arXiv:2304.04061v1 [math.AG] 8 Apr 2023

用 Betti 与德拉姆余乘法描述的圆分双重洗牌挠子

YADDADEN KHALEF

Abstract. 为了描述单位根处多重多对数值之间的双重洗牌关系和正则化关系，Racinet 对每个阶为 N 的有限循环群 G 以及每个群嵌入 $\iota : G \to \mathbb{C}^\times$，关联了一个 $\mathbb{Q}$-概形 DMR$^\iota$；该概形将每个交换的 $\mathbb{Q}$-代数 k 关联到一个集合DMR$^\iota$(k)，后者可以分解为集合DMR$^\iota_\lambda$(k)的不交并，其中 $\lambda \in$k。他还构造了一个 $\mathbb{Q}$-群概形DMR$_0^G$，并证明，对于任意交换的 $\mathbb{Q}$-代数 k 以及任意 $\lambda \in$k$^\times$，DMR$^\iota_\lambda$(k) 是在 DMR$_0^G$(k)的作用下的一个扭子。随后，Enriquez 和 Furusho 证明，对于 $N = 1$，DMR$^\iota_\times$ 中的一个子概形 DMR$^\iota$ 是一个同构挠子，用于联系“德拉姆”和“Betti”对象。在先前的工作中，我们用交叉积重新表述了Racinet的构造，并将Racinet 的余乘识别为定义在代数 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$上的模 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 上的一个余乘 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$；该代数配备了其自身的余乘 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$。在本文中，我们为 Enriquez和Furusho的结果推广到任意 $N \geq 1$ 定义了主要构成要素：我们构造了代数 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 上的一个模$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$，并证明在 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 上分别存在两个相容余乘法$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$，使得 DMR$^\iota_\times$ 包含于同构挠子中，该同构挠子联系 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$（分别为 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$）与 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$（分别为 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$）。

Contents

引言。 2
0 4
若干代数模范畴 1. 双重洗牌扭子 1.1. 预备知识 1.2. 扭子 DMR$^\iota_\lambda$(k) 1.3. 扭子 DMR$^\iota_\times$(k) 1.4. 扭子 DMR$_\times$(k) 2. 作为“德拉姆”余乘积稳定子的双重洗牌群 2.1. 代数模 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 上的群作用 2.2. 作为“德拉姆”余乘积稳定子的双重洗牌群 3. “Betti”余乘法的构造 3.1. 拓扑代数模 $(\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}})$ 3.2. 余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 4. 用 Betti 余乘积和德拉姆余乘积表示扭子 DMR$_\times$(k) 4.1. 稳定子子扭子 4.2. 稳定子扭子的包含关系 参考文献 5 5 9 10 15 21 21 28 30 30 50 53 53 55 56

Introduction

多重 L 值（简称 MLV）是由以下级数定义的一个复数

$$L_{(k_1,\dots,k_r)}(z_1,\dots,z_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{z_1^{k_1}\cdots z_r^{k_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

其中 r、k_1、...、$k_r \in \mathbb{N}^*$ 以及 z_1、...、z_r 属于 μ_N 中的 N^{th} 单位根群，其中 N 是一个 ≥ 1整数。当且仅当（k_r，z_r）$\neq$（1,1）时，该级数收敛。这些值满足一组代数关系；我们在此主要关注双重 shuffle 关系和正则化关系。

多亏了 Racinet 的工作 [Rac]，我们对双重洗牌关系和正则化关系的理解得到了极大提升。他将群 μ_N 推广为有限循环群 G，并为有限循环群 G 的每一对 (G,ι) 及群嵌入$\iota: G \to \mathbb{C}^\times$，赋予一个 $\mathbb{Q}$-概形 DMR^ι；该概形将每个交换 $\mathbb{Q}$-代数 k 对应到集合 $\mathrm{DMR}^\iota(\mathbf{k})$，此集合可分解为若干集合 $\mathrm{DMR}^\iota_\lambda(\mathbf{k})$ 的不交并，其中 $\lambda \in \mathbf{k}$（参见[Rac, 定义 3.2.1]）。随后，MLV 上的双重洗牌关系和正则化关系便编码为：这些值的某个适当生成级数属于集合 $\mathrm{DMR}^{\iota_{can}}_{i2\pi}(\mathbb{C})$，其中 $\iota_{can}: G = \mu_N \to \mathbb{C}^\star$ 是规范嵌入。Racinet 还证明，对于任意一对 (G,ι)，集合 $\mathrm{DMR}^\iota_0(\mathbf{k})$ 配备“扭曲 Magnus”乘积（见 (1.13)）后构成一个群，且与 ι的选择无关。因此将其记为 $\mathrm{DMR}^G_0(\mathbf{k})$。

Racinet 在 [Rac, Theorem I] 中的主要结果是，对于每一对 (λ,ι)，其中 $\lambda \in \mathbf{k}^\times$ 且 $\iota: G \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$，集合 $\mathrm{DMR}^\iota_\lambda(\mathbf{k})$ 都具有关于群 $(\mathrm{DMR}^G_0(\mathbf{k}), \circledast)$ 作用的扭子结构。对于任意 $\iota: G \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$，这便赋予集合 $\mathrm{DMR}^\iota_\times(\mathbf{k}) := \bigsqcup \mathrm{DMR}^\iota_\lambda(\mathbf{k})$ 一个关于半直积$\lambda\in \mathbf{k}^\times$群 $\mathbf{k}^\times \ltimes \mathrm{DMR}^G_0(\mathbf{k})$ 作用的扭子结构（见命题 1.3.10）。由此，$\mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k}) := \bigsqcup \mathrm{DMR}^\iota_\times(\mathbf{k})$（其中 ι 遍历从 G 到 $\mathbb{C}^\times$ 的所有群嵌入）便具有关于半直积群 $(\text{自同构群}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathrm{DMR}^G_0(\mathbf{k})$ 作用的扭子结构（见命题 1.4.14）。

另一方面，我们在 [Yad] 中引入了交叉积形式体系，并证明 Racinet 的对象可以在其中表示。这构成了双重洗牌理论的“德拉姆”一侧。在这一框架中，交叉积代数被识别为一个拓扑 k-代数 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$，它由生成元与关系给出表示（见命题 1.1.1）。接下来，Racinet 的对象分别以 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的子代数 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 和左正则 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$-模的商模 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的形式给出。代数 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 配备了霍普夫代数余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$，而模$\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 配备了相容的余代数余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$。

根据 Enriquez 和 Furusho 在[EF0], 中给出的 $\mathrm{DMR}^G_0(\mathbf{k})$ 的稳定子解释，我们为配备扭曲 Magnus 乘积的类群元的作用定义了两个稳定子 $\mathrm{Stab}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})(\mathbf{k})$ 和 $\mathrm{Stab}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})(\mathbf{k})$，从而得到以下包含链

$$\mathrm{DMR}^G_0(\mathbf{k}) \subset \mathrm{Stab}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G)(\mathbf{k}) \subset \mathrm{Stab}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_G)(\mathbf{k}),$$

这是 [EF2 的定理 3.1] 中 $G = \{1\}$ 结果的推广。这使我们能够得到以下半直积群包含链。

结果 I（推论 2.2.5）。

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}) \subset & (\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathsf{Stab}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) & \\ & \cap & \\ & (\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathsf{Stab}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) & \end{array}$$

对于 $G = \{1\}$ Enriquez 和 Furusho 在 [EF1] 中引入了双重洗牌理论的“Betti”形式。它基于滤过代数 $\mathcal{V}^{\mathrm{B}}$，该代数表示秩为 2 的自由群的 k-群代数，该自由群记为 F_2，其生成元为 X_0 和 X_1，并配备由增广理想诱导的滤过。完备化 $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}}$ 是一个拓扑 k-代数。接下来，我们有一个霍普夫代数 $(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}})$，它由 $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}}$ 的一个子代数 $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}$ 和由 $X_1 - 1$ 生成的左理想组成，其中 $1 \in \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}}$ 线性生成该子代数。它被表示为一个带有生成元 X_1、X_1^{-1}、$Y_n^+ = -(X_0 - 1)^{n-1} X_0 (X_1 - 1)$ 以及 $Y_n^- = -(X_0^{-1} - 1)^{n-1} X_0^{-1} (X_1^{-1} - 1)$（其中 $n \in \mathbb{N}^*$）的代数，并满足关系 $X_1 X_1^{-1} = X_{-1} X_1 = 1$。此外，我们还有一个霍普夫代数余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}} : \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}} \to (\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}})^{\hat{\otimes} 2}$，其定义为

$$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}(X_1^{\pm 1}) = X_1^{\pm 1} \otimes X_1^{\pm 1} \text{ and for } n \in \mathbb{N}^*, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}(Y_n^{\pm}) = Y_n^{\pm} \otimes 1 + 1 \otimes Y_n^{\pm} + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{N}^* \\ k+l=n}} Y_k^{\pm} \otimes Y_l^{\pm}.$$

最后，我们有一个余代数（$\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}$、$\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}$），它由一个商模 $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}} = \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}} / \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}} (X_0 - 1)$ 构成，该商模作为 k-模同构于 $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}$（见 [EF1, (2.1.1)]），并带有一个与余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}$ 相容的余代数余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}$。

在 §3 中，我们为有限循环群 G 构造了阶为 N 的霍普夫代数（$\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$、$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}$）和模-余代数（$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$、$\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}$）的类似结构。其基础是滤过代数 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$，它表示赋予了由理想 $\ker(\mathbf{k}F_2 \to \mathbf{k}\mu_N)$ 诱导的滤过的群代数 $\mathbf{k}F_2$；其中 $\mathbf{k}F_2 \to \mathbf{k}\mu_N$ 是由群态射 $F_2 \to \mu_N$ 诱导的代数态射，该群态射由 $X_0 \mapsto e^{\frac{i2\pi}{N}}$ 和 $X_1 \mapsto 1$ 给出。其完备化是由该滤过诱导的射影系的逆极限，记为 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$。它是一个与 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 同构的拓扑代数（见命题—定义 3.1.8）。接下来，我们定义一个滤过代数 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$，它由 $1 \in \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 和由 $X_1 - 1$ 生成的左理想线性生成，其滤过由 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的滤过诱导。其完备化 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 与 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 同构（见命题 - 定义 3.1.15）。我们还定义了一个滤过模 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$，它由商模 $\mathbf{k}F_2 / \mathbf{k}F_2 (X_0 - 1)$ 构成，其滤过由 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的滤过诱导。其完备化 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 与 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 同构（见命题-定义 3.1.25）。于是，根据以下结果，我们分别在 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 上具有相容的霍普夫代数结构和余代数结构：

结果 II（定理 3.2.4 和推论 3.2.6）。存在一个拓扑 k-代数同态 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ N\ \mathrm{B}} : \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to (\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}})^{\hat{\otimes} 2}$ 以及一个拓扑 k-模态射 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ N\ \mathrm{B}} : \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to (\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}})^{\hat{\otimes} 2}$，分别赋予 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 兼容的 Hopf 代数与余代数结构。

最后，在第 4 节中，我们推导出以下结果：

结果 III（定理 4.2.1）。DMR$_\times$ 包含于同构挠子中，该挠子关联$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},N}{}^{\mathrm{B}}$（分别为$\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},N}{}^{\mathrm{B}}$）与 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},G}{}^{\mathrm{DR}}$（分别为 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},G}{}^{\mathrm{DR}}$）。

致谢。作者感谢Benjamin Enriquez 所提供的有益讨论、创意和细致审阅。

记号。在本文中， G 是一个阶为 N的（乘法）有限循环群，而 k 是一个交换的 $\mathbb{Q}$-代数。对于一个k-代数 A、一个元素 $x \in A$ 和一个左A-模 M，我们考虑：

- $\ell_x : M \to M$ 为由 $m \mapsto xm$ 定义的 k-模自同态，且如果 x 可逆，则 ℓ_x 是一个自同构。
- $r_x : A \to A$ 为由 $a \mapsto ax$ 定义的k-模自同态，并且如果 x 可逆，那么 r_x 是一个自同构。
- Ad_x： $A \to A$ 定义为满足 $x \in A^\times$的 k-代数自同构，其中 $a \mapsto xax^{-1}$。

0. Some categories of algebra-modules

首先，回顾一下 [EF4] 中引入的若干范畴，这些范畴将在本文中贯穿使用：

- k-mod 是 k-模范畴。
- k-alg 是 k-代数范畴。
- k-alg-mod 是由偶对 (A, M) 构成的范畴，其中 A 是一个 k-代数，而 M 是一个左A-模。
- k-coalg 是 k 上余结合余交换余代数的范畴。
- k-Hopf 是 k 上霍普夫代数所构成的范畴。
- k-HAMC 是霍普夫代数模余代数所构成的范畴，其对象是成对的$\big((A, \Delta^A)$、$(M, \Delta^M)\big)$，其中 (A, Δ^A) 是霍普夫代数，而 (M, Δ^M) 是满足以下条件的余代数：▶对 (A, M) 而言，它是一个代数模。▶对于 $(a, m) \in A \times M$，我们有 $\Delta^M(am) = \Delta^A(a)\Delta^M(m)$。
- k-模$_{\mathrm{top}}$是拓扑 k-模所构成的范畴，其对象是成对的 $(M, (\mathcal{F}^i M)_{i\in\mathbb{N}})$，其中 M是一个 k-模，而 $(\mathcal{F}^i M)_{i\in\mathbb{N}}$是 M的递减滤过，且映射 $M \to \varprojlim M/F^iM$ 是一个 k-模同构，即对于由滤过 $(\mathcal{F}^i M)_{i\in\mathbb{N}}$定义的拓扑， M 是完备且分离的。该范畴配备了张量积 $\hat{\otimes}$，相对于此张量积，它是一个对称张量范畴。
- k-alg$_{\text{拓扑}}$ 是拓扑 k-代数的范畴，即k-mod$_{\text{拓扑}}$ 范畴中的代数，按照 [McL] 的定义。
- k-alg-mod$_{\text{拓扑}}$是拓扑 k-代数模的范畴，即在 [McL] 的意义下，k-mod$_{\text{拓扑}}$ 范畴中的 k-代数模。
- k-余代数$_{\text{拓扑}}$ 是拓扑 k-余代数的范畴，即 McL意义下k-模$_{\text{拓扑}}$ 的范畴。
- k-Hopf$_{\text{拓扑}}$是拓扑 k-霍普夫代数的范畴，即 McL 意义下k-mod$_{\text{拓扑}}$ 范畴中的霍普夫代数。
- k-HAMC$_{\mathrm{top}}$ 是拓扑霍普夫代数模余代数范畴，即按照 [McL] 的定义，k-mod$_{\mathrm{top}}$ 范畴中的霍普夫代数模余代数。

最后，设 $\mathcal{C}$ 为一个对称张量范畴， O 为 $\mathcal{C}$ 的一个对象。我们将 $\mathrm{Cop}_{\mathcal{C}}(O)$ 定义为态射 $D: O \to O^{\hat{\otimes}2}$ 的集合。容易验证，自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(O)$ 通过以下方式作用于 $\mathrm{Cop}_{\mathcal{C}}(O)$:

$$\alpha \cdot D := \alpha^{\otimes 2} \circ D \circ \alpha^{-1}, \tag{0.1}$$

与 $\alpha \in$自同构群$_{\mathcal{C}}(O)$ 及 $D \in$余乘$_{\mathcal{C}}(O)$。

1. The double shuffle torsors

本节回顾 Racinet 在 [Rac] 中的工作所产生的各种双重洗牌扭子。在 §1.1 中，我们回顾 Racinet 的形式体系的基本框架，即两个霍普夫代数 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle, \widehat{\Delta})$ 和 $(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle, \widehat{\Delta}_{\star}^{\mathrm{alg}})$、一个余代数 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, \widehat{\Delta}_{\star}^{\mathrm{mod}})$ 以及一个群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$。此外，我们还回顾 [Yad] 中引入的交叉积形式体系的基本内容；该体系由一个代数 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 及其与一个霍普夫代数 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$ 的关系构成，后者同构于霍普夫代数 $(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle, \widehat{\Delta}_{\star}^{\mathrm{alg}})$；并且包含一个余代数 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$，它同构于余代数 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, \widehat{\Delta}_{\star}^{\mathrm{mod}})$。在 §1.2 中，我们为 $\lambda \in \mathbf{k}$ 和 ι 引入双重洗牌集 $\mathrm{DMR}_{\lambda}^{\iota}(\mathbf{k})$: $G \to \mathbb{C}^{\times}$ 一个单射群态射，它是双 shuffle 群 $\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 上的扭子；该群是 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 的子群（[Rac]）。在 §1.3 中，我们定义集合 $\mathrm{DMR}_{\times}^{\iota}(\mathbf{k}) = \bigsqcup \mathrm{DMR}_{\lambda}^{\iota}(\mathbf{k})_{\lambda \in \mathbf{k}^{\times}}$

并证明它是一个扭子，其对应的群由一个半直积给出，该半直积源自 $\mathbf{k}^{\times}$的作用。最后，在 §1.4 中，我们定义集合 $\mathrm{DMR}_{\times}(\mathbf{k}) = \bigsqcup_{\iota} \mathrm{DMR}_{\times}^{\iota}(\mathbf{k})$，其中 ι 遍历所有单射 $G \to \mathbb{C}^{\times}$，并证明它是一个扭子，其对应的群由半直积给出，该半直积源自 $\mathrm{Aut}(G)\ \times \mathbf{k}^{\times}$的作用。

1.1. 预备知识。

1.1.1. Racinet 形式体系的基本对象。 令 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 为字母表 $X := \{x_0\} \sqcup \{x_g | g \in G\}$ 上带单位元的自由非交换结合级数代数。它是完备分次的，其中 $\deg(x_0) = \deg(x_g) = 1$，对 $g \in G$ 成立。赋予该代数余乘 $\widehat{\Delta}: \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle^{\hat{\otimes}2}$ 后，它便成为一个 k-Hopf^{top} 对象；该余乘是唯一的拓扑 k- 代数同态，由 $\Delta(x_g) = x_g \otimes 1 + 1 \otimes x_g$ 给出，对任意 $g \in G \sqcup \{0\}$ ([Rac, §2.2.3]) 均成立。于是令 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 为关于余乘 Δ 的$\widehat{\ }$ $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的类群元集合，即集合

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) = \{\Psi \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle^{\times} \mid \widehat{\Delta}(\Psi) = \Psi \otimes \Psi\}, \tag{1.1}$$

$\widehat{\ }$其中 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle^{\times}$ 表示 $\mathbf{k}$ 的可逆元集合$\langle\langle X\rangle\rangle$。由于 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$ 是 a 霍普夫代数， $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 在 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的乘积下构成一个群。

群 G 作用于 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$，通过拓扑 k-代数自同构由 $g \mapsto t_g$ 给出，其中对于任意 $g \in G$，拓扑k-代数自同构 t_g 由 $t_g(x_0) = x_0$， $t_g(x_h) = x_{gh}$ 给出，对于 $h \in G$ ([Rac, §3.1.1])。对于任意 $g \in G$，我们有

$$\widehat{\Delta} \circ t_g = t_g^{\otimes 2} \circ \widehat{\Delta}, \tag{1.2}$$

由于两边都是 k-代数态射的合成，因此只需在生成元上验证这一恒等式即可。由此可知，对于任意 $g \in G$，k-代数自同构 $t_g: \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 在 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 上限制为一个群自同构。

设 $\mathbf{q}$ 是 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的 k-模自同构，它在 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ ([Rac, §2.2.7]) 的拓扑 k-模基 $\big(x_0^{n_1}x_{g_1}x_0^{n_2}x_{g_2}\cdots x_0^{n_r}x_{g_r}x_0^{n_{r+1}}\big)_{r,\ n_1,\ \ldots\ldots g_1\ \ldots\ g_r\in G}^{n_{r+1}\in\mathbb{N}}$，，上由下式给出

$$\mathbf{q}(x_0^{n_1}x_{g_1}x_0^{n_2}x_{g_2}\cdots x_0^{n_r}x_{g_r}x_0^{n_{r+1}}) = x_0^{n_1}x_{g_1}x_0^{n_2}x_{g_2g_1^{-1}}\cdots x_0^{n_r}x_{g_rg_{r-1}^{-1}}x_0^{n_{r+1}}.$$

对于 $(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G$，令 $y_{n,g}:=x_0^{n-1}x_g$。令 $Y:=\{y_{n,g}|(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G\}$。我们将 $\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ 定义为 Y 上的拓扑自由 k-代数，其中对于每个 $(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G$，元素 $y_{n,g}$ 的次数为 n。可以证明，$\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ 等于 k-子代数 $\mathbf{k}\oplus\bigoplus_{g\in G}\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_g$ 的$\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ ([Rac, §2.2.5] 和 [EF0, §2.2])。

令 $\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}\colon\ \mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle\to(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle)^{\hat{\otimes}2}$ 为唯一的拓扑 k-代数同态，使得对于任意 $(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G$

$$\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}(y_{n,g}) = y_{n,g}\otimes 1 + 1\otimes y_{n,g} + \sum_{\substack{k=1\\ h\in G}}^{n-1} y_{k,h}\otimes y_{n-k,gh^{-1}}. \tag{1.3}$$

元素 $\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}\in\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-}\mathrm{alg}_{\mathrm{top}}}(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle)$称为调和余乘（[Rac, §2.3.1]），而对 $(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle,\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}})$ 是 k-Hopf 中的一个对象。

考虑拓扑 k-模商 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$。有序对 $(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle,\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$ 是范畴 $\mathbf{k}$-alg-$\mathrm{mod}^{\mathrm{top}}$ 的一个对象。投影态射 $\pi_Y:\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle\to\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ 在 $\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ 上的限制是一个同构，因此 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ 是 $\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ 上的秩 1 自由模。由此可得，存在唯一的拓扑 k-模态射 $\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}\in\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-}\mathrm{mod}_{\mathrm{top}}}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$，由图表交换这一条件确定

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle & \xrightarrow{\quad\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}\quad} & \mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle^{\hat{\otimes}2} \\ {\scriptstyle\pi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_Y^{\otimes 2}} \\ \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 & \xrightarrow{\quad\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}\quad} & (\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)^{\hat{\otimes}2} \end{array} \tag{1.4}$$

。有序对 $(\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}},\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})$ 是 $\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-}\mathrm{alg}\text{-}\mathrm{mod}_{\mathrm{top}}}(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle,\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$ 的一个元素。有序对 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0,\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})$ 是 $\mathbf{k}$-$\mathrm{coalg}^{\mathrm{top}}$ 的一个对象，而有序对 $\big((\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle,\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}),(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0,\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})\big)$ 是 $\mathbf{k}$-$\mathrm{HAMC}^{\mathrm{top}}$ 的一个对象。

1.1.2. 交叉积形式体系的基本对象。令 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 为由 $\{e_0,e_1\}\sqcup G$ 生成的完备分次代数，其中 e_0 和 e_1 的次数为 1，而元素 $g\in G$ 的次数为 0，并满足以下关系：

(i) $g\times h=gh$; (ii) $1=1_G$; (iii) $g\times e_0=e_0\times g$;

对任意 $g,h\in G$; 其中"$\times$"是代数乘法[1]([Yad, §2.1.1]).

回顾一下，映射 $g\mapsto t_g$ 定义了 G 在 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 上的作用，该作用由 k-代数自同构给出。接着考虑与此作用对应的交叉积代数 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle\rtimes G$

[1]若不存在歧义，我们今后将不再用该符号表示。

，它是 k-模 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \otimes \mathbf{k}G$，其乘法定义如下：对任意 a、$b \in \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 以及任意 g、$h \in G$，有 ([Bou07，第 3 章，第 180 页，习题 11])

$$(a \otimes g) * (b \otimes h) = a\, t_g(b) \otimes gh. \tag{1.5}$$

命题1.1.1（[Yad，命题2.1.3]）。存在唯一的 k-代数同构 $\beta\colon \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$，使得 $x_0 \otimes 1 \mapsto e_0$，并且对于 $g \in G$，$x_g \otimes 1 \mapsto -ge_1g^{-1}$ 和 $1 \otimes g \mapsto g$。

令 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 为 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的完整分次 k-子代数，由以下内容给出。

$$\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} := \mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_1. \tag{1.6}$$

它由该族自由生成

$$Z = \{z_{n,g} := -e_0^{n-1} g e_1 \mid (n,g) \in \mathbb{N}_{>0} \times G\},$$

其中 $\deg(z_{n,g}) = n$ ([Yad，命题 2.1.5.(b)])。因此，存在唯一的 k-代数同构 $\varpi\colon \mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle \to \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$，对 $(n,g) \in \mathbb{N}_{>0} \times G$ 定义为 $y_{n,g} \mapsto z_{n,g}$。

于是存在唯一的拓扑 k-代数同态 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_{\cdot G}\colon \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \to (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})^{\widehat{\otimes}2}$ 使得对于任意 $(n,g) \in \mathbb{N}_{>0} \times G$

$$\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(z_{n,g}) = z_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,g} + \sum_{\substack{k=1 \\ h \in G}}^{n-1} z_{k,h} \otimes z_{n-k,gh^{-1}}. \tag{1.7}$$

余乘 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{\cdot G}{}^{\mathrm{DR}}$ 是 $\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-}\mathrm{alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})$ 中的一个元素。二元组 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{\cdot G}{}^{\mathrm{DR}})$ 是范畴 k-Hopf^{top} 中的一个对象，而 k-代数同构 $\varpi\colon \mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle \to \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 是霍普夫代数 $(\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle, \widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}})$ 与 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{\cdot G}{}^{\mathrm{DR}})$ 之间的同构。

令 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 为由下式给出的完备分次 k-模。

$$\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} := \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \Big/ \Big(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \sum_{g \in G} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} (g-1) \Big).$$

令 1_{DR} 为 $1 \in \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 在 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 中的类。映射 $- \cdot 1_{\mathrm{DR}}\colon \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 是一个满射 k-模态射，其核为 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \sum_{g \in G} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} (g-1)$。此外，

该对 $(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 是范畴 k-alg-mod^{top} 中的一个对象。此外，由 [Yad，命题2.1.6] 可推-导出存在唯一的 k-模同构 $\kappa\colon \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$，其由图表的交换性确定

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle & \xrightarrow{\beta \circ (- \otimes 1)} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle \pi_Y \circ \mathbf{q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle - \cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 & \xrightarrow{\kappa} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.8}$$

另一方面，以下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle & \xrightarrow{\ \varpi\ } & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle \pi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 & \xrightarrow{\ \kappa\ } & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.9}$$

交换（[Yad，推论 2.1.8]）。因此，映射 $-\cdot 1_{\mathrm{DR}}\colon \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 是一个 k-模同构，因为图式 (1.9) 中的所有其他箭头都是同构。此外，我们得到以下结果

引理 1.1.2。该对 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$是范畴 k-alg-mod^{top} 的一个对象。此外， $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$是自由 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$- 模的秩 1 模。

证明。第一条陈述源于这样一个事实：$(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 是 k-代数模 $(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 经 k-代数同态 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的拉回。第二条陈述源于这样一个事实：由于图表 (1.9) 的交换性，$\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ 是一个秩 1 的自由 $\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$-模。□

这使我们能够构造一个拓扑 k-模态射 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}} \in \mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-}\mathrm{mod}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$，且由以下图表唯一确定

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\ } & (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})^{\hat{\otimes} 2} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}^{\otimes 2}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\ } & (\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})^{\hat{\otimes} 2} \end{array} \tag{1.10}$$

由于引理 1.1.2 以及 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$-模$\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$的自由秩 1 性质，该图表交换。对 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$ 是范畴 k-coalg^{top} 中的一个对象，而 k- 模同构 $\kappa : \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$ 是余代数 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, \widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})$ 与 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$ 之间的同构。

引理 1.1.3. 对 $\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)$ 是 $\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}_{\mathrm{top}}}\left(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\right)$的一个元素。证明。设 $w \in \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$和 $m \in \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$。根据引理 1.1.2，存在唯一的$w' \in \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$使得 $m = w' \cdot 1_{\mathrm{DR}}$。我们有

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(w \cdot m) &= \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(ww' \cdot 1_{\mathrm{DR}}) = \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(ww') \cdot 1_{\mathrm{DR}}^{\otimes 2} = \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(w)\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(w') \cdot 1_{\mathrm{DR}}^{\otimes 2} \\ &= \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(w)\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(w' \cdot 1_{\mathrm{DR}}) = \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(w)\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(m), \end{aligned}$$

w这里第二个和第四个等式来自图（1.10）的交换性。□

因此，$\left((\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}),\ (\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})\right)$ 是 k-HAMC^{top} 的一个对象。此外，这一对

$$(\varpi, \kappa) : \left((\mathbf{k}\langle\langle Y\rangle\rangle, \widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}), (\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, \widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})\right) \to \left((\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}), (\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})\right)$$

是 k-HAMC^{top} 中对象之间的态射。

1.2. 扭子 $\mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathbf{k})$。我们将 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbf{k}^{\{\text{words 中的 } x_0,(x_g)^{g\in G}\}}, v \mapsto \big((v|w)\big)_w$记作满足以下条件的映射： $v=\sum_w (v|w)w$ （空字等于 1）。

令 $\Gamma:\ \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbf{k}[[x]]^\times,\ \Psi \mapsto \Gamma_\Psi$ 函数[2] 由 ([Rac, (3.2.1.2)]) 给出

$$\Gamma_\Psi(x) := \exp\left(\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\Psi|x_0^{n-1}x_1)x^n\right). \tag{1.11}$$

定义 1.2.1（[Rac，定义 3.2.1]）。设 $\lambda\in\mathbf{k}$ 且 $\iota:\ G\to\mathbb{C}^\times$ 为一个群嵌入。我们将 $\mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathbf{k})$ 定义为满足以下条件的 $\Psi\in\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 的集合：

(i) $(\Psi|x_0)=(\Psi|x_1)=0$;
(ii) $\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}(\Psi_\star)=\Psi_\star\otimes\Psi_\star$;
(iii) 若 $|G|\in\{1,2\}$，则 $(\Psi|x_0x_1)=-\frac{\lambda^2}{24}$;
(iv) 若 $|G|\geq 3$、$\left(\Psi|x_{g_\iota}-x_{g_\iota^{-1}}\right)=\frac{|G|-2}{2}\lambda$;
(v) For $k\in\{1,\dots,|G|/2\}$, $\left(\Psi|x_{g_\iota^k}-x_{g_\iota^{-k}}\right)=\frac{|G|-2k}{|G|-2}\left(\Psi|x_{g_\iota}-x_{g_\iota^{-1}}\right)$,

其中 $g_\iota:=\iota^{-1}(e^{\frac{i2\pi}{|G|}})$ 和 $\Psi_\star:=\pi_Y\circ\mathfrak{q}\left(\Gamma_\Psi^{-1}(x_1)\Psi\right)\in\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$。

注 1.2.2。

(i) 感谢 [Rac，第 3.2 节，3], $\mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathbf{k})$ 是一个非空集合。
(ii) 如果 $|G|\in\{1,2\}$，则嵌入 ι 是唯一的。

命题—定义 1.2.3（[Rac，注释 3.2.2]）。对于 $\lambda=0$，定义 1.2.1 的条件[3] (iv) 不依赖于 ι 的选择。因此，集合 $\mathrm{DMR}_0^\iota(\mathbf{k})$ 改记为 $\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$。

命题 1.2.4。定义 1.2.1 的条件 (ii) 等价于

$$\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(\Psi^\star)=\Psi^\star\otimes\Psi^\star, \tag{1.12}$$

其中 $\Psi^\star:=\left(\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\right)\cdot 1_{\mathrm{DR}}\in\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$。

证明。由图表(1.8)可得 $\kappa(\Psi_\star)=\Psi^\star$。相等式(1.12) 随即由以下事实得出： $\kappa:(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle x_0,\widehat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})\to(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}^{\ \mathrm{DR}})$ 是一个余代数同构。□

回顾(1.1)中给出的集合 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，它由$(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle,\Delta)$的类群元组成。除了其通常的群结构外，它对于称为“扭曲Magnus”乘法的 $\circledast$ 也构成一个群，该乘法对任意 Ψ、$\Phi\in\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$定义为

$$\Psi\circledast\Phi:=\Psi\mathrm{aut}_\Psi(\Phi), \tag{1.13}$$

其中 aut_Ψ 是 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的拓扑 k-代数自同构，由 ([EF0], 第 4 节.1.3 基于 [Rac],第 3 节.1.2) 给出

$$x_0\mapsto x_0\qquad \text{and for } g\in G, x_g\mapsto \mathrm{Ad}_{t_g(\Psi^{-1})}(x_g). \tag{1.14}$$

命题 1.2.5（[Rac，定理 I]）。设 $\lambda\in\mathbf{k}$ 和 $\iota:\ G\to\mathbb{C}^\times$ 是一个群嵌入。

(i) The pair $(\mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}),\circledast)$ *is a subgroup of* $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle),\circledast)$.

[2]根据 [Dri90]的结果，该函数与经典伽马函数有关，见 [Fu11], 第 344 页。[3]条件 (v) 也成立。

(ii) 群 $(\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})\ \circledast)$ 通过左乘法自由且传递地作用于 $\mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathbf{k})$，$\circledast$。

1.3. 扭子 $\mathrm{DMR}_\times^\iota(\mathbf{k})$。

1.3.1. 群 $\mathbf{k}^\times$ 对 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的作用。群 $\mathbf{k}^\times$ 通过 $\mathbf{k}$-代数自同构作用于 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$。

$$\mathbf{k}^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle);\quad \lambda \longmapsto \lambda\bullet - : x_g \mapsto \lambda x_g,\ \text{for } g\in G\sqcup\{0\}. \tag{1.15}$$

可验证，对于任意 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$，自同构 $\lambda\bullet -$ 是 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle,\Delta)$的一个霍普夫代数自同-$\widehat{\ }$构。此外，对于任意 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$ 和任意 $g\in G$，我们有

$$(\lambda\bullet -)\circ t_g = t_g\circ(\lambda\bullet -), \tag{1.16}$$

由于两边都表示为 $\mathbf{k}$-代数态射的合成，只需在生成元上检验这个恒等式即可验证。

命题1.3.1。对于任意 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$，映射 $\lambda\bullet -:\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle\to\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 限制为 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 的群自同构。

为了证明这一点，我们需要以下引理:

引理 1.3.2. 对任意 $(\lambda,\Psi)\in\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，有

$$(\lambda\bullet -)\circ\mathrm{aut}_\Psi = \mathrm{aut}_{\lambda\bullet\Psi}\circ(\lambda\bullet -). \tag{1.17}$$

证明. 设 $(\lambda,\Psi)\in\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。由于所有态射都是 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的代数自同构，只需在生成元上验证这个恒等式。我们有

$$(\lambda\bullet -)\circ\mathrm{aut}_\Psi(x_0)=\lambda\bullet x_0=\lambda x_0=\lambda\mathrm{aut}_{\lambda\bullet\Psi}(x_0)=\mathrm{aut}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda x_0)=\mathrm{aut}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda\bullet x_0)$$

而对于 $g\in G$,

$$\begin{aligned}(\lambda\bullet -)\circ\mathrm{aut}_\Psi(x_g) &= (\lambda\bullet -)\circ\mathrm{Ad}_{t_g(\Psi^{-1})}(x_g)=\mathrm{Ad}_{\lambda\bullet t_g(\Psi^{-1})}(\lambda\bullet x_g)\\ &= \mathrm{Ad}_{t_g(\lambda\bullet\Psi^{-1})}(\lambda\bullet x_g)=\mathrm{aut}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda\bullet x_g),\end{aligned}$$

其中第三个相等关系来自恒等式 (1.16)。 □

命题 1.3.1 的证明. 设 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$。由于 $\lambda\bullet -$ 是 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle,\Delta)$ 的霍普夫代数自同构$\widehat{\ }$，它限制为一个映射 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\to\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。设 $\Psi,\Phi\in\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。我们有

$$\begin{aligned}\lambda\bullet(\Psi\circledast\Phi) &= \lambda\bullet(\Psi\mathrm{aut}_\Psi(\Phi))=(\lambda\bullet\Psi)\,(\lambda\bullet\mathrm{aut}_\Psi(\Phi))\\ &= (\lambda\bullet\Psi)\,\mathrm{aut}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda\bullet\Phi)=(\lambda\bullet\Psi)\circledast(\lambda\bullet\Phi),\end{aligned}$$

其中，第三个相等式来自引理 1.3.2。这证明了 $\lambda\bullet -$ 是 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 的群自同态。最后，有 $(\lambda\bullet -)^{-1}=\lambda^{-1}\bullet -$，上述计算表明 $(\lambda\bullet -)^{-1}$ 是 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 的自同态，从而证明了该陈述。□

命题 1.3.1 使我们能够定义如下内容:

定义 1.3.3. 我们将 $\mathbf{k}^\times \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 记为 $\mathbf{k}^\times$ and$\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 关于命题 1.3.1 中给出的作用所构成的半直积。它由集合 $\mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 构成，并赋予一个群运算，该运算也记作 $\circledast$，且对于 (λ, Ψ)、$(\nu, \Phi) \in \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们有

$$(\lambda, \Psi) \circledast (\nu, \Phi) := (\lambda\nu, \Psi \circledast (\lambda \bullet \Phi)). \tag{1.18}$$

1.3.2. 群 $\mathbf{k}^\times$ 在交叉积代数和模上的作用。群 $\mathbf{k}^\times$ 通过以下 k-代数自同构作用于 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$

$$\mathbf{k}^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}); \lambda \longmapsto \lambda \bullet_{\mathcal{V}} - : e_i \mapsto \lambda e_i; g \mapsto g, \text{ for } i \in \{0,1\} \text{ and } g \in G. \tag{1.19}$$

引理 1.3.4. 设 $\lambda \in \mathbf{k}^\times$。

(i) 下图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle & \xrightarrow{\lambda\bullet -} & \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \\ {\scriptstyle \beta\circ(-\otimes 1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta\circ(-\otimes 1)} \\ \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{V}} -} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.20}$$

交换。

(ii) 对于 $\Psi \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$，有

$$\Gamma_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1) = \lambda \bullet_{\mathcal{V}} \Gamma_\Psi(-e_1). \tag{1.21}$$

证明。

(i) 由于所有箭头都是 k-代数态射，因此很容易验证生成元的交换性。(ii) 这由以下事实可得：对于 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们有 $(\lambda\bullet\Psi|x_0^{n-1}x_1) = \lambda^n(\Psi|x_0^{n-1}x_1)$。

□

引理 1.3.5. 设 $\lambda \in \mathbf{k}^\times$。

(i) $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的 k-代数自同构 $\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -$ 限制为霍普夫代数自同构 $\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -$，作用于 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}^{\mathrm{DR}})$。(ii) $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的 k-代数自同构 $\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -$ 诱导出余代数自同构 $\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -$，作用于 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}^{\mathrm{DR}})$。

证明。

(i) 对于 $(n, g) \in \mathbb{N}_{>0} \times G$，我们有

$$\lambda \bullet_{\mathcal{V}} z_{n,g} = \lambda \bullet_{\mathcal{V}} (-e_0^{n-1} g e_1) = -\lambda^n e_0^{n-1} g e_1 = \lambda^n z_{n,g}.$$

由于代数 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$由 $(z_{n,g})_{(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G}$自由生成，因此$\lambda \bullet_{\mathcal{V}} (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}) \subset \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。类似地，$(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -)^{-1}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}) \subset \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。因此，$\lambda \bullet_{\mathcal{V}} (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}) = \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。这意味着 $\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -$ 限制为 k-代数自同构 $\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -$，其定义在

$\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$，并且以下图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{V}}-} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.22}$$

交换。我们来证明下图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}} \\ (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})^{\hat{\otimes}2} & \xrightarrow{(\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-)^{\otimes 2}} & (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})^{\hat{\otimes}2} \end{array} \tag{1.23}$$

交换。事实上，对于 $(n,g) \in \mathbb{N}_{>0} \times G$ 我们有

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -)(z_{n,g}) &= \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(\lambda^n z_{n,g}) = \lambda^n \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(z_{n,g}) \\ &= \lambda^n z_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes \lambda^n z_{n,g} + \lambda^n \sum_{\substack{k=1 \\ h\in G}}^{n-1} z_{k,\phi(h)} \otimes z_{n-k,gh^{-1}}) \\ &= (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -)^{\otimes 2} \Big(z_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,g} + \sum_{\substack{k=1 \\ h\in G}}^{n-1} z_{k,h} \otimes z_{n-k,gh^{-1}} \Big) \\ &= (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -)^{\otimes 2} \circ \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(z_{n,g}). \end{aligned}$$

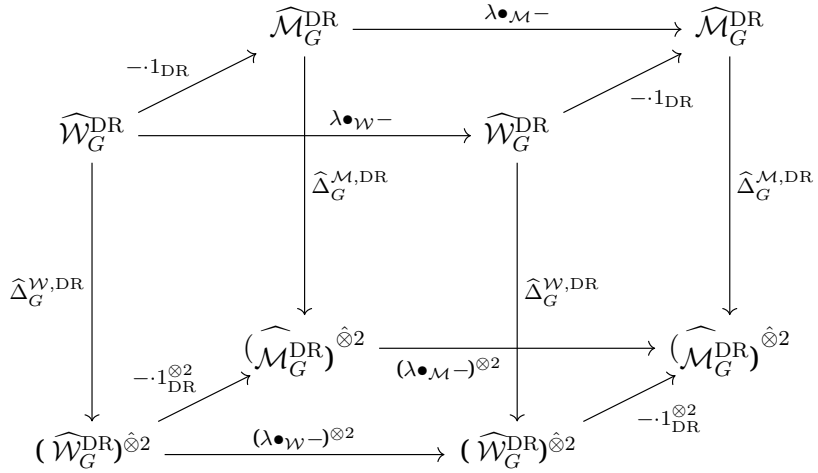
(ii) 可以检查 $\lambda\bullet_{\mathcal{V}}-$ 保持子模$\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \sum \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g-1)$。因此$_{g\in G}$存在唯一的k-模自同构 $\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -$，使得它在 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$上的作用满足下图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{V}}-} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.24}$$

交换。由于 $\lambda\bullet_{\mathcal{V}}-$ 限制为 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$的自同构 $\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-$，我们得到以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.25}$$

于是我们得到以下立方体



左侧和右侧面正好是同一个方形，由于它对应于图1.10，因此是交换的。上边借助图(1.25) 交换，下边是上边的张量平方，因此也是交换的。最后，(i)使我们得到前面的交换性。这些交换性连同 $-\cdot 1_{\mathrm{DR}}$ 的满射性表明立方体的后面交换，这证明 $\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-$ 是 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}^{\ \mathrm{DR}})$ 的余代数自同构。

□

命题 1.3.6。设 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$。

(i) $(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}-,\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-)$ 对$(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 是范畴 k-alg-mod^{top}中的一个自同构。(ii) $(\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-,\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-)$ 对 $((\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}^{\ \mathrm{DR}}),(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}^{\ \mathrm{DR}}))$ 是范畴 k-HAMC^{top} 中的一个自同构。

证明。

(i) 设 $(v,m)\in\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\times\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$。由于 $-\cdot 1_{\mathrm{DR}}\colon\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\to\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$是满射，存在$v'\in\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$使得 $m=v'\cdot 1_{\mathrm{DR}}$。我们有

$$\begin{aligned}\lambda\bullet_{\mathcal{M}}(vm)&=\lambda\bullet_{\mathcal{M}}(vv'\cdot 1_{\mathrm{DR}})=(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}vv')\cdot 1_{\mathrm{DR}}=(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}v)(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}v')\cdot 1_{\mathrm{DR}}\\&=(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}v)(\lambda\bullet_{\mathcal{M}}m),\end{aligned}$$

其中第二个和第四个等式来自图表（1.24）的交换性。

(ii) 由 (i) 和引理 1.3.5 可得。

□

1.3.3. 扭子 $\mathrm{DMR}_\times^\iota(\mathbf{k})$。

命题 1.3.7. 对任意 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$，映射 $\lambda\bullet-:\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle\to\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 限制为 $(\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})\ \circledast)$ 的群自同构。

证明。由命题1.3.1可知，$(\lambda\bullet -)|_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$ 是$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$的群自同构。还需证明，这个 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$的置换在其子集$\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$上诱导出一个置换。设 $\lambda\in\mathbf{k}^\times$ 且 $\Psi\in\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$。由于对于 $g\in G$有 $\lambda\bullet x_0=\lambda x_0$和 $\lambda\bullet x_g=\lambda x_g$，定义 1.2.1中的条件 (i)、(iii)、(iv)和(v)由 $\lambda\bullet\Psi$立即得到满足。为了证明条件 (ii)得到满足，让我们使用命题 1.2.4。我们有

$$\begin{aligned}(\lambda\bullet\Psi)^\star&=\big(\Gamma^{-1}_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1)\beta(\lambda\bullet\Psi\otimes 1)\big)\cdot 1_{\mathrm{DR}}=\big((\lambda\bullet_{\mathcal{V}}\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1))\,(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}\beta(\Psi\otimes 1))\big)\cdot 1_{\mathrm{DR}}\\&=\big(\lambda\bullet_{\mathcal{V}}(\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1))\big)\cdot 1_{\mathrm{DR}}=\lambda\bullet_{\mathcal{M}}\big(\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\cdot 1_{\mathrm{DR}}\big)\\&=\lambda\bullet_{\mathcal{M}}\Psi^\star,\end{aligned}\tag{1.26}$$

其中，第二个相等来自图表(1.20)的交换性和恒等式 (1.21)，第三个相等来自 $\lambda\bullet_{\mathcal{V}}-$ 是一个代数态射这一事实，第四个相等来自引理 1.3.5。(ii)。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}((\lambda\bullet\Psi)^\star)&=\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(\lambda\bullet_{\mathcal{M}}\Psi^\star)=(\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-)^{\otimes 2}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(\Psi^\star)\\&=(\lambda\bullet_{\mathcal{M}}-)^{\otimes 2}((\Psi^\star)^{\otimes 2})=(\lambda\bullet_{\mathcal{M}}\Psi^\star)^{\otimes 2}\\&=(\lambda\bullet\Psi)^\star\otimes(\lambda\bullet\Psi)^\star,\end{aligned}$$

其中第一个和最后一个等式来自(1.26)，第二个等式来自引理1.3.5。(ii)，第三个等式来自命题 1.2.4以及 $\Psi\in\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$这一事实。这证明了 $\lambda\bullet-$ 限制为$\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$上的自映射。按照相同步骤，可以证明 $(\lambda\bullet-)^{-1}=\lambda^{-1}\bullet-$ 限制为 $\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 上的自映射，从而证明该陈述。□

命题 1.3.7 使我们能够给出以下定义：

定义 1.3.8. 我们将 $\mathbf{k}^\times\ltimes\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 记为 $\mathbf{k}^\times$ 与 $\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 关于命题 1.3.7 中给出的作用所构成的半直积。它是 $\mathbf{k}^\times\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 的一个子群。

定义 1.3.9. 设 $\iota:G\to\mathbb{C}^\times$ 是一个群嵌入。我们定义

$$\mathrm{DMR}^\iota_\times(\mathbf{k}):=\{(\lambda,\Psi)\in\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,\Psi\in\mathrm{DMR}^\iota_\lambda(\mathbf{k})\}.\tag{1.27}$$

命题 1.3.10. 设 $\iota:\ G\to\mathbb{C}^\times$ 是一个群嵌入。群 $\mathbf{k}^\times\ltimes\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 通过左乘 $\circledast$ 在 $\mathrm{DMR}^\iota_\times(\mathbf{k})$ 上自由且传递地作用。

为了证明这一点，我们需要以下引理：

引理 1.3.11. 设 $\iota:\ G\to\mathbb{C}^\times$ 是一个群嵌入，且 $\lambda,\nu\in\mathbf{k}^\times$。若 $\Phi\in\mathrm{DMR}^\iota_\nu(\mathbf{k})$，则 $\lambda\nu^{-1}\bullet\Phi\in\mathrm{DMR}^\iota_\lambda(\mathbf{k})$。

证明。设 $\Phi\in\mathrm{DMR}^\iota_\nu(\mathbf{k})$。由于 $\lambda\nu^{-1}\bullet x_0=\lambda\nu^{-1}x_0$和 $\lambda\nu^{-1}\bullet x_g=\lambda\nu^{-1}x_g$对于 $g\in G$，我们有

- $(\lambda\nu^{-1}\bullet\Phi|x_0)=\lambda\nu^{-1}(\Phi|x_0)\ =0$ 和 $(\lambda\nu^{-1}\bullet\Phi|x_1)\ =\lambda\nu^{-1}(\Phi|x_1)\ =0.$
- $(\lambda\nu^{-1}\bullet\Phi|x_0x_1)\ =\lambda^2\nu^{-1^2}(\Phi|x_0x_1)\ =-\lambda^2\nu^{-1^2}\frac{\nu^2}{24}=-\frac{\lambda^2}{24}.$
- $(\lambda\nu^{-1}\bullet\Phi|x_{g_\iota}-x_{g_\iota^{-1}})\ =\lambda\nu^{-1}(\Phi|x_{g_\iota}-x_{g_\iota^{-1}})\ =\lambda\nu^{-1}\frac{|G|-2}{2}\nu=\frac{|G|-2}{2}\lambda.$

这分别证明了定义1.2.1 的条件(i)、(iii)和(iv)。条件 (v)由条件(iv) 推出。最后，使用与命题 1.3.7的证明中相同的论证，可以证明条件 (ii) 得到满足。□

命题 1.3.10 的证明。由于群 $\mathbf{k}^\times \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 通过左乘在集合 $\mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 上的作用 $\circledast$ 是自由的，因此该作用限制到 $\mathbf{k}^\times \ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 在 $\mathrm{DMR}_\times^\iota(\mathbf{k})$ 上的作用也自由。下面证明此作用是传递的。设 (λ, Ψ) 和 $(\nu, \Phi) \in \mathrm{DMR}_\times^\iota(\mathbf{k})$。令 $\mu = \lambda\nu^{-1}$。由引理 1.3.11 可得 $\mu \bullet \Phi \in \mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathbf{k})$。根据命题 1.2.5.(ii)，群 $(\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k}) \circledast)$ 在 $\mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathbf{k})$ 上的作用是传递的，因此存在 $\Lambda \in \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$，使得 $\Lambda \circledast (\mu \bullet \Phi) = \Psi$。于是，存在 $(\mu, \Lambda) \in \mathbf{k}^\times \ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$，使得

$$(\mu, \Lambda) \circledast (\nu, \Phi) = (\lambda, \Psi),$$

这证明了传递性。 □

1.4. 扭子 $\mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k})$。

1.4.1. 自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 上的作用。自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 通过 k-代数自同构作用于 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$，其中元素 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ 通过如下自同构 η_ϕ 作用。

$$x_0 \mapsto x_0, \quad x_g \mapsto x_{\phi(g)} \text{ for } g \in G. \tag{1.28}$$

可以验证，对于任意 $\phi \in$自同构群(G)，自同构 η_ϕ 是霍普夫代数自同构-$\widehat{\ }$的 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$。

此外，对于任意 $\phi \in$自同构群(G) 和任意 $g \in G$，我们有

$$\eta_\phi \circ t_g = t_g \circ \eta_\phi, \tag{1.29}$$

由于等式两边都是由 k-代数态射合成而成，因此只需在生成元上检验此恒等式即可验证。下面我们来证明，

命题 1.4.1. 设 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$。映射 η_ϕ 限制为 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \circledast)$ 的群自同构。

为了证明这一点，我们需要以下引理:

引理 1.4.2. 设 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$、$g \in G$ 和 $\Psi \in \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。我们有

$$\eta_\phi \circ \mathrm{aut}_\Psi = \mathrm{aut}_{\eta_\phi(\Psi)} \circ \eta_\phi. \tag{1.30}$$

证明。由于所有态射都是 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的代数自同构，只需在生成元上验证这个恒等式。我们有

$$\eta_\phi \circ \mathrm{aut}_\Psi(x_0) = \eta_\phi(x_0) = x_0 = \mathrm{aut}_{\eta_\phi(\Psi)}(x_0) = \mathrm{aut}_{\eta_\phi(\Psi)} \circ \eta_\phi(x_0)$$

而对于 $g \in G$,

$$\begin{aligned}\eta_\phi \circ \mathrm{aut}_\Psi(x_g) &= \eta_\phi(\mathrm{Ad}_{t_g(\Psi^{-1})}(x_g)) = \mathrm{Ad}_{t_{\phi(g)}(\eta_\phi(\Psi)^{-1})}(\eta_\phi(x_g)) \\ &= \mathrm{Ad}_{t_{\phi(g)}(\eta_\phi(\Psi)^{-1})}(x_{\phi(g)}) = \mathrm{aut}_{\eta_\phi(\Psi)}(x_{\phi(g)}) = \mathrm{aut}_{\eta_\phi(\Psi)} \circ \eta_\phi(x_g),\end{aligned}$$

其中第二个相等来自恒等式 (1.29)。 □

命题 1.4.1 的证明。设 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$。由于 η_ϕ 是 $(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$ 的霍普夫代数自同构，它将映射限制为 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \to \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。设 $\Psi, \Phi \in \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。我们有

$$\begin{aligned}\eta_\phi(\Psi \circledast \Phi) &= \eta_\phi(\Psi \mathrm{aut}_\Psi(\Phi)) = \eta_\phi(\Psi)\eta_\phi(\mathrm{aut}_\Psi(\Phi)) \\ &= \eta_\phi(\Psi)\mathrm{aut}_{\eta_\phi(\Psi)}(\eta_\phi(\Phi)) = \eta_\phi(\Psi) \circledast \eta_\phi(\Phi),\end{aligned}$$

其中，第三个相等关系来自引理1.4.2。这证明了η_ϕ 限制为 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$的一个群自同态。最后，有 $\eta_\phi^{-1} = \eta_{\phi^{-1}}$，并且上述计算表明 η_ϕ^{-1} 是$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 的一个自同态，从而证明了该陈述。□

引理1.4.3。对于$(\phi, \lambda) \in$ 自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times$，有

$$\eta_\phi \circ (\lambda \bullet -) = (\lambda \bullet -) \circ \eta_\phi.$$

证明。设$(\phi, \lambda) \in$ 自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times$。由于所有态射都是 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 的代数自同构，只需在生成元上验证这个恒等式。我们有

$$\eta_\phi \circ (\lambda \bullet x_0) = \eta_\phi(\lambda x_0) = \lambda x_0 = \lambda \bullet x_0 = \lambda \bullet \eta_\phi(x_0) = (\lambda \bullet -) \circ \eta_\phi(x_0)$$

以及对于 $g \in G$,

$$\eta_\phi \circ (\lambda \bullet x_g) = \eta_\phi(\lambda x_g) = \lambda x_{\phi(g)} = \lambda \bullet x_{\phi(g)} = \lambda \bullet \eta_\phi(x_g) = (\lambda \bullet -) \circ \eta_\phi(x_g).$$

□

命题 1.3.1 和 1.4.1 以及引理 1.4.3 使我们能够定义如下内容：

定义 1.4.4. 我们将 $(\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 记作 $\mathrm{Aut}(G) \ltimes \mathbf{k}^\times$ 与 $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 关于命题 1.3.1 和 1.4.1 中给出的作用所构成的半直积。它由集合 $\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 构成，并赋予一个群运算，该运算也记作 $\circledast$；对于 (ϕ, λ, Ψ)、$(\phi', \nu, \Phi) \in \mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，有：

$$(\phi, \lambda, \Psi) \circledast (\phi', \nu, \Phi) := (\phi \circ \phi', \lambda\nu, \Psi \circledast \eta_\phi(\lambda \bullet \Phi)). \tag{1.31}$$

1.4.2. 群 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 $\mathrm{Emb}(G)$ 上的作用。记

$$\mathrm{Emb}(G) := \{\iota : G \to \mathbb{C}^\times \mid \iota \text{ is a group embedding}\}. \tag{1.32}$$

引理 1.4.5. 群 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 $\mathrm{Emb}(G)$ 上自由且传递地作用，作用方式为

$$(\phi, \iota) \longmapsto \iota \circ \phi^{-1}, \tag{1.33}$$

对于 $(\phi, \iota) \in$ 自同构群$(G) \times \mathrm{Emb}(G)$。

证明. 已知对任意 $\iota \in \mathrm{Emb}(G)$，$\iota(G) = \mu_N$。由此得到一个群同构 $\widetilde{\iota}\colon G \to \mu_N(\mathbb{C})$。因此，对任意 $\iota, \iota' \in \mathrm{Emb}(G)$，存在唯一的 G 的群自同构 $\phi = \widetilde{\iota'}^{-1} \circ \widetilde{\iota}$，使得 $\iota \circ \phi^{-1} = \iota'$。□

推论 1.4.6. 群 $(\text{自同构群}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 在 $\mathrm{Emb}(G) \ltimes \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 上自由且传递地作用，其作用方式为

$$(\phi, \lambda, \Psi) \cdot (\iota, \nu, \Phi) = (\iota \circ \phi^{-1}, \lambda\nu, \Psi \circledast \eta_\phi(\lambda \bullet \Phi)), \tag{1.34}$$

for $(\phi, \lambda, \Psi) \in (\text{自同构群}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 和 $(\iota, \nu, \Phi) \in \mathrm{Emb}(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$.

证明. 令$(\iota,\nu,\Phi),(\iota',\nu',\Phi')\in \mathsf{Emb}(G)\times \mathbf{k}^\times\times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$. 由引理1.4.5 可知，存在唯一的 $\phi\in$ 自同构群(G) 使得 $\iota'=\iota\circ\phi^{-1}$。置

$$\lambda=\nu^{-1}\nu' \text{ and } \Psi=\Phi'\circledast\eta_\phi(\lambda\bullet\Phi)^{\circledast(-1)}.$$

总之，存在唯一的$(\phi,\lambda,\Psi)\in(\mathsf{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，使得

$$(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)=(\iota',\nu',\Phi'),$$

这就证明了该命题。 □

1.4.3. 群自同构群(G)在交叉积代数和模上的作用。群自同构群(G) 作用于 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$通过 k-代数自同构，元素 $\phi\in$自同构群(G) 通过自同构 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 给出

$$e_0\mapsto e_0,\quad e_1\mapsto e_1 \text{ and } g\mapsto\phi(g) \text{ for } g\in G. \tag{1.35}$$

引理 1.4.7. 令 $\phi\in$自同构群(G)。以下图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle & \xrightarrow{\eta_\phi} & \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle\\ {\scriptstyle\beta\circ(-\otimes 1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta\circ(-\otimes 1)}\\ \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{V}}} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\end{array} \tag{1.36}$$

交换。

证明。由于所有箭头都是 k-代数态射，很容易验证生成元的交换性。 □

引理 1.4.8. 设 $\phi\in$自同构群({v2)。

(i)k-代数自同构 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 对 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$的限制是霍普夫代数自同构$\eta_\phi^{\mathcal{W}}$，其定义于 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$。(ii) k-代数自同构 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 对 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$的作用诱导出余代数自同构 $\eta_\phi^{\mathcal{M}}$，其定义于 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$。

证明。

(i) 对于 $(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G$ 我们有

$$\eta_\phi^{\mathcal{V}}(z_{n,g})=\eta_\phi^{\mathcal{V}}(-e_0^{n-1}ge_1)=-e_0^{n-1}\phi(g)e_1=z_{n,\phi(g)}.$$

由于代数 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 由族 $(z_{n,\ g})_{(n,g)\in\mathbb{N}_{>0}\times G}$ 自由生成，因此 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})\subset\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。类似地，$(\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})\subset\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。因此，$\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})=\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。这意味着 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 限制为 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的一个 k-代数自同构，我们将其记作 $\eta_\phi^{\mathcal{W}}$，并且有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc}\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{W}}} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{V}}} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\end{array} \tag{1.37}$$

让我们证明以下图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{W}}} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}} \\ (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})^{\otimes 2} & \xrightarrow{(\eta_\phi^{\mathcal{W}})^{\otimes 2}} & (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})^{\otimes 2} \end{array} \tag{1.38}$$

交换。事实上，对于 $(n,g) \in \mathbb{N}_{>0} \times G$，我们有

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}} \circ \eta_\phi^{\mathcal{W}}(z_{n,g}) &= \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(z_{n,\phi(g)}) \\ &= z_{n,\phi(g)} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,\phi(g)} + \sum_{\substack{k=1 \\ h\in G}}^{n-1} z_{k,h} \otimes z_{n-k,\phi(g)h^{-1}} \\ &= z_{n,\phi(g)} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,\phi(g)} + \sum_{\substack{k=1 \\ h\in G}}^{n-1} z_{k,\phi(h)} \otimes z_{n-k,\phi(g)\phi(h^{-1})} \\ &= (\eta_\phi^{\mathcal{W}})^{\otimes 2}\Big(z_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,g} + \sum_{\substack{k=1 \\ h\in G}}^{n-1} z_{k,h} \otimes z_{n-k,gh^{-1}} \Big) \\ &= (\eta_\phi^{\mathcal{W}})^{\otimes 2} \circ \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(z_{n,g}). \end{aligned}$$

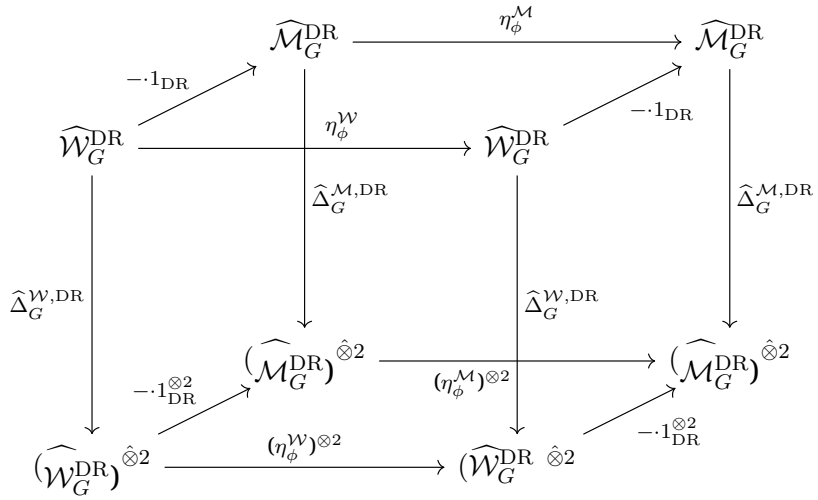
(ii) 设 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$。容易验证，$\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 保持子模 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \sum \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g-1)_{\circ\ g\in G}$因此，存在唯一的 k-模自同构 $\eta_\phi^{\mathcal{M}}$，使得下面的图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{V}}} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{M}}} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.39}$$

交换。与 (i) 结合，它给出以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{W}}} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\eta_\phi^{\mathcal{M}}} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{1.40}$$

于是我们得到以下立方体



左面和右面正是同一个方形，由于它对应于图1.10，所以是交换的。上边由于图(1.40)而交换，下边是上边的张量平方，因而也是交换的。最后，(i)给出了前面的交换性。这些交换性连同 $-\cdot 1_{\mathrm{DR}}$ 的满射性意味着立方体的后面是交换的，从而证明 $\eta_\phi^{\mathcal{M}}$是 $(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$ 的余代数自同构。

□

命题 1.4.9。设 $\phi \in$ 自同构群(G)。

(i)该对 $(\eta_\phi^{\mathcal{V}}, \eta_\phi^{\mathcal{M}})$ 是类别k-alg-mod^{top} 中 $(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 的自同构。(ii) 该对 $(\eta_\phi^{\mathcal{W}}, \eta_\phi^{\mathcal{M}})$ 是类别 k-HAMC^{top} 中 $((\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}), (\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}))$ 的自同构。

证明。
(i)令$(v, m) \in \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \times \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$。由于 $-\cdot 1_{\mathrm{DR}}\colon \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$是满射，存在$v' \in \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$使得 $m = v' \cdot 1_{\mathrm{DR}}$。我们有

$$\begin{aligned}\eta_\phi^{\mathcal{M}}(vm) &= \eta_\phi^{\mathcal{M}}(vv' \cdot 1_{\mathrm{DR}}) = \eta_\phi^{\mathcal{V}}(vv') \cdot 1_{\mathrm{DR}} \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}(v)\, \eta_\phi^{\mathcal{V}}(v') \cdot 1_{\mathrm{DR}} = \eta_\phi^{\mathcal{V}}(v)\, \eta_\phi^{\mathcal{M}}(m),\end{aligned}$$

其中第二个和第四个等式来自引理 1.4.8. (ii)。
(ii) 由 (i) 以及引理 1.4.8. 可得。

□

1.4.4. 扭子 DMR$_\times$(k)。引理 1.4.5 为以下结果奠定基础：

命题 1.4.10. 令 $\lambda \in$ k。对于 $\iota, \iota' \in$ Emb(G)，元素 $\phi \in$ 自同构群(G) 使得 $\iota' = \iota \circ \phi$ 满足 η_ϕ 是 DMR$_\lambda^\iota$(k) 与 DMR$_\lambda^{\iota'}$(k) 之间的双射。

证明。由于 η_ϕ 是 $(\mathrm{k}\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$ 的霍普夫代数自同构，它限制为 $\mathcal{G}(\mathrm{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 的群自同构。还需证明 $\eta_\phi : \mathrm{DMR}_\lambda^\iota(\mathrm{k}) \to \mathrm{DMR}_\lambda^{\iota\circ\phi^{-1}}(\mathrm{k})$

是一个双射。设 $\Psi \in \mathsf{DMR}^{\iota}_{\lambda}(\mathbf{k})$。由于 $\phi(x_0) = x_0$ 且 $\phi(x_1) = x_1$，定义 1.2.1 的条件 (i) 和 (iii) 对 $\eta_\phi(\Psi)$ 立即成立。此外，由于$g_{\iota\circ\phi^{-1}} = \phi(g_\iota)$，我们有

$$\begin{aligned}\left(\eta_\phi(\Psi)|x_{g_{\iota\circ\phi^{-1}}} - x_{g^{-1}_{\iota\circ\phi^{-1}}}\right) &= \left(\eta_\phi(\Psi)|x_{\phi(g_\iota)} - x_{\phi(g_\iota^{-1})}\right) = \left(\eta_\phi(\Psi)|\eta_\phi(x_{g_\iota} - x_{g_\iota^{-1}})\right)\\ &= \left(\Psi|x_{g_\iota} - x_{g_\iota^{-1}}\right) = \frac{|G|-2}{2}\lambda.\end{aligned}$$

于是，定义 1.2.1 的恒等式 (iv) 得证。类似地可验证恒等式 (v)。下面证明条件 (ii) 由 $\eta_\phi(\Psi)$ 满足。我们有

$$\begin{aligned}(\eta_\phi(\Psi))^\star &= \left(\Gamma^{-1}_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1)\beta(\eta_\phi(\Psi)\otimes 1)\right)\cdot 1_{\mathrm{DR}} = \left(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\beta(\eta_\phi(\Psi)\otimes 1)\right)\cdot 1_{\mathrm{DR}}\\ &= \left(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\eta^{\mathcal{V}}_\phi(\beta(\Psi\otimes 1))\right)\cdot 1_{\mathrm{DR}} = \left(\eta^{\mathcal{V}}_\phi\left(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\right)\right)\cdot 1_{\mathrm{DR}}\\ &= \eta^{\mathcal{M}}_\phi\left(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\cdot 1_{\mathrm{DR}}\right) = \eta^{\mathcal{M}}_\phi(\Psi^\star),\end{aligned}$$

其中，第二个相等式来自以下事实：$\eta_\phi(x_1) = x_1$；第三个相等式来自图表(1.36)的交换性；第四个相等式来自以下事实：$\eta^{\mathcal{V}}_\phi(e_1) = e_1$；第五个相等式来自图表(1.39)的交换性。因此，根据引理 1.4.8.(ii)以及 $\Psi \in \mathsf{DMR}^{\iota}_{\lambda}(\mathbf{k})$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G((\eta_\phi(\Psi))^\star) &= \widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G\left(\eta^{\mathcal{M}}_\phi(\Psi^\star)\right) = (\eta^{\mathcal{M}}_\phi)^{\otimes 2}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G(\Psi^\star)\right)\\ &= (\eta^{\mathcal{M}}_\phi)^{\otimes 2}(\Psi^\star\otimes\Psi^\star) = \eta^{\mathcal{M}}_\phi(\Psi^\star)^{\otimes 2} = (\eta_\phi(\Psi))^\star\otimes(\eta_\phi(\Psi))^\star,\end{aligned}$$

由此根据命题 1.2.4，定义 1.2.1 的条件 (ii) 由 $(\eta_\phi(\Psi))^\star$ 验证。这证明了 η_ϕ 限制为一个映射 $\mathsf{DMR}^{\iota}_{\lambda}(\mathbf{k}) \to \mathsf{DMR}^{\iota\circ\phi^{-1}}_{\lambda}(\mathbf{k})$。最后，按照相同步骤，可以证明 $\eta^{-1}_\phi = \eta_{\phi^{-1}}$ 限制为一个映射 $\mathsf{DMR}^{\iota\circ\phi^{-1}}_{\lambda}(\mathbf{k}) \to \mathsf{DMR}^{\iota}_{\lambda}(\mathbf{k})$，从而得出该陈述。□

推论 1.4.11. 对任意 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，映射 η_ϕ 限制为 $(\mathsf{DMR}^G_0(\mathbf{k}), \circledast)$ 的一个群自同构。

证明。由命题 1.4.10 可知，对于 $\lambda = 0$ 以及任意 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，映射η_ϕ 限制为从 $\mathsf{DMR}^G_0(\mathbf{k})$ 到其自身的一个双射。此外，由于 $(\mathsf{DMR}^G_0(\mathbf{k}), \circledast)$ 是 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast)$ 的一个子群，命题 1.4.1 表明该映射是一个群态射。□

命题 1.3.7、推论 1.4.11 和引理 1.4.3 使我们能够给出以下定义：

定义 1.4.12. 我们将 $(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{DMR}^G_0(\mathbf{k})$ 记为 $\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times$ 与 $\mathsf{DMR}^G_0(\mathbf{k})$ 关于由推论 1.4.11 和命题 1.3.7 诱导的 $\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times$ 群作用所构成的半直积。它是 $(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 的一个子群。

定义 1.4.13。我们定义

$$\mathsf{DMR}_\times(\mathbf{k}) := \{(\iota,\lambda,\Psi)\in\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,(\lambda,\Psi)\in\mathsf{DMR}^{\iota}_\times(\mathbf{k})\}. \tag{1.41}$$

命题1.4.14。群 (自同构群(G) $\times \mathbf{k}^\times$) $\ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 通过自由且传递地作用于 $\mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k})$

$$(\phi, \lambda, \Psi) \cdot (\iota, \nu, \Phi) = (\iota \circ \phi^{-1}, \lambda\nu, \Psi \circledast \eta_\phi(\lambda \bullet \Phi)), \tag{1.42}$$

对于 $(\phi, \lambda, \Psi) \in$ 自同构群(G) $\times \mathbf{k}^\times \times \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$ 以及 $(\iota, \nu, \Phi) \in \mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k})$。

证明。设 (ι, ν, Φ)、$(\iota', \nu', \Phi') \in \mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k})$。根据引理 1.4.5，存在唯一的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $\iota' = \iota \circ \phi^{-1}$。令 $\lambda = \nu^{-1}\nu'$。由于 $\Phi \in \mathrm{DMR}_\nu^\iota(\mathbf{k})$，根据引理 1.3.11和命题 1.4.10，可推出 $\eta_\phi(\lambda \bullet \Phi) \in \mathrm{DMR}_{\nu'}^{\iota'}(\mathbf{k})$。根据命题 1.2.5.(ii)，集合 $\mathrm{DMR}_{\nu'}^{\iota'}(\mathbf{k})$ 是群 $(\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k}) \circledast)$ 作用下的扭子。因此，存在唯一的 $\Psi \in \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$，使得 $\Psi \circledast \eta_\phi(\lambda \bullet \Phi) = \Phi'$。综上，存在唯一的 $(\phi, \lambda, \Psi) \in (\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$，使得

$$(\phi, \lambda, \Psi) \cdot (\iota, \nu, \Phi) = (\iota', \nu', \Phi'),$$

这就证明了该命题。 □

推论 1.4.15. $\Big((\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k}), \mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k})\Big)$ 这一对是 $\Big((\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \mathrm{Emb}(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\Big)$的子扭子。

证明。由命题 1.4.6 和 1.4.14 可得。 □

2. The double shuffle group as a stabilizer of a "de Rham" coproduct

本节回顾群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \circledast)$ 在 Yad []中给出的代数模 $\big(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\big)$ 上的作用。借助这一作用，我们在 §2.1 中构造群 $(\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 在代数模 $\big(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\big)$ 上的作用。由此，我们在 §2.2 中定义余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ {}^{\mathrm{DR}}}_{G}$ 和 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ {}^{\mathrm{DR}}}_{G}$ 的稳定子群。这些稳定子与由群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \circledast)$ 的作用产生的稳定子相关；后者包含 $\mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$，这要归功于 [EF0]。借助 Yad []，的主要结果，我们在推论 2.2.5 中得出一个包含链，其中涉及前述稳定子和 $(\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathbf{k})$。

2.1. 代数模 $\big(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\big)$ 上的群作用。

2.1.1. 群的作用（$\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \circledast$）。对于 $\Psi \in \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，存在唯一的拓扑 k-代数自同构 ${}^{\Gamma}\mathrm{aut}_\Psi^{\mathcal{V}\,(1)}$，作用于 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$，使得（[Yad，定义 2.3.1]

$$\begin{aligned} e_0 &\mapsto \Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi \otimes 1)\, e_0\, \beta(\Psi^{-1} \otimes 1)\Gamma_\Psi(-e_1) \\ e_1 &\mapsto \Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\, e_1\, \Gamma_\Psi(-e_1) \\ g &\mapsto \Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi \otimes 1)\, g\, \beta(\Psi^{-1} \otimes 1)\Gamma_\Psi(-e_1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

这个自同构限制为拓扑k-代数自同构 ${}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi}$，属于 $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_{G}$([Yad，命题—定义 2.3.2])。它满足以下图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_{G} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi}\ } & \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_{G} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi}\ } & \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G} \end{array} \tag{2.2}$$

交换。接下来，将 ${}^{\Gamma}$自同构$^{\mathcal{V}\ (10)}_{\Psi}$，定义为 $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}$ 的拓扑 k-模自同构，方式如下

$$ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{\Psi} := {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi} \circ r_{\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\cdot} \tag{2.3}$$

此自同构诱导出一个拓扑 k-模自同构 ${}^{\Gamma}\mathbf{aut}^{\mathcal{M}\ (10)}_{\Psi}$，作用于 $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G}$，使得下图成立（[Yad，定义 2.3.4]）

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{\Psi}\ } & \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi}\ } & \widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G} \end{array} \tag{2.4}$$

交换。

引理 2.1.1（[Yad，引理2.3.5]）。对于任意 $\Psi \in \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，以下各对是类别 k-alg-mod^{top}中的自同构：

(i) $\left({}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{V}\ (1)}_{\Psi}$,, ${}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{V}\ (10)}_{\Psi}\right)$,是 $(\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}, \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G})$ 的自同构。

(ii) $\left({}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{V}\ (1)}_{\Psi}$,, ${}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{M}\ (10)}_{\Psi}\right)$,是 $(\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}, \widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G})$ 的自同构。

(iii) $\left({}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{W}\ (1)}_{\Psi}$,, ${}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{M}\ (10)}_{\Psi}\right)$,是 $(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_{G}, \widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G})$ 的自同构。

群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 通过 ([Yad，命题 2.3.3]) 作用于 $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}$

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}); \quad \Psi \longmapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi}. \tag{2.5}$$

由此以及图表 (2.2) 的交换性，群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 通过 ([Yad，命题 2.3.3]) 作用于 $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_{G}$

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_{G}); \quad \Psi \longmapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi}. \tag{2.6}$$

另一方面，作用 (2.5) 在 $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}$ 上诱导出群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 的作用，其方式为

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-mod}}(\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_{G}); \quad \Psi \longmapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{\Psi}. \tag{2.7}$$

由图表 (2.4) 的交换性，作用作用 (2.7) 诱导出群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 在 $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G}$ 上的作用，其方式为 ([Yad，命题 2.3.6])

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-mod}}(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{DR}}_{G}); \quad \Psi \longmapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi}. \tag{2.8}$$

命题 2.1.2。

(i)群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 作用于 $(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}})$，其方式为

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}}(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}); \quad \Psi \longmapsto ({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{V},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{V},(10)}).$$

(ii) 群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 通过以下方式作用于 $(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$】【。

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}}(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}); \quad \Psi \longmapsto ({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{V},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{M},(10)}).$$

(iii) 群 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$ 通过以下方式作用于 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \circledast) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}); \quad \Psi \longmapsto ({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{W},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{M},(10)}).$$

证明。这由引理 2.1.1 以及事实（2.5）–（2.8）定义了作用而得出。 □

2.1.2. 群 $\mathbf{k}^{\times} \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 的作用。

定义 2.1.3.对于 $(\lambda, \Psi) \in \mathbf{k}^{\times} \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们定义拓扑 k-代数-模自同构 $\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V}}{}_{(\lambda,\Psi)}^{,(1)}\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V}}{}_{(\lambda,\Psi)}^{,(10)}\right)$ 关于 $\left(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\right)$，其由下式给出

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{V},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{V},(10)}\right) := \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{V},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{V},(10)}\right) \circ \big((\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -), (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -)\big),$$

其中 $(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -)$ $\in$自同构群$^{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}})$ 由 (1.19) 给出。

命题—定义 2.1.4. 对于 (λ, Ψ) $\in \mathbf{k}^{\times} \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们定义拓扑 k-代数模自同构 $\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W}}{}_{(\lambda,\ \Psi)}^{,\ (1)}\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{M},\ (10)\,(\lambda,\ \Psi)}\right)$ 由 $\left(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\right)$ 给出

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{W},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{M},(10)}\right) := \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{W},(1)},\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\Psi}^{\mathcal{M},(10)}\right) \circ \big((\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -), (\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -)\big).$$

它满足以下图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{W},(1)}\ } & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{V},(1)}\ } & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{2.9}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{V},(10)}\ } & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{(\lambda,\Psi)}^{\mathcal{M},(10)}\ } & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{2.10}$$

交换。

证明. 由命题 1.3.6.(ii) 和 2.1.2.(iii) 可知，$(\lambda\bullet_{\mathcal{W}}-, \lambda\bullet_{\mathcal{W}}-)$ 和 $\left({}^{\Gamma}$自同构群$_{\Psi}^{\mathcal{W}\ (1)}$, ${}^{\Gamma}$自同构群$_{\Psi}^{\mathcal{M}\ (10)}\right)$,是 k-alg-mod^{top} 中的态射；因此，它们的合成是 k-alg-mod^{top} 中的态射。接下来，图表的交换性可由图表 (1.22) 和 (2.2) 以及图表 (1.24) 和 (2.4) 的交换性推出。□

引理 2.1.5. 对于 $(\lambda, \Psi) \in \mathrm{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathrm{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们有

$$ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -) = (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -) \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi}. \tag{2.11} $$

证明。由于两边都是 $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}_G$ 的 k-代数态射的合成，只需在生成元上验证此恒等式。我们有

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} e_0) &= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda e_0) = \lambda\, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(e_0) \\
&= \lambda\, \Gamma^{-1}_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1)\beta(\lambda\bullet\Psi\otimes 1)\, e_0\, \beta(\lambda\bullet\Psi^{-1}\otimes 1)\Gamma_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1) \\
&= \big(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\big)\, (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \beta(\Psi\otimes 1))\ \lambda e_0\ \big(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \beta(\Psi^{-1}\otimes 1)\big)\, (\lambda\bullet\Gamma_{\Psi}(-e_1)) \\
&= \lambda \bullet_{\mathcal{V}} \big(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\, e_0\, \beta(\Psi^{-1}\otimes 1)\Gamma_{\Psi}(-e_1)\big) \\
&= \lambda \bullet_{\mathcal{V}} {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi}(e_0),
\end{aligned}$$

其中，第四个相等关系来自图表 (1.20) 的交换性和恒等式 (1.21)，第五个相等关系则来自 $\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -$ 是代数态射这一事实。接下来，

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} e_1) &= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda e_1) = \lambda\, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(e_1) = \lambda\, \Gamma^{-1}_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1)\, e_1\, \Gamma_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1) \\
&= \big(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\big)\ \lambda e_1\ (\lambda\bullet\Gamma_{\Psi}(-e_1)) \\
&= \lambda \bullet_{\mathcal{V}} \big(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\, e_1\, \Gamma_{\Psi}(-e_1)\big) \\
&= \lambda \bullet_{\mathcal{V}} {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi}(e_1),
\end{aligned}$$

其中，第四个相等关系来自恒等式 (1.21)，第五个相等关系则来自 $\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -$ 是代数态射这一事实。最后，对于 $g \in G$,

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} g) &= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(g) = {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\lambda\bullet\Psi}(g) \\
&= \Gamma^{-1}_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1)\beta(\lambda\bullet\Psi\otimes 1)\, g\, \beta(\lambda\bullet\Psi^{-1}\otimes 1)\Gamma_{\lambda\bullet\Psi}(-e_1) \\
&= \big(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\big)\, (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \beta(\Psi\otimes 1))\ g\ \big(\lambda \bullet_{\mathcal{V}} \beta(\Psi^{-1}\otimes 1)\big)\, (\lambda\bullet\Gamma_{\Psi}(-e_1)) \\
&= \lambda \bullet_{\mathcal{V}} \big(\Gamma^{-1}_{\Psi}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\, g\, \beta(\Psi^{-1}\otimes 1)\Gamma_{\Psi}(-e_1)\big) \\
&= \lambda \bullet_{\mathcal{V}} {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{\Psi}(g),
\end{aligned}$$

其中，第四个相等关系来自图表 (1.20) 的交换性和恒等式 (1.21)，第五个相等关系则来自 $\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -$ 是代数态射这一事实。□

推论 2.1.6。对于 $(\lambda, \Psi) \in \mathrm{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathrm{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们有

(i) ${}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\lambda\bullet\Psi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -) = (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -) \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi}$.
(ii) ${}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\lambda\bullet\Psi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -) = (\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -) \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi}$.

证明。

(i) 这由引理 2.1.5 推出，得益于引理 1.3.5.(i) 以及图表 (2.2) 的交换性。(ii) 这由引理 2.1.5 推出，得益于引理 1.3.5.(ii) 以及图表 (2.4) 的交换性。

□

推论 2.1.7. 群 $\mathbf{k}^\times \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 通过下式作用于 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$】【。$\mathbf{k}^\times \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \longrightarrow$ 自同构群$^{\mathrm{top}}{}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}} \left(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\right); (\lambda, \Psi) \longmapsto \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}{}_{(\lambda,\Psi)} \ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}{}_{(\lambda,\Psi)}\right)$.

证明。设(λ, Ψ)、$(\nu, \Phi) \in \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。我们有

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)\circledast(\nu,\Phi)} &= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda\nu,\Psi\circledast\lambda\bullet\Phi)} = {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi\circledast\lambda\bullet\Phi} \circ (\lambda\nu \bullet_{\mathcal{V}} -) \\
&= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\lambda\bullet\Phi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -) \circ (\nu \bullet_{\mathcal{W}} -) \\
&= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{W}} -) \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Phi} \circ (\nu \bullet_{\mathcal{W}} -) \\
&= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\nu,\Phi)},
\end{aligned}$$

其中，第三个相等来自 $\Psi \mapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V}\ (1)}_{\Psi}$,和 $\lambda \mapsto (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -)$ 是群作用这一事实，第四个相等则来自推论 2.1.6.(i)。接下来，我们有

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)\circledast(\nu,\Phi)} &= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda\nu,\Psi\circledast\lambda\bullet\Phi)} = {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi\circledast\lambda\bullet\Phi} \circ (\lambda\nu \bullet_{\mathcal{M}} -) \\
&= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\lambda\bullet\Phi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -) \circ (\nu \bullet_{\mathcal{M}} -) \\
&= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(1)}_{\Psi} \circ (\lambda \bullet_{\mathcal{M}} -) \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Phi} \circ (\nu \bullet_{\mathcal{M}} -) \\
&= {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\nu,\Phi)},
\end{aligned}$$

其中第三个相等式源于 $\Psi \mapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V}\ (1)}_{\Psi}$，和 $\lambda \mapsto (\lambda \bullet_{\mathcal{V}} -)$ 是群作用，而第四个相等式源于推论 2.1.6.(ii)。□

2.1.3. 群的作用 (自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$.

定义2.1.8。对于 $(\phi, \lambda, \Psi) \in$ 自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们定义拓扑 k-代数模自同构 $\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}{}_{(\phi,\lambda,\Psi)} \ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}{}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)$，其由 $\left(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\right)$ 给出

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right) := \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)}, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{(\lambda,\Psi)}\right) \circ \left(\eta_\phi^{\mathcal{V}}, \eta_\phi^{\mathcal{V}}\right),$$

其中 $\eta_\phi^{\mathcal{V}} \in$ 自同构群$^{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}})$ 由(1.35)给出。

命题—定义2.1.9.对于 $(\phi, \lambda, \Psi) \in$ 自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们定义拓扑 k-代数模自同构 $\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W}}{}_{(\phi,\lambda,\Psi)} \ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M}}{}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)$ 的映射由 $\left(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\right)$给出

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right) := \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)}, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)}\right) \circ \left(\eta_\phi^{\mathcal{W}}, \eta_\phi^{\mathcal{M}}\right).$$

其满足以下图表

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}
\end{array} \tag{2.12}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\ } & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\cdot 1_{\mathrm{DR}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} & \xrightarrow{\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\ } & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{2.13}$$

交换。

证明。由命题1.4.9(ii)和命题—定义 2.1.4，我们有，数对 $(\eta_\phi^{\mathcal{W}}, \eta_\phi^{\mathcal{M}})$ 和 $\begin{pmatrix} {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W}}{}_{,(1)\,(\lambda,\Psi)} \\ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{M},(10)\,(\lambda,\Psi)} \end{pmatrix}$ 是 k-alg-mod^{top} 中的态射；其合成于是也是 k-alg-mod^{top} 中的态射。接下来，图表的交换性由图表(1.37)和(2.9)以及图表(1.39)和(2.10)的交换性推出。□

引理2.1.10。对于 $(\phi,\lambda,\Psi) \in \mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们有

$$ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\eta_\phi(\Psi))} = \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}.$$

证明。由于两边都表示为 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的 k-代数态射的合成，因此只需在生成元上验证这个恒等式。我们有

$$\begin{aligned} &{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\eta_\phi(\Psi))}(e_0) = \mathrm{Ad}_{\Gamma^{-1}_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1)\beta(\eta_\phi(\Psi)\otimes 1)}(\lambda e_0) = \mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\beta(\Psi\otimes 1))}(\lambda e_0) \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)}\big(\lambda(\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(e_0)\big)\right) = \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)}\big(\lambda e_0\big)\right) \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)}\big(e_0\big)\right) = \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(e_0), \end{aligned}$$

其中，第二个相等来自恒等式 $\Gamma_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1) = \Gamma_\Psi(-e_1)$ 以及图表(1.36)的交换性；第三个则来自 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 是代数态射这一事实，以及相等式 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\Gamma_\Psi(-e_1)) = \Gamma_\Psi(-e_1)$。接下来，

$$\begin{aligned} &{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\eta_\phi(\Psi))}(e_1) = \mathrm{Ad}_{\Gamma^{-1}_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1)}(\lambda e_1) = \mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)}(\lambda e_1) \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)}\big(\lambda(\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(e_1)\big)\right) = \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)}\big(\lambda e_1\big)\right) \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)}(e_1)\right) = \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(e_1), \end{aligned}$$

其中，第二个相等式源于恒等式 $\Gamma_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1) = \Gamma_\Psi(-e_1)$，第三个相等式则源于 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 是一个代数态射这一事实，以及相等式 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\Gamma_\Psi(-e_1)) = \Gamma_\Psi(-e_1)$。最后，对于 $g \in G$，

$$\begin{aligned} &{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\eta_\phi(\Psi))}(g) = \mathrm{Ad}_{\Gamma^{-1}_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1)\beta(\eta_\phi(\Psi)\otimes 1)}(g) = \mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\beta(\Psi\otimes 1))}(g) \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)}\big((\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(g)\big)\right) = \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\mathrm{Ad}_{\Gamma_\Psi^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)}\big(\phi^{-1}(g)\big)\right) \\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)}\big(\phi^{-1}(g)\big)\right) = \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(g), \end{aligned}$$

其中，第二个相等式源于恒等式 $\Gamma_{\eta_\phi(\Psi)}(-e_1) = \Gamma_\Psi(-e_1)$ 以及图表(1.36)的交换性，第三个相等式源于 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}$ 是一个代数态射这一事实以及相等式 $\eta_\phi^{\mathcal{V}}(\Gamma_\Psi(-e_1)) = \Gamma_\Psi(-e_1)$，第四个和第六个相等式则源于 $(\eta_\phi^{\mathcal{V}})^{-1}(g) = \phi^{-1}(g)$ 这一事实。□

推论 2.1.11。对于 $(\phi, \lambda, \Psi) \in$ 自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们有

(i) ${}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\eta_\phi(\Psi))} = \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{W}})^{-1}$.

(ii) ${}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\eta_\phi(\Psi))} = \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{M}})^{-1}$.

证明。这由引理2.1.10、命题—定义 2.1.4和引理1.4.8推出。□

推论 2.1.12. 群 (自同构群$(G) \times \mathbf{k}^\times) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 通过以下方式作用于 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$:
$(\text{自同构群}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \to \text{自同构群}\mathbf{k}\text{-alg-mod}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}); (\phi, \lambda, \Psi) \mapsto \Big({}^\Gamma\text{自同构群}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)} {}^\Gamma\text{自同构群}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\Big)$

证明。设 (ϕ, λ, Ψ)、$(\phi', \nu, \Phi) \in (\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^\times) \rtimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$。我们有

$$\begin{aligned}
{}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\circledast(\phi',\nu,\Phi)} &= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi\circ\phi',\lambda\nu,\Psi\circledast(\eta_\phi(\lambda\bullet\Phi)))} = {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda\nu,\Psi\circledast(\lambda\bullet\eta_\phi(\Phi)))} \circ \eta^{\mathcal{W}}_{\phi\circ\phi'} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)\circledast(\nu,\eta_\phi(\Phi))} \circ \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{W}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\nu,(\eta_\phi(\Phi)))} \circ \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{W}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\nu,\Phi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{W}})^{-1} \circ \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{W}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)} \circ \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\nu,\Phi)} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{W}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi',\nu,\Phi)},
\end{aligned}$$

其中，第二个相等由引理 1.4.3 得出，第三个相等源于$\eta^{\mathcal{W}} : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}{}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})$ 是一个群态射这一事实，第四个相等由推论 2.1.7 得出，第五个相等由推论 2.1.11.(i) 得出。接下来，我们有

$$\begin{aligned}
{}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\circledast(\phi',\nu,\Phi)} &= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi\circ\phi',\lambda\nu,\Psi\circledast(\eta_\phi(\lambda\bullet\Phi)))} = {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda\nu,\Psi\circledast(\lambda\bullet\eta_\phi(\Phi)))} \circ \eta^{\mathcal{M}}_{\phi\circ\phi'} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)\circledast(\nu,\eta_\phi(\Phi))} \circ \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{M}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\nu,(\eta_\phi(\Phi)))} \circ \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{M}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)} \circ \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\nu,\Phi)} \circ (\eta_\phi^{\mathcal{M}})^{-1} \circ \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{M}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)} \circ \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\nu,\Phi)} \circ \eta_{\phi'}^{\mathcal{M}} \\
&= {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)} \circ {}^\Gamma\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi',\nu,\Phi)},
\end{aligned}$$

其中第二个相等来自引理 1.4.3，第三个相等来自以下事实：$\eta^{\mathcal{M}} : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{top}}{}_{\mathbf{k}\text{-模}}(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 是一个群态射，第四个相等来自推论 2.1.7，第五个相等来自推论 2.1.11。(ii)。□

2.2. 双 shuffle 群作为“德拉姆”余乘的稳定子。

命题 2.2.1.

(i)群(自同构群$(G)\times \mathbf{k}^{\times})\ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 作用于 $\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})$，通过

$$(\phi,\lambda,\Psi)\cdot D^{\mathcal{W}}:=\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\circ D^{\mathcal{W}}\circ\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{-1}.$$

(ii)群(自同构群$(G)\times \mathbf{k}^{\times})\ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 通过 $\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-mod}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 作用

$$(\phi,\lambda,\Psi)\cdot D^{\mathcal{M}}:=\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\circ D^{\mathcal{M}}\circ\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{-1}.$$

证明。

(i) 这是通过推论 2.1.12 的群态射（$\phi,\ \lambda,\ \Psi$）$\mapsto {}^{\Gamma}$自同构群$^{\mathcal{W},\ (1)\,(\phi,\ \lambda,\ \Psi)}$对作用 (0.1) 及 $\mathcal{C}=\mathbf{k}\text{-alg}^{\mathrm{top}}$ and$O=\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的拉回公式。

(ii) 这是推论 2.1.12 中的群态射 $(\phi,\lambda,\Psi)\mapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},\ (10)\,(\phi,\ \lambda,\ \Psi)}$对作用 (0.1) 的拉回公式，其中 $\mathcal{C}=\mathbf{k}\text{-mod}^{\mathrm{top}}$ and$O=\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$。

□

定义 2.2.2.

(i) 我们将 $\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ \mathrm{DR}}_{G})(\mathbf{k})$ 记为余乘 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ \mathrm{DR}}_{G}\in\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})$ 在命题 2.2.1.(i) 的作用下的稳定子子群。也就是说,

$$\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}):=$$
$$\left\{(\phi,\lambda,\Psi)\in(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}=\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right\}.$$

(ii) 我们将 $\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ \mathrm{DR}}_{G})(\mathbf{k})$ 记为余乘 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ \mathrm{DR}}_{G}\in\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-mod}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 在命题 2.2.1.(ii) 的作用下的稳定子子群。也就是说,

$$\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}):=$$
$$\left\{(\phi,\lambda,\Psi)\in(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}=\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right\}.$$

由于 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$是(自同构群$(G)\times \mathbf{k}^{\times})\ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$的子群，命题 2.2.1 的作用在 $(\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\ \circledast)$上诱导出其在空间 $\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})$ 和 $\mathsf{Cop}^{\mathbf{k}\text{-mod}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$上的作用。这使我们能够定义稳定子子群（见 [Yad、(2.29) 和 (2.31)]）

$$\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}):=\left\{\Psi\in\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi}\right)^{\otimes 2}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}=\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{\Psi}\right\}.$$

and

$$\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}):=\left\{\Psi\in\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi}\right)^{\otimes 2}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}=\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{\Psi}\right\}.$$

此外，我们有（[Yad，定理 2.4.1]）

$$\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) \subset \mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}). \tag{2.14}$$

命题 2.2.3. 我们有

(i) $\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) = (\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k})$.

(ii) $\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) = (\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k})$.

这是以下一般引理的推论

引理 2.2.4. 考虑半直积群 $H\ltimes R$。若 K 是包含 H 的 $H\ltimes R$ 子群，则

$$K = H\ltimes(K\cap R).$$

命题 2.2.3 的证明。令 $\mathcal{X} = \mathcal{W}$ 或 $\mathcal{M}$。我们使用引理 2.2.4，其中 H =Aut(G) $\times$ $\mathbf{k}^\times$, R = $\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，且 K =稳定子$_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$($\widehat{\Delta}^{\mathcal{X}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$)(k)。我们有

$K\cap R$ =稳定子$_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$($\widehat{\Delta}^{\mathcal{X}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$)(k) $\cap\,\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ =稳定子$_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$($\widehat{\Delta}^{\mathcal{X}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$)(k)。此外，稳定子$_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$($\widehat{\Delta}^{\mathcal{X}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$)(k) 包含 Aut($G$) $\times\mathbf{k}^\times$。因此，满足引理 2.2.4 的条件，结论随即得证。□

最后，根据 [EF0 定理 1.2] ，有

$$\mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}) = \{\Psi\in\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) \,|\, (\Psi|x_0) = (\Psi|x_1) = 0\}. \tag{2.15}$$

这确立了 DMR_0^G(k) $\subset$ 稳定子$_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$($\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$)(k) 之间的包含关系，且它们是 ($\mathcal{G}$(k$\langle\langle X\rangle\rangle$) $\circledast$) 的子群。随后我们有如下结果:

推论 2.2.5. 我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}) \subset\ & \mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k})\\ &\cap\\ & \mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k})\end{aligned}$$

证明。由于命题 2.2.3.(ii)，我们有

$$\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) = (\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}). \tag{2.16}$$

另一方面，利用相等式 (2.15)，我们得到

$$(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}) \subset (\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}). \tag{2.17}$$

由相等式 (2.16) 和包含关系 (2.17)，我们得到包含关系

$$(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}) \subset \mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}),$$

这就是所需的第一个包含关系。对于第二个包含关系，由于包含关系（2.14），我们有

$$(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) \subset (\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathsf{Stab}_{\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}).$$

得益于命题 2.2.3，这一包含关系意味着

$$\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}) \subset \mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})(\mathbf{k}).$$

□

3. Construction of "Betti" coproducts

在本节中，我们构造双重 shuffle 形式体系的一个"Betti"版本。相关的代数与模在 §3.1 中引入：(i) 一个代数 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$，定义为带有适当滤过的代数 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的逆极限；(ii) 一个代数模 $(\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}})$，由 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 的子代数 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 和一个 k-模 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 构成；$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 带有 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$-模结构，该结构在其上诱导出自由秩一 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$-模结构。在命题 3.1.27 中，我们构造了代数模同构 $(\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}, \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota})$，它们将 $(\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}})$ 映到 $(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$，并由 $\iota \in \mathrm{Emb}(G)$ 编号。这导出了一族代数模同构 $\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W}}{}_{,(1)}{}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\ {}^{\Gamma}\mathrm{comp}_{\mathcal{M},(10)\,(\iota,\lambda,\Psi)}\right)$，由 $(\iota,\lambda,\Psi) \in \mathrm{Emb}(G) \times \mathrm{k}^{\times} \times \mathcal{G}(\mathrm{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 中的元素编号。在 §3.2 中，我们证明，将这组同构用于传输"德拉姆"余乘对 $(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,G}{}^{\mathrm{DR}})$ 后，所得结果与元素 $(\iota,\lambda,\Psi) \in \mathrm{DMR}_{\times}(\mathrm{k})$ 的选取无关（见定理 3.2.4）。这可由推论 2.2.5 的包含链以及 $\mathrm{DMR}_{\times}(\mathrm{k})$ 在 $(\mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{k}^{\times}) \ltimes \mathrm{DMR}_0^G(\mathrm{k})$ 上的扭子结构推出（见命题 1.4.14）。所得的余乘对记作 $(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}})$，并分别赋予 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 霍普夫代数结构与余代数结构（见推论 3.2.6）。

3.1. 拓扑代数模（$\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$，$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$）。

3.1.1. 滤过代数 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$。 令 F_2 为由两个元素 X_0 和 X_1 生成的自由群。我们考虑群态射 $F_2 \to \mu_N$，其由 $X_0 \mapsto \zeta_N$ 和 $X_1 \mapsto 1$ 给出；其中 $\zeta_N := e^{\frac{i2\pi}{N}}$。

引理 3.1.1. 群 $\ker(F_2 \to \mu_N)$ 同构于秩为 $N+1$、记作 F_{N+1} 的自由群。

为了证明这一点，我们使用以下结果：

命题3.1.2（Nielsen–Schreier定理，参见 [Ste，定理 3]）。设 F 是由非空集合 X 生成的自由群，且 H 是 F的子群。设 $\sigma : H\backslash F \to F$ 是典范投影 $F \to H\backslash F$ 的一个截面，使得 $T := \sigma(H\backslash F)$ 在左前缀化下稳定。则 H 自由生成于

$$\left\{ tx(\overline{tx})^{-1} \,|\, (t,x) \in T \times X \ \textit{and}\ tx(\overline{tx})^{-1} \neq 1 \right\},$$

其中，对于 $g \in F$、$\bar{g}$，g 在合成 $F \to H\backslash F \xrightarrow{\sigma} F$ 下的像。

引理3.1.1的证明。我们对 $X = \{X_0, X_1\}$、$F = F_2$、$H = \ker(F_2 \to \mu_N)$ 和 σ应用 Nielsen–Schreier定理：$\ker(F_2 \to \mu_N)\backslash F_2 \simeq \mu_N \to F_2$，其中第一个映射是由满射态射 $F_2 \to \mu_N$ 诱导的同构，第二个映射由 $e^{i\frac{2n\pi}{N}} \mapsto X_0^n$给出，适用于 $n \in [\![0,\ N-1]\!]$。因此，我们有 $T = \{X_0^n, n \in [\![0, N-1]\!]\}$。该定理随后表明，$\ker(F_2 \to \mu_N)$ 由以下元素自由生成：

- $X_0^n X_0 (\overline{X_0^n X_0})^{-1} = X_0^{n+1} (\overline{X_0^{n+1}})^{-1} = \begin{cases} X_0^{n+1}(X_0^{n+1})^{-1} = 1 & \text{if } n \in [\![0, N-2]\!] \\ X_0^N 1^{-1} = X_0^N & \text{if } n = N-1 \end{cases}$
- $X_0^n X_1 (\overline{X_0^n X_1})^{-1} = X_0^n X_1 (X_0^n)^{-1} = X_0^n X_1 X_0^{-n}$

最后，$\ker(F_2 \to \mu_N)$ 由 $N+1$ 个元素自由生成

$$\left\{X_0^N, (X_0^n X_1 X_0^{-n})_{n\in[\![0,N-1]\!]}\right\}.$$

此外，若记 $\left(\widetilde{X}_0, \left(\widetilde{X}_{\zeta_N^n}\right)_{n\in[\![0,N-1]\!]}\right)$ 为秩为 $N+1$ 的自由群 F_{N+1} 的生成元，则可验证对应关系

$$\widetilde{X}_0 \mapsto X_0^N,\ \widetilde{X}_{\zeta_N^n} \mapsto X_0^n X_1 X_0^{-n} \text{ for } n \in [\![0, N-1]\!]$$

定义了一个从 F_{N+1} 到 $\ker(F_2 \to \mu_N)$ 的自由群同构。 □

于是我们得到如下短正合列

$$\{1\} \to F_{N+1} \to F_2 \to \mu_N \to \{1\} \tag{3.1}$$

接下来，令 $\sigma\colon \mu_N \to F_2$ 为 $F_2 \to \mu_N$ 的集合论截面，由 $e^{\frac{i2n\pi}{N}} \mapsto X_0^n$ 给出，其中 $n \in [\![0, N-1]\!]$。借助正合列 (3.1)，我们得到一个双射

$$\Sigma : \mu_N \times F_{N+1} \to F_2, \quad (\zeta, x) \mapsto \sigma(\zeta)x; \tag{3.2}$$

其中，借助引理 3.1.1，可将 F_{N+1} 视为 $\ker(F_2 \to \mu_N) \subset F_2$。集合 $\mu_N \times F_{N+1}$ 通过以下方式赋予右 F_{N+1}-集结构

$$(\zeta, x) * y := (\zeta, xy), \text{ for } (\zeta, x) \in \mu_N \times F_{N+1} \text{ and } y \in F_{N+1}.$$

群 F_2 还具有如下给定的右 F_{N+1}-集结构

$$x * y := xy, \text{ for } x \in F_2 \text{ and } y \in F_{N+1};$$

其中，根据引理 3.1.1，F_{N+1} 可视为 $\ker(F_2 \to \mu_N) \subset F_2$。容易验证，(3.2) 可提升为右 F_{N+1}-集同构。

考虑张量函子

$$\mathbf{k}(-) : \{\text{right } F_{N+1}\text{-sets}\} \longrightarrow \{\text{right } \mathbf{k}F_{N+1}\text{-modules}\}$$

它将 X 映至 $\mathbf{k}X$，即有限支撑映射 $X \to \mathbf{k}$ 的集合。将此函子应用于右 F_{N+1}-集同构 (3.2)，可得右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模同构

$$\mathbf{k}\Sigma : \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}F_2, \tag{3.3}$$

其中，源和目标分别赋予由 $\mu_N \times F_{N+1}$ 和 F_2 上的右 F_{N+1}-集结构所给出的右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模结构。

记 $\mathcal{I} := \ker(\mathbf{k}F_2 \to \mathbf{k}\mu_N)$，其中 $\mathbf{k}F_2 \to \mathbf{k}\mu_N$ 是由群态射 $F_2 \to \mu_N$ 诱导的 $\mathbf{k}$-代数态射。于是，$\mathcal{I}$ 是 $\mathbf{k}F_2$ 的一个双边理想。特别地，$\mathcal{I}$ 是一个右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模。

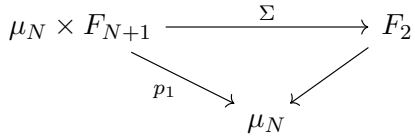
设 $\varepsilon\colon \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}$ 是群代数 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 的增广态射。它带有右正则 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模结构。

引理 3.1.3。

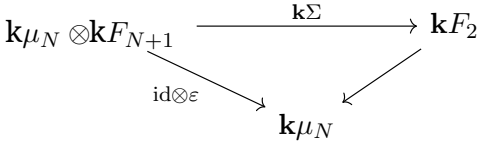
(i) $\mathbf{k}$-模同构 $\mathbf{k}\Sigma : \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}F_2$ 建立了 $\mathcal{I}$ 与 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \ker(\varepsilon)$ 之间的右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模同构。(ii) 理想 $\mathcal{I}$ 由 $\sigma(\zeta)(x-1)$ 线性生成，其中 $\zeta \in \mu_N$ 和 $x \in F_{N+1}$。

证明。

(i) 以下 F_{N+1}-集合态射的交换图



诱导出一个 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模态射的交换图



可以验证，第一个投影p_1： $\mu_N \times F_{N+1} \to \mu_N$ 所对应的群代数态射 $\otimes\,\varepsilon$ 通过确定 k $\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\mu_N$ 而与恒等映射 id 相同，其中的确定为 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \simeq$ k($\mu_N \times F_{N+1}$)。因此，理想 $\mathcal{I}$ 在同构 $\mathbf{k}\Sigma$ 下映为理想 ker(id $\otimes\,\varepsilon$) $= \mathbf{k}\mu_N \otimes$ker($\varepsilon$)】【。

(ii)由于 ε :$\mathbf{k}F_{N+1} \to$ k是增广态射，其核由满足 $x \in F_{N+1}$ 的元素 $x-1$ 生成。因此，取生成元在$\mathbf{k}\Sigma$ 下的像，我们得到理想 $\mathcal{I}$ 的生成元，如上所述。

□

命题—定义 3.1.4. 设 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 为 F_2 上的群代数，其赋有滤过。

$$\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{I}^m,$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，其中 $\mathcal{I}^m$ 是理想 $\mathcal{I}$ 的 m^{th} 次幂，约定 $\mathcal{I}^0 = \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$。滤过 $(\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}$ 是代数滤过。

证明。显然。 □

引理3.1.5。设 $m \in \mathbb{N}$。k-模同构$\mathbf{k}\Sigma$:$\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}F_2$ 建立了一个右$\mathbf{k}F_{N+1}$-模同构，将 $\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 与 $\mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$ 对应，其中$(\mathbf{k}F_{N+1})_0$ 是群代数 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 的增广理想。

证明。如果 $m = 0$，我们有 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \simeq$k$(\mu_N \times F_{N+1})$ $\mathbf{k}\xrightarrow{\Sigma} \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{F}^0\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$。
接下来，如果 $m = 1$，我们有

$$\mathcal{F}^1\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{I} \simeq \mathbf{k}\mu_N \otimes \ker(\varepsilon) = \mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0,$$

其中确定由引理 3.1.3 (i) 给出。
现在，令 $m \geq 2$。由于 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1}$ 是一个右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模，我们有:

$$\mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0^m = (\mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0) \cdot (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}. \tag{3.4}$$

合成 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \simeq$ k$(\mu_N \times F_{N+1})$ $\mathbf{k}\xrightarrow{\Sigma} \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模同构，与确定 $\mathcal{I} \simeq$ $\mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0$ 及相等式 (3.4) 结合起来，得到我们所需结果。

$$\mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \simeq \mathcal{I} \cdot (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1},$$

其中，$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}$被视为 $\mathbf{k}F_{N+1} =$k ker$(F_2 \to \mu_N) \subset \mathbf{k}F_2$ 的子集。
It 仍需证明 $\mathcal{I} \cdot (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} = \mathcal{I}^m$。首先，由于 $(\mathbf{k}F_{N+1})_0 \subset \mathcal{I}$，我们有

$\mathcal{I}\cdot(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} \subset \mathcal{I}^m$。反之，根据引理 3.1.3 (ii)， $\mathcal{I}^m$ 由元素线性生成

$$\Pi((\zeta_1, x_1), \ldots, (\zeta_m, x_m)) := \sigma(\zeta_1)(x_1 - 1) \cdots \sigma(\zeta_m)(x_m - 1)$$

其中有（ζ_1， x_1）.....，（ζ_m， x_m）$\in \mu_N \times F_{N+1}$。此外，我们有:

$$\Pi((\zeta_1, x_1), \ldots, (\zeta_m, x_m)) = \sigma(\zeta_1) \cdots \sigma(\zeta_m) \left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1} \cdots \sigma(\zeta_2)^{-1}}(x_1) - 1\right)$$
$$\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1} \cdots \sigma(\zeta_3)^{-1}}(x_2) - 1\right) \cdots \left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1}}(x_{m-1}) - 1\right) (x_m - 1).$$

接下来，由于 F_{N+1} 是 F_2的正规子群，我们有

$$\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1} \cdots \sigma(\zeta_3)^{-1}}(x_2) - 1\right) \cdots \left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1}}(x_{m-1}) - 1\right) (x_m - 1) \in (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}.$$

此外，根据引理 3.1.3 (ii)，我们有

$$\sigma(\zeta_1) \cdots \sigma(\zeta_m) \left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1} \cdots \sigma(\zeta_2)^{-1}}(x_1) - 1\right) \in \mathbf{k}F_2 \cdot (\mathbf{k}F_{N+1})_0.$$

由于$(\mathbf{k}F_{N+1})_0 \subset \mathcal{I}$，因此 $\mathbf{k}F_2 \cdot (\mathbf{k}F_{N+1})_0 \subset \mathbf{k}F_2 \cdot \mathcal{I}$，并且由于 $\mathcal{I}$是 $\mathbf{k}F_2$的双边理想，我们有 $\mathbf{k}F_2 \cdot \mathcal{I} = \mathcal{I}$。因此，

$$\sigma(\zeta_1) \cdots \sigma(\zeta_m) \left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_m)^{-1} \cdots \sigma(\zeta_2)^{-1}}(x_1) - 1\right) \in \mathcal{I},$$

然后 $\Pi((\zeta_1, x_1), \ldots, (\zeta_m, x_m)) \in \mathcal{I}\cdot(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}$，从而证明了所需的包含关系。

□

3.1.2. 拓扑代数 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$。命题-定义3.1.4中给出的递减滤过 $(\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}$ 诱导出一个代数态射 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{m+1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$。定义

定义 3.1.6. 我们记

$$\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} := \varprojlim \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$$

系统 $\left(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}、\ \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{m+1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}\right)$ 的逆极限。

代数 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$配备了滤过$\mathcal{F}^m\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$: $=\varprojlim \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{\max(m,l)}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$。赋予由该滤过定义的拓扑后， $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个完备分离拓扑代数。

回顾一下，$\mathbf{k}F_{N+1}$ 是一个带有滤过的群代数，该滤过由其增广理想的幂$\widehat{\ }$给出。我们将 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 记为关于此滤过的该群代数的完备化。

引理 3.1.7.

(i) k-代数同态 $\mathbf{k}\Sigma \circ (1 \otimes -) : \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 产生一个拓扑 k-代数同态 $\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}} \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$。(ii) k-模态射 $\mathbf{k}\Sigma : \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 产生一个拓扑右 $\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}}$-模同构 $\widehat{\mathbf{k}\Sigma} : \mathbf{k}\mu_N \otimes \widehat{\mathbf{k}F_{N+1}} \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$。(iii) k-代数同态 $\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}} \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 是单射。

证明。

(i) 这源于k-代数同态$\mathbf{k}\Sigma\circ(1\otimes-) : \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 与滤过相容，而这由引理 3.1.5 得出。

(ii) 这由以下事实得出：$\mathrm{k}\Sigma : \mathrm{k}\mu_N \otimes \mathrm{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 是 $\mathrm{k}F_{N+1}$ 上滤过右模的同构（见 (3.3)）。

(iii) 由 (i) 可知，拓扑 k-代数同态 $\widehat{\mathrm{k}F_{N+1}} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 等于合成 $\widehat{\mathrm{k}\Sigma \circ (1 \otimes -)} : \widehat{\mathrm{k}F_{N+1}} \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$。映射 $1 \otimes - : \widehat{\mathrm{k}F_{N+1}} \to \mathrm{k}\mu_N \otimes \widehat{\mathrm{k}F_{N+1}}$ 显然是单射，而 $\widehat{\mathrm{k}\Sigma} : \mathrm{k}\mu_N \otimes \widehat{\mathrm{k}F_{N+1}} \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 由 (ii) 可知是单射。这说明它们的合成是单射，从而得证。

□

命题—定义 3.1.8. 设 $\iota \in \mathrm{Emb}(G)$。存在唯一的拓扑代数同构 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota} : \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$，其定义如下

$$X_0 \mapsto \exp\left(\frac{1}{N} e_0\right) g_\iota; \quad \textit{and} \quad X_1 \mapsto \exp(e_1),$$

其中 $g_\iota = \iota^{-1}(e^{\frac{i2\pi}{N}})$。

证明。回顾一下，集合 $\mathrm{Mor}^{\mathbf{k}\text{-alg}}(\mathrm{k}F_2, \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}})$ 与 $\mathrm{Mor}_{\mathrm{grp}}\left(F_2, (\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}})^\times\right)$ 相对应。因此，存在一个代数态射 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$，其定义如下

$$X_0 \mapsto \exp\left(\frac{1}{N} e_0\right) g_\iota \quad \text{and} \quad X_1 \mapsto \exp(e_1)$$

因为 X_0 和 X_1 的像可逆。将 k-代数态射 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 与 k-模同构 $\mathrm{k}\Sigma : \mathrm{k}\mu_N \otimes \mathrm{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 以及 k-代数同构 $\beta : \mathrm{k}\langle\langle X \rangle\rangle \rtimes G \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的逆分别从左侧和右侧复合，得到一个 k-模态射

$$\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\langle\langle X \rangle\rangle \rtimes G. \tag{3.5}$$

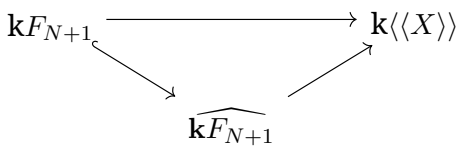
容易验证，态射 (3.5) 是关于由 $\mathrm{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\langle\langle X \rangle\rangle$ 给出的 k-代数态射的右模态射

$$\widetilde{X}_0 \mapsto \exp(x_0) \text{ and } \widetilde{X}_{\zeta_N^n} \mapsto \exp\left(\frac{n}{N} x_0\right) \exp(-x_{g_\iota^n}) \exp\left(-\frac{n}{N} x_0\right), \text{ for } n \in [\![0, N-1]\!].$$

此外，$(\zeta_N^l \otimes 1)_{l \in [\![0,\ N-1]\!]}$ 和 $\left(\exp\left(\frac{l}{N} x_0\right) \otimes g_\iota^l\right)_{l \in [\![0,\ N-1]\!]}$ 分别是 $\mathrm{k}\mu_N \otimes \mathrm{k}F_{N+1}$ 和 $\mathbf{k}\langle\langle X \rangle\rangle \rtimes G$ 的基，并且态射 (3.5) 在这些基之间诱导了如下双射

$$\zeta_N^l \otimes 1 \mapsto \exp\left(\frac{l}{N} x_0\right) \otimes g_\iota^l, \text{ for } l \in [\![0, N-1]\!]. \tag{3.6}$$

此外，存在一个拓扑 k-代数同构 $\widehat{\mathrm{k}F_{N+1}} \to \mathbf{k}\langle\langle X \rangle\rangle$，使得下图

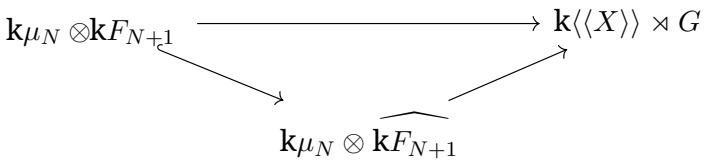


交换，其中 $\mathbf{k}F_{N+1} \hookrightarrow \mathbf{k}F_{N+1}$ 是典范的 k-代数同态。
确实，这样的同构可通过复合下述映射得到：由 [Qui, Example A2.12] 给出的拓扑 k-代数同构 $\mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$，以及由$F_{N+1}$ 给出的 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 的拓扑 k-代数自同构：同构自同构。

$$\widetilde{X}_0 \mapsto \widetilde{X}_0 \text{ and } \widetilde{X}_{\zeta_N^n} \mapsto \mathrm{Ad}_{\exp\left(\frac{n}{N}\log(\widetilde{X}_0)\right)}(\widetilde{X}_{\zeta_N^n}^{-1}) \text{ for } n \in [\![0, N-1]\!].$$

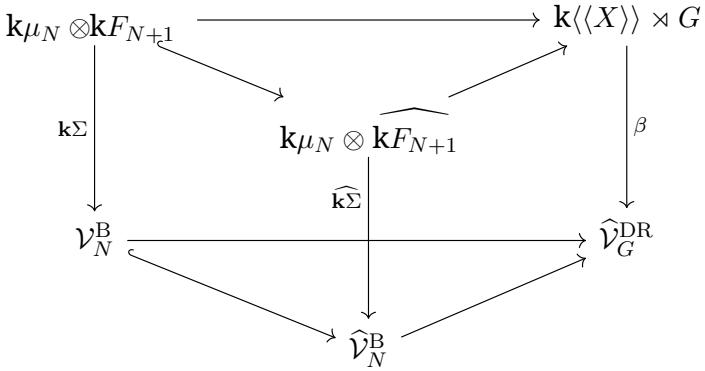
另一方面，可以验证 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1}$ 是一个自由右 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模，其基为 $(\zeta_N^l \otimes 1)_{l\in[\![0,N-1]\!]}$ 并且回顾一下，$\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G$ 是一个自由右 $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$-模，其基为$(\exp\left(\frac{l}{N}x_0\right) \otimes g_l^{-1})_{l\in[\![0,N-1]\!]}$。因此，存在唯一的模同构 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G$，它位于 $\mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ 这一 k-代数同构之上，并将基之间的双射 (3.6) 延拓。因此，将以下图表限制在各基上

(3.7)



交换，其中$\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1}$ 是 $\mathbf{k}\mu_N$ 的恒等式与 $\mathbf{k}F_{N+1} \hookrightarrow \mathbf{k}F_{N+1}$的张量积。这意味着该图交换。
接下来，通过复合 k-模同构 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1}$ 以及β：$\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$，我们得到一个 k-模同构 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$。从左侧和右侧分别通过同构 $\mathbf{k}\Sigma^{-1}$：$\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1}$ 以及

我们来证明这个 k-模同构是一个 k-代数同构。因此，
只需证明它是一个 k-代数态射。考虑如下
棱柱



左边、右边和中间的正方形分别由 $\mathbf{k}\Sigma$、$\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 和 $\mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G$ 的定义可交换，而上方的三角形是图 (3.7)，因此可交换。此外，从上方三角形指向下方三角形的箭头都是同构。因此，下方的三角形可交换。拓扑 k-模同构 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$to $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的限制是一个代数态射，由 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 在 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 中的稠密性可知，
$\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 是一个拓扑

k-代数态射，因此是拓扑 k-代数同构。最后，三角形的交换性也意味着 k-代数同构 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$正如所述。□

命题 3.1.9. 设 $\iota \in \mathrm{Emb}(G)$ 且 $\phi \in$ 自同构群(G)。我们有

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota\circ\phi^{-1}} = \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota},$$

其中 $\eta_\phi^{\mathcal{V}} \in$自同构群$^{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}})$ 如 (1.35) 中所给出。

证明。由于两边都表示为拓扑 k-代数态射的合成，我们通过在以下拓扑生成元族上检验相等性来证明:

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota\circ\phi^{-1}}(X_1) = \exp(e_1) = \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(X_1)$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota\circ\phi^{-1}}(X_0) &= \exp\left(\frac{1}{N}e_0\right) g_{\iota\circ\phi^{-1}} = \exp\left(\frac{1}{N}e_0\right)\phi(g_\iota) = \eta_\phi^{\mathcal{V}}\left(\exp\left(\frac{1}{N}e_0\right) g_\iota\right)\\ &= \eta_\phi^{\mathcal{V}} \circ \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(X_0)\end{aligned}$$

□

3.1.3. 滤过代数 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$。

命题—定义 3.1.10. 记

$$\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} := \mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1). \tag{3.8}$$

它是赋有滤过的 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的子代数

$$\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} := \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \cap \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \tag{3.9}$$

对于 $m \in \mathbb{N}$。滤过 $(\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}$ 是代数滤过。

证明。显然。 □

引理 3.1.11。对于 $m \in \mathbb{N}^*$，我们有

(i) $\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cap \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)$. *(ii)* $\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)$.

证明。

(i) 令 $m \in \mathbb{N}^*$。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} =& \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cap \big(\mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)\big)\\ =& \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cap \big(\ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}) \cap (\mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1))\big)\\ =& \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cap \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1),\end{aligned}$$

其中，第二个相等由包含关系 $\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \subset \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k})$ 得出，因为

$$\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N)^m \subset \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N) \subset \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}), \tag{3.10}$$

其中，(3.10) 中最后一个包含关系是由以下事实得出的： $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}$ 是合成 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N \to \mathbf{k}$（以 k 为目标的映射是增广态射）。第三个相等式由下式得出

$$\ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}) \cap (\mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)) = \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)$$

而这又是由以下事实得出的：$\ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}) \cap (\mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1))$ 是复合映射 $\mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) \subset \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}$ 的核；该映射在 $\mathbf{k}$ 上是恒等式，并将 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1)$ 映为 0。因此，其核为 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1)$。

(ii) 回顾引理 3.1.5，对于 $m \in \mathbb{N}^*$，k-模同构 $\mathbf{k}\Sigma : \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 诱导出一个同构

$$\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \simeq \mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0^m, \tag{3.11}$$

其中 $(\mathbf{k}F_{N+1})_0$ 是群代数 $\mathbf{k}F_{N+1}$的增广理想。该同构 $\mathbf{k}\Sigma$ 也诱导出一个同构

$$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) \simeq \mathbf{k}\mu_N \otimes \mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_{\zeta_N^0}-1).$$

根据引理 3.11 (i)，这诱导出同构

$$\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \simeq \mathbf{k}\mu_N \otimes \left((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \cap \mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_{\zeta_N^0}-1)\right).$$

接下来，根据 [Wei，命题 6.2.6], ，我们有一个 $\mathbf{k}F_{N+1}$-模同构 $(\mathbf{k}F_{N+1})^{\oplus(N+1)} \to (\mathbf{k}F_{N+1})_0$。该同构诱导出以下同构

$$\mathbf{k}F_{N+1} \oplus \{0\}^{\oplus N} \simeq \mathbf{k}F_{N+1}(X_{\zeta_N^0}-1) \text{ and } (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1})^{\oplus(N+1)} \simeq (\mathbf{k}F_{N+1})_0^m,$$

其中，对于后一个同构，我们利用了以下事实：$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m = (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}(\mathbf{k}F_{N+1})_0$，以及 $(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}$是 $\mathbf{k}F_{N+1}$的一个理想。另一方面，利用包含关系 $(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} \subset \mathbf{k}F_{N+1}$ 和同构 $\mathbf{k}F_{N+1} \oplus \{0\}^{\oplus N} \simeq \mathbf{k}F_{N+1}(X_{\zeta_N^0}-1)$，可得

$$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1})^{\oplus(N+1)} \cap \left(\mathbf{k}F_{N+1} \oplus \{0\}^{\oplus N}\right) = (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} \oplus \{0\}^{\oplus N}.$$

最后，可以验证同构 $(\mathbf{k}F_{N+1})^{\oplus(N+1)} \to (\mathbf{k}F_{N+1})_0$ 诱导出一个同构。

$$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} \oplus \{0\}^{\oplus N} \simeq (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}(\widetilde{X}_{\zeta_N^0}-1)$$

并对将 m 替换为 $m-1$ 使用 (3.11)，结合以下事实可得：$\mathbf{k}\Sigma$ 将 X_1-1 在 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 上的右乘与 $\mathbf{k}\mu_N$ 上的$\widetilde{\ }$ 恒等式和 $X_{\zeta_N^0}-1$ 在 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 上的右乘的张量积交织起来

$$\mathbf{k}\mu_N \otimes (\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}(\widetilde{X}_{\zeta_N^0}-1) \simeq \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1),$$

从而证明了所需结果。

□

3.1.4. 拓扑代数 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$。在 (3.9) 中给出的递减滤过 $(\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}$ 诱导出一个代数态射 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{m+1}\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$。

定义 3.1.12。我们记棋牌游戏官网

$$\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} := \varprojlim \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$$

the 射影系（$\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$、$\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{m+1}\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$）的逆极限。

赋予滤过的代数 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$

$$\mathcal{F}^m\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} := \varprojlim \mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{\max(m,l)}\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$$

并且，赋予由此滤过定义的拓扑后，它是一个完备的分离拓扑代数。

引理3.1.13。k-代数包含关系 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 导出了一个拓扑 k-代数的单射态射 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$。

证明。这由包含关系 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 与滤过的相容性，以及$\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$ 上的滤过由 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的滤过诱导这一事实得出。□

命题 3.1.14。拓扑代数 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 与 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 的拓扑子代数 $\mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)$ 同构。

证明。我们将按照以下方案进行:

步骤 1：构造拓扑 k-模 $\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}}$.

定义一个 k-子模 $\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} := \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \subset \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$。它带有如下滤过

$$\mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} := \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} \cap \mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \text{ , for } m \in \mathbb{N}$$

该滤过由包含关系 $\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$诱导。将相应的逆极限记作

$$\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} := \varprojlim \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}.$$

容易验证，k-模包含关系 $\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$ 与滤过相容，由此诱导出一个拓扑 k-模的态射 $\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$。由于 $\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}$ 的滤过由 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$ 的滤过诱导，这个态射是单射。由引理 3.1.13，我们得到一列单射

$$\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}. \tag{3.12}$$

另一方面，对任意 $m \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} = \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} \cap \mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \cap \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) = \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1),$$

其中第二个相等由引理 3.1.11 (ii) 得出。因此，对任意 $m \in \mathbb{N}$ ，

$$\mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} = \begin{cases} \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) & \text{if } m = 0 \\ \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.13}$$

此外，请注意 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} = \mathbf{k} \oplus \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}$。利用 (3.13) 我们得到

$$\mathcal{F}^0\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} = \mathbf{k} \oplus \mathcal{F}^0\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}};$$
$$\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}, \text{ for } m \in \mathbb{N}^*.$$

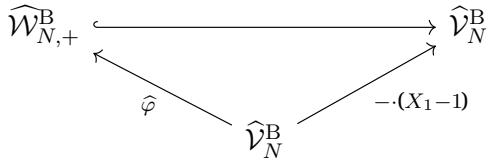
这些等式诱导出以下拓扑 k-代数同构

$$\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} = \varprojlim \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \simeq \mathbf{k} \oplus \varprojlim \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} = \mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}}. \tag{3.14}$$

其中，右侧的代数结构由以下条件定义： $1 \in \mathbf{k}$ 是一个单位元，并且包含关系 $\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \subset \mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}}$ 是一个非幺代数同态。

步骤 2：拓扑 k-模态射 $\widehat{\varphi}$: $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_{N,\,+}^{\mathrm{B}}$ 的存在性，使得该三角形

(3.15)



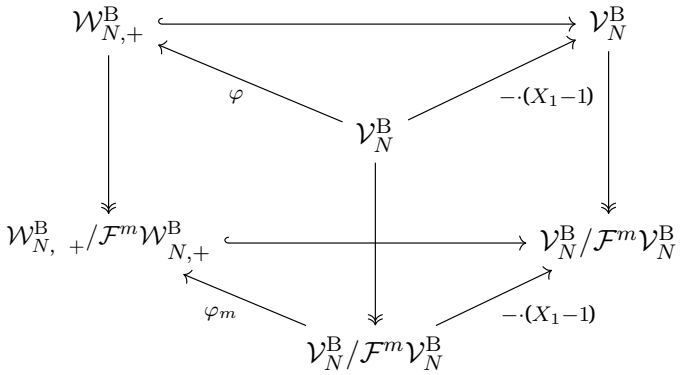
交换。首先，我们考虑 k-模态射 $\varphi: \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}$ 给出为$v \mapsto v(X_1-1)$。对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$，有

$$\varphi(\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}) = \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) \subset \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) = \mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}},$$

其中，第一个相等由 φ的定义得出，包含关系由（$\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$）$_{m\in\mathbb{N}}$的递减性得出，最后一个相等则由（3.13）得出。此外，还有

$$\varphi(\mathcal{F}^0\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}) = \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) = \mathcal{F}^0\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}.$$

这意味着态射 φ: $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_{N,\,+}^{\mathrm{B}}$ 与滤过相容。由此得到一个 k-模态射 φ_m: $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_{N,\,+}^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}_{N,\,+}^{\mathrm{B}}$。在下面的棱柱中

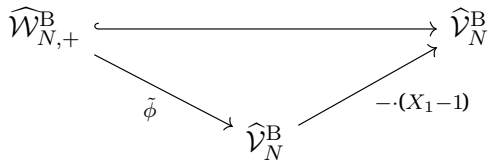


φ 的上方三角形根据定义交换：$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}$ 并且所有方块都由于映射 φ：$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}$, $-\cdot(X_1-1)$: $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 以及 $\mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 与滤过的相容性而交换。因此，由于投影 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$的满射性，下方三角形交换。由此，态射 φ：$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{B}}$ 诱导出一个拓扑 k-模的态射 $\widehat{\varphi}$： $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}}$，使得图（3.15）交换。最后，后一个图的交换性意味着

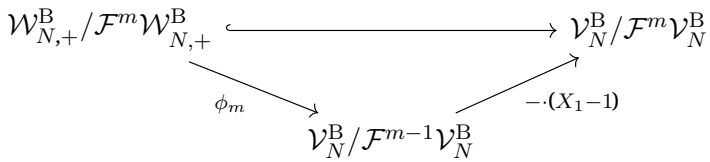
$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) &= \mathrm{Im}\big(-\cdot(X_1-1)\big)\\ &= \mathrm{Im}\left(\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}\right) \subset \mathrm{Im}\left(\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

步骤 3：存在一个拓扑 k-模态射 $\tilde{\phi}$: $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_{N,+} \to \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}}_{N}$，使得该三角形

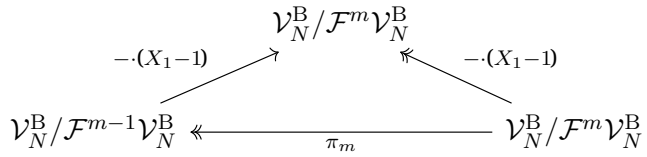
(3.17)



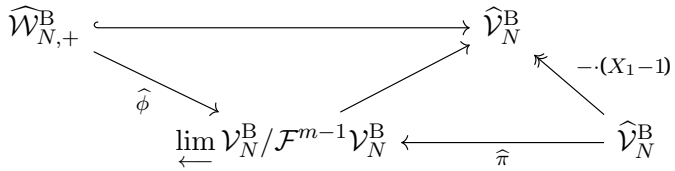
交换。首先，注意到 $\varphi : \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N} \to \mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+}$ 是一个满射 k-模态射。由于代数 $\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 是整环，它是单射的。因此，映射 $\varphi : \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N} \to \mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+}$ 是一个 k-模同构，其逆映射记作 $\phi : \mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+} \to \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$。由 (3.13) 可知，k-模同构 $\phi : \mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+} \to \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 限制为一个同构 $\mathcal{F}^m\mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+} \to \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$，对任意 $m \in \mathbb{N}^*$。这对任意 $m \in \mathbb{N}^*$ 诱导出一个 k-模同构 $\phi_m : \mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+}/\mathcal{F}^m\mathcal{W}^{\mathrm{B}}_{N,+} \to \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}/\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$，并且通过一个类似于步骤 2 中的棱柱，可以验证下面的三角形



交换，其中态射 $-\cdot(X_1-1) : \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}/\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N} \to \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 是良定义的，这是因为包含关系 $\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}(X_1-1) \subset \mathcal{F}^m\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 是 (3.13) 的推论。另一方面，对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$，我们有以下三角形



其中 π_m: $\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}/\mathcal{F}^m\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N} \twoheadrightarrow \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}/\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 是将元素模 $\mathcal{F}^m\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 的类映射为其模 $\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 的类的态射；由于包含关系 $\mathcal{F}^m\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N} \subset \mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$，该映射定义良好且满射。随后可验证该三角形交换。将这两个三角形连接起来并取逆极限，我们得到如下图表



其中 $\widehat{\pi} := \varprojlim \pi_m$: $\widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}}_{N} \to \varprojlim \mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}/\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}^{\mathrm{B}}_{N}$ 是通过次数平移得到的，因此是一个拓扑 k-模同构。令 $\widetilde{\phi} := \widehat{\pi}^{-1} \circ \widehat{\phi} : \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_{N,+} \to \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{B}}_{N}$。它是一个拓扑 k-模态射，且图表 (3.17) 交换。最后，

后一个图表的交换性意味着

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}\right) &= \operatorname{Im}\big(-\cdot(X_1-1)\circ\tilde{\phi}\big)\\ &\subset \operatorname{Im}\big(-\cdot(X_1-1)\big) = \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1).\end{aligned} \tag{3.18}$$

最后，结合包含关系 (3.16) 和 (3.18)，我们得到

$$\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \simeq \operatorname{Im}\left(\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}\right) = \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1).$$

此外，由 3.14 可知，拓扑 k-代数 $\mathbf{k}\oplus\widehat{\mathcal{W}}_{N,+}^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 同构。于是得到拓扑 k-代数的同构

$$\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \simeq \mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1).$$

□

命题-定义3.1.15。令 $\iota \in$Emb(G)。存在一个拓扑代数同构$\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}$: $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$，使得下图

$$\begin{array}{ccc}\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow{\quad\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}\quad} & \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow[\quad\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}\quad]{} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}\end{array} \tag{3.19}$$

交换。

证明。我们有

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(X_1-1) = \exp(e_1) - 1 = ue_1,$$

其中 $u = f(e_1)$ 与 $f(x)$ 是可逆形式级数 $\frac{\exp(x)-1}{x}$。此外，由于 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}$: $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 是 k-代数同构，我们得到

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}\left(\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1)\right) = \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}})\ \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(X_1-1) = \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} ue_1 = \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_1.$$

这意味着 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}_{\iota}\big|_{\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1)}$: $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_1$ 是一个满射 k-模态射，且显然是单射，因此是一个 k-模同构。与 k 取直和后，我们得到一个 k-模同构

$$\mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1) \to \mathbf{k} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_1,$$

它是一个 k-代数同构。最后，根据引理 3.1.14，这个同构正是所需的 k-代数同构 $\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}$: $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$。□

推论 3.1.16。设 $\iota \in$ Emb(G) 且 $\phi \in$ Aut(G)。我们有

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota\circ\phi^{-1}} = \eta_\phi^{\mathcal{W}} \circ \mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota},$$

其中 $\eta_\phi^{\mathcal{W}} \in$ 自同构群$\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}})$ 如引理 1.4.8.(i) 所示。

证明。根据命题 3.1.9，结合图表 (3.19) 和 (1.37) 的交换性，结论得证。□

3.1.5. 滤过模 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$。

命题—定义 3.1.17。商 k-模

$$\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} := \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \Big/ \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1) \tag{3.20}$$

是一个 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$-模。此外，如果我们将 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 中的 $1 \in \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 的类记为 1_{B}，那么典范投影

$$- \cdot 1_{\mathrm{B}} : \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$$

是一个满射的$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$-模态射，且其限制到 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$是一个 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$-模同构态射。

证明。由直和分解可得

$$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \mathbf{k} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1) = \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \oplus \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1)$$

由 [Wei 给出，命题 6.2.6]。 □

注释。该陈述意味着 $(- \cdot 1_{\mathrm{B}})_{|\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}} : \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个$\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$-模同构，因此 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个自由的 $\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}$-模，秩 1。

命题—定义3.1.18。k-模 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 被赋予由下式给出的递减 k-模滤过

$$\mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} := \mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \cdot 1_{\mathrm{B}} \quad \textit{for } m \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

此外，$\Big(\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}, (\mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}\Big)$ 是滤过代数$\Big(\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}, (\mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}\Big)$ 上的滤过模。

证明。显然。 □

引理 3.1.19。

(i) 对任意 $m \in \mathbb{N}$，k-模同构 $- \cdot 1_{\mathrm{B}} : \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 诱导出一个 k-模同构 $\mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$。(ii) 对任意 $m \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{F}^m \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cdot 1_{\mathrm{B}}$。

证明。

(i) 根据 $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 的定义，同构 $- \cdot 1_{\mathrm{B}} : \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 限制为一个满射 k-模态射 $\mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$。此外，由于 $- \cdot 1_{\mathrm{B}} : \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 是单射，其限制 $\mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 也是单射。

(ii) 首先，若 $m = 0$，则由命题—定义 3.1.17 可得相等。

从现在起，设 $m \in \mathbb{N}^*$。由于 $\mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{F}^m \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$，我们有

$$\mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{F}^m \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cdot 1_{\mathrm{B}}.$$

反过来，我们来证明包含关系 $\mathcal{F}^m \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \cdot 1_{\mathrm{B}} \subset \mathcal{F}^m \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$。这个包含关系等价于

$$\mathcal{F}^m \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \subset \mathcal{F}^m \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} + \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1).$$

由于 $\mathcal{F}^m \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{I}^m = \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathrm{k}\mu_N)^m$，并且根据引理 3.1.11 (i)，这个包含关系也等价于

$$\mathcal{I}^m \subset \big(\mathcal{I}^m \cap \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)\big) + \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1). \tag{3.22}$$

我们有

$$\mathcal{I} = \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N) \subset \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}) = \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1) + \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1),$$

其中 $\ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k})$ 是群代数 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} = \mathbf{k}F_2$ 的增广理想，而最后一个相等是由 [Wei，命题 6.2.6] 得出的。这意味着

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^m = \mathcal{I}^{m-1}\mathcal{I} &\subset \mathcal{I}^{m-1}\left(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) + \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1)\right) \\ &\subset \mathcal{I}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) + \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1). \end{aligned} \tag{3.23}$$

此外，$\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \subset \ker(\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N)$，因为 $X_1 - 1 \mapsto 0$ 通过映射 $\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathbf{k}\mu_N$。这意味着

$$\mathcal{I}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \subset \mathcal{I}^{m-1}\mathcal{I} = \mathcal{I}^m. \tag{3.24}$$

另一方面，我们有

$$\mathcal{I}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \subset \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1). \tag{3.25}$$

由 (3.24) 和 (3.25)，我们得到

$$\mathcal{I}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1) \subset \left(\mathcal{I}^m \cap \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)\right). \tag{3.26}$$

最后，由 (3.23) 和 (3.26)，我们得到

$$\mathcal{I}^m \subset \left(\mathcal{I}^m \cap \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1 - 1)\right) + \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1),$$

这正是所需的包含关系。

□

3.1.6. 拓扑模 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$。在 (3.21) 中给出的递减滤过 $(\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}})_{m\in\mathbb{N}}$ 诱导出一个 k-模态射 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{m+1}\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$。

定义 3.1.20。我们记

$$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} := \varprojlim \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}.$$

射影系 $(\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}, \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{m+1}\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}})$ 的极限。

k-模 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个配备滤过的 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$-模

$$\mathcal{F}^m\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} := \varprojlim \mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^{\max(m,l)}\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}, \text{ for } m \in \mathbb{N}.$$

赋予由该滤过定义的拓扑后，$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个完备分离拓扑 k-模。

引理 3.1.21。

(i)满射 k-模态射 $- \cdot 1_{\mathrm{B}} : \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 诱导出一个拓扑满射k-模态射 $\widehat{- \cdot 1_{\mathrm{B}}} : \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$。(ii)k-模同构 $- \cdot 1_{\mathrm{B}} : \mathcal{W}_N^{\mathrm{B}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 诱导出一个拓扑 k-模同构 $\widehat{- \cdot 1_{\mathrm{B}}} : \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$。

证明。

(i) 根据 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 的定义，这由引理 3.1.19 (ii) 得出。

(ii) 根据 $\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 的定义，这由引理 3.1.19 (i) 得出。

□

推论 3.1.22。

(i) 有序对 $(\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}})$ 是范畴 k-alg-mod^{top} 中的一个对象。(ii) 有序对 $(\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}})$ 是范畴 k-alg-mod^{top} 中的一个对象。此外，$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$是一个秩为 1 的自由 $\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$-模。

证明。由引理 3.1.21 立即可得。 □

命题 3.1.23。拓扑 k-模态射 $\widehat{-\cdot 1_{\mathrm{B}}}\colon \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 诱导出一个拓扑 k-模的同构 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}/\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_0-1) \to \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$。

为了证明这一点，我们需要下面的引理：

引理 3.1.24. 设 V 是一个 k-模，且 u 是 V 的一个自同态。设 $f\colon V^N \to V^N$ 是由下式给出的自同态

$$(v_0,\dots,v_{N-1}) \mapsto (u(v_{N-1})-v_0, v_0-v_1, v_1-v_2,\dots,v_{N-2}-v_{N-1}).$$

那么我们有一个同构

$$\mathrm{coker}(f) \simeq \mathrm{coker}(u-\mathrm{id}).$$

引理 3.1.24 的证明。考虑由 $(v_0,\dots,v_{N-1}) \mapsto v_0+\cdots+v_{N-1}$ 给出的 k-模态射 $\mathrm{sum}\colon V^N \to V$。此态射将 $\mathrm{Im}(f)$ 映射到 $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$。因此，存在唯一的 k-模态射 $V^N/\mathrm{Im}(f) \to V/\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} V^N & \xrightarrow{\quad\mathrm{sum}\quad} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^N/\mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & V/\mathrm{Im}(u-\mathrm{id}) \end{array}$$

交换。我们证明态射 $V^N/\mathrm{Im}(f) \to V/\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$ 是一个同构。首先，由于态射 $\mathrm{sum}\colon V^N \to V$ 是满射，态射 $V^N/\mathrm{Im}(f) \to V/\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$ 也是满射的。其次，设 $(w_0,\dots,w_{N-1}) \in V^N$，且存在一个元素 $v\in V$，使得 $w_0+\cdots w_{N-1} = u(v)-v$。由下式给出的元素 $(v_0,\dots,v_{N-1}) \in V^N$

$$v_{N-1}=v, v_{N-2}=w_{N-1}+v, v_{N-3}=w_{N-2}+w_{N-1}+v,\dots,$$
$$v_0 = w_1+\cdots w_{N-1}+v$$

满足以下条件

$$(w_0,\dots,w_{N-1}) = (u(v_{N-1})-v_0, v_0-v_1,\dots,v_{N-2}-v_{N-1}) \in \mathrm{Im}(f).$$

由此证明了 $V^N/\mathrm{Im}(f) \to V/\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$ 的单射性。 □

命题 3.1.23 的证明。证明包括以下步骤：

步骤 1：k-模同构 P_0 的构造：$(\mathrm{k}F_{N+1})^N \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$。

如同在 (3.3) 中一样，定义 k-模同构 $\mathrm{k}F_{N+1}\otimes \mathrm{k}\mu_N \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$，使得对于 $(x,\zeta)\in F_{N+1}\times\mu_N$

$$x\otimes\zeta \mapsto x\,\sigma(\zeta), \tag{3.27}$$

其中， F_{N+1} 被视为 $\ker(F_2 \to \mu_N) \subset F_2$ ，这要归功于引理 3.1.1。此外，可以验证存在一个 k-模同构 $(\mathbf{k}F_{N+1})^N \to \mathbf{k}F_{N+1} \otimes \mathbf{k}\mu_N$ ，其定义为

$$(v_0, \dots, v_{N-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{N-1} v_i \otimes \zeta_N^i. \tag{3.28}$$

因此，合成 $P_0 : (\mathbf{k}F_{N+1})^N \to \mathbf{k}F_{N+1} \otimes \mathbf{k}\mu_N \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 是一个 k-模同构，并且给出为

$$(v_0, \dots, v_{N-1}) \mapsto v_0 + v_1 X_0 + \cdots + v_{N-1} X_0^{N-1}.$$

步骤 2：确定 $\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$。
可验证，端态射 f： $(\mathbf{k}F_{N+1})^N \to (\mathbf{k}F_{N+1})^N$ 由下式给出

$$(v_0, \dots, v_{N-1}) \mapsto (v_{N-1}\widetilde{X}_0 - v_0, v_0 - v_1, v_1 - v_2, \dots, v_{N-2} - v_{N-1}), \tag{3.29}$$

满足如下交换图在线计划。

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{k}F_{N+1})^N & \xrightarrow{\quad f \quad} & (\mathbf{k}F_{N+1})^N \\ {\scriptstyle P_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_0} \\ \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow[-\cdot(X_0-1)]{} & \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \end{array} \tag{3.30}$$

交换。这诱导出一个 k-模同构 $\operatorname{coker}(f) \simeq \operatorname{coker}(-\cdot(X_0-1))\widetilde{}$另一方面，通过将引理 3.1.24 应用于 $V = \mathbf{k}F_{N+1}$ 和 $u = -\cdot X_0$，我们得到一个同构 $\operatorname{coker}(f) \simeq \operatorname{coker}(u - \mathrm{id})$。由此可得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} = \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_0 - 1) &= \operatorname{coker}(-\cdot(X_0 - 1)) \\ &\simeq \operatorname{coker}(f) \simeq \operatorname{coker}(u - \mathrm{id}) = \mathbf{k}F_{N+1}/\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0 - 1). \end{aligned}$$

步骤 3：同构 $\mathbf{k}F_{N+1}/\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0 - 1) \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 与滤子结构的相容性。我们证明，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，都有

$$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \Big/ \Big((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \cap \mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0 - 1)\Big) \simeq \mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}.$$

若 $m = 0$，这已在步骤2 中得到证明。现在起，假设 $m \in \mathbb{N}^*$。同构 $\mathbf{k}F_{N+1}/\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0 - 1) \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 符合以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}F_{N+1} & \hookrightarrow & \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{k}F_{N+1}/\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0 - 1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{M}_N^{\mathrm{B}} \end{array} \tag{3.31}$$

其中 $\mathbf{k}F_{N+1} \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 是由引理 3.1.1 中得到的群态射$F_{N+1} \simeq \ker(F_2 \to \mu_N) \subset F_2$ 诱导的群代数态射。这个群代数态射诱导了单射。

$$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \hookrightarrow \mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}.$$

然后，由于图表（3.31）的交换性，$\mathbf{k}F_{N+1}/\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\to\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 这个 k-模同构诱导出一个单射

$$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big/\Big((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\cap\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\Big)\hookrightarrow\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}\cdot 1_{\mathrm{B}}=\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}},$$

其中，相等来自引理 3.1.19.(ii)。这意味着

$$\mathrm{Im}\left((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big/\Big((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\cap\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\Big)\to\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}\right)\subset\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}.$$

反过来，我们证明反向包含。由引理 3.1.11(ii)，我们有

$$\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}=\mathcal{F}^m\mathcal{W}_N^{\mathrm{B}}\cdot 1_{\mathrm{B}}=\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1)\cdot 1_{\mathrm{B}}.$$

此外，根据定义，我们有 $\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}=(\mathcal{F}^1\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}})^{m-1}$。这意味着，根据引理 3.1.3 (ii)，$\mathcal{F}^{m-1}\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}(X_1-1)\cdot 1_{\mathrm{B}}$由元素线性生成。

$$\sigma(\zeta_1)(x_1-1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})(x_{m-1}-1)(X_1-1)\cdot 1_{\mathrm{B}}$$

关于 $(\zeta_1,x_1)\ldots,(\zeta_{m-1},x_{m-1})\in\mu_N\times F_{N+1}$。此外，我们还得知

$$\begin{aligned}&\sigma(\zeta_1)(x_1-1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})(x_{m-1}-1)(X_1-1)\cdot 1_{\mathrm{B}}=\\&\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)}(x_1)-1\right)\cdots\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})}(x_{m-1})-1\right)\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})}(X_1)-1\right)\\&\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})\cdot 1_{\mathrm{B}}=\\&\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)}(x_1)-1\right)\cdots\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})}(x_{m-1})-1\right)\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})}(X_1)-1\right)\cdot 1_{\mathrm{B}}\end{aligned}$$

它属于同构 $\mathbf{k}F_{N+1}/\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\to\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}$ 的像，即 $(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big/\Big((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\cap\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\Big)$。

$$\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)}(x_1)-1\right)\cdots\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})}(x_{m-1})-1\right)\left(\mathrm{Ad}_{\sigma(\zeta_1)\cdots\sigma(\zeta_{m-1})}(X_1)-1\right),$$

视为 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 的一个元素，它属于 $(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$。这意味着

$$\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}\subset\mathrm{Im}\left((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big/\Big((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\cap\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\Big)\to\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}\right).$$

因此，有如下相等关系

$$\mathrm{Im}\left((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big/\Big((\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\cap\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)\Big)\to\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}\right)=\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}},$$

这就建立了所需的同构。

步骤 4：确定 $\widehat{\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}}$。

得益于步骤 3，对任意 $m\in\mathbb{N}$，都有

$$\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}\simeq\mathbf{k}F_{N+1}\Big/\Big(\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)+(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big)$$

另一方面，对于任意 $m\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{k}F_{N+1}\Big/\Big(\mathbf{k}F_{N+1}(\widetilde{X}_0-1)+(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\Big)\simeq\mathrm{coker}\left(\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\right),$$

其中态射

$$\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \tag{3.32}$$

$\widetilde{\ }$是由自同态 $-\cdot(X_0-1)$ 在 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 上诱导的。因此，

$$\widehat{\mathcal{M}_N^{\mathrm{B}}}\simeq\varprojlim\mathrm{coker}\left(\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\right).$$

步骤 5：确定 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}/\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_0-1)$。
正如引理3.1.5中所证明的，(3.27)中给出的k-模同构$\mathbf{k}F_{N+1}\otimes\mathbf{k}\mu_N\to\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$允许我们将$(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\otimes\mathbf{k}\mu_N$ 识别为 $\mathcal{F}^m\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$，其中 $m\in\mathbb{N}$为任意元素。回顾(3.28) 中给出的同构 $(\mathbf{k}F_{N+1})^N\to\mathbf{k}F_{N+1}\otimes\mathbf{k}\mu_N$。可以验证，它与对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 由 $\prod_{i=1}^N(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$ 给出的 $(\mathbf{k}F_{N+1})^N$ 的滤过相容。因此，步骤1的同构 $P_0:(\mathbf{k}F_{N+1})^N\to\mathbf{k}F_{N+1}\otimes\mathbf{k}\mu_N\to\mathcal{V}_N^{\mathrm{B}}$ 与滤过相-容。因此，它扩展为一个拓扑 k-模同构

$$\widehat{P}_0:(\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}})^N\to\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}.$$

另一方面，(3.29) 中给出的自同态 $f:(\mathbf{k}F_{N+1})^N\to(\mathbf{k}F_{N+1})^N$ 与滤过相容，因此延拓为一个拓扑自同态 $\hat{f}:\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}(\mathbf{k}F_{N+1})^N\to(\mathbf{k}F_{N+1})^N$，并且由图表 (3.30) 可知，它使得下图

$$\begin{array}{ccc}(\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}})^N & \xrightarrow{\hat{f}} & (\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}})^N\\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq\\ \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow[-\cdot(X_0-1)]{} & \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}\end{array}$$

$\hat{}$ 交换。这诱导出一个 k-模同构 $\operatorname{coker}(f)\simeq\operatorname{coker}(-\cdot(X_0-1))$。
$\widehat{\quad}\quad\widetilde{}$与步骤 1 类似，应用引理 3.1.24，其中 $V=\mathbf{k}F_{N+1}$ 和 $u=-\cdot X_0$，我们得到一个同构 $\operatorname{coker}(f)\simeq\operatorname{coker}(u-\mathrm{id})$。于是可得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}/\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_0-1)&=\operatorname{coker}(-\cdot(X_0-1))\\&\simeq\operatorname{coker}(\hat{f})\simeq\operatorname{coker}(u-\mathrm{id})=\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}}/\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}}(\widetilde{X}_0-1).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}}/\widehat{\mathbf{k}F_{N+1}}(\widetilde{X}_0-1)\simeq\operatorname{coker}\left(\varprojlim\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\varprojlim\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\right),$$

其中，态射 $\varprojlim\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\varprojlim\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$由 (3.32) 中给出的态射 $\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$诱导。
步骤 6：极限的余核与余核的极限相同。
对于任意 $m\in\mathbb{N}^*$，该态射

$$\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}\to\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m\tag{3.33}$$

$\widetilde{}$由 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 的端同态 $-\cdot(X_0-1)$ 诱导，是单射。事实上，设 $x\in\widetilde{\mathbf{k}F_{N+1}}$ 满足 $x(X_0-1)\in(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$。设 l 为使得$x\in(\mathbf{k}F_{N+1})_0^l$成立的最小整数。我们来证明 $l\geq m-1$。否则，由于 $x\in(\mathbf{k}F_{N+1})_0^l$，我们有$\widetilde{}$，即 $[x]\in\mathrm{gr}^l(\mathbf{k}F_{N+1})$。此外，我们有 $[X_0-1]\in\mathrm{gr}^1(\mathbf{k}F_{N+1})$。因此，$\sim[x(X_0-1)]\in\mathrm{gr}^{l+1}(\mathbf{k}F_{N+1})$。由假设，$l+1\leq m-1$，条件
$\sim\quad\sim x(X_0-1)\in(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$蕴含 $[x(X_0-1)]=0$。最后，由于 $\mathrm{gr}^{l+1}(\mathbf{k}F_{N+1})$ 是整环，我们将得到 $[x]=0$，这与 l 的最小性矛盾。因此，$l\geq m-1$，且态射 (3.33) 是单射。

I此外，态射 (3.33) 的像与该态射的像相同。 m

由 $\mathbf{k}F_{N+1}$ 的自同态 $-\cdot(X_0-1)$ 所诱导的 $\widetilde{\ }\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \to \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m$。于是我们得到短正合列

$$\begin{aligned}\{0\} \to \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} \to \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \\ \to \operatorname{coker}\big((\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \to \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m)\big) \to \{0\}\end{aligned}$$

通过应用逆极限函子，我们得到

$$\begin{aligned}&\{0\} \to \varprojlim \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1} \to \varprojlim \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \to \\ &\varprojlim \operatorname{coker}\big((\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \to \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m)\big) \to \varprojlim{}^1\, \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1},\end{aligned}$$

其中 $\lim_{\longleftarrow}{}^1$ 是 [BK72, §IX.2.1] 中定义的函子。
由于逆系统 $(\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1})_{m\in\mathbb{N}^*}$ 的过渡映射是满射，这意味着 $\lim_{\longleftarrow}{}^1\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^{m-1}=0$（例如，参见 [BK72，命题 IX.2.4]）。因此，

$$\begin{aligned}&\varprojlim \operatorname{coker}\big((\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \to \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m)\big) \simeq \\ &\operatorname{coker}\big(\varprojlim(\mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m \to \varprojlim \mathbf{k}F_{N+1}/(\mathbf{k}F_{N+1})_0^m)\big).\end{aligned}$$

借助步骤 4 和步骤 5，这就证明了所需的结果。

□

命题—定义 3.1.25. 设 $\iota\in\mathrm{Emb}(G)$。存在唯一的拓扑 k-模同构 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\colon \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$，使得下图

$$\begin{array}{ccc}\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow{\quad\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}\quad} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{-\cdot 1_{\mathrm{B}}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{-\cdot 1_{\mathrm{DR}}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow[\quad\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\quad]{} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\end{array} \tag{3.34}$$

交换。
证明。我们来构造一个拓扑模态射 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$，它建立在拓扑代数态射 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 之上。我们考虑合成

$$\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \xrightarrow{\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}} \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \xrightarrow{\widehat{-\cdot 1_{\mathrm{DR}}}} \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}. \tag{3.35}$$

这个合成将 k-子模 $\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}(X_0-1)$ 映到 0。事实上，这是因为 (3.35) 是一个建立在代数态射 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\ \iota}$ 之上的模态射，并且根据以下计算

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(X_0-1) = g_\iota \exp\left(\tfrac{1}{N}e_0\right) - 1 = g_\iota\left(\exp\left(\tfrac{1}{N}e_0\right)-1\right) + (g_\iota - 1) \in \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}e_0 + \widehat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}(g_\iota-1)$$

因此，由命题 3.1.23 可知，合成 (3.35) 可分解为一个 k-模态射 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$，它是建立在代数态射 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 之上的模态射。

接下来，我们证明 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$是一个同构。回忆命题 3.1.15，$\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$是 $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\ \iota}\colon \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$的一个代数子态射。

因此，$\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\colon \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$是一个关于代数同构 $\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}\colon \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$的模态射。此外，$\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$分别是$\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}$上的自由秩 1 模，并且 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}$ 将 1_{B} 映到 1_{DR}，因此也将源空间的一组基映到目标空间的一组基。由此，$\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\colon \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}$是关于 $\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}$ 的模同构，进而是一个 k-模同构。□

注 3.1.26. 注意到我们有以下 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}$ 的 k-子模相等关系:

$$\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g_\iota \exp(e_0) - 1) = \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g_\iota - 1).$$

事实上，由于我们有

$$g_\iota \exp(e_0) - 1 = g_\iota(\exp(e_0) - 1) + (g_\iota - 1),$$

这给出了包含关系 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g_\iota \exp(e_0) - 1) \subset \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g_\iota - 1)$。反过来，包含关系 $\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} e_0 + \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g_\iota - 1) \subset \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}(g_\iota \exp(e_0) - 1)$ 可由以下结论得到

$$e_0 = \frac{e_0}{\exp(Ne_0) - 1}\big(1 + g_\iota \exp(e_0) + \cdots + g_\iota^{N-1} \exp((N-1)e_0)\big)(g_\iota \exp(e_0) - 1)$$

以及

$$\begin{aligned} g_\iota - 1 =& \exp(-e_0)(g_\iota \exp(e_0) - 1) + (\exp(-e_0) - 1) \\ =& \exp(-e_0)(g_\iota \exp(e_0) - 1) + \\ & \frac{\exp(-e_0) - 1}{\exp(Ne_0) - 1}\big(1 + g_\iota \exp(e_0) + \cdots + g_\iota^{N-1} \exp((N-1)e_0)\big)(g_\iota \exp(e_0) - 1) \\ =& \Big(\exp(-e_0) + \tfrac{\exp(-e_0)-1}{\exp(Ne_0)-1}\big(1 + g_\iota \exp(e_0) + \cdots + g_\iota^{N-1} \exp((N-1)e_0)\big)\Big)(g_\iota \exp(e_0) - 1). \end{aligned}$$

命题 3.1.27. 对任意 $(\lambda, \Psi) \in \mathrm{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathrm{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，以下各对都是范畴 k-alg-mod^{top} 中的同构态射:

(i) $\big(\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}, \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\big) : (\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}) \to (\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$.

(ii) $\big(\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}, \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\big) : (\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}) \to (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$.

证明。

(i) $\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}$（分别是 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}$）为 k-代数（分别为 k-模）同构，这一事实由命题—定义 3.1.8（分别由命题—定义 3.1.25）得出。令 $(a, m) \in \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} \times \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$。存在 $v \in \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}$使得 $m = v \cdot 1_{\mathrm{B}}$。我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}(am) =& \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}(av \cdot 1_{\mathrm{B}}) = \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(av) \cdot 1_{\mathrm{DR}} = \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(a)\,\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(v) \cdot 1_{\mathrm{DR}} \\ =& \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(a)\,\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}(v \cdot 1_{\mathrm{B}}) = \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}(a)\,\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}(m), \end{aligned}$$

其中第二个和第四个等式来自命题—定义 3.1.25。

(ii) $\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}$（分别是 $\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}$）为 k-代数（分别为 k-模）同构，这一事实由命题-定义 3.1.15（分别由命题—定义 3.1.25）得出。证明对于任意 $(w, m) \in \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} \times \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}$，有

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}(wm) = \mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}(w)\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}(m)$$

使用 (i) 的论证以及命题-定义 3.1.15。

□

推论 3.1.28. 设 $\iota \in$Emb(G) 且 $\phi \in$ 自同构群(G)。我们有

$$\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota\circ\phi^{-1}} = \eta_\phi^{\mathcal{M}} \circ \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota},$$

其中 $\eta_\phi^{\mathcal{M}} \in$ 自同构群$^{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}})$ 由引理 1.4.8.(ii) 给出。

证明。由命题 3.1.9 可得，这归功于图表 (3.34) 和 (1.39) 的交换性。□

3.2. $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 与 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}{}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 的余乘法。

3.2.1. 比较同构。

定义 3.2.1. 对于 $(\iota,\lambda,\Psi) \in$ Emb(G) $\times\, \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们定义拓扑 k-代数模同构

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(1)}_{(\iota,\lambda,\Psi)},\, {}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right) : (\widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}}) \to (\widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}}) \tag{3.36}$$

给定为

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(1)}_{(\iota,\lambda,\Psi)},\, {}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right) := \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(1)}_{(\lambda,\Psi)},\, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{V},(10)}_{(\lambda,\Psi)}\right) \circ \left(\mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}, \mathrm{iso}^{\mathcal{V},\iota}\right)$$

命题-定义 3.2.2. 对于 $(\iota,\lambda,\Psi) \in$ Emb(G) $\times\, \mathbf{k}^\times \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，我们定义拓扑 k-代数模同构

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\lambda,\Psi)},\, {}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right) : (\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}, \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}}) \to (\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}, \widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}}) \tag{3.37}$$

给出者

$$\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\lambda,\Psi)},\, {}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right) := \left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)},\, {}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)}\right) \circ \left(\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}, \mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\right).$$

使得以下图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow{{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}} & \widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{DR}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow[{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(1)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}]{} & \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{3.38}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow{{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(10),\iota}_{(\lambda,\Psi)}} & \widehat{\mathcal{V}}_G^{\mathrm{DR}} \\ {\scriptstyle \widehat{-\cdot 1_{\mathrm{B}}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{-\cdot 1_{\mathrm{DR}}}} \\ \widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}} & \xrightarrow[{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10),\iota}_{(\lambda,\Psi)}]{} & \widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}} \end{array} \tag{3.39}$$

交换。

证明。由命题—定义 2.1.4 和命题 3.1.27.(ii)，可知这些对 $\left({}^{\Gamma}\text{自同构群}^{\mathcal{W},\ (1)\ (\lambda,\ \Psi)},\ {}^{\Gamma}\text{自同构群}^{\mathcal{M},\ (10)\ (\lambda,\ \Psi)}\right)$ 以及 $\left(\text{同构}^{\mathcal{W},\ \iota}、\text{同构}^{\mathcal{W},\ \iota}\right)$ 都是 k-alg-mod^{top} 中的同构；因此，它们的合成是 k-alg-mod^{top} 中的同构。接下来，这些图表的交换性由图表(2.9)、(3.19)以及图表(2.10)、(3.34)的交换性推出。□

回顾推论 1.4.6 中给出的群 $(\mathrm{Aut}(G)\times\mathsf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathsf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 在 $\mathrm{Emb}(G)\times\mathsf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathsf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 上的作用。我们有如下结果：

命题 3.2.3. 对于 $(\phi,\lambda,\Psi)\in\mathrm{Aut}(G)\times\mathsf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathsf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$ 和 $(\iota,\nu,\Phi)\in\mathrm{Emb}(G)\times\mathsf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathsf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)$，有

(i) ${}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)}={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1),\iota}_{(\iota,\nu,\Phi)}$.

(ii) ${}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)}={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10),\iota}_{(\iota,\nu,\Phi)}$.

证明。

(i) 我们有

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)}&={}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota\circ\phi^{-1},\lambda\nu,\Psi\circledast\eta_{\phi}(\lambda\bullet\Phi))}={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)\circledast(\nu,\eta_{\phi}(\Phi))}\circ\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota\circ\phi^{-1}}\\
&={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\nu,\eta_{\phi}(\Phi))}\circ\eta^{\mathcal{W}}_{\phi}\circ\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}\\
&={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\lambda,\Psi)}\circ\eta^{\mathcal{W}}_{\phi}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\nu,\Phi)}\circ\mathrm{iso}^{\mathcal{W},\iota}\\
&={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{W},(1)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\nu,\Phi)},
\end{aligned}$$

其中，第二个相等式由引理 1.4.3 得出，第三个相等式由推论 2.1.7 和推论 3.1.16 得出，第四个相等式由推论 2.1.11.(i) 得出。(ii) 我们有

$$\begin{aligned}
{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)}&={}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota\circ\phi^{-1},\lambda\nu,\Psi\circledast\eta_{\phi}(\lambda\bullet\Phi))}={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)\circledast(\nu,\eta_{\phi}(\Phi))}\circ\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota\circ\phi^{-1}}\\
&={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\nu,\eta_{\phi}(\Phi))}\circ\eta^{\mathcal{M}}_{\phi}\circ\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\\
&={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\lambda,\Psi)}\circ\eta^{\mathcal{M}}_{\phi}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\nu,\Phi)}\circ\mathrm{iso}^{\mathcal{M},\iota}\\
&={}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)},
\end{aligned}$$

其中第二个相等由引理 1.4.3 得出，第三个相等由推论 2.1.7 和推论 3.1.28 得出，第四个相等由推论 2.1.11.(ii) 得出。

□

3.2.2. 余乘法 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{N}{}^{\mathrm{B}}$ 和 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{N}{}^{\mathrm{B}}$。

定理 3.2.4。合成

$$\left(\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1},\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\right)\circ\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_{G},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_{G}\right)\circ\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\nu,\Phi)},{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right):$$
$$\left(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_{N},\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}_{N}\right)\to\left((\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_{N})^{\otimes 2},(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}_{N})^{\otimes 2}\right)$$

与所选的 $(\iota,\nu,\Phi)\in \mathsf{DMR}^{\times}(\mathbf{k})$ 无关。我们将其记为 $(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ {}_{N}{}^{\mathrm{B}}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ {}_{N}{}^{\mathrm{B}}})$。此外，$(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ {}_{N}{}^{\mathrm{B}}},\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ {}_{N}{}^{\mathrm{B}}})$ 是 $\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}_{\mathrm{top}}}\left(\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}},\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}\right)$ 的一个元素。

证明。设 (ι,ν,Φ) 和 $(\iota',\nu',\Phi')\in \mathsf{DMR}^{\times}(\mathbf{k})$。由命题 1.4.14，存在唯一的 $(\phi,\lambda,\Psi)\in$(自同构群$(G)\ \times \mathbf{k}^{\times})\ltimes \mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k})$，使得 $(\iota',\nu',\Phi')=(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)$。我们有

$$
\begin{aligned}
&\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota',\nu',\Phi')}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota',\nu',\Phi')}\\
&=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)\cdot(\iota,\nu,\Phi)}\\
&=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{aut}^{\mathcal{M},(10)}_{(\phi,\lambda,\Psi)}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\\
&=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)},
\end{aligned}
$$

其中，第二个相等式来自命题 3.2.3.(ii)，最后一个相等式则来自推论 2.2.5 中的包含关系 (自同构群$(G)\ \times \mathbf{k}^{\times})\ltimes \mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k})\ \subset$ 稳定子$_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ {}_{G}{}^{\mathrm{DR}}})(\mathbf{k})$。类似地，我们证明

$$
\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota',\nu',\Phi')}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota',\nu',\Phi')}=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{W},(1)}_{(\iota,\nu,\Phi)},
$$

在指数中用 $\mathcal{W},(1)$（分别用 $\mathcal{W},\mathrm{DR}$）替换 $\mathcal{M},(10)$（分别替换 $\mathcal{M},\mathrm{DR}$），并将命题 3.2.3.(ii) 换成命题 3.2.3.(i)，即可得到上述结论；再利用推论 2.2.5 中的包含关系 (自同构群$(G)\ \times \mathbf{k}^{\times})\ltimes \mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k})\ \subset$ 稳定子$_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\ {}_{G}{}^{\mathrm{DR}}})(\mathbf{k})$。最后，$\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{W},\mathrm{B}},\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}}\right)$ 是 $\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}_{\mathrm{top}}}\left(\widehat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{B}},\widehat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{B}}\right)$ 中的一个元素，因为根据引理 1.1.3，数对 $\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}},\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)$ 是 $\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}_{\mathrm{top}}}\left(\widehat{\mathcal{W}}_G^{\mathrm{DR}},\widehat{\mathcal{M}}_G^{\mathrm{DR}}\right)$ 中的一个元素；并且数对 $\left({}^{\Gamma}\mathsf{comp}^{\mathcal{W}}_{(1)\ (\iota,\lambda,\Psi)},{}^{\Gamma}\mathsf{comp}^{\mathcal{M},}_{(10)\ (\iota,\lambda,\Psi)}\right)$ 是一个 k-代数模同构，这是命题-定义 3.2.2 的结论。□

推论 3.2.5. 我们有 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ {}_{N}{}^{\mathrm{B}}}(1_{\mathrm{B}})=1^{\otimes 2\ \mathrm{B}}$。

证明. 根据定理 3.2.4，考虑元素 $(\iota,\lambda,\Psi)\in \mathsf{DMR}^{\times}(\mathbf{k})$，我们来计算 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\ {}_{N}{}^{\mathrm{B}}}(1_{\mathrm{B}})$。首先，我们有

$$
{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}(1_{\mathrm{B}})={}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{V},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}(1)\cdot 1_{\mathrm{DR}}=\Gamma_{\Psi}^{-1}(-e_1)\beta(\Psi\otimes 1)\cdot 1_{\mathrm{DR}}=\Psi^{\star}. \tag{3.40}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}}(1_{\mathrm{B}})&=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}(1_{\mathrm{B}})\\
&=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}\circ\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}(\Psi^{\star})\\
&=\left(\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}(\Psi^{\star}\otimes\Psi^{\star})=1_{\mathrm{B}}^{\otimes 2},
\end{aligned}
$$

其中，第一个和最后一个等式源自（3.40），第二个等式则源自以下事实： $\Psi \in \mathrm{DMR}^{\iota}_{\lambda}(\mathbf{k})$。□

推论 3.2.6。

(i) $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_N$ 对 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$）是 k-Hopf^{top}范畴中的一个对象。（ii）这对（$\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$）是 k-coalg^{top}范畴中的一个对象。（iii）这对 $\Big($（$\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$），（$\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$）$\Big)$ 是 k-HAMC^{top}范畴中的一个对象。

证明。

（i）由定理 3.2.4 可知，$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 是一个代数态射。此外，容易验证，$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 的余结合性由 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$ 的余结合性推出。（ii）由定理 3.2.4 可知，$\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 是一个 k-模态射。此外，容易验证，$\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$ 的余结合性由 $\widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{,G}{}^{\mathrm{DR}}$ 的余结合性推出。（iii）由（i）和（ii），以及这对（$\widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M}}_{,N}{}^{\mathrm{B}}$）是 $\mathrm{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg-mod}_{\mathrm{top}}}\left(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_N, \widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}_N\right)$ 中的一个元素这一事实可得。

□

4. Expression of the torsor $\mathrm{DMR}^{\times}(\mathbf{k})$ in terms of the Betti and de Rham coproducts

本节中，我们证明 $\mathrm{DMR}^{\times}(\mathbf{k})$ 是与这对余乘法 $\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G\right)$ 相关的稳定子扭子的子扭子。在第 4.1 节中，我们定义集合稳定子 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k})$ 和 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k})$，并证明它们分别带有稳定子群 $\mathrm{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k})$ 和 $\mathrm{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k})$ 作用下的扭子结构。在第 4.2.1 节中，我们得到一条包含链，其中包含这些稳定子及 $\mathrm{DMR}^{\times}(\mathbf{k})$ 所构成的扭子。

4.1. 稳定子子扭子。

定义 4.1.1。

(i) 我们将稳定子 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k})$ 记为这对余乘法的集合稳定子 $\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_G\right) \in \mathrm{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{B}}_N) \times \mathrm{Cop}_{\mathbf{k}\text{-alg}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_G)$，其定义为稳定子 $\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k}) := \Big\{(\iota, \nu, \Phi) \in \mathrm{Emb}(G) \times \mathbf{k}^{\times} \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle) \mid \left(\Gamma_{\mathrm{comp}^{\mathcal{W}},(1)(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2} \circ \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,N}{}^{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta}^{\mathcal{W}}_{,G}{}^{\mathrm{DR}} \circ \Gamma_{\mathrm{comp}^{\mathcal{W}},(1)(\iota,\nu,\Phi)}\Big\}.$

(ii) 我们将稳定子 $\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G\right)(\mathbf{k})$ 记为余乘法对 $\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}}_N, \widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}_G\right) \in \mathrm{Cop}^{\mathbf{k}\text{-mod}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathrm{B}}_N) \times \mathrm{Cop}^{\mathbf{k}\text{-mod}_{\mathrm{top}}}(\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{DR}}_G)$ 的集合稳定子

given by

$$\mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}},\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k}):=$$
$$\left\{(\iota,\nu,\Phi)\in\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\,|\,\left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right)^{\otimes 2}\circ\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}}=\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\circ{}^{\Gamma}\mathrm{comp}^{\mathcal{M},(10)}_{(\iota,\nu,\Phi)}\right\}.$$

注记 4.1.2。定理 3.2.4 蕴含 $\mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{W},\mathrm{B}},\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})$ 和 $\mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}},\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})$ 包含 $\mathrm{DMR}_\times(\mathbf{k})$，这意味着这些都是非空集合。

命题 4.1.3。

i. 这对

$$\left(\text{稳定子}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k}),\ \text{稳定子}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{W},\mathrm{B}},\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})\right)$$

是 $\left(\text{(自同构群}(G)\ \times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle),\ \mathrm{Emb}(G)\ \times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\right)$ 的子扭子。

ii. 这对

$$\left(\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k}),\mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}},\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})\right)$$

is a subtorsor of $\left((\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle),\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\right)$.

为证明这一点，我们需要以下引理：

引理 4.1.4（[EF2，引理 2.6]）。设 (H,T) 是一个扭子，且 V,V' 是 k-模。设 $\rho\colon H\to\mathsf{Aut}_{\mathbf{k}\text{-mod}}(V)$ 是一个群态射，且 $\rho'\colon T\to\mathsf{Iso}_{\mathbf{k}\text{-mod}}(V',V)$ 是一个映射，使得对任意 $h\in H$, $x\in T$，都有 $\rho'(h\cdot x)=\rho(h)\circ\rho'(x)$。设 $v\in V$ 和 $v'\in V'$。则 $\mathsf{Stab}_H(v):=\{h\in H\,|\,\rho(h)(v)=v\}$ 是 H 的子群，并且 $\mathsf{Stab}_T(v,v'):=\{x\in T\,|\,\rho'(v')=v\}$ 要么为空集，要么 $(\mathsf{Stab}_H(v),\mathsf{Stab}_T(v,v'))$ 是 (H,T) 的一个子扭子。

命题 4.1.3 的证明。通过设定：

- $(H,T)=(\text{(自同构群}(G)\ \times\mathbf{k}^\times)\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle),\mathrm{Emb}(G)\ \times\mathbf{k}^\times\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle))$;
- $V=\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-模}}(\widehat{\mathcal{W}}_{\mathrm{DR}G})$（分别为 $V=\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-模}}(\widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR}G})$）；
- $V'=\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-模}}(\widehat{\mathcal{W}}_{\mathrm{B}N})$（分别为 $V'=\mathsf{Cop}_{\mathbf{k}\text{-模}}(\widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}N})$）；
- $v=\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{DR}\ G}$（分别地 $v=\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{DR}\ G}$）；
- $v'=\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},\mathrm{B}\ N}$（分别 $v'=\widehat{\Delta}^{\mathcal{M},\mathrm{B}\ N}$）；
- $\rho\colon(\phi,\lambda,\Psi)\mapsto\left(V\ni D^{\mathcal{W}}\mathrm{DR}\mapsto\left({}^{\Gamma}\text{自同构群}^{\mathcal{W}},_{(1)\ (\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\circ D^{\mathcal{W}}\mathrm{DR}\circ\left({}^{\Gamma}\text{自同构群}^{\mathcal{W}},_{(1)\ (\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{-1}\in V\right)$（分别，$\rho\colon(\phi,\lambda,\Psi)\mapsto\left(V\ni D^{\mathcal{M}}\mathrm{DR}\mapsto\left({}^{\Gamma}\text{自同构群}_{\mathcal{M}},_{(10)\ (\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{\otimes 2}\circ D^{\mathcal{M}}\mathrm{DR}\circ\left({}^{\Gamma}\text{自同构群}_{\mathcal{M}},_{(10)\ (\phi,\lambda,\Psi)}\right)^{-1}\in V\right)$）；

- $\rho' : (\phi, \lambda, \Psi) \mapsto \left(V' \ni D_{\mathrm{B}}^{\mathcal{W}} \mapsto \left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}_{(\phi,\lambda,\Psi)}^{\mathcal{W},(1)} \right)^{\otimes 2} \circ D_{\mathrm{B}}^{\mathcal{W}} \circ \left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}_{(\phi,\lambda,\Psi)}^{\mathcal{W},(1)} \right)^{-1} \in V \right)$ (resp. $\rho' : (\phi, \lambda, \Psi) \mapsto \left(V' \ni D_{\mathrm{B}}^{\mathcal{M}} \mapsto \left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}_{(\phi,\lambda,\Psi)}^{\mathcal{M},(10)} \right)^{\otimes 2} \circ D_{\mathrm{B}}^{\mathcal{M}} \circ \left({}^{\Gamma}\mathrm{comp}_{(\phi,\lambda,\Psi)}^{\mathcal{M},(10)} \right)^{-1} \in V \right)$).

最后，对于 $(\phi, \lambda, \Psi) \in H$ 和 $(\iota, \nu, \Phi) \in T$，恒等式

$$\rho((\phi, \lambda, \Psi) \cdot (\iota, \nu, \Phi)) = \rho(\phi, \lambda, \Psi) \circ \rho'(\iota, \nu, \Phi)$$

由命题 3.2.3 得出。 □

4.2. 稳定子扭子的包含关系。

定理 4.2.1。我们有以下扭子包含关系

$$\begin{array}{c} \left((\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^{\times}) \ltimes \mathsf{DMR}_0^G(\mathbf{k}), \mathsf{DMR}_{\times}(\mathbf{k})\right) \\ \cap \\ \left(\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k}), \mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})\right) \\ \cap \\ \left(\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k}), \mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{W},\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})\right) \\ \cap \\ \left((\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^{\times}) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \mathrm{Emb}(G) \times \mathbf{k}^{\times} \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\right) \end{array}$$

为了证明这一点，我们需要以下引理:

引理 4.2.2（[EF2，引理 2.3]）。设（H, T）是一个扭子，且（H', T'）和（H'', T''）是（H, T）的子扭子，满足 $T' \cap T'' \neq \varnothing$。则（$H' \cap H'', T' \cap T''$）既是（$H', T'$）的子扭子，也是（$H'', T''$）的子扭子，因此也是（$H, T$）的子扭子。

引理 4.2.3（[EF2，引理 2.7]）。设（H, T）是一个扭子，且（H_0, T_0）和（H_1, T_1）是（H, T）的子扭子，满足 $T_0 \subset T_1$。那么（H_0, T_0）是（H_1, T_1）的子扭子。此外，若 $H_0 = H_1$，则子扭子（H_0, T_0）和（H_1, T_1）相等。

定理 4.2.1 的证明。群部分的包含关系已在推论 2.2.5 中证明。第一个和最后一个集合部分的包含关系显然。尚需证明:

稳定子$_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})$ $\subset$ 稳定子$_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}$ $\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{W},\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})$。在引理 4.2.2 和 4.2.3 中，令

$$(H, T) = \left((\mathrm{Aut}(G) \times \mathbf{k}^{\times}) \ltimes \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle), \mathrm{Emb}(G) \times \mathbf{k}^{\times} \times \mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)\right).$$

首先，让我们应用引理 4.2.2 来

- $(H', T') = \left(\mathsf{Stab}_{(\mathrm{Aut}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k}), \mathsf{Stab}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}_G^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}\right)(\mathbf{k})\right)$;
- $(H'', T'') = \left(\text{稳定子}_{(\text{自同构群}(G)\times\mathbf{k}^{\times})\ltimes\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}^{\mathcal{W},}{}_{\mathrm{DR}_G}\right)(\mathbf{k}), \text{稳定子}_{\mathrm{Emb}(G)\times\mathbf{k}^{\times}\times\mathcal{G}(\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle)}\left(\widehat{\Delta}_N^{\mathcal{W},}{}_{\mathrm{B}}, \widehat{\Delta}^{\mathcal{W},}{}_{\mathrm{DR}}{}_{G}\right)(\mathbf{k})\right)$.

由注记 4.1.2，我们有 $T' \cap T'' \neq \varnothing$。因此，$(H' \cap H'', T' \cap T'')$ 是 (H'', T'') 的子扭子。

其次，让我们应用引理 4.2.3 来

- $(H_0, T_0) = (H' \cap H'', T' \cap T'')$;
- $(H_1, T_1) = (H', T')$.

我们有 $T_0 = T' \cap T'' \subset T' = T_1$。此外,

$$H_0 = H' \cap H'' = H' = H_1,$$

其中第二个相等关系由推论 2.2.5 中稳定子群的包含关系得出。最后可得 $T' \cap T'' = T_0 = T_1 = T'$。因此 $T' \subset T''$，这正是所需的集合稳定子包含关系。□

References

[BK72] A.K. Bousfied 和 D. M.Kan。 *Homotopy limits*, 《 *completions and localizations*》。Springer-Verlag，柏林、海德堡，1972 年。[Bou07] N.Bourbaki。 *Algèbre*。Springer-Verlag，柏林、海德堡，2007年。[Dri90] V. G. Drinfel'd。关于拟三角拟霍普夫代数以及一个与 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)密切相关的群。 *Algebra i Analiz*，2：149—181，1990 年。[EF0] B. Enriquez和 H.Furusho。双重洗牌李代数的稳定子解释。 *International Mathematics Research Notices* 2018 1 6870 6907, 2018 , ( ) : – Nov。[EF1] B. Enriquez和 H.Furusho。双重洗牌理论的 Betti 方面。I. 调和余乘法。 *Selecta Mathematica*，27：1–106，2021 年。[EF2] B. Enriquez 和H. Furusho。双重洗牌理论的 Betti 方面。II. 结合子的双重洗牌，2018年。arXiv:1807.07786。[EF4] B.Enriquez和 H. Furusho。模与代数调和余乘法的稳定子双扭子相等，2022年。arXiv:2203.01489。[Enr20] B.Enriquez。双重洗牌理论的 Betti方面：综述（多重ζ值的各个方面）。 *RIMS Kokyuroku*，2160：184–201，2020年。[Fu 11] H. Furusho。结合子的双重洗牌关系。 *Annals of Mathematics*，174：341–360，2011年 8 月。[Fu12] H.Furusho。多重 L *Galois*–-值的双 *Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry* 163 187, 2012 重洗牌关系的几何解释。，第 –页。[Kas] ChristianKassel。 *Quantum Groups*。Springer-Verlag，纽约，1995年。[McL] S. Mac Lane。 *Categories for the Working Mathematician*。Springer-Verlag，纽约，1969年。[Qui] Daniel Quillen。有理同伦理论。 *Annals of Mathematics*，第205–295 页，1969年。[Rac] G. Racinet。单位根处多重对数的双重混合。 ´m ´elanges *Publicationsmathématiques de l'IHÉS*, 95：185–231，2002年 7月。[Ste] B.Steinberg。自由群的子群为自由群的一个初等证明，2010年。arXiv:1006.3833。[Wei] C. Weibel。 *An introduction to homological algebra*。剑桥高等数学研究丛书 38，剑桥大学出版社，1994年。[Yad] K.Yaddaden。有限阿贝尔群所附双重洗牌李代数的交叉积解释， 2022 2112 14140 *Publications of the Research* 。 *Institute for Mathematical Sciences* arXiv: 。并将发表于 。

Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg, France*Email address*: kyaddaden@math.unistra.fr