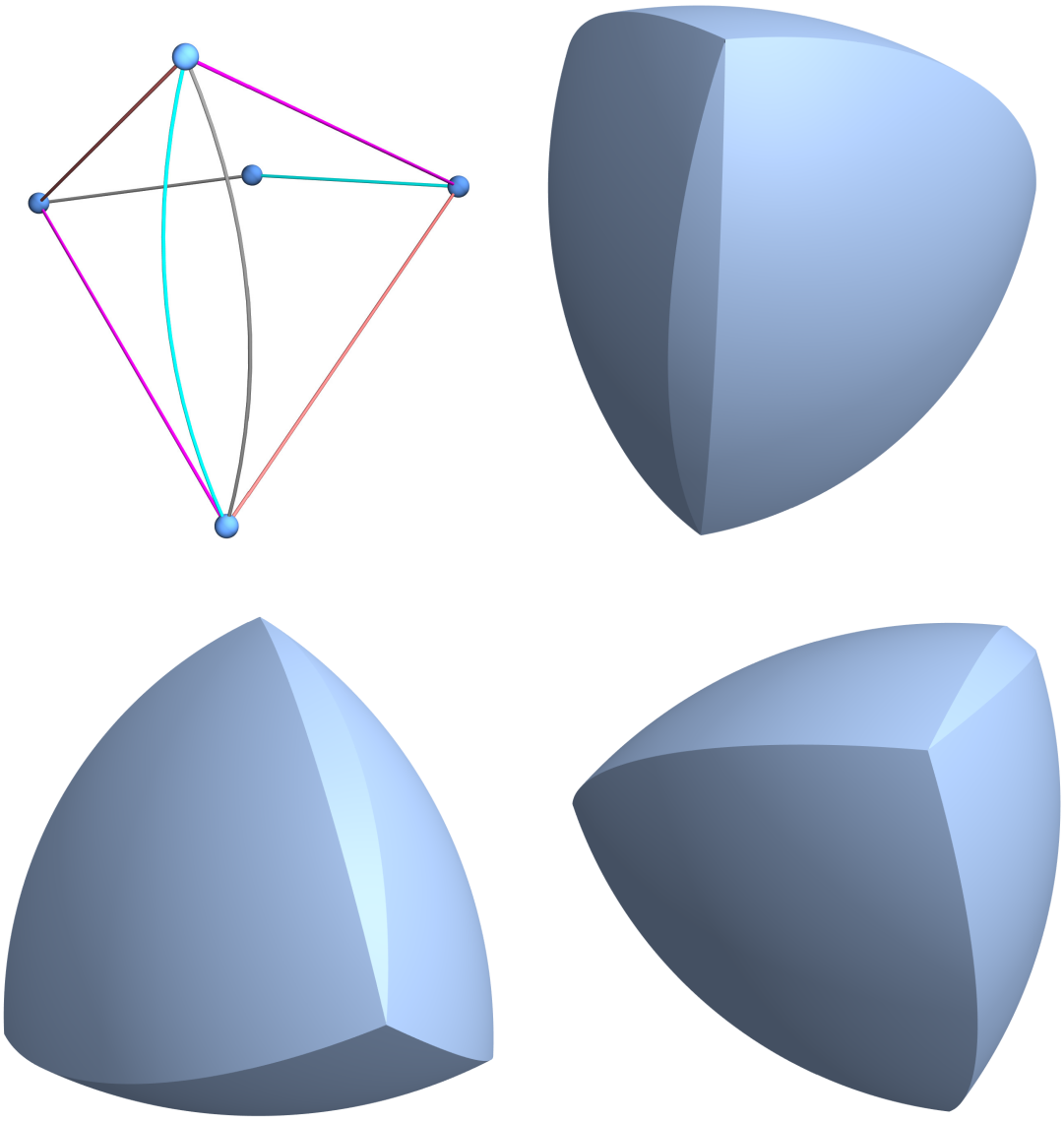
假设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是有限的，且 X 的直径等于一。 X 的骨架是一个图，其顶点和边分别为 vert($B(X)$) 和 edge($B(X)$)。已知球多面体的骨架是一个 2-连通平面图（参见 [9]中的定理 6.1 ）。当 X 是极值的时， $B(X)$ 的面复形具有强自对偶性，详见 [9] 第 9 节和 [10] 第6章。为了帮助直观呈现这些形状，我们将在勒洛多面体的图中一并展示其骨架。本文中的每幅图均由

按照附录中的说明，使用 Mathematica 生成。此外，本文展示的许多示例可以在 [10] 第6章和第 8 章以及论文 [12]中找到，或以其中的示例为基础。我们还推荐文章 [13] ，其中介绍了一种已用于寻找数百个其他示例的方法。

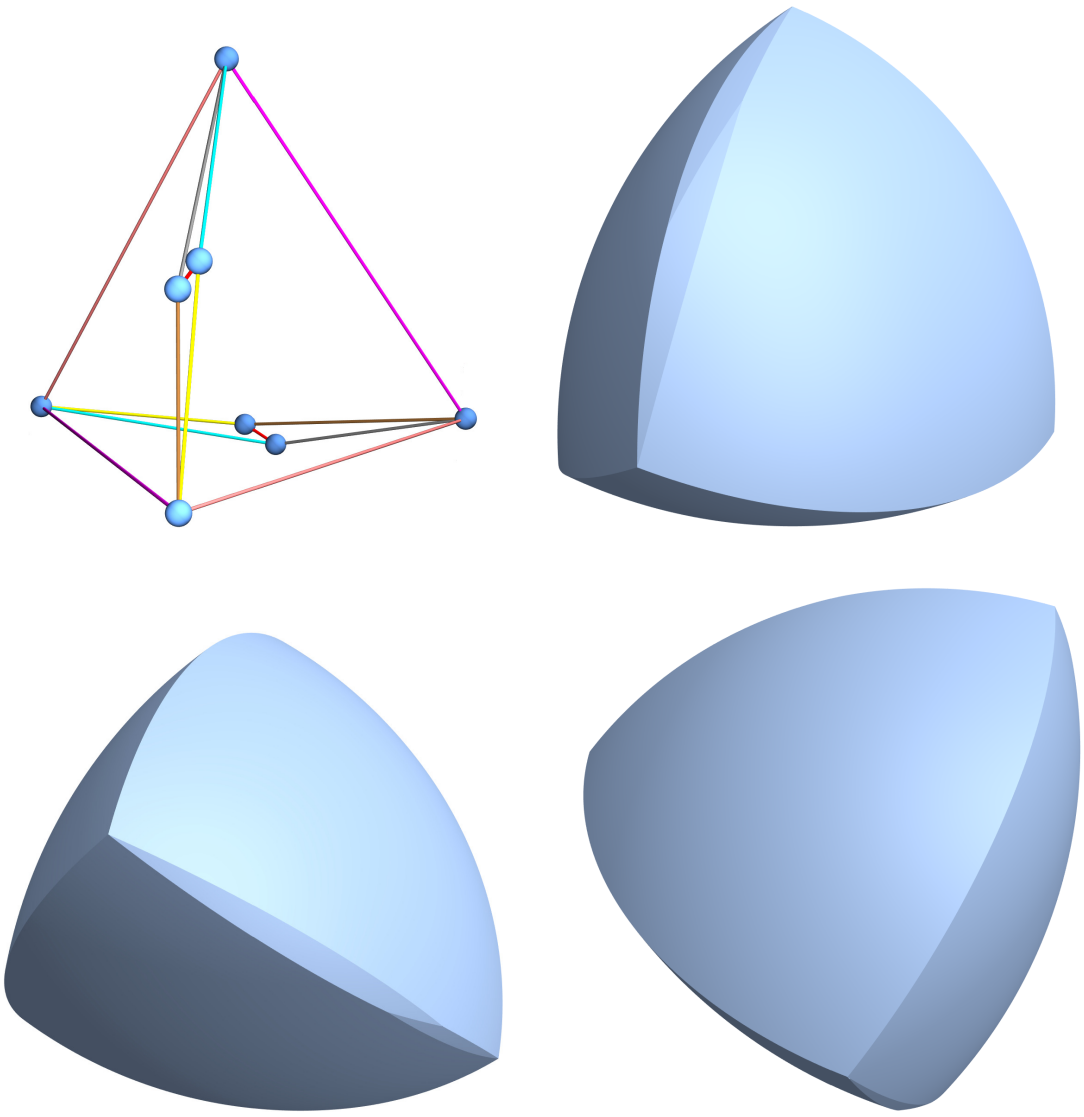
例 3.7。 我们的第一个例子是一个勒洛四面体。该形状的顶点 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 也是边长为 1 的正四面体的顶点。每对顶点之间都有一条边，因此其骨架就是一个含有四个顶点的完全图。在下方的图中，我们用相同的颜色标示对偶边。



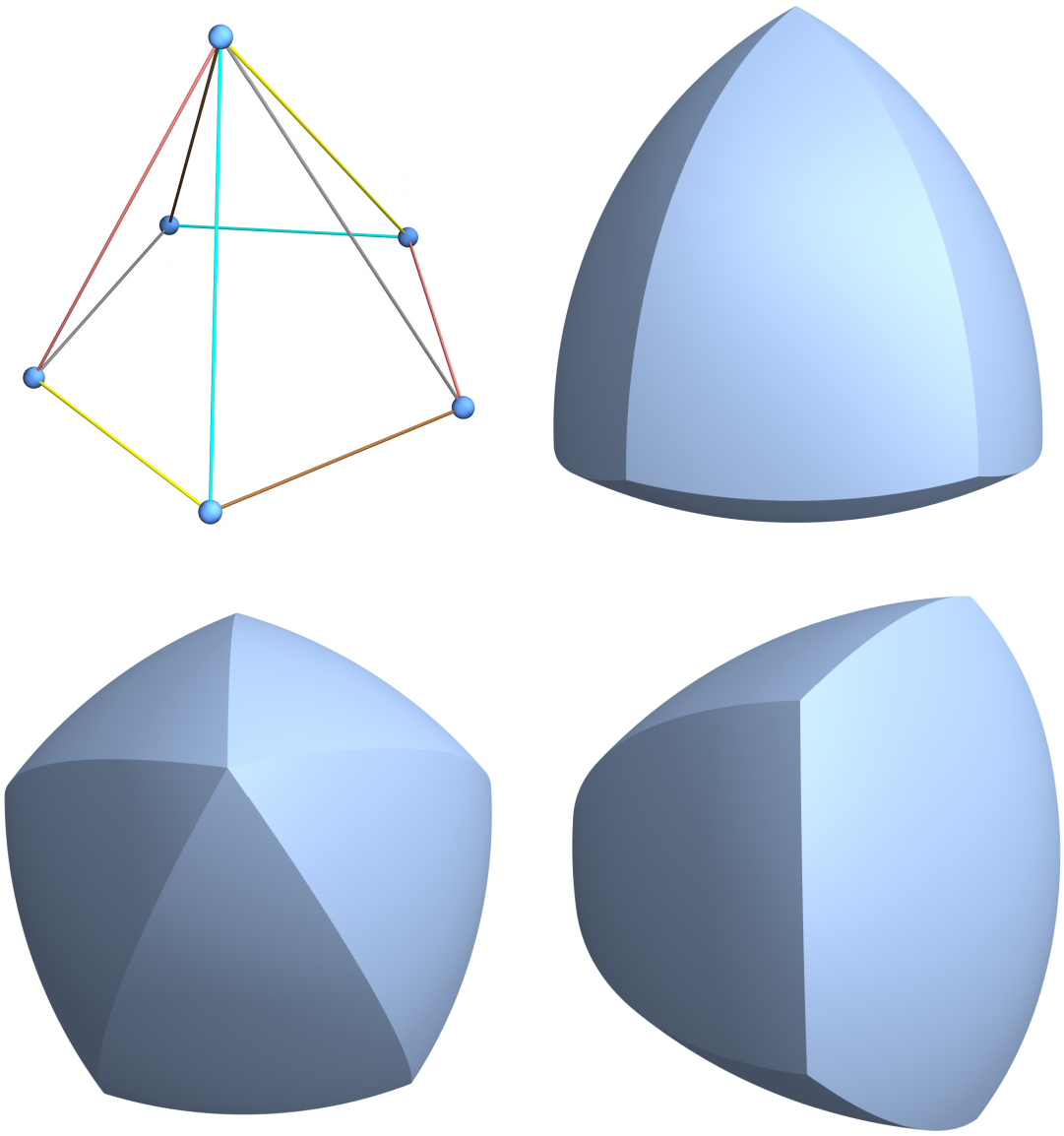
例 3.8. 在前一个例子的基础上，我们假设 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 是某个勒洛四面体的顶点。我们还选取 a_5 作为连接 a_3 和 a_4 的边的中点，并考察 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$。如上所述，这组点是极值的，但不是临界的，因为 a_5 是下方所示相应勒洛多面体中的一个悬垂顶点。同样，我们用相同的颜色标示对偶边。



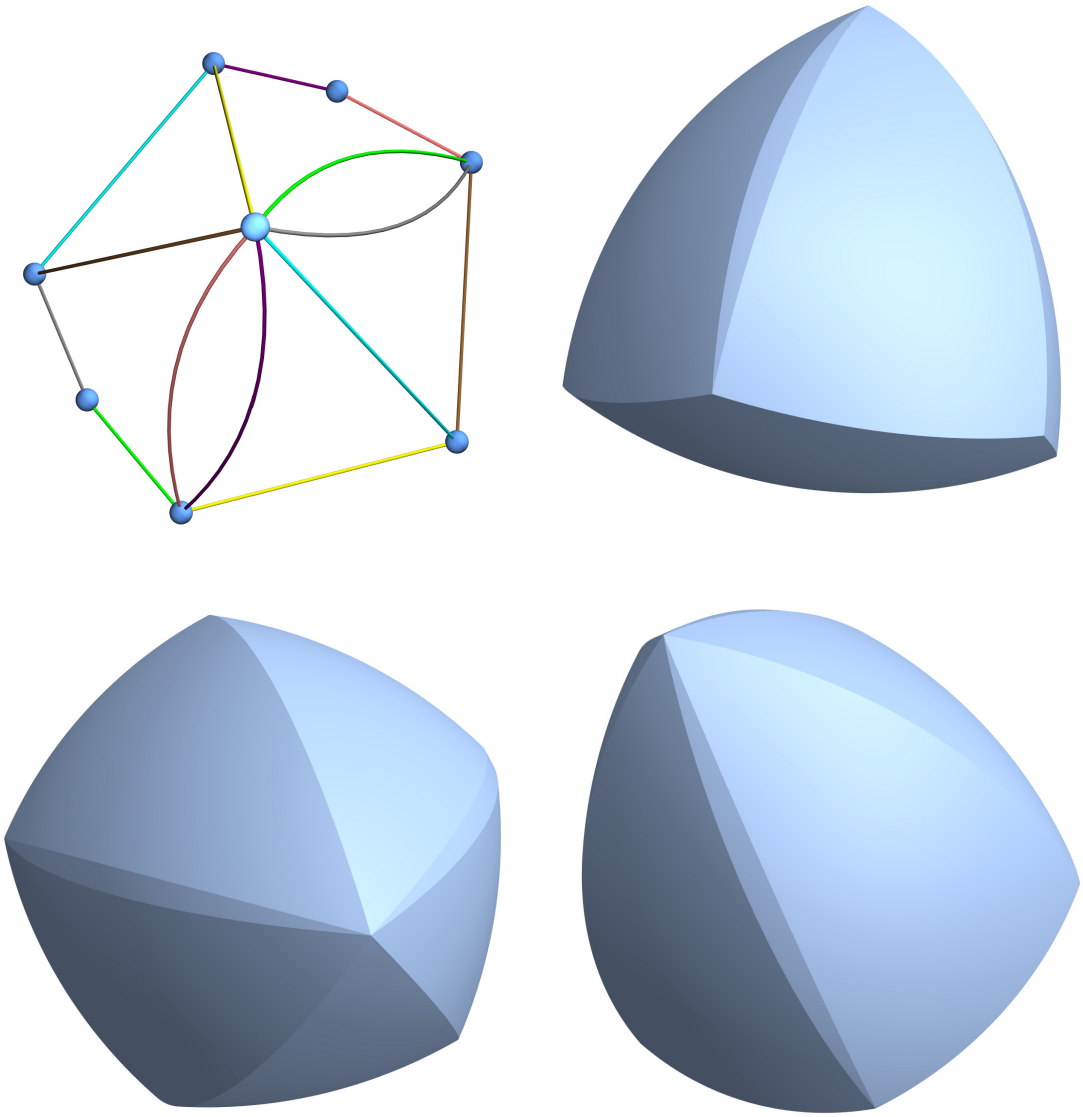
例 3.9. 下面给出一个临界集的例子 $X = \{a_1, \ldots, a_8\}$，它在 [9], 的引言中曾被讨论，尽管当时并未明确描述。这个例子特别有趣，因为 $B(X)$ 的骨架是 2-连通的，但不是 3-连通的。 X 还将一个正四面体的顶点作为真子集包含在内。



例3.10. 假设 $a_1, \ldots, a_5 \subset \mathbb{R}^3$ 位于一个平面内，并且是直径为一的正五边形的顶点。可以选择 $a_6 \in \mathbb{R}^3$，使得对于 $j = 1, \ldots, 5$，$|a_6 - a_j| = 1$。事实证明，$\{a_1, \ldots, a_6\} \subset \mathbb{R}^3$ 是临界的。下方展示了 $B(\{a_1, \ldots, a_6\})$ 的三个视图，以及相应的骨架。我们还指出，可以用其他奇数边正多边形推广这一构造，从而得到更多勒洛多面体。[9]中的例1.2对此作了说明。



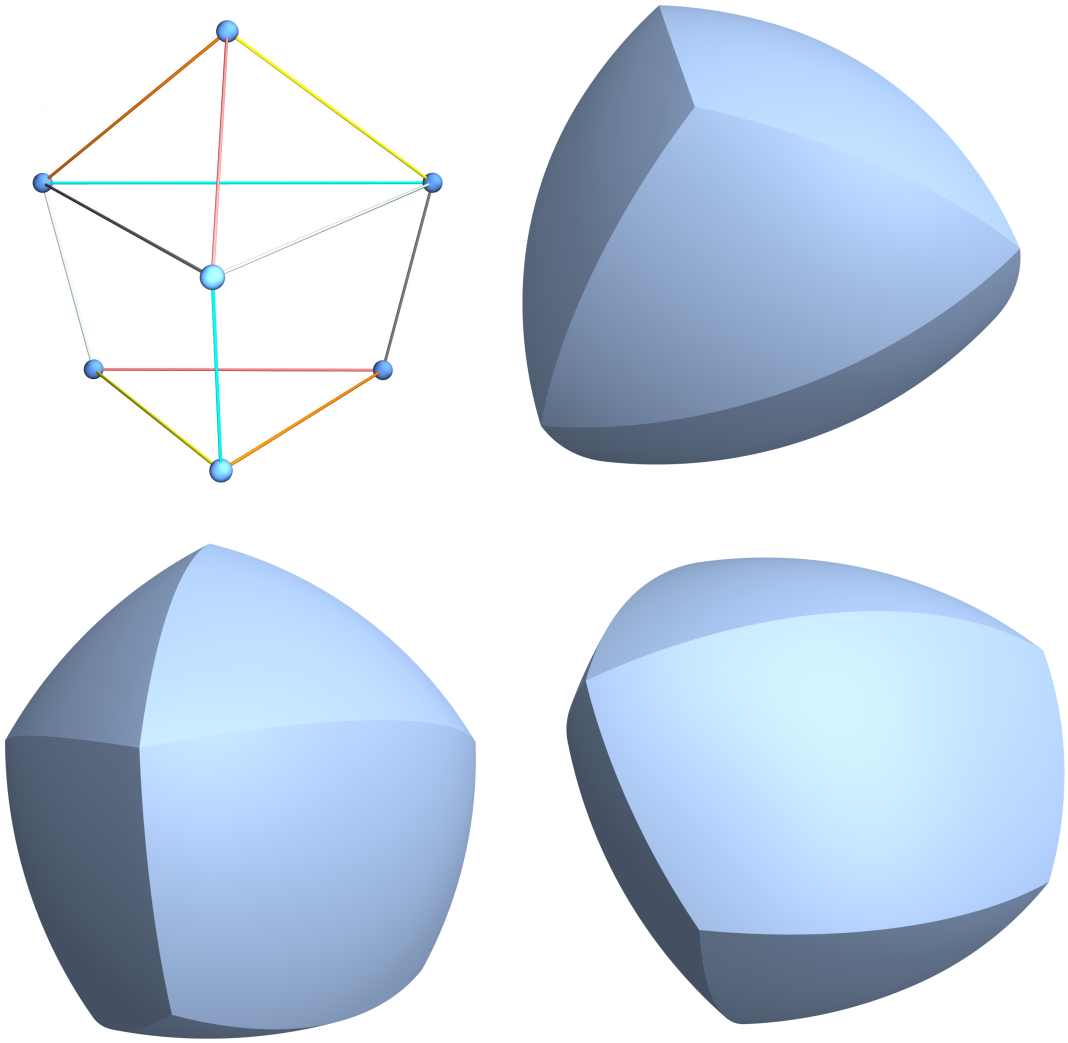
例 3.11。 回顾我们前面示例中的临界集 $\{a_1, \ldots, a_6\} \subset \mathbb{R}^3$。如果我们在 B（$\{a_1, \ldots, a_6\}$）的两条不同（非对偶）边中分别选择两个点 a_7 和 a_8，那么 $\{a_1, \ldots, a_8\}$ 就是一个极值集。其对应的骨架和勒洛多面体如下所示。



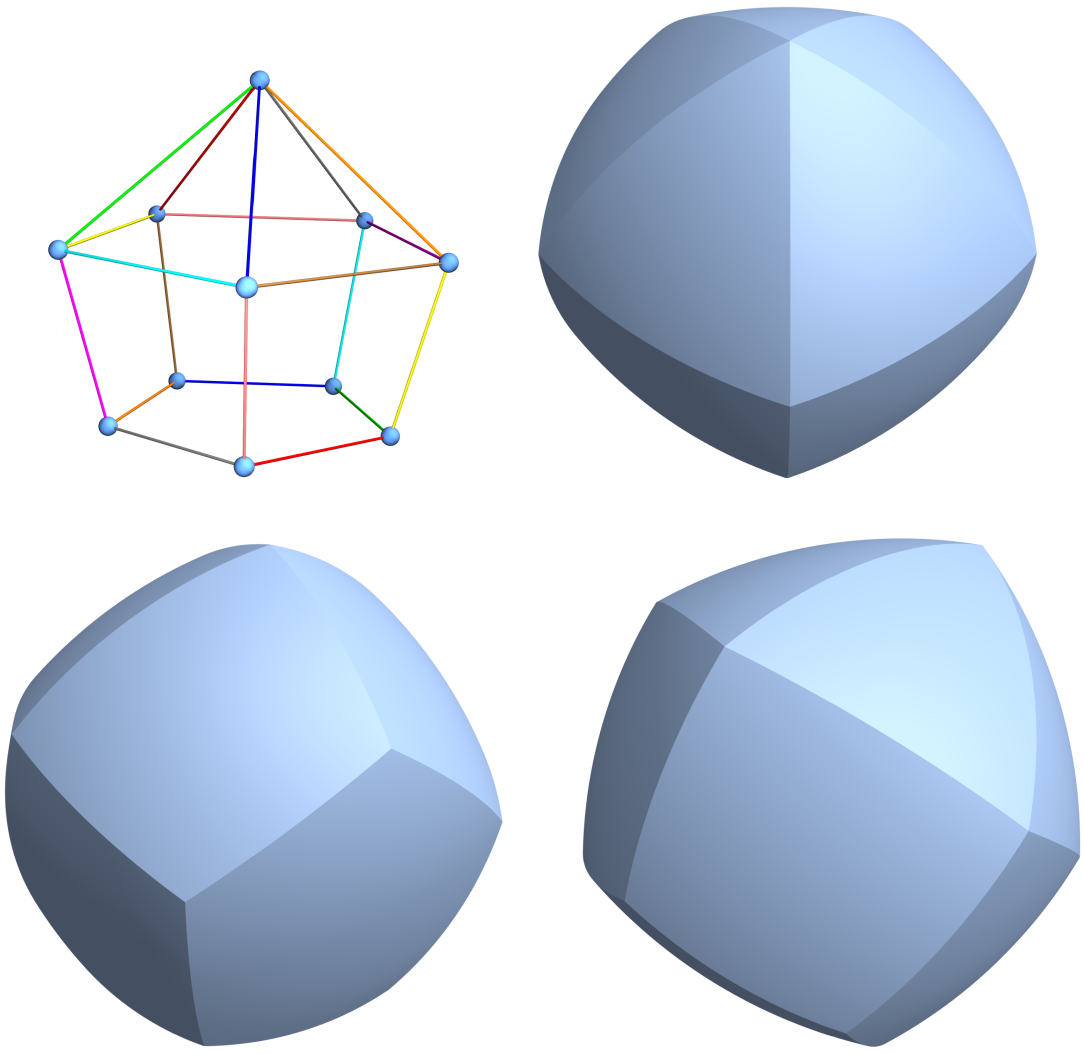
例 3.12. 我们可以通过选择与细长三角锥的顶点类似的顶点 $\{a_1, \ldots, a_7\}$来设计一个勒洛多面体。事实上，对于每个 $t \in (0, 1)$

$$\begin{cases} a_1 = (0, 0, \sqrt{1 - t^2/3} - \sqrt{1 - (t^2 + t + 1)/3}) \\ a_2 = (0, 1/\sqrt{3}, 0) \\ a_3 = (-1/2, -1/(2\sqrt{3}), 0) \\ a_4 = (1/2, -1/(2\sqrt{3}), 0) \\ a_5 = ta_2 - (0, 0, \sqrt{1 - (t^2 + t + 1)/3}) \\ a_6 = ta_3 - (0, 0, \sqrt{1 - (t^2 + t + 1)/3}) \\ a_7 = ta_4 - (0, 0, \sqrt{1 - (t^2 + t + 1)/3}) \end{cases}$$

是临界的。相应的骨架和勒洛多面体 $B(\{a_1, \ldots, a_7\})$ 显示如下。



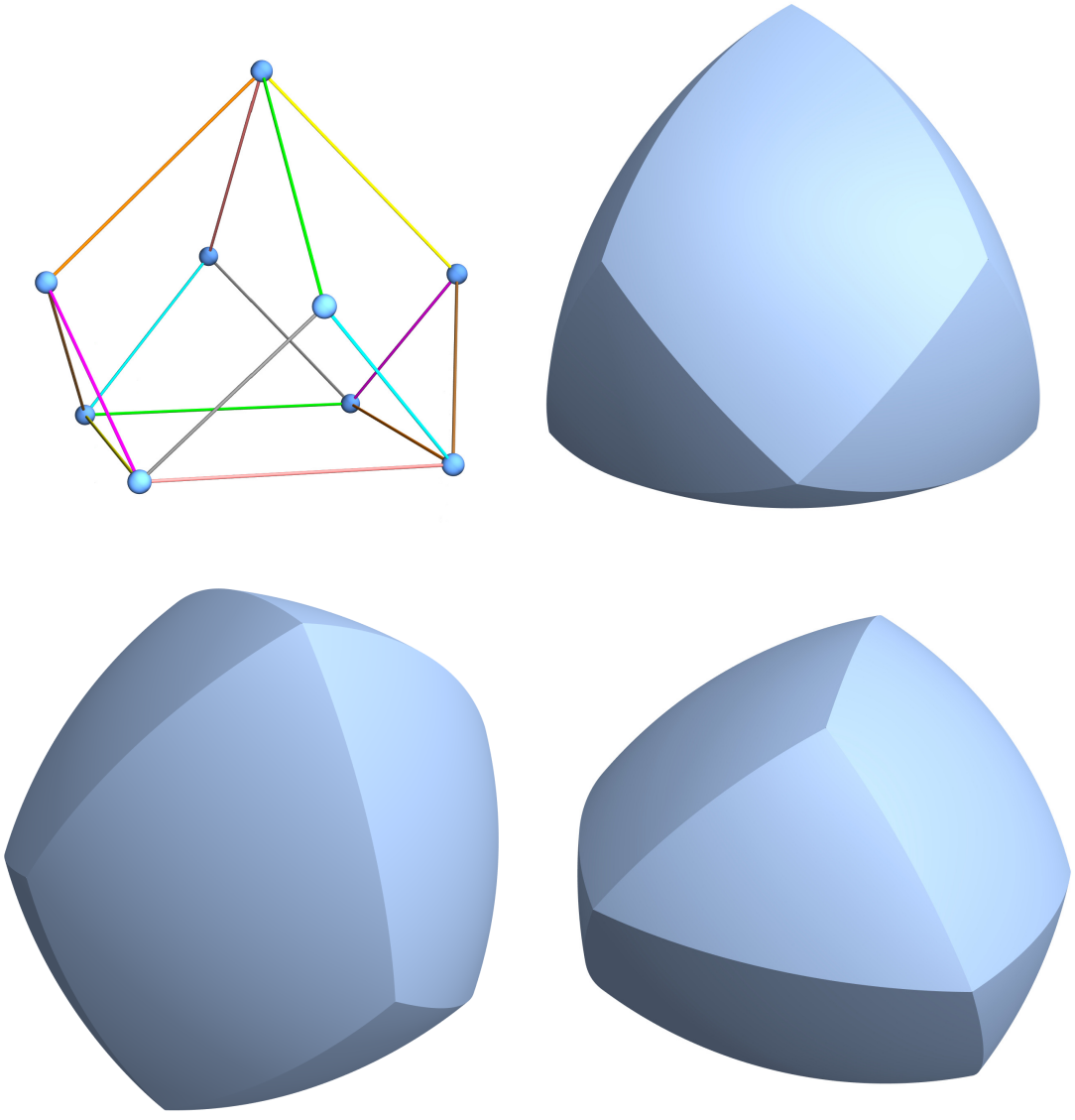
例3.13。上面的细长三角锥示例可以扩展为具有任意奇数个顶点且顶点数至少为三个的棱锥。例如，我们可以将其扩展为具有顶点 $\{a_1, \ldots, a_6\}$的五角锥。如果 $\{a_2, \ldots, a_6\}$ 构成棱锥的底面，则可以通过选择另外五个顶点 $\{a_7, \ldots, a_{11}\}$ 来实现，这些顶点位于与包含 $\{a_2, \ldots, a_6\}$ 的平面平行的一个平面上，并且该平面位于包含 $\{a_2, \ldots, a_6\}$ 的平面的另一侧，而不是 a_1 所在的一侧。此外，应调整顶点 a_1，使得 $|a_1 - a_j| = 1$ 对于 $j = 7, \ldots, 11$。临界集 $\{a_1, \ldots, a_{11}\}$ 的勒洛多面体及其骨架如下所示。



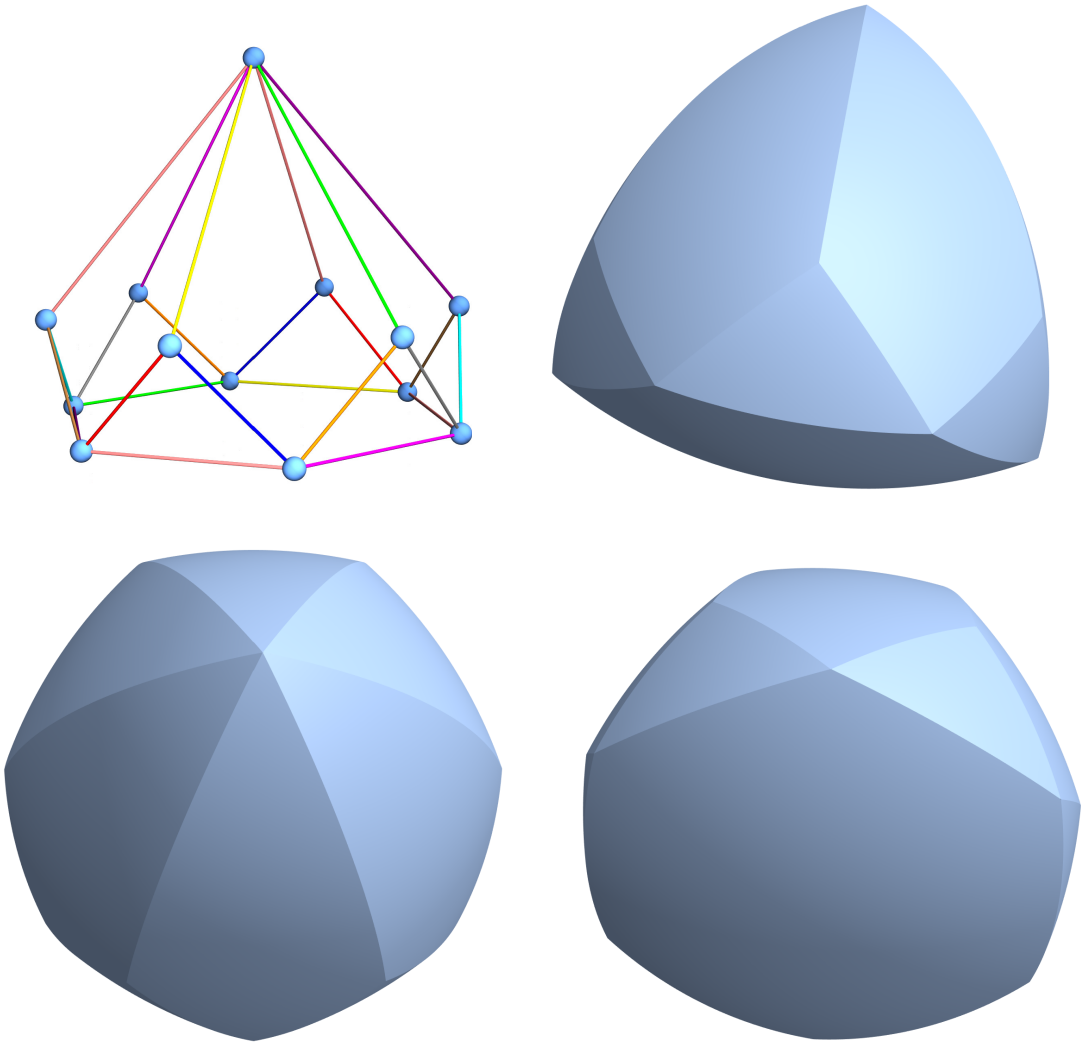
例3.14。 一个包含九个点的临界集，这些点同时也是一个具有正方形底面的截角偏方面体的顶点，是

$$\begin{cases} a_1 = (0, 0, (1-2s^2)^{1/2}) \\ a_2 = (0, 1/2, b) \\ a_3 = (1/2, 0, b) \\ a_4 = (-1/2, 0, b) \\ a_5 = (0, -1/2, b) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_6 = (s, s, 0) \\ a_7 = (-s, s, 0) \\ a_8 = (-s, -s, 0) \\ a_9 = (s, -s, 0). \end{array}$$

这里 $s = 1/(2\sqrt{2})$ 和 $b = (1 - s^2 - (s + 1/2)^2)^{1/2}$。



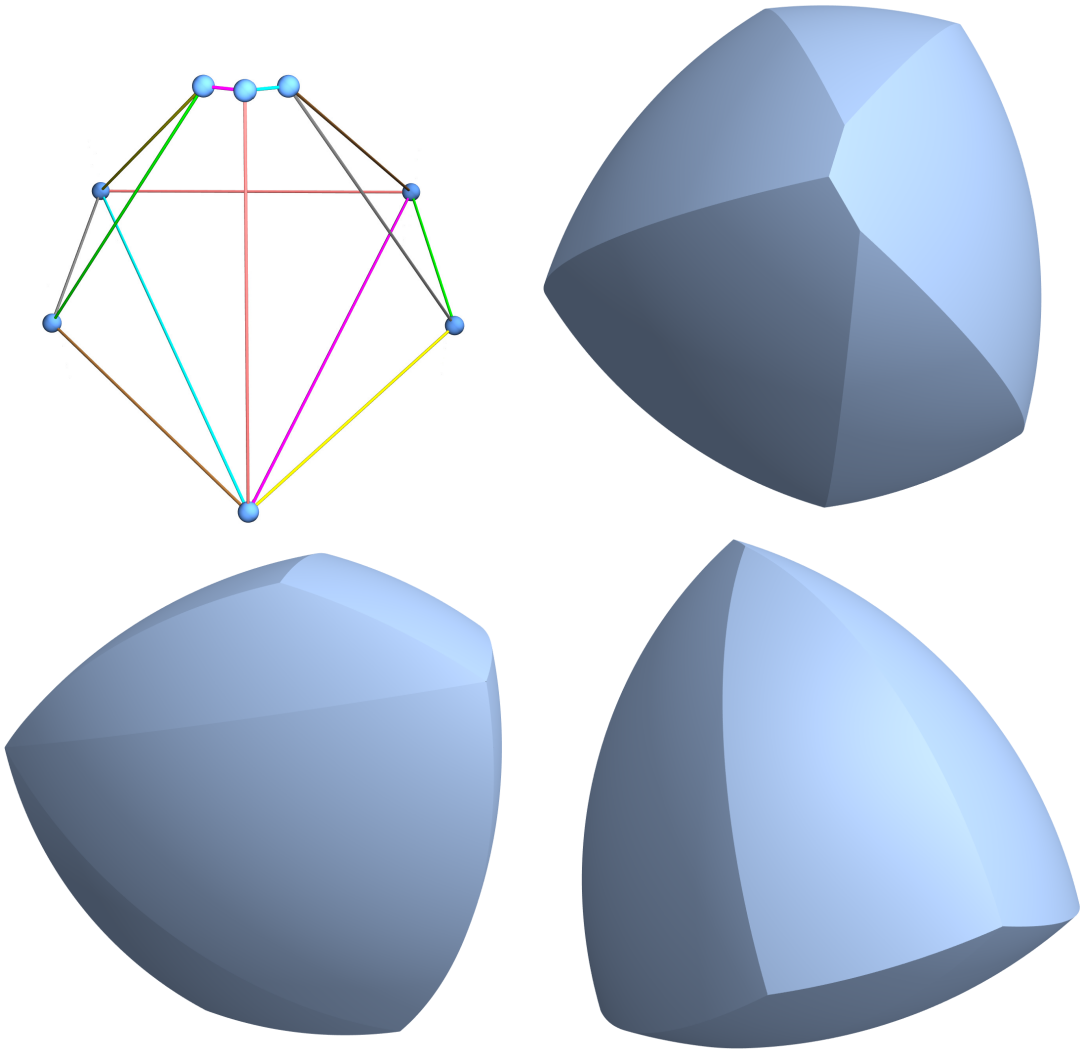
例 3.15。 更一般地，我们可以构造一个勒洛多面体，使其顶点与某个截角偏方面体的顶点相同，而该偏方面体的底面由边数为偶数的正多边形的顶点组成。上一个例子就是这种形状的一个实例，其底面为正方形。仿照上一个例子的论证，我们可以找到一个极值集，它是一个带六边形底面的截角偏方面体的顶点 $\{a_1, \ldots, a_{13}\}$。其对应的勒洛多面体及其骨架如下所示。



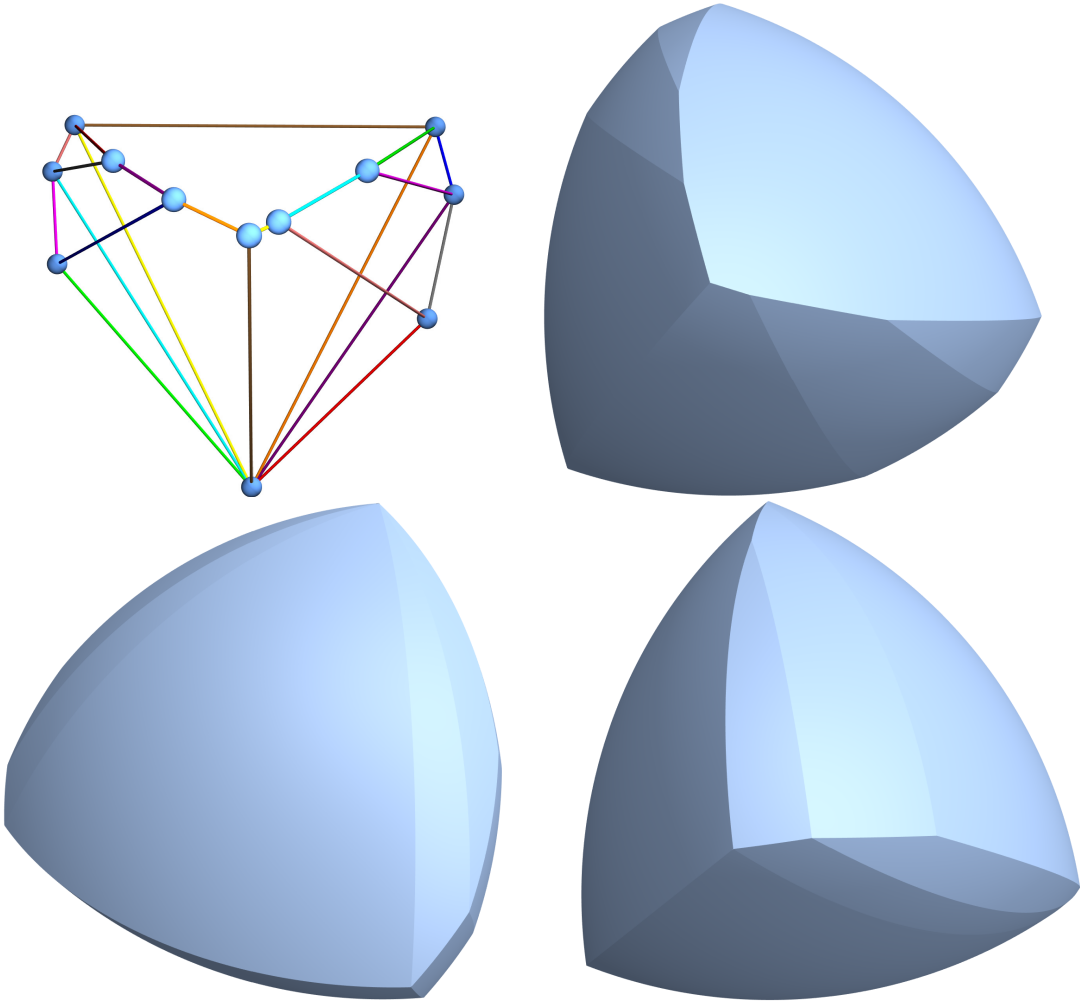
例3.16。 点的集合

$$\begin{cases} a_1 = (0,0,0) \\ a_2 = (1/\sqrt{2},0) \\ a_3 = (\sqrt{7/8},\sqrt{1/8},0) \\ a_4 = (\sqrt{1/8},\sqrt{7/8},0) \\ a_5 = (0,1/\sqrt{2},0) \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_6 &= (\sqrt{2}/(1+\sqrt{7}),(1/3)\sqrt{1+2\sqrt{7}}) \\ a_7 &= \left(1/(2\sqrt{2}),(4-\sqrt{7})/(2\sqrt{2}),\sqrt{-2+\sqrt{7}}\right) \\ a_8 &= \left((4-\sqrt{7})/(2\sqrt{2}),1/(2\sqrt{2}),\sqrt{-2+\sqrt{7}}\right) \end{aligned}$$

直径为一且是临界的。这个例子可视为例3.10的一个变体，因为 $\{a_1,\ldots,a_5\}$ 是一个直径为一但不规则的五边形的顶点。



例3.17。 Montejano 和 Rold´an-Pensado（ [12]中的定理5.2）证明，若 $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\}$ 是一个勒洛多边形的顶点，且 $\{a_{n+1}, \ldots, a_m\}$是 B（ $\{a_1, \ldots, a_n\}$）在半空间 $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 > 0\}$中的主顶点，则$\{a_1, \ldots, a_m\}$ 是极值的。前面的例子就是这一结果的一个实例；在该例中，$\{a_1, \ldots, a_5\}$ 是一个勒洛五边形的顶点。下方展示了另一个基于勒洛七边形 $\{a_1, \ldots, a_7\}$ 的例子，它总共有十二个顶点。



4 迈斯纳多面体

设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是一个直径为一的有限凸点集，且 X 是极值的。那么 $B(X)$有 $m-1$ 对偶边对

$$(e_1, e_1'), \ldots, (e_{m-1}, e_{m-1}').$$

形如

$$B(X \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{m-1})$$

是以 X为底面的迈斯纳多面体。如果 $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 是一个边长为一的正四面体的顶点集，我们将看到，与之对应的迈斯纳多面体就是引言中讨论的迈斯纳四面体；请回顾图 3、4。其他迈斯纳多面体的示例见下文图 11、14、16、17、18。

已知迈斯纳四面体具有定宽性质，因此自然会问，迈斯纳多面体是否也具有这一性质。事实证明确实如此。在证明以下定理之前，我们将先建立一些引理，并论证这些形状本质上与 Montejano 和 Rold´án-Pensado [12]引入的形状相同。

定理 4.1。 每个迈斯纳多面体都是定宽的。

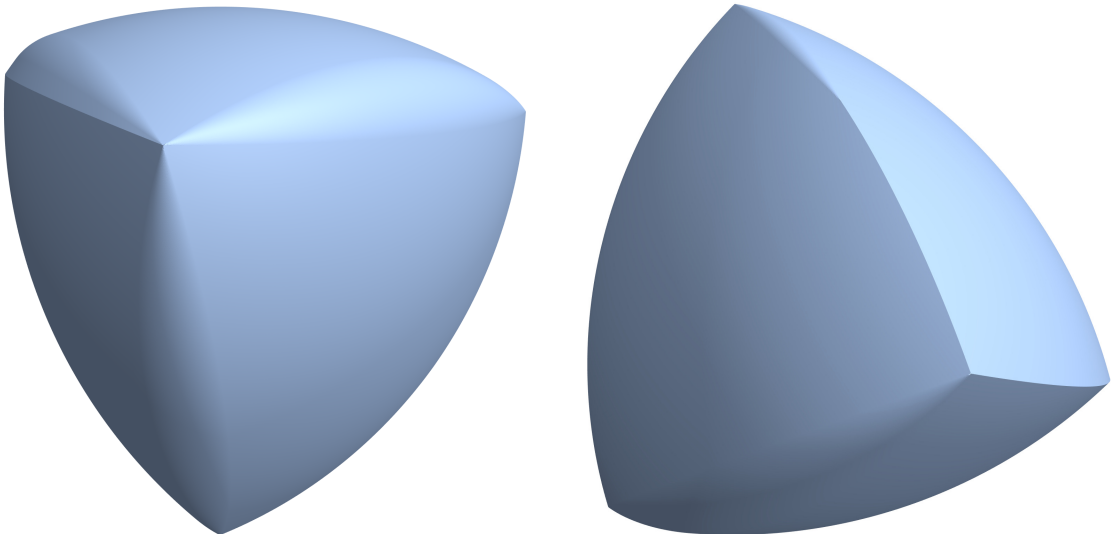


图 11：一个梅斯 基于例 3 中极值集 $\{a_1, \ldots, a_5\}$ 的梅斯纳多面体。 8.

4.1 楔形体

在本小节中，我们将固定一个直径为一、具有 $m \geq 4$ 个点且为极值的子集 $X \subset \mathbb{R}^3$ 。假设 (e, e') 是勒洛多面体 $B(X)$ 的一个对偶边对，并将 e 的端点记为 b, c ，将 e' 的端点记为 b', c'。定理 3.6 意味着

$$|b - b'| = |b - c'| = |c - b'| = |c - c'| = 1.$$

由于 b', c' 是以 b为中心的单位球面上的互异的非对跖点， $\{b, b', c'\}$ 是仿射无关的。同样，$\{c, b', c'\}$ 是仿射无关的。因此，存在唯一的半空间 $H, L \subset \mathbb{R}^3$，使得 $b, b', c' \in \partial H$，而 $c \notin H$和$c, b', c' \in \partial L$，而 $b \notin L$. 我们定义

$$W_{e'} = H \cap L \cap B(X).$$

作为相对于 $B(X)$、与边 e' 相关联的楔形体 。示意见图 12。我们还将使用以下记号

$$\mathrm{int} W_{e'} = (H \cap L)^0 \cap B(X)$$

表示相对于 $B(X)$ 的 $H \cap L$ 的内部。

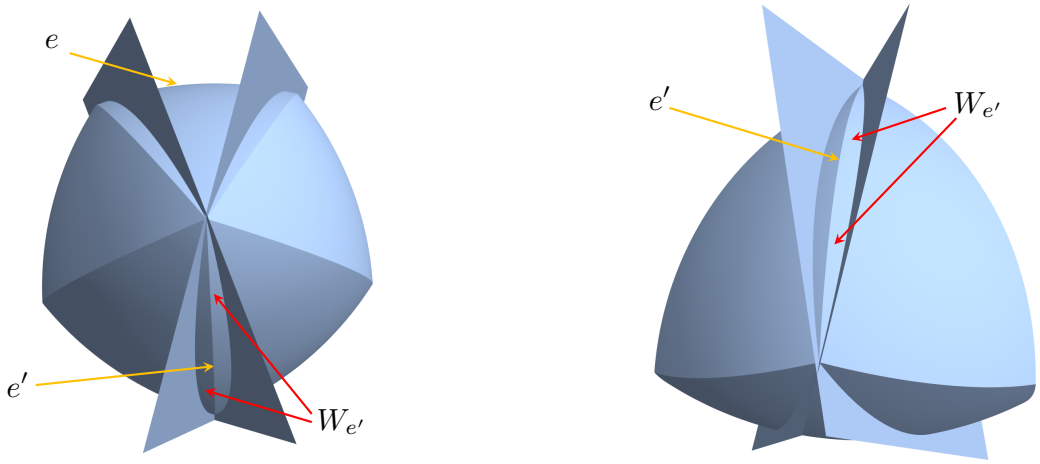


图 12：勒洛多面体 $B(X)$ 的两个视图，其中标出了对偶边 e、e' 以及楔形体 $W_{e'}$。特别注意， $W_{e'}$ 是 $B(X)$ 的一部分，位于两个平面之间形成的楔形区域内。

下面的引理表明，如果 y 属于勒洛多面体$B(X)$的一条边 e，且 $z \in B(X)$ 到 y 的距离大于一，那么 z 属于相对于 $B(X)$、与对偶边 e' 相关联的楔形体的内部。我们还注意到，更一般的陈述见 [15] 的命题 6.1。

引理 4.2。 设(e, e') 是 $B(X)$ 的一个对偶边对。若 $z \in B(X)$ 和 $z \notin B(e)$，则$z \in \mathrm{int} W_{e'}$。此外，$z$ 不是 $B(X)$ 的顶点。

证明。 1. 设 e 的端点为 b， c， e' 的端点为 b'， c'。我们将使用 $w = (w_1, w_2, w_3)$ 作为 $\mathbb{R}^3$ 的坐标。如有必要，通过变量替换，我们可以假设 b' 和 c' 位于 w_3 坐标轴上，而 b 和 c 位于 $w_1 w_2$ 平面内。也就是说，

$$\begin{cases} b = \sqrt{1 - a^2} e_1 \\ c = \sqrt{1 - a^2}(\cos(\phi), \sin(\phi), 0) \\ b' = a e_3 \\ c' = -a e_3 \end{cases} \tag{4.1}$$

对于某个 $a \in (0,\ 1/2]$ 以及满足

$$0 < \phi \leq \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2(1-a^2)}\right). \tag{4.2}$$

参见图13。也很容易验证，$\phi < \pi/2$ 并且在这些坐标中，W_e' 定义中的子空间 H 和 L 由

$$\begin{cases} H = \{w \in \mathbb{R}^3 : w_2 \leq 0\} \\ L = \{w \in \mathbb{R}^3 : -w_1 \sin(\phi) + w_2 \cos(\phi) \geq 0\}. \end{cases}$$

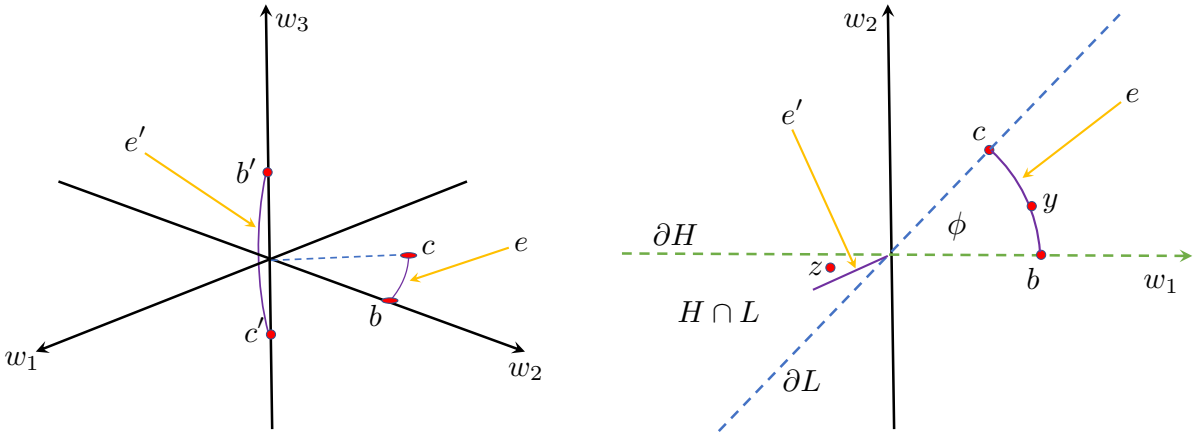


图13：这些图从某种角度展示了我们对坐标（4.1）的选择。左图中，边 e 位于 w_1w_2 平面内，端点为 b 和 c；边 e' 的端点为 b' 和 c'，且位于 w_3 轴上。右图从 w_3 轴正向的视角，展示了同一示意图以及带有 $|z-y| > 1$ 的 $y \in e$ 和 $z \in B(X)$。引理 4.2 断言，如图所示，z 是 $H \cap L$ 的内部点。

2. 根据假设，在 b 和 c 之间的边上存在 y，使得 $|z-y| > 1$。然后 y 由

$$y = \sqrt{1-a^2}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

对于某个 $\theta \in (0,\ \phi)$。不等式 $|z-y| > 1 \geq |z-b|$ 还给出

$$|z|^2 + |y|^2 - 2y \cdot z > |z|^2 + |b|^2 - 2b \cdot z.$$

由于 $|y| = |b|$，我们得到 $z \cdot (b-y) > 0$。这个不等式等价于

$$-z_1 \sin(\theta/2) + z_2 \cos(\theta/2) < 0. \tag{4.3}$$

同样，不等式 $|z-y| > 1 \geq |z-c|$ 给出

$$-z_1 \sin((\phi+\theta)/2) + z_2 \cos((\phi+\theta)/2) > 0. \tag{4.4}$$

此外，

$$\begin{aligned}0 &< -z_1\sin((\phi+\theta)/2)+z_2\cos((\phi+\theta)/2)\\ &= -z_1\left[\sin(\phi/2)\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)\cos(\phi/2)\right]+z_2\left[\cos(\phi/2)\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)\sin(\phi/2)\right]\\ &= \left[-z_1\sin(\theta/2)+z_2\cos(\theta/2)\right]\cos(\phi/2)-\left[z_1\cos(\theta/2)+z_2\sin(\theta/2)\right]\sin(\phi/2)\\ &< -\left[z_1\cos(\theta/2)+z_2\sin(\theta/2)\right]\sin(\phi/2).\end{aligned}$$

由此可得。

$$z_1\cos(\theta/2)+z_2\sin(\theta/2)<0. \tag{4.5}$$

3. 将 (4.5) 乘以 $\sin(\theta/2)$，并将 (4.3) 乘以 $\cos(\theta/2)$，不等式仍保持为 $0<\theta<\phi<\pi/2$。将所得不等式相加得到 $z_2<0$，因此 $z\in H^0$。我们还可由 (4.4) 得到

$$0<-z_1\sin((\phi+\theta)/2)+z_2\cos((\phi+\theta)/2)<-z_1\sin((\phi+\theta)/2).$$

由此可得 $z_1<0$。此外，上述最左边的不等式给出

$$\frac{z_2}{z_1}<\tan((\phi+\theta)/2)<\tan(\phi).$$

也就是说，$z\in L^0$。

4. 属于 W_e' 的唯一顶点是 ae_3 和 $-ae_3$。由于 $(z_1,z_2)\neq(0,0)$，z 不是 $B(X)$ 的顶点。

□

推论4.3。如果 e 是 $B(X)$ 的边，则 $X\subset B(e)$。

证明。假设 $x\in X$。由于 X 的直径为一，$x\in B(X)$；又因 X 是极值的，x 是 $B(X)$的一个顶点。根据前述引理，$x\in B(e)$。 □

接下来我们断言，若将 $B(X)$ 与以边 e为中心的所有球相交，那么 $B(X)$ 中受影响的部分仅位于 $W_{e'}$内。此外，我们将在下文论证，这个交集是纺锤体 $\mathrm{Sp}(b',c')$ 的一部分，其中 b'，c' 是 e'的端点。

引理 4.4。假设 e 和 e' 是 $B(X)$ 的对偶边，且 e' 的端点为 b'、$c'\in X$。那么

$$B(X)\cap B(e)\cap W_{e'}=\mathrm{Sp}(b',c')\cap W_{e'}, \tag{4.6}$$

and

$$B(X)\cap B(e)\cap (W_{e'})^c=B(X)\cap (W_{e'})^c. \tag{4.7}$$

证明。我们将使用记号 $P=B(X)$ 和 $P'=P\cap B(e)$。不失一般性，我们还可以假设 b，c，b'，c'对于某个 $a\in(0,\ 1/2]$ 以及满足 (4.2) 的 ϕ，满足 (4.1)；这里 b，c 是 e 的端点。在这些坐标下，

$$W:=W_{e'}=\{w\in P: w_2\le 0, -w_1\sin(\phi)+w_2\cos(\phi)\ge 0\} \tag{4.8}$$

并且我们还可以表示边 e 为

$$e = \left\{ \sqrt{1-a^2}(\cos(t), \sin(t), 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in (0, \phi) \right\}. \tag{4.9}$$

此外，写成.....会很方便。

$$\mathrm{Sp} := \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3).$$

由注2.3 可知，Sp $= B(\partial B(ae_3) \cap \partial B(-ae_3))$。由于 $e \subset \partial B(ae_3) \cap \partial B(-ae_3)$，Sp $\subset B(e)$。此外，由于 $ae_3, -ae_3 \in P$且 P是纺锤凸的，Sp $\subset P$。由此可得

$$\mathrm{Sp} \cap W \subset P \cap B(e) \cap W = P' \cap W.$$

现在假设 $z \in P' \cap W$。如果 $z_1 = z_2 = 0$，那么 z必须位于 ae_3和 $-ae_3$之间的线段上，因为 $z \in P$和 ae_3，$-ae_3 \in \partial P$。因此，$z \in$ Sp。或者，如果 $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$，那么

$$-\frac{(z_1, z_2, 0)}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}\sqrt{1-a^2} \in e \cup \{b, c\}$$

如 $z \in W$；这里我们回顾关于 W 的公式(4.8)和关于 e的公式(4.9)。此外，由于根据注 2.14，$z \in B(e) = B(e \cup \{b, c\})$，

$$1 \geq \left| z + \frac{(z_1, z_2, 0)}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}\sqrt{1-a^2} \right|^2 = \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2} + \sqrt{1-a^2} \right)^2 + z_3^2.$$

再次可得 $z \in$ Sp。由此可知 $z \in$ Sp $\cap W$且 $P' \cap W \subset$ Sp $\cap W$。因此，(4.6) 成立。

现在我们来证明 (4.7)。由于 $P' \subset P$，

$$P' \cap W^c \subset P \cap W^c.$$

为了证明反向包含，我们必须证明

$$P \cap W^c \subset B(e). \tag{4.10}$$

假设 $z \in P \cap W^c$。若 $z \notin B(e)$，引理 4.2 蕴含 $z \in W$。这与我们的假设 $z \in W^c$ 矛盾，因此必有 $z \in B(e)$。特别地，我们得出 (4.10)。 □

以下命题断言，迈斯纳多面体 M 以X 为底面，其边界可通过在 $B(X)$的每一对对偶边对（e，e'）中，任选一条边 e' 附近对 $\partial B(X)$进行手术来构造。这里的手术是指，切除相对于 $B(X)$的边 e' 所对应的楔形体与 $\partial B(X)$的交集，并用纺锤环面的适当部分替换 $\partial B(X)$的这一部分。特别地，我们的迈斯纳多面体包含 Montejano 和 Rold´an-Pensado [12] 通过这一手术过程定义的多面体类。事实上，Montejano 和 Rold´an-Pensado 所考虑的极值集 X 是临界的，并且它们生成一个骨架为 3 连通的勒洛多面体 $B(X)$。我们在上面的例 3.9 中看到，并非每个具有极值的 $B(X)$ X 都具有 3 连通骨架。

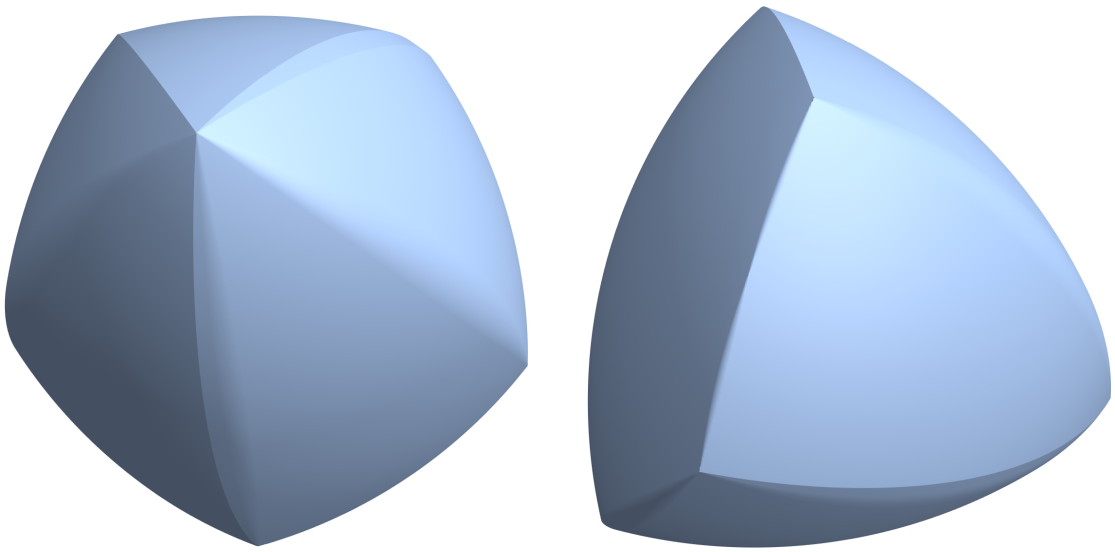


图 14：基于示例 3.11 中极值集 $\{a_1, \ldots, a_8\}$ 的迈斯纳多面体。

命题4.5。 设 (e_1, e_1') ...， (e_{m-1}, e_{m-1}') 是 $B(X)$ 的对偶边对，且 b_j', c_j' 是 e_j' 的端点，其中 $j = 1, \ldots, m-1$。那么，迈斯纳多面体

$$M = B(X \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{m-1})$$

满足

$$\begin{cases} M \cap W_{e_j'} = \mathrm{Sp}(b_j', c_j') \cap W_{e_j'} \quad (j = 1, \ldots, m-1) \\ M \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'} \right)^c = B(X) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'} \right)^c \end{cases} \tag{4.11}$$

and

$$\begin{cases} \partial M \cap W_{e_j'} = \partial \mathrm{Sp}(b_j', c_j') \cap W_{e_j'} \quad (j = 1, \ldots, m-1) \\ \partial M \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'} \right)^c = \partial B(X) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'} \right)^c . \end{cases} \tag{4.12}$$

证明。 1. 根据引理 4.4,

$$B(X) \cap B(e_1) \cap W_{e_1'} = \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap W_{e_1'}.$$

由于 b_1'， c_1' 是 $B(X)$ 的顶点，根据推论4.3，b_1'，$c_1' \in B(e_2)$。因此，$\mathrm{Sp}(b_1'$， $c_1') \subset B(e_2)$。由此可得

$$B(X) \cap B(e_1) \cap B(e_2) \cap W_{e_1'} = \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap W_{e_1'}.$$

以同样的方式论证 $j = 3, \dots, m-1$，我们得到

$$B(X) \cap B(e_1) \cap \cdots \cap B(e_{m-1}) \cap W_{e_1'} = \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap W_{e_1'}.$$

也就是说， $M \cap W_{e_1'} = \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap W_{e_1'}$. 同理，我们得出 $M \cap W_{e_i'} = \mathrm{Sp}(b_i', c_i') \cap W_{e_i'}$ 对于$i = 2, \dots, m-1$。

2. 根据 (4.7),

$$B(X) \cap B(e_j) \cap W_{e_j'}^c = B(X) \cap W_{e_j'}^c.$$

对于 $j = 1, \dots, m-1$。这意味着

$$\begin{aligned} B(X) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'} \right)^c &= \bigcap_{j=1}^{m-1} B(X) \cap W_{e_j'}^c \\ &= \bigcap_{j=1}^{m-1} B(X) \cap B(e_j) \cap W_{e_j'}^c \\ &= B(X) \cap B(e_1) \cap \cdots \cap B(e_{m-1}) \cap \bigcap_{j=1}^{m-1} W_{e_j'}^c \\ &= M \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'} \right)^c. \end{aligned}$$

我们得出 (4.11)。

3. 设 $Q := \bigcup_{j=1}^{m-1} W_{e_j'}$。假设 $x \in \partial M \cap Q^c$。则由 (4.11) 得 $x \in B(X)$。假设对于某个 $\delta > 0$，$B_\delta(x) \subset B(X)$。如有必要，选取更小的 δ，则 $B_\delta(x) \subset Q^c$，因为 Q 是闭的。在这种情况下，$B_\delta(x) \subset B(X) \cap Q^c = M \cap Q^c \subset M$。那么 x 就不属于 ∂M，这与我们的假设相符。因此，$x \in \partial B(X)$ 且 $\partial M \cap Q^c \subset \partial B(X) \cap Q^c$。同理，我们得出$\partial B(X) \cap Q^c \subset \partial M \cap Q^c$。因此，$\partial M \cap Q^c = \partial B(X) \cap Q^c$。

4. 我们可以表示 $W_{e_1'} = B(X) \cap H \cap L$，其中 H 和 L 是满足$b_1, b_1', c_1' \in \partial H$的两个半空间，而 $c_1 \notin H$和 $c_1, b_1', c_1' \in \partial L$而 $b_1 \notin L$. 这里 b_1, c_1是e_1的端点。由于 M 和 $\mathrm{Sp}(b_1', c_1')$ 是 $B(X)$ 的子集，

$$\partial M \cap W_{e_1'} = \partial \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap W_{e_1'}$$

等价于

$$\partial M \cap H \cap L = \partial \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap H \cap L. \tag{4.13}$$

还要注意，我们用于证明 $\partial M \cap Q^c = \partial B(X) \cap Q^c$ 的同一论证给出了

$$\partial M \cap (H \cap L)^0 = \partial \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap (H \cap L)^0. \tag{4.14}$$

为了建立（4.13），接下来我们只需验证

$$\partial M \cap \partial (H \cap L) = \partial \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap \partial (H \cap L). \tag{4.15}$$

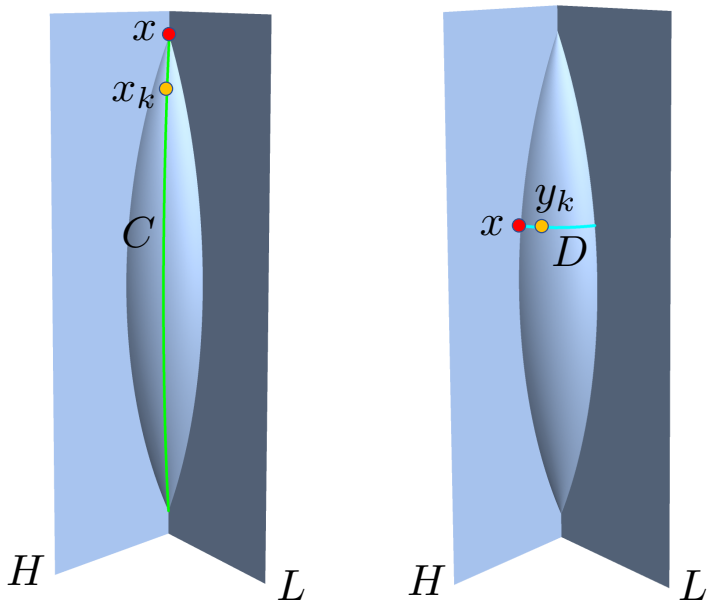


图15：这里展示了交集 $\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap \partial(H \cap L)$ 的两张图像。该图有助于说明，如果 $x \in \partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap \partial(H \cap L)$，那么在 $\partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap \partial(H \cap L)^0$中存在一个收敛到 x 的序列。这是我们证明命题4.5的一个关键步骤。

为此，我们假设 $x \in \partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap \partial(H \cap L)$。如果 $x = b_1'$ 或 c_1'，我们选择一条连接 b_1' 和 c_1' 的短圆弧 $C \subset \partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1')$，并且满足 $C \setminus \{b_1', c_1'\} \subset (H \cap L)^0$。不难看出，存在一个序列 $x_k \in \partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap (H \cap L)^0 \cap C$，当$k \to \infty$时该序列收敛到 x；例如参见图15。根据 (4.14)， $x_k \in \partial M$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。因此， $x \in \partial M$。或者，如果 x 属于 $\partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1')$上的一个光滑点，我们考虑 D中的圆弧，该圆弧位于 $\partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap (H \cap L)$ 中，包含 x，并且属于与 $b_1' - c_1'$正交的平面。显然，存在 $y_k \in \partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1') \cap (H \cap L)^0 \cap D$，其收敛到 x。由(4.14) 可知，$y_k \in \partial M$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。因此， $x \in \partial M$。我们得出结论，在所有情况下，(4.15) 中的“$\supset$”均成立。

接下来假设 $x \in \partial M \cap \partial(H \cap L)$。由(4.11)可知， $x \in \mathrm{Sp}(b_1', c_1')$。若 x 是$\mathrm{Sp}(b_1', c_1')$的内部点，则对于某个 $\delta > 0$， $B_\delta(x) \subset \mathrm{Sp}(b_1', c_1')$。由推论4.3， $b_1', c_1' \in M$。由于M是纺锤凸的，我们还会有 $B_\delta(x) \subset \mathrm{Sp}(b_1', c_1') \subset M$。既然我们假设了$x \in \partial M$，那么必有 $x \in \partial\mathrm{Sp}(b_1', c_1')$。因此，(4.15)中的“$\subset$”成立。由此，(4.15)成立，进而得到(4.12)。 □

4.2 等宽性质

我们现在旨在证明定理 4.1。第一步是回顾一个关于凸体的基本事实。

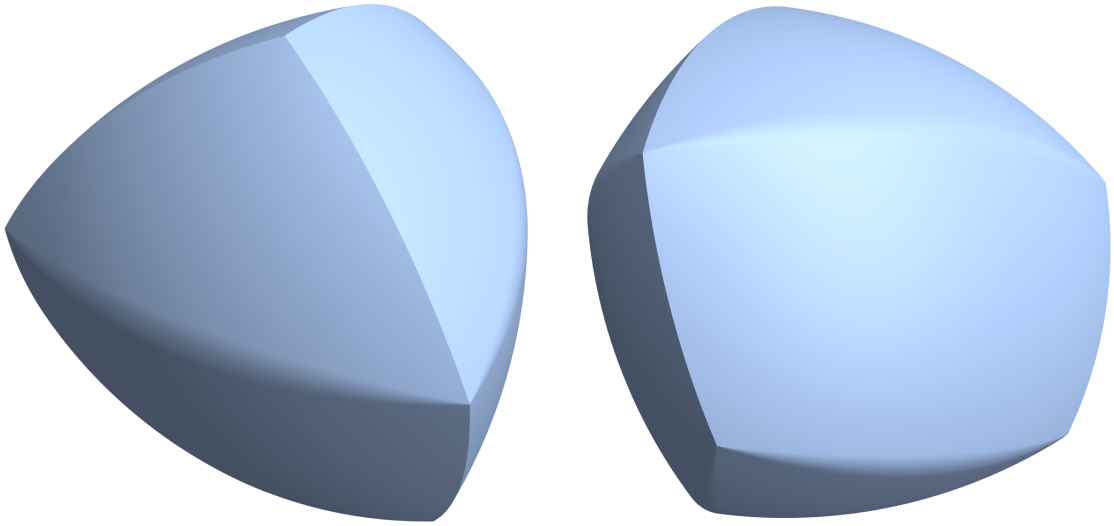


图 16：基于示例 3.12 中临界集 $\{a_1, \ldots, a_7\}$ 的一个迈斯纳多面体。

引理 4.6。 假设 x、$y \in K$ 满足 $\operatorname{diam}(K) = |x-y|$. 则 $x - y \in N_K(x)$ 且 $y - x \in N_K(y)$。

证明。令 $w \in K$ 和 $t \in [0,1]$。则 $y + t\,(w-y)\ \in K$ 且

$$|x-y|^2 \geq |x-(y+t(w-y)|^2 = |x-y|^2 + t^2|w-y|^2 - 2t(x-y)\cdot(w-y).$$

这意味着对所有 $w \in K$，$(y-x)\cdot(w-y) \leq 0$。由此得出 $y - x \in N_K(y)$。同理，我们得到 $x - y \in N_K(x)$。 □

下面的断言涉及纺锤环面的外单位法向量。注意，纺锤体 $\partial\mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$ 的光滑部分由 $x \in \mathbb{R}^3$ 给出，它满足 $|x_3| < a$ 且

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{1-a^2}\right)^2 + x_3^2 = 1.$$

此外，该点 x 处的外单位法向量 u 为

$$u = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{1-a^2}\right)\frac{(x_1, x_2, 0)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_3 e_3. \tag{4.16}$$

引理 4.7。 设 e 和 e' 是 $B(X)$ 的对偶边，b、c 是 e 的端点，b'、c' 是 e' 的端点。进一步假设

$$x \in (\partial\mathrm{Sp}(b', c') \setminus \{b', c'\}) \cap W_{e'}$$

以及 $u \in N_{\mathrm{Sp}(b',c')}(x)$ 与 $|u| = 1$。然后 $x - u \in e \cup \{b, c\}$。

证明。只需在假设 b, c, b', c' 对某个 $a \in (0, 1/2]$ 满足 (4.1)，且 ϕ 满足 (4.2) 的情况下证明这一结论。我们还回顾一下，在这些坐标中，

$$e = \left\{ \sqrt{1-a^2}(\cos(t), \sin(t), 0) : t \in (0, \phi) \right\}$$

and

$$W_{e'} = \{ w \in B(X) : w_2 \leq 0, -w_1 \sin(\phi) + w_2 \cos(\phi) \geq 0 \}.$$

特别是，

$$x_2 \leq 0, -x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi) \geq 0 \tag{4.17}$$

作为 $x \in W_{e'}$。

注意，由于 $x \in \partial \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3) \setminus \{ae_3, -ae_3\}$，$x$ 属于 $\mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$ 的光滑部分。特别地，u 是 $\mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$ 在 x 处的单位法向量。根据（4.16），

$$x - u = -\sqrt{1-a^2} \frac{(x_1, x_2, 0)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

因此，

$$x - u = \sqrt{1-a^2}(\cos(s), \sin(s), 0)$$

对于某个 $s \in [0, 2\pi)$. 由 (4.17) 可知，必有 $s \in [0, \phi]$。因此，$x - u \in e \cup \{b, c$ $\}$. □

该子序列 nt 命题是证明迈斯纳多面体具有定宽性质的关键。

引理 4.8. 假设 M 是一个迈斯纳多面体。那么 直径$(M) =$ 1.

证明。设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是直径为一的极值集，M 以其为底面，并回顾 $X \subset M$ 由推论4.3得出。存在两个顶点 x，$y \in X$，满足 $|x - y| = 1$。因此，$\mathrm{diam}(M) \geq 1$。

选取一对 x，$y \in \partial M$，使得 $|x - y| = \mathrm{diam}(M)$。先假设 x 是 $B(X)$ 的一个顶点；也就是说 $x \in X$。由于 $y \in B(X)$，因此 $|x - y| \leq 1$。接着假设 x 属于一条边 e，其对偶边为 e'。若 $|x - y| > 1$，则由引理 4.2 可得 $y \in W_{e'}$。根据命题4.5，$y \in W_{e'} \cap M = W_{e'} \cap \mathrm{Sp}(b', c') \subset \mathrm{Sp}(b', c')$；这里 b'，c' 是边 e' 的端点。由于对于包含边 e 的圆 C，$\mathrm{Sp}(b', c') = B(C)$，所以必有 $y \in B(e)$。因此，实际上必有 $|x - y| \leq 1$，因为 $x \in e$。

或者，假设 x 是纺锤体 $\partial \mathrm{Sp}(b', c')$ 的一部分的内部点。那么 x是 $\partial \mathrm{Sp}(b', c')$ 的光滑点，其外单位法向量为 u。根据引理 4.7，$z = x - u \in e \cup \{b, c\}$。特别地，$z \in \partial M$。由于该法向量是唯一的，并且 $x - y \in N_M(x)$，由引理 4.6 可知，对于某个 $t > 0$，$x - y = tu$。特别是，

$$x + t(z - x) = y.$$

由于 $y \in \partial M$ 和 M 是严格凸的，因此必有 $t \geq 1$。若 $t > 1$，则线段$\{x + s(z - x) : 0 \leq s \leq 1\}$ 从一个边界点 x 延伸至另一个边界点 z，并可非平凡地延伸到 $y \in M$。这也会与 M 是严格凸的这一事实相矛盾。因此，$t = 1$、$y = z$ 和 $|x - y| = |u| = 1$。

最后，假设 x 是 ∂M 的球形区域的一个内部点，其对应的中心为 $c \in X \subset \partial M$。那么 M 有唯一的法向量 $x-c$，且该法向量必然与 $x-y$平行。按照上述方法推理，可得 $y=c$ 和 $|x-y|=1$。因此，在所有情况下，$\operatorname{diam}(M)=|x-y|\leq 1$。 □

现在，我们已经具备了证明迈斯纳多面体具有定宽性质所需的条件。

定理 *4.1* 的证明。假设 X 是一个直径为 1、包含 $m\geq 4$ 个点的极值集，并且其勒洛多面体 $B(X)$ 具有对偶边对 $(e_1,\ e_1')\ldots,\ (e_{m-1},\ e_{m-1}')$。令$M=B(Y)$为具有 $Y=X\cup e_1\cup\cdots\cup e_{m-1}$. 的迈斯纳多面体。我们首先断言

$$\operatorname{diam}(Y)\leq 1. \tag{4.18}$$

为验证这一断言，假设 $x,\ y\in Y$。若 $x,\ y\in X$，则 $|x-y|\leq 1$，因为 X的直径为 1。假设 $x\in e_1$ 且 $z\in B(X)$满足 $|x-z|>1$。引理 4.2 表明 $z\in W_{e_1'}$，并且 z 不是顶点。因此，z 所能属于的唯一一条边是 e_1'。所以，若$y\in X\cup e_1\cup\cdots\cup e_{m-1}$，则 $|x-y|\leq 1$。由此得到 (4.18)。

不等式 (4.18)意味着 $Y\subset B(Y)$，这进而给出

$$M=B(Y)\supset B(B(Y))=B(M).$$

根据引理4.8，我们还有 $\operatorname{diam}(M)=1$。因此，$M\subset B(M)$，所以 $M=B(M)$。现在根据定理 2.11 可知，M 具有定宽。 □

最后，我们通过验证梅斯纳和 Shilling 在引言中所述的迈斯纳四面体构造，确实能得到两种定宽形状，来结束本节讨论。

推论 4.9。 迈斯纳四面体具有定宽性质。

证明。令 $R=B(\{a_1,a_2,a_3,a_4\})$ 为一个勒洛四面体，并将 $e_{ij}\subset R$ 记为连接顶点 a_i 和 a_j 的边。容易验证，R 有三组对偶边对

$$(e_{12},e_{34}),\ (e_{13},e_{24}),\ \text{and}\ (e_{14},e_{23}).$$

根据定理 4.1，

$$M=B\left(\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\cup e_{12}\cup e_{13}\cup e_{14}\right) \tag{4.19}$$

具有定宽性质。只需证明 M 是一个迈斯纳四面体即可。

根据 (4.12)，

$$\begin{cases}\partial M\cap W_{e_{23}}=\partial\mathrm{Sp}(a_2,a_3)\cap W_{e_{23}}\\ \partial M\cap W_{e_{24}}=\partial\mathrm{Sp}(a_2,a_4)\cap W_{e_{24}}\\ \partial M\cap W_{e_{34}}=\partial\mathrm{Sp}(a_3,a_4)\cap W_{e_{34}}\end{cases}$$

and

$$\partial M\cap\left(W_{e_{23}}\cup W_{e_{24}}\cup W_{e_{34}}\right)^c=\partial R\cap\left(W_{e_{23}}\cup W_{e_{24}}\cup W_{e_{34}}\right)^c.$$

因此，通过用相应的纺锤环面 $\partial\mathrm{Sp}(a_2, a_3)$ $\partial\mathrm{Sp}(a_2, a_4)$ $\partial\mathrm{Sp}(a_3, a_4)$ 的片段，替换 ∂R 在楔形体 $W_{e_{23}}, W_{e_{24}}, W_{e_{34}}$ 中的部分，即可得到 ∂M。这等同于进行梅斯纳和席林提出的手术 [11]。因此， M 是一个迈斯纳四面体。 □

备注 4.10。 迈斯纳四面体 M (4.19)是指三个光滑边共用与顶点 a_1相对的面。由于每个 a_i 都是边 e_{12}， e_{13} 或 e_{14} 的一个端点，

$$M = B(e_{12} \cup e_{13} \cup e_{14}).$$

我们还来考虑这样一种迈斯纳四面体：三条光滑化边共用顶点 a_1。这一具有定宽性质的形状由以下内容给出。

$$M = B(\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup e_{23} \cup e_{24} \cup e_{34}).$$

由于 $a_2\, a_3$， a_4 是边 e_{23}， e_{24}，且 e_{34}, M可表示为

$$M = B(\{a_1\} \cup e_{23} \cup e_{24} \cup e_{34}).$$

这些迈斯纳四面体的交集公式就是我们在本文引言中提到的公式。

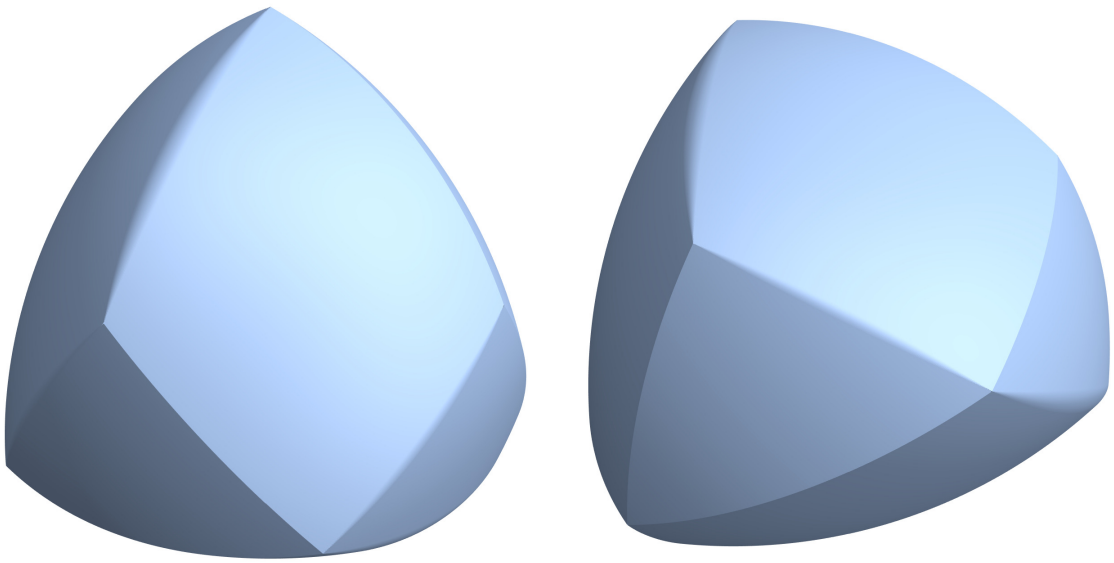


图17：基于示例 3.15 中临界集 $\{a_1, \ldots, a_9\}$ 的一个迈斯纳多面体。

5 Density Theorem

我们将证明，迈斯纳多面体在 $\mathbb{R}^3$ 中的等宽体类中稠密。我们给出的证明在一些关键方面遵循 Sallee 的工作 [15]。给定一个定宽

宽度为 K，我们将首先证明，可以找到一个在豪斯多夫度量下接近 K 的球多面体 $B(X)$。接下来，我们将论证可以选择中心 X，使得 X 是极值的。然后，我们将说明如何基于 X 设计一个迈斯纳多面体，并论证这个迈斯纳多面体至少与 K 一样接近，而 $B(X)$ 也是如此。

5.1 第一次近似

首先，我们将讨论定理 2.11 的一个变体。

引理 5.1。作为 假设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个等宽体且 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial K$ 是稠密的。那么

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n), \tag{5.1}$$

并且 $\bigcap_{n=1}^{N} B(x_n) \to K$ 在豪斯多夫拓扑中与 $N \to \infty$ 相同。

证明。 等式 (5.1) 由定理 2.11 和注 2.14 得出。现在令 $K_N := \cap_{n=1}^{\infty} B(x_n)$ 表示 $N \in \mathbb{N}$，并注意到

$$K = \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N. \tag{5.2}$$

还要注意，

$$K \subset K_{N+1} \subset K_N \subset K_1. \tag{5.3}$$

布拉施克选择定理（ [10]的定理2.5.2）意味着存在一个凸体$K^* \subset \mathbb{R}^3$ 和一个子序列（K_{N_j}）$_{j\in\infty}$ 使得 $N_j \to \infty$、 $N_j < N_{j+1}$，以及 $K_{N_j} \to K^*$ 在豪斯多夫拓扑中。我们注意到 $K \subset K^*$。为了完成这一证明，只需证明 $K = K^*$，因为 K 不依赖于该子序列。

固定 $y \in K^*$。对于每个 $\delta > 0$，存在 j_δ 使得

$$K^* \subset K_{N_j} + B_\delta(0)$$

对于每个 $j \geq j_\delta$。选择 $x_j \in K_{N_j}$ with

$$|y - x_j| \leq \delta \tag{5.4}$$

对于 $j \geq j_\delta$。我们可以选取$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列，该子序列收敛到某个 x_δ。根据(5.3)，$x_\delta \in K_N$对所有 $N \in \mathbb{N}$均成立。因此，根据(5.2)， $x_\delta \in K$。特别地，在 (5.4)中沿适当的子序列取 $j \to \infty$ 的极限时，我们得到 $|y - x_\delta| \leq \delta$。由此可知， $y =$ 极限$_{\delta\to 0}\, x_\delta \in K$。 □

由于等宽体的直径等于 1，我们可以假设 $|x_1 - x_2| = 1$。由此可知，对于每个 $N \geq 2$，$\{x_n\}_{1\leq n\leq N} \subset \partial K$ 的直径均为 1。这样，我们就得到了一个以球多面体表示的 K 的第一次近似。

推论 5.2. 假设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个等宽体且 $\epsilon > 0$。存在一个有限集 $X \subset \partial K$，其直径等于一，使得

$$d(K, B(X)) \leq \epsilon.$$

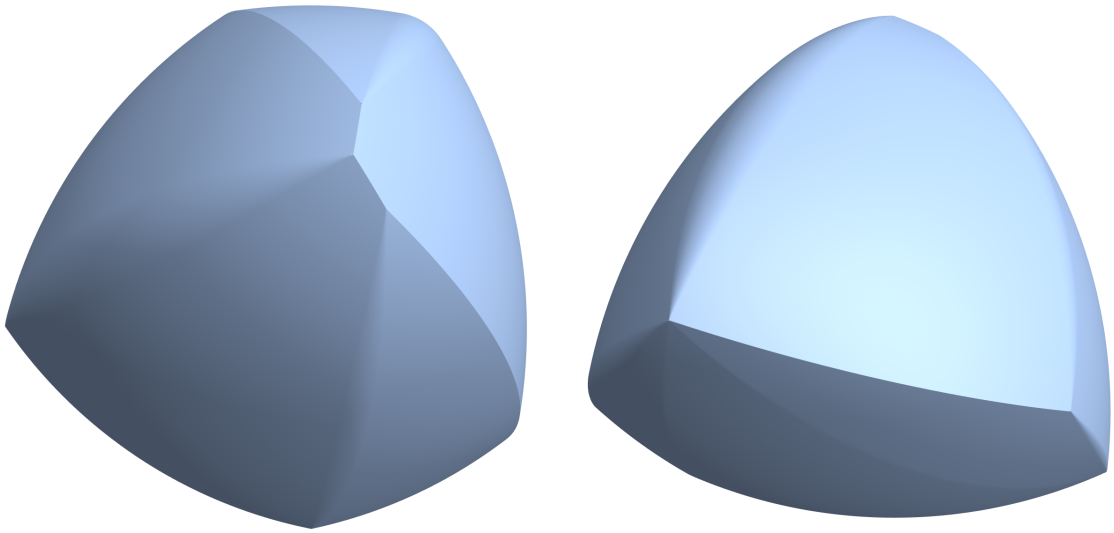


图 18：一个梅　基于示例 3.17 中临界集 $\{a_1, \ldots, a_8\}$ 的 Meissner 多面体　　.

5.2 两个引理

给定一个定宽 $K \subset \mathbb{R}^3$，我们可以找到一个球多面体 $B(X)$，使其误差在任意选定的容差以内。通过将 $B(X)$与适当的球族求交，我们将能够找到一个勒洛多面体，随后找到一个同样近似良好的迈斯纳多面体。为此，我们需要以下两个引理。第一个引理归功于 Sallee（引理 2.6 [15]）。

引理 5.3. 设 K、$K' \subset \mathbb{R}^3$ 是凸体，满足 $x \in K'$ 且 $\operatorname{diam}(K) \leq 1$。

$$d(K, B(x) \cap K') \leq d(K, K'). \tag{5.5}$$

证明。设 $\delta = d(K, K')$。若 $\delta = 0$，则 $K = K'$；且由于 $\operatorname{diam}(K) \leq 1$，$B(x) \cap K' = B(x) \cap K = K$。因此，等式在 (5.5) 中成立。

现在假设 $\delta > 0$。如果（5.5）不成立，那么 $d(K, B(x) \cap K') > \delta$ 并且其中一个包含关系

$$K \subset B(x) \cap K' + B_\delta(0) \quad \text{and} \quad B(x) \cap K' \subset K + B_\delta(0)$$

是错误的。由于 $\delta = d(K, K')$，

$$K' \subset K + B_\delta(0). \tag{5.6}$$

因此，$B(x) \cap K' \subset K + B_\delta(0)$。由此可知存在 $y \in K$，使得

$$y \notin B(x) \cap K' + B_\delta(0) \subset B(x) + B_\delta(0) = B_{1+\delta}(x). \tag{5.7}$$

由 (5.6)，有　是 $z \in K$，其中有 $|z - x| \leq \delta$。然而，由于 K 的直径至多为一

$$|y - x| \leq |y - z| + |z - x| \leq 1 + \delta.$$

这与（5.7）矛盾。因此，我们得出（5.5）。　□

下面的引理使我们能够通过进行适当的交集，使用一种将直径为一的集合转化为极值集的方法。

引理 5.4. 设 $X \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有限集合，且其直径为$(X) = 1$。假设

$$X \supset \mathrm{vert}(B(X)).$$

若 $Y \subset X$ 是 X的本质点集合，则 $Y \supset \mathrm{vert}(B(Y))$。并且，若 Y有三个点，则 $Y = \mathrm{vert}(B(Y))$ 且 Y是极值的。

证明。 假设 $y \in$ vert($B(X)$) 是一个主顶点。由于 vert($B(X)$) $\subset X$， $y \in X$ 且 val(y, X) ≥ 3。由引理 3.2 (iii)可知， y 是本质的。同样，引理 3.2 (iii)也说明 X 的每个悬垂顶点都是本质的。因此，vert($B(X)$) $\subset Y$。由于根据引理 3.2 第 (ii)部分，$B(Y) = B(X)$，我们有

$$\mathrm{vert}(B(Y)) = \mathrm{vert}(B(X)) \subset Y. \tag{5.8}$$

设 Y至少有三个点。令 $z \in Y$，并考虑 $\partial B(z) \cap B(Y)$，它是 $B(Y)$中与 z相对的面。由 [9]的命题 6.1(i)可知， $\partial B(z) \cap B(Y)$至少有两个主顶点 p, q；这里需要假设 # $Y \geq 3$。根据 (5.8)，$p, q \in Y$。因此， $z \in$ vert($B(Y)$)。于是， $Y \subset$ vert($B(Y)$)。

若 $Y =$ vert($B(Y)$) 恰有三个点 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$，那么 y_1， y_2， y_3 必然是悬垂顶点。然而，根据 [9], 的命题 6.1（i）， Y 的每个面至少有两个主顶点。因此可知， Y 至少有五个点。所以， Y 实际上至少有四个点，因而根据定理 3.4，它是极值的。 □

5.3 第二次近似

现在我们将证明，总能找到一个与给定的定宽 K 任意接近的勒洛多面体。

命题 5.5. 设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 具有定宽，且 $\epsilon > 0$。存在一个有限集$Z \subset \mathbb{R}^3$，其直径为一，至少有四个点，且为极值，并满足

$$d(K, B(Z)) \leq \epsilon.$$

证明. 选取一个直径为一的有限集 $X \subset \mathbb{R}^3$，使得 d(K， B(X)) $\leq \epsilon$。根据推论 5.2，这样的球多面体存在。鉴于引理 5.1 和引理 5.5 的证明，我们不失一般性地假设 X 至少有四个点。我们首先论证，可以选择一个近似的 $B(Y)$，使得 $Y \supset$ vert($B(Y)$)。

如果 X 不包含 vert($B(X)$)。那么根据定理 3.4， X 不是极值的，因此 e(X) <2($|X| - 1$)。选取一个主顶点 $y_1 \in$ vert($B(X)$)，使得 $y_1 \notin X$。那么对于至少三个点 $x \in X$， $|y_1 - x| = 1$。由此可得 e($X \cup \{y_1\}$) $\geq e(X) + 3$. 因此,

$$0 \leq 2(|X \cup \{y_1\}| - 1) - e(X \cup \{y_1\})$$

$$
\begin{aligned}
&= 2|X| - e(X \cup \{y_1\}) \\
&\le 2|X| - e(X) - 3 \\
&= [2(|X| - 1) - e(X)] - 1.
\end{aligned}
$$

由引理 5.5 可知， $d(K, B(X \cup \{y_1\})) \le \epsilon$。因此， $B(X \cup \{y_1\})$ 对 K 的近似效果至少与 $B(X)$ 一样好，而且 $X \cup \{y_1\}$ 比 X 更接近极值状态。

同样，如果 $X \cup \{y_1\}$ 不包含 $\mathrm{vert}(B(X \cup \{y_1\}))$，那么我们可以找到一个主顶点 $y_2 \in B(X \cup \{y_1\})$，使得 $y_2 \notin X \cup \{y_1\}$ 且

$$
\begin{aligned}
0 &\le 2(|X \cup \{y_1, y_2\}| - 1) - e(X \cup \{y_1, y_2\}) \\
&\le [2(|X \cup \{y_1\}| - 1) - e(X \cup \{y_1\})] - 1 \\
&= [2(|X| - 1) - e(X)] - 2.
\end{aligned}
$$

此外，引理 5.5 蕴含 $d(K, B(X \cup \{y_1, y_2\})) \le \epsilon$。由于 $\ell = 2(|X| - 1) - e(X)$ 是一个固定的自然数，如果我们继续这样做，就会找到一个集合 $Y = X \cup \{y_1, \dots, y_j\}$，使得 $j \le \ell$，并且 $Y \supset \mathrm{vert}(B(Y))$ 或 $e(Y) = 2|Y| - 2$。在后一种情况下，由定理 3.4 可知 $Y = \mathrm{vert}(B(Y))$。因此，存在直径为一的有限 $Y \subset \mathbb{R}^3$，使得 $d(K, B(Y)) \le \epsilon$，且 $Y \supset \mathrm{vert}(B(Y))$。

设 $Z \subset Y$ 为 Y的本质点。由引理 5.4 和引理 3.2(ii)， $Z \supset \mathrm{vert}(B(Z))$ 且 $d(K, B(Z)) \le \epsilon$。此外，若 Z 至少有四个点，则 Z 是极值的，因此我们可以据此完成证明。正如我们在引理 5.4 的证明中所指出的， Z 不可能恰有三个点并满足 $Z \supset \mathrm{vert}(B(Z))$。另一种情况是，若 $Z = \{z_1, z_2\}$ 只有两个点，我们可以任取 $z_3 \in \partial B(z_1) \cap \partial B(z_2)$，并考虑球多面体 $B(\{z_1, z_2, z_3\})$。这个球多面体有两个主顶点 z_4、z_5，它们不包含在 $\{z_1, z_2, z_3\}$中。然而，容易验证 $Z' = Z \cup \{z_3, z_4\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 确实满足 $Z' = \mathrm{vert}(B(Z'))$。引理 5.5 也将给出 $d(K, B(Z')) \le \epsilon$。因此，我们可以用 Z' 代替 Z，从而得到所需结论。最后，若 $Z = \{z_1\}$ 是一个单点集，我们任取 $z_2 \in \partial B(z_1)$，并像刚才对 $Z \cup \{z_2\} = \{z_1, z_2\}$所做的那样进行论证。因此，存在一个至少含有四个点、直径为一的极值集 $Z \subset \mathbb{R}^3$，使得 $d(K, B(Z)) \le \epsilon$。

□

我们终于可以证明稠密性定理了。该定理断言，迈斯纳多面体在等宽体空间中稠密。

稠密性定理的证明。令 $\epsilon > 0$，并选取直径为一且至少包含四个点的极值集 $Z \subset \mathbb{R}^3$，使得

$$
d(K, B(Z)) \le \epsilon.
$$

根据前述引理，这样的 Z 存在。假设 $|Z| = m$，并且

$$
(e_1, e_1'), \dots, (e_{m-1}, e_{m-1}')
$$

是 $B(Z)$的对偶边对。反复应用引理 5.5 可数次，得到

$$
d(K, B(Z \cup \tilde{e}_1 \cup \cdots \cup \tilde{e}_{m-1})) \le d(K, B(Z)) \le \epsilon
$$

对于任意可数稠密子集 $\tilde{e}_j \subset e_j$（对应于 $j = 1$、.....、$m-1$）。如注 2.14 所述，$B(\tilde{e}_j) = B(e_j)$ 对于 $j = 1$、.....、$m-1$。因此，

$$\begin{aligned} B(Z \cup \tilde{e}_1 \cup \cdots \cup \tilde{e}_{m-1}) &= B(Z) \cap B(\tilde{e}_1) \cap \cdots \cap B(\tilde{e}_{m-1}) \\ &= B(Z) \cap B(e_1) \cap \cdots \cap B(e_{m-1}) \\ &= B(Z \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{m-1}). \end{aligned}$$

因此，

$$d(K, B(Z \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{m-1})) \leq \epsilon.$$

我们得出结论： $M = B(Z \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{m-1})$是一个迈斯纳多面体。 □

致谢：作者在访问CIMAT期间撰写了本文。他特别感谢Gil Bor和H´ector Chang-Lara的热情款待。

迈斯纳四面体的体积

在本附录中，我们将计算两种迈斯纳四面体的体积。我们将用到的一个关键公式是 ***Blaschke*关系**，它断言：如果 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个等宽体，那么

$$V(M) = \frac{1}{2} S(\partial M) - \frac{\pi}{3}$$

（ [10]的定理 12.1.4）。这里， $V(M)$表示 M的体积， $S(\partial M)$表示 M的周长。因此，只需计算每个迈斯纳四面体的周长。为此，我们将使用高斯–博内公式，并改编 Harbourne [4]对勒洛四面体周长的计算。

A.1 内角

假设 a_1， a_2， a_3， $a_4 \in \mathbb{R}^3$ 满足

$$|a_i - a_j| = 1$$

对于 $i \neq j$。令 T为顶点为 a_1, a_2, a_3, a_4 的正四面体，并令 $R = B(\{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ 为与之对应的勒洛四面体。我们首先确定张成 T各面的任意两个平面之间的夹角。我们回顾一下，两个相交平面的外法向量为 n_1 和 n_2 时，它们之间的二面角 $\theta \in [0, \pi/2]$ 满足

$$\cos(\theta) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}.$$

引理 A.1。 张成 T 的任意两个面的平面之间的二面角为$\cos^{-1}(1/3)$。

证明。鉴于荣格不等式的等号成立条件，我们可以假设 T 的顶点位于半径为 $\sqrt{3/8}$的同一个球面上。在这种情况下，

$$1 = |a_i - a_j|^2 = |a_i|^2 + |a_j|^2 - 2a_i \cdot a_j = \frac{3}{4} - 2a_i \cdot a_j$$

对于 $i \neq j$。因此，

$$a_i \cdot a_j = -\frac{1}{8}$$

对于 $i \neq j$。从这一观察还可得出， T 是四个半空间的交集

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot a_i \geq -1/8\} \tag{A.1}$$

$(i = 1, \ldots\ldots, 4)$。因此，这些边界平面中任意两个之间的二面角为

$$\cos^{-1}\left(\frac{|a_i \cdot a_j|}{|a_i||a_j|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1/8}{3/8}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right).$$

□

另一个需要确定的重要角度详述如下。

命题 A.2。在 R 的一个顶点处任意两条边形成的内角等于 $\pi - \cos^{-1}(1/3)$。

证明。由于所关注的角度与所使用的具体坐标无关，我们不妨假设

$$\begin{cases} a_1 = \left(\sqrt{3}/2, 0, 1/2\right) \\ a_2 = \left(\sqrt{3}/2\cos(\theta), \sqrt{3}/2\sin(\theta), 1/2\right) \\ a_3 = (0, 0, 1) \\ a_4 = (0, 0, 0)\,. \end{cases}$$

这里 $\theta = \cos^{-1}(1/3)$。注意，包含 a_1, a_2, a_3 的 R 面是单位球面 $\mathbb{S}^2$ 的子集。此外，连接顶点 a_1 和 a_2 的该面的边可参数化为

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{3}/2\cos(t), \sqrt{3}/2\sin(t), 1/2\right)$$

对于 $t \in [0, \theta]$。另请注意 $\gamma(0) = a_1$ 和 $\dot{\gamma}(0) = (0, \sqrt{3}/2, 0)$。

我们还考虑连接 a_1 和 a_2 的 $\mathbb{S}^2$ 中的测地线。根据引理 2.10，这条曲线属于所讨论的面，并且可参数化为

$$\xi(s) = \cos(s)a_1 + \sin(s)\frac{a_2 - (1/2)a_1}{\sqrt{3}/2}$$

对于 $0 \leq s \leq \pi/3$。注意 $\xi(0) = a_1$ 以及

$$\dot{\xi}(0) = \frac{a_2 - (1/2)a_1}{\sqrt{3}/2}.$$

由于

$$\frac{\dot{\xi}(0)}{|\dot{\xi}(0)|}\cdot\frac{\dot{\gamma}(0)}{|\dot{\gamma}(0)|}=\sin(\theta)=\cos(\pi/2-\theta),$$

这条边与顶点 a_1 处的测地线之间的角度为 $\pi/2-\theta$。

根据对称性可知，连接 a_1 和 a_3 的边与连接 a_1 和 a_3 的测地线之间的角也为 $\pi/2-\theta$。于是，连接 a_1 和 a_2 的边与连接 a_1 和 a_3 的边之间的角等于 $2(\pi/2-\theta)+\theta=\pi-\theta$. 参见图 19b。这里我们利用了连接 a_1 和 a_2 的测地线与连接 a_1 和 a_3 的测地线之间的角等于二面角 θ。此外，我们可以将这些角相加，得到所需的内角，因为在点 a_1 处所考虑的所有曲线的切向量都属于 a_1处的 $\mathbb{S}^2$ 的切空间。

□

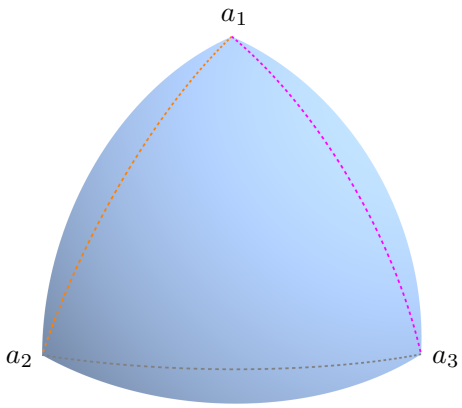


图19(a)：面 $\partial B(a_4)\cap R$的 R。虚线曲线是连接顶点 a_1，a_2，a_3的测地线。请注意，该曲面由顶点a_1，a_2，a_3 构成的测地三角形和三个狭长曲面组成。

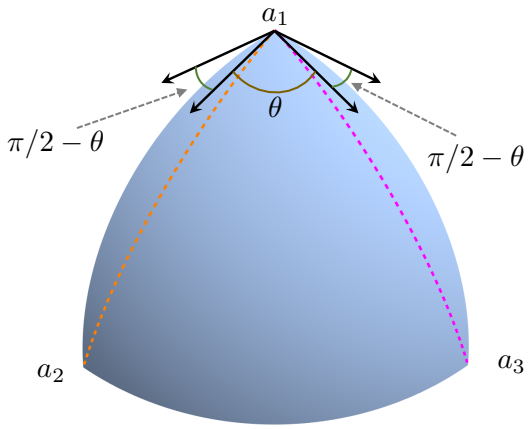


图19(b)：该图展示了我们在证明命题 A.2 时所采用的论证，即将顶点 a_1 处内角的计算分为三部分。这里 $\theta=\cos^{-1}(1/3)$。

A.2 高斯-博内公式

高斯-博内定理断言，若 P 是一个紧致的二维黎曼流形，其分段光滑边界由曲线 C_1、……、C_N 构成，则

$$\int_P KdA+\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_{C_i}k_g ds+(\pi-\theta_i)\right\}=2\pi\chi(P).$$

其中，$\pi-\theta_i$是切线在 $i=1,\ldots,N-1$时从 C_i转向 C_{i+1}所转过的角度，并且在 $i=N$ 时从 C_N 转向 C_1；也就是说，θ_i 是曲线相应的内角。函数 K 是 P的高斯曲率。同样，k_g 表示积分 $\int_{C_i}k_g ds$中C_i 的测地曲率。最后，$\chi(P)$是 P的欧拉示性数。

为了应用这个定理，我们需要知道圆在 $\mathbb{S}^2$ 中的测地曲率，而该圆是一个平面与 $\mathbb{S}^2$ 的交集

$$\left\{x \in \mathbb{S}^2 : x \cdot w = \sqrt{1-r^2}\right\}. \tag{A.2}$$

这里 $|w| = 1$ 和 $r \in (0, 1]$ 是圆的半径。如果选择 $u, v \in \mathbb{S}^2$，使得 $\{u, v, w\}$是一个正交归一基，且 $u \times v = w$，那么

$$\gamma(t) = r\left(u\cos(t/r) + v\sin(t/r)\right) + \sqrt{1-r^2}\, w \quad (t \in \mathbb{R})$$

是一个 u 圆的单位速率参数化。结果表明，该计算

$$\ddot{\gamma}(t) = -\gamma(t) + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\gamma(t) \times \dot{\gamma}(t)$$

这意味着 (A.2) 中圆的测地曲率为常数，且等于 $\sqrt{1-r^2}/r$。

注意，当 $r = 1$ 时，(A.2) 是一条大圆，其测地曲率为零。我们还回顾一下，$\mathbb{S}^2$ 的高斯曲率恒等于一。因此，如果 $P \subset \mathbb{S}^2$ 是一个内角为 α、β、γ 的测地三角形，

$$S(P) + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi.$$

也就是说，

$$S(P) = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{A.3}$$

现在我们可以利用这些观察结果来计算几个感兴趣区域的表面积。

命题 A.3。 $\partial B(a_4)$ 中的测地三角形，其顶点为 a_1、a_2、a_3，其表面积为

$$3\cos^{-1}(1/3) - \pi. \tag{A.4}$$

面 $\partial B(a_4) \cap R$ 的表面积为

$$2\pi - \frac{9}{2}\cos^{-1}(1/3). \tag{A.5}$$

证明。 不失一般性，我们假设 a_1, a_2, a_3, a_4 如命题 A.2 的证明中所给。由此，两个相关区域都是 $\mathbb{S}^2$ 的子集。首先回顾一下，正四面体的二面角为 $\cos^{-1}(1/3)$。这也是单位球面 $\partial B(a_4)$ 上测地三角形 a_1, a_2, a_3 的内角。根据公式 (A.3)，我们得出该测地三角形的表面积由 (A.4) 给出。

现在考虑面 $\partial B(a_4) \cap R$。通过直接计算可知，每条边界边都是 $\mathbb{S}^2$ 中的一段圆弧，其半径为 $r = \sqrt{3}/2$，弧长为 $\sqrt{3}/2\cos^{-1}(1/3)$。因此，这些圆弧的测地曲率为常数，等于

$$\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

根据命题 A.2，顶点 a_1, a_2, a_3 处的内角均等于$\pi - \cos^{-1}(1/3)$。因此，由高斯-博内公式可得

$$S(\partial B(a_4) \cap R) + 3\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^{-1}(1/3) + \cos^{-1}(1/3)\right] = 2\pi.$$

我们通过求解 $S(\partial B(a_4) \cap R)$ 来结束 (A.5)。 □

注 A.4。令 $\Delta(a_1, a_2, a_3) \subset \partial B(a_4) \cap R$ 表示具有顶点a_1，a_2，a_3的测地三角形。则 $(B(a_4) \cap R) \setminus \Delta(a_1, a_2, a_3)$是三个狭长曲面的并集，它们仅在顶点处重叠。见图 19a。例如，包含 a_1和 a_2 的狭长曲面等于 $H \cap (\partial B(a_4) \cap R)$，其中 H 是一个不包含 a_3 的半空间，而a_1，a_2，$a_4 \in \partial H$。命题 A.3 的一个直接推论是，每个狭长曲面的面积等于

$$S(H \cap (\partial B(a_4) \cap R)) = \pi - \frac{5}{2}\cos^{-1}(1/3). \tag{A.6}$$

A.3 纺锤体的周长

回顾一下，迈斯纳四面体的边界由夹在相交平面之间的纺锤环面片段组成。通过在必要时旋转和平移纺锤体，我们可以利用以下断言求出任意此类交集的表面积。

引理 A.5。令 $\phi \in [0, \pi/2]$ 并设

$$W_\phi = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 \geq 0,\ -\sin(\phi)x_1 + \cos(\phi)x_2 \leq 0\right\}.$$

对于 $a \in [0, 1]$,

$$S\left(W_\phi \cap \partial \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)\right) = 2\phi\left(-\sqrt{1-a^2}\sin^{-1}(a) + a\right). \tag{A.7}$$

注释 A.6。我们将 $W_\phi \cap \partial \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$ 称为开角为 ***spindle*** 曲面，开角为 ϕ。

证明。 回顾可知， $\partial \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$ 是通过旋转曲线得到的旋转曲面

$$\begin{cases} \left(x_1 + \sqrt{1-a^2}\right)^2 + x_3^2 = 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

关于 x_3 轴。随后可以直接验证， $W_\phi \cap \partial \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)$ 可以通过以下方式参数化

$$X(\theta, t) = \left(\left(-\sqrt{1-a^2} + \cos(t)\right)\cos(\theta), \left(-\sqrt{1-a^2} + \cos(t)\right)\sin(\theta), \sin(t)\right)$$

对于 $\theta \in [0, \phi]$ 和 $t \in [-\sin^{-1}(a), \sin^{-1}(a)]$.

我们注意到，

$$\partial_t X(\theta,t) = (-\sin(t)\cos(\theta), -\sin(t)\sin(\theta), \cos(t))$$

and

$$\partial_\theta X(\theta,t) = \left(-\left(-\sqrt{1-a^2}+\cos(t)\right)\sin(\theta), \left(-\sqrt{1-a^2}+\cos(t)\right)\cos(\theta), 0\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}
S\left(W_\phi \cap \partial \mathrm{Sp}(ae_3, -ae_3)\right) &= \int_0^\phi \int_{-\sin^{-1}(a)}^{\sin^{-1}(a)} |\partial_\theta X(\theta,t) \times \partial_t X(\theta,t)| dt d\theta \\
&= \int_0^\phi \int_{-\sin^{-1}(a)}^{\sin^{-1}(a)} \left(-\sqrt{1-a^2}+\cos(t)\right) dt d\theta \\
&= \phi \int_{-\sin^{-1}(a)}^{\sin^{-1}(a)} \left(-\sqrt{1-a^2}+\cos(t)\right) dt \\
&= 2\phi\left(-\sqrt{1-a^2}\sin^{-1}(a)+a\right).
\end{aligned}$$

□

A.4 体积计算

我们终于可以计算迈斯纳四面体的体积了 .

命题 A.7. 每个迈斯纳四面体的体积为 b y

$$\pi\left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^{-1}(1/3)\right].$$

证明。令 M_1 为一个迈斯纳四面体，其中共享同一顶点的三条边经过磨圆。为了计算 M_1 的周长，我们注意到， ∂M_1 由 3 个开角为 $\cos^{-1}(1/3)$ 的纺锤面、一个与 R 共有的面，以及 R的其余面的 3 个子集组成，每个子集都去除了两个狭长曲面。利用公式 (A.4)、(A.5)、(A.6) 和 (A.7)，我们得到

$$\begin{aligned}
S(\partial M_1) &= 3\cdot\cos^{-1}(1/3)\left(1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) + 1\cdot\left(2\pi - \frac{9}{2}\cos^{-1}(1/3)\right) \\
&\qquad + 3\cdot\left(2\pi - \frac{9}{2}\cos^{-1}(1/3) - 2\left[\pi - \frac{5}{2}\cos^{-1}(1/3)\right]\right) \\
&= 3\cdot\cos^{-1}(1/3)\left(1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) + 1\cdot\left(2\pi - \frac{9}{2}\cos^{-1}(1/3)\right) + 3\cdot\frac{1}{2}\cos^{-1}(1/3) \\
&= \pi\left[2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^{-1}(1/3)\right].
\end{aligned}$$

接下来令 M_2 为一个具有三条共享一个公共面的光滑化边的迈斯纳四面体。注意到 ∂M_1 由 3 个开角为$\cos^{-1}(1/3)$ 的纺锤面、 R 内的一个测地三角形，以及 R的剩余面的3个子集组成，其中每个子集都移除了一个薄片曲面。运用上述各种公式可得

$$\begin{aligned} S(\partial M_2) &= 3\cdot\cos^{-1}(1/3)\left(1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)+1\cdot\left(3\cos^{-1}(1/3)-\pi\right) \\ &\qquad +3\cdot\left(2\pi-\frac{9}{2}\cos^{-1}(1/3)-\left[\pi-\frac{5}{2}\cos^{-1}(1/3)\right]\right) \\ &= 3\cdot\cos^{-1}(1/3)\left(1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)+1\cdot\left(3\cos^{-1}(1/3)-\pi\right)+3\cdot\left(\pi-2\cos^{-1}(1/3)\right) \\ &= \pi\left[2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^{-1}(1/3)\right]. \end{aligned}$$

特别地， $S(\partial M_1) = S(\partial M_2)$。根据 Blaschke关系，

$$\begin{aligned} V(M_i) &= \frac{1}{2}S(\partial M_i)-\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\pi\left[2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^{-1}(1/3)\right]-\frac{\pi}{3} \\ &= \pi\left[\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^{-1}(1/3)\right] \end{aligned}$$

对于 $i=1$，2。 □

B 绘制图形

我们将介绍如何使用 Mathematica绘制一个勒洛四面体和一个迈斯纳四面体。本文中的其他勒洛多面体和迈斯纳多面体也可以用类似的方法绘制。为了尽可能清晰具体，我们将展示所使用的 Mathematica 笔记本中的屏幕截图：图 1 展示勒洛四面体，图 3 展示迈斯纳四面体。首先，我们为特定的正四面体 T 选择顶点 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ，其位于$\mathbb{R}^3$中。我们选择这些顶点，是因为它们属于一个以原点为中心、半径为 $\sqrt{3/8}$的球面，因此决定 T 的半空间由（A.1）给出。

我们回顾一下， $R=B(a_1)\cap B(a_2)\cap B(a_3)\cap B(a_4)$ 是相应的勒洛四面体，而 ∂R的面是 $\partial B(a_i)\cap R$，其中 $i=1$，.....，4。我们可以通过注意到以下事实，略微简化这一描述：

$$\partial B(a_1)\cap R=\partial B(a_1)\cap B(a_2)\cap B(a_3)\cap B(a_4),$$

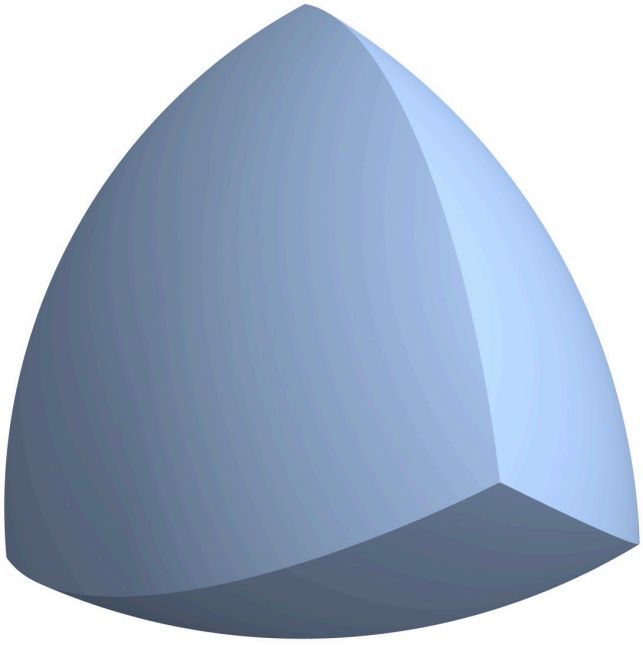
其他面也同样如此。这很容易使用内置的 Sphere、 Ball、 RegionIntersection、 RegionUnion 和 DiscretizeRegion 函数编程到 Mathematica 中。

```
In[1]:= a1 = {0, 0, √(3/8)};
        a2 = {-1/2, -1/(2 √3), -1/√24};
        a3 = {1/2, -1/(2 √3), -1/√24};
        a4 = {0, √(1/3), -1/√24};
```

下方屏幕截图中 R 绘图的准确性由 MaxCellMeasure 容差决定。我们使用了 10^{-7}。较小的容差需要更多计算时间，但会生成更准确的绘图。

```
In[5]:= Face1 = RegionIntersection[Sphere[a1], Ball[a2], Ball[a3], Ball[a4]];
        Face2 = RegionIntersection[Ball[a1], Sphere[a2], Ball[a3], Ball[a4]];
        Face3 = RegionIntersection[Ball[a1], Ball[a2], Sphere[a3], Ball[a4]];
        Face4 = RegionIntersection[Ball[a1], Ball[a2], Ball[a3], Sphere[a4]];
        ReulTetra = RegionUnion[Face1, Face2, Face3, Face4];
In[10]:= DiscretizeRegion[ReulTetra, MaxCellMeasure → 10^-7]
```

Out[10]=



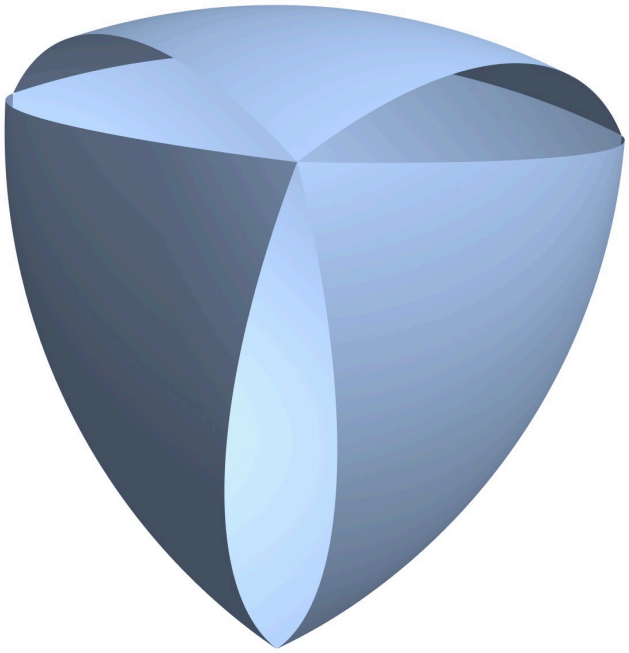
接下来，我们将绘制迈斯纳多面体 M，其边界是通过在以 a_1 为端点的三条边附近对 ∂R 进行手术得到的。为此，我们将切除 ∂R 的相关部分。例如，将被切除的 ∂R 中靠近连接 a_1 和 a_4 的边的部分，位于由半空间 $a_2 \cdot x \leq -1/8$ 确定的楔形体内。

以及 $a_3 \cdot x \leq -1/8$。类似的推理也适用于 ∂R 中另外两个需要切除的部分。可以使用 Mathematica，利用内置的 HalfSpace函数来实现，如下所示。

```
In[11]:= Face2Cut = RegionIntersection[Ball[a1], Sphere[a2], Ball[a3], Ball[a4],
           HalfSpace[-a4, 1 / 8], HalfSpace[-a3, 1 / 8]];
         Face3Cut = RegionIntersection[Ball[a1], Ball[a2], Sphere[a3], Ball[a4],
           HalfSpace[-a4, 1 / 8], HalfSpace[-a2, 1 / 8]];
         Face4Cut = RegionIntersection[Ball[a1], Ball[a2], Ball[a3], Sphere[a4],
           HalfSpace[-a2, 1 / 8], HalfSpace[-a3, 1 / 8]];
         ReulTetraCut = RegionUnion[Face1, Face2Cut, Face3Cut, Face4Cut];

In[15]:= DiscretizeRegion[ReulTetraCut, MaxCellMeasure → 10^-7]
```

Out[15]=



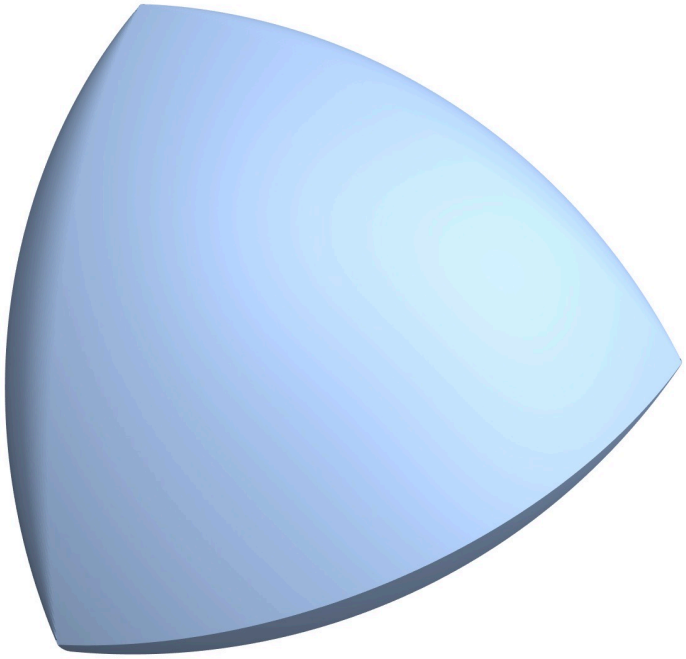
最后，我们定义函数 Spindle，如推论 2.7 中所述，该函数隐式指定了一个纺- 锤体的边界。此函数使用内置的 Norm 和 Projection函数。然后，我们可以通过绘制 M 的边界：对于 $j = 2,3,4$，绘制a_1 和 a_j 之间的纺锤体的并集，再加上上方显示的挖空勒洛四面体。我们注意到，对于 $j = 2,3,4$，所得形状包含 a_1 和 a_j 之间的整个纺锤体，而我们只需要部分纺锤体来补全 M 的边界。可以使用内置的 HalfSpace 函数绘制这些纺锤体部分。然而，我们发现这样会显著增加计算时间，因此选择绘制完整的纺锤体。尽管如此，无论绘制完整的纺锤体还是仅绘制纺锤体的部分，所呈现的两个边界都是相同的。

```
In[16]:= Spindle[x_, y_] :=
          ImplicitRegion[((Norm[{a, b, c} - (x + y)/2 - Projection[{a, b, c} - (x + y)/2, x - y]]
                + Sqrt[1 - Norm[(x - y)/2]^2])^2 + Norm[Projection[{a, b, c} - (x + y)/2, x - y]]^2 == 1,
           {a, b, c}]

In[17]:= MeissTetra = RegionUnion[ReulTetraCut, Spindle[a1, a2], Spindle[a1, a3],
           Spindle[a1, a4]];

In[18]:= DiscretizeRegion[MeissTetra, MaxCellMeasure → 10^-7]
```

Out[18]=



参考文献

[1] K´aroly Bezdek,Zsolt L´angi, M´artonNasz´odi, and Peter Papez. 球多面体。《离散与计算几何》, 38(2):201–230, 2007.[2] H. G. Eggleston. 恒宽集在有限维巴拿赫空间中。*Israel J.Math.*, 3:163–172, 1965.[3] B. Gruenbaum. Vazonyi 猜想的证明。*Bull. Res. Council Israel. Sect. A*, 6:77–78, 1956.

[4] Brian Harbourne. 通过几何方法求球面四面体（又称勒洛四面体）的体积与表面积。https://www.math.unl.edu/~bharbourne1/ST/sphericaltetrahedron.html。访问日期：2023年7月30日。[5] A. Heppes. A. V´azsonyi猜想的证明。《匈牙利科学院数学学报》，7:463–466，1956年。[6] I. M. Jaglom and V. G. Boltjanski˘ı.《凸图形》。Holt, Rinehart and Winston，纽约，1960年。Paul J. Kelly 和 Lewis F. Walton 译。.. [7] B¨orge Jessen. 关于恒宽凸点集。《数学杂志》，29(1):378–380，1929年。[8] Bernd Kawohl and Christof Weber. 迈斯纳神秘体。《数学智者》，33(3):94–101，2011年。[9] Y. S. Kupitz, H. Martini, and M. A. Perles. 球多胞体与 V´azsonyi 问题。《匈牙利数学学报》，126(1-2):99–163，2010年。[10]Horst Martini, Luis Montejano, and D´eborah Oliveros. 恒宽体。Birkh¨auser/Springer，查姆，2019年。凸几何导论及其应用。[11] Ernst Meissner and Friedrich Schilling. 三个恒宽曲面的石膏模型。《应用数学与物理学杂志》，60:92–94，1912年。[12]L. Montejano and E. Rold´an-Pensado. 迈斯纳多面体。《匈牙利数学学报》，151(2):482–494，2017年。[13] Luis Montejano, Eric Pauli, Miguel Raggi, and Edgardo Rold´an-Pensado. 勒洛多面体背后的图。《离散与计算几何》，64(3):1013–1022，2020年。[14] J´anos Pach and Pankaj K. Agarwal. 组合几何。Wiley-Interscience离散数学与优化丛书。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1995年。Wiley-Interscience出版物。[15] G. T. Sallee. 勒洛多胞体。《Mathematika》，17:315–323，1970年。[16] S. Straszewicz. 关于 P. Erd¨os 的一个几何问题。《波兰科学院通报：第三辑》，5:39–40，IV–V，1957年。