arXiv:2304.04064v1 [math.AG] 8 Apr 2023

恰当微分分层的重言类

FREDERIK BENIRSCHKE

Abstract. 恰当微分分层是黎曼曲面上具有消失绝对周期的微分的模空间。我们的主要结果是，恰当微分分层在多尺度微分模空间中的闭包的类属于除子型重言环。通过将恰当微分与有理函数联系起来，我们获得了 Hurwitz 空间的类是重言类这一事实的新证明，以及一种新的计算方法。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. 分层上的局部系统 7 4. 恰当微分分层的类 16 5. 恰当微分的排列 22 6. 低亏格公式与交叉检验 27 附录 A. 迭代爆破上的交理论 31 参考文献 41

1. 引言

1.1. 来自代数几何的动机：Hurwitz空间的闭路类。利用 Hurwitz 空间是在曲线模空间中构造子簇的一种经典方式。Hur_λ 的Hurwitz覆盖的模空间参数化具有预先规定分歧的有限次数态射 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$。次数为 d 的覆盖的分歧型是 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，其中各项是 d的有序分拆。Hur_λ 参数化次数为 d的分支覆盖$f\colon X \to \mathbb{P}^1$，其分支点为 m 个点 $x_1, \ldots, x_m$，位于 $\mathbb{P}^1$ 中；在 x_i上的纤维中，其分歧由λ_i 描述，且没有其他分支点。Harris 和 Mumford 首先利用可容许覆盖构造了 Hur-witz 空间的模紧化 Hur_λ。遗忘分支覆盖得到一个态射 $\phi\colon \mathrm{Hur}_\lambda \to \mathcal{M}_{g,n}$，而推前基本类产生自然的可容许覆盖闭路 $\mathrm{Adm}_\lambda \in$ 周Chow群$^*(\mathcal{M}_{g,n})$。可容许覆盖闭路的计算吸引了大量研究，参见 [EH87, FP05, FP15, SvanZ20]，其中汇集了一系列结果。虽然一般而言尚不知道可容许覆盖闭路的闭公式，但 [FP05] 表明，可容许覆盖闭路属于重言环 $\mathrm{R}^*(\mathcal{M}_{g,n})$。

—

为了研究可容许覆盖循环，我们现在将转换视角，改为研究微分形式，而非有理函数。这一视角已在 [Ben22, BDG20]，中出现过；在那里，我们利用恰当微分构造了 Hurwitz 空间的光滑紧化。类似的思想也见于 [Mul22, Sau17]。

给定亏格为 g的黎曼曲面 X 上的有理函数 $f : X \to \mathbb{P}^1$ ，其对应的恰当微分 为 $df = f^*dz$ ，通过积分即可恢复 f（相差加法常数）。关键观察是，恰当微分可由所有绝对周期均为零来刻画

$$\int_\gamma df = 0 \text{ for all } \gamma \in H_1(X \setminus P(df); \mathbb{C}), \tag{1.1}$$

其中 $P(df) \subseteq X$是 df的极点集合。方程（1.1）可重新表述为：它属于某个截面的零点轨迹，该截面取自定义在适当的微分模空间上的向量丛，这使我们能够运用交理论。现在我们将构造所讨论的模空间。

1.2. 恰当微分分层。 分层 $\mathcal{H}(\mu)$参数化由以下对象组成的元组

$$(X, Q = (q_1, \dots, q_n), \omega)$$

带标记黎曼曲面 X 以及在 q_i处消失阶数为μ_i 的亚纯微分 ω 。大多数时候，我们只考虑相差一个缩放因子的微分，它们由射影化分层 $\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{H}(\mu)/\mathbb{C}^*$参数化。

给定分歧型 λ，令 μ 为记录 df 的零点阶数和极点阶数的分拆。例如，若考虑超椭圆曲线，其分歧型为 $\lambda = (2^{2g+2})$，对应的分拆为 $\mu = (-3, 1^{2g+1})$，其中我们使用指数记法表示重复项。

恰当微分分层

$$\mathrm{Exc}(\mu) = \left\{ (X, \omega) : \int_\gamma \omega = 0 \text{ for all } \gamma \in H_1(X \setminus P(\omega); \mathbb{Z}) \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mu)$$

要么为空，要么是射影化分层中的余维 $2g + |P(\omega)| - 1$ 子簇。

Exc (μ) 中的微分对应于具有指定分歧重数的有理函数，但不一定具有分歧型λ，因为到目前为止，我们还没有规定哪些分歧点位于同一个纤维中。在第 2 节中，我们将构造 由 λ-恰当微分构成的分层 $\mathrm{Exc}_\lambda \subset$ Exc (μ)，其由来自具有分歧型λ的有理函数的恰当微分组成。为了进行交理论，我们将在分层 $\mathcal{P}(\mu)$ 的紧化上工作。

最近，在 [BCGGM19b] 中，作者构造了多尺度微分的模空间$\overline{\mathcal{P}}(\mu)$，这是分层 $\mathcal{P}(\mu)$的一个光滑紧化。我们将在第 3 节回顾其主要特征。 $\overline{\mathcal{P}}(\mu)$ 的边界是一个正规交叉除子，可分解为由带有水平节点的不可约曲线组成的除子 D_h ，以及由非水平双层图参数化的除子 D_Γ。与 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 类似，多尺度微分的模空间具有自然的重言环 $\mathrm{R}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu))$，该环最初由 [CMZ20a] 定义。例如，环 $\mathrm{R}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu))$ 包含所有对应于非水平双层图的边界除子 D_Γ ，以及重言线丛的第一陈类

$$\xi = c_1(\mathcal{O}(-1)) \in \mathrm{CH}^1(\overline{\mathcal{P}}(\mu))$$

其在扭微分上的纤维是由该微分生成的直线。

我们的主要结果是计算 Exc(μ) 在$\mathcal{P}(\mu)$的周环中的闭包类。

定理1.1。令 μ 为 $2g-2$的一个分拆。恰当微分分层$\mathrm{Exc}(\mu)$ 的类属于除子型重言环 $\mathrm{divR}^*(\mathcal{P}(\mu)) \subseteq$周 Chow 群$^*(\mathcal{P}(\mu))$，该环由 ξ 和 D_Γ生成，其中 Γ 是一个非水平边界除子。此外，存在一种计算类 $\mathrm{Exc}(\mu)$的显式算法。对于任意分歧型 λ，λ-恰当分层Exc_λ 的类也同样如此。

特别是，Exc(μ) 的类表现得像完全交的类，尽管我们并不认为 Exc(μ) 是完全交，除非 $g=0$。

现在我们回到有理函数与恰当微分之间的联络。模空间 $\mathcal{P}(\mu)$ 带有一个遗忘映射 $\rho\colon \mathcal{P}(\mu) \to \mathcal{M}_{g,n}$ 并且根据构造，$[\mathrm{Exc}_\lambda]$ 的推前是可容许覆盖循环 Adm_λ。

推论 论 1.2 ([FP05])**.** 可容许覆盖循环 $\mathrm{Adm}_\lambda \in$周 Chow 群$^*(\mathcal{M}_{g,n})$ 是重言的 $l.$

证明。推前映射 ρ_* : CH$^*(\mathcal{P}(\mu)) \to$ CH$^*(\mathcal{M}_{g,n})$ 将重言类映为重言类（见命题 3.7），于是结论可直接由关于 λ-恰当微分分层的定理 1.1 得出。□

定理1.1的证明是显式的，并且结合CMZ20a中关于推前 ρ_* 在 [CMZ20a], 我们获得了一种计算可容许覆盖循环的显式方法。

使用 sage，通过 admcycles [DSZ21] 和diffstrata [CMZ20b] 软件包实现了 λ-恰当微分分层的计算算法，可用于交叉检验我们的公式，示例请参见截面 6。

1.3. **低亏格下的闭公式**。虽然一般而言，我们的公式只能提供一种递归算法来计算恰当微分分层的类，但在亏格 $g=0,\ 1$ 时，我们可以利用定理1.1提取出 λ-恰当微分分层的类的闭公式。

命题 1.3。设 Exc_λ 是 $g=0$ 中的恰当微分分层 $\lambda,\ 1$。则

$$[\overline{\mathrm{Exc}_\lambda}] = (-1)^{\operatorname{codim}\mathrm{Exc}_\lambda} \prod_i (\xi + \sum_{\overline{\Gamma}\in W_i(\lambda)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}}) \cdot \alpha_\lambda \in \mathrm{CH}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu))$$

对于某些明确给定的双层图集合 $W_i(\lambda)$ 和一个明确给定的类 α_λ。若 $g=0$，则 $\alpha_\lambda = 1$；若 $g=1$，则 $\alpha_\lambda \in \mathrm{divR}^2(\mathcal{P}(\mu))$。我们在命题 *6.2* 和 *6.4* 中明确描述了 $W_i(\lambda)$和 α_λ。

系数 ℓ_Γ 将在第 3.2 节中定义。

将可容许覆盖闭路提升到对数周环中。对数周环 $\log\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_{g,\ n})$ 环 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 可以通过对数几何构造，或者作为 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的边界分层的迭代爆破的周环的余极限来构造；例如，参见 [MPS23] 以了解相关介绍。有时，重言类在对数周环中更容易表示。例如，[MPS23] 中证明了，λ-类 λ_g 不属于由 $g \geq 2$ 的除子型类生成的 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_g)$ 子代数；但若将其提升到对数周环 λ_g，则它属于除子型子环 $\mathrm{divlogCH}^*(\mathcal{M}_g)$。

在 [CGHMJ22, 定理 5.13] 中，多尺度微分的模空间 $\mathcal{P}(\mu)$ 与源自对数几何的迭代爆破相关联。因此，我们可以利用 λ-恰当微分分层 Exc_λ 的闭包来定义可容许覆盖闭路在对数周环中的提升。我们已经证明，Exc_λ 的闭包类属于 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{P}(\mu))$ 的除子型子环；而确定该提升是否属于除子型对数周环 $\mathrm{divlogCH}^*(\mathcal{M}_g)$，似乎是一个有趣的问题。

1.4. **来自 Teichm¨uller 动力系统与双代数几何的动机**。恰当微分分层是分层 $\mathcal{P}(\mu)$ 中一类更一般子簇的例子。分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 具有由局部周期坐标给出的线性结构，而 $\mathcal{H}(\mu)$ 的线性子簇是代数子簇，其局部由周期坐标中的线性方程给出。如果线性方程由实数定义——如 Exc (μ) 的情形 —— 那么线性子簇在分层上的自然 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ 作用下保持不变。在全纯分层中，$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ 不变簇是有限个轨道闭包的并，而轨道闭包的交理论（猜想上）与 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ 作用的动力学密切相关（例如参见 [CMS19, 猜想 4.3]）。此外，在 [CMS23] 中，线性子簇的欧拉特征被表示为多尺度微分模空间上的交数。如果能在 $\mathcal{P}(\mu)$ 的周环中显式计算轨道闭包的类，就可以有效地计算这些公式。这引出了一个问题：轨道闭包的类是否属于重言环。通过覆盖构造，可以从给定的轨道闭包得到另一个轨道闭包。但重言类在分歧覆盖下并不保持不变，例如双椭圆轨迹通常不属于重言类，参见 [GP03] ；它可以通过覆盖构造实现为亏格一分层。

问题 1.4. 仿射不变子流形的类的推前在$\mathcal{M}_{g,\ n}$（按照 [Lia21] 的意义）是 H-重言类吗？

本文讨论两类线性子簇：恰当微分分层和留数子空间，这两类对象都只出现在亚纯微分的分层中。在这两种情况下，这些类恰好都属于（经典的）重言环。

线性子簇是分层中的双代数子簇的例子（有关这些思想领域的介绍，请参见 [KL22] ）。由于双代数簇非常特殊且罕见，人们预期它们的类也具有特殊的数值性质，因此探究这些类何时是重言式的似乎很有意思。

1.5. **无留数微分**。我们的方法不仅适用于恰当微分的分层，也适用于由留数之间的线性方程定义的线性子簇。这些线性子簇可以

定义如下。在亚纯微分的一个分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 上，存在一个留数映射

$$R : \mathcal{H}(\mu) \to \mathbb{C}^r,$$

其中 r 是 $\mathcal{H}(\mu)$ 的极点数量，将微分映射到标记极点处的留数。留数子空间 是形如 $R^{-1}(V)$ 的代数簇，其中 $V \subseteq \mathbb{C}^r$ 是某个线性子空间。如果 V 定义在实数上，则 $R^{-1}(V)$ 是一个 GL+(2, $\mathbb{R}$)-不变子簇。当 V 是零子空间时，我们将所得的簇称为无留数微分分层。它们在 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的上同调环中的类，最近已在 [BRZ21] 中得到研究，用于构造一个与 KP 层级相关的部分上同调场论。

定理4.1表明，留数子空间的乔氏类属于除子型重言环；但在这个特殊情形下，证明更为简单，而且我们还能得到一个闭式公式。

命题1.5。 设 Z 是 $\mathcal{P}(\mu)$中的一个留数子空间的闭包。那么存在一个闭公式

$$Z = (-1)^{\operatorname{codim} Z} \prod_i (\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(Z)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}}) \in \mathrm{CH}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu))$$

在除子型重言环中。这里的 $W_i(Z)$ 是一组双层图，我们在命题*4.6*中对其作了明确描述。

1.6. **概要**。我们简要概述定理1.1的证明思路，并着重说明过程中遇到的技术困难。在分层 $\mathcal{P}$ (μ)上，我们可以找到一个向量丛$\mathcal{E}$ 及其截面 s ，其零点轨迹恰好是恰当微分分层 Exc (μ)。特别地，Exc (μ)的类由 $\mathcal{E}$的最高陈类给出。将计算推广到紧化 $\mathcal{P}$(μ)的第一步，是将 $\mathcal{E}$ 和 s 延拓到 $\mathcal{P}$(μ)。这在第4.1节中完成。延拓后的截面 s 包含Exc (μ)的闭包, 一但也包含其他多余分支。这些多余分支可以明确描述，并且都与结点曲线上的恰当微分有关。主要的技术困难在于，某些多余分支的余维并非预期值。我们通过按精心选定的顺序爆破所有多余分支来解决这一困难。在爆破空间上，多余分支变为除子型，而延拓后的截面 s 以某个重数消失。除去这些除子的定义方程后，我们得到一个不同向量丛的新截面；结果表明，此时零点轨迹仅由Exc (μ)的严格变换构成。接着，我们需要将所有例外除子爆破回去，并运用爆破的交理论，求得Exc (μ)的类。另一个技术困难是，某些多余分支并不光滑，而是具有非约化的栈结构，因此所得的爆破也可~~能不光~~滑。通过仔细分析局部定义方程，我们证明这些奇点足够温和，使得肖氏群仍具有交积，且可以计算严格变换的类。 ———

致谢。 我们感谢 Samuel Grushevsky 和 Martin M¨oller 的有益讨论。我们还要感谢 Matteo Costantini、Johannes Schmitt 和 Rahul Pandharipande 对早期草稿提出的意见。

2. Preliminaries

2.1. 恰当微分。 给定一个来自亏格为 g 的黎曼曲面 X 的有理函数 $f : X \to \mathbb{P}^1$，其对应的恰当微分 为 $df = f^*dz$，通过积分即可恢复 f。对 $\mathbb{P}^1$ 作用 M¨obius 变换，可以得到同构但对应不同恰当微分的有理函数。为了给 f 的同构类唯一地对应一个恰当微分（至少相差一个缩放因子），我们需要对 f 进行适当归一化。通过在 X 上选取一个标记点 p_1，我们可以将 f 归一化，使得 $f(p_1) = \infty$。由此可将 f 确定到一个缩放因子。

用周期刻画恰当微分。若且唯若亚纯微分 ω on$X$ 的所有绝对周期 $\int_\gamma \omega$ for $\gamma \in H^1(X \setminus P(\omega); \mathbb{Z})$ 都消失，该微分才是恰当微分，其中 $P(\omega)$ 表示 ω 的极点集合。在这种情况下，有理函数由 $f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega$ 给出，其中可任意选取基点 x_0，以及一条从 x_0 到 x 的路径。后文将看到，绝对周期消失可描述为亚纯微分分层上一个向量丛截面的零点轨迹，这将构成我们计算的基础。

现在我们讨论如何根据一个有理函数的恰当微分确定其分歧。 f 的分歧重数由 df的零点和极点的阶数决定。特别地，我们有

$$\operatorname{mult}_p f = \begin{cases} \operatorname{ord}_p df + 1 & \text{if } f(p) \neq \infty, \\ -\operatorname{ord}_p df - 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

一个分歧型 $\lambda = (d; \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$由一个自然数 d和一组划分 $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,l(\lambda_i)})$组成，并满足黎曼-赫尔维茨条件。

$$\sum_{i,j} (\lambda_{i,j} - 1) = 2d + 2g(X) - 2.$$

带有有理函数 f且次数为 d的标记曲线（X，$Q = (q_{i,j})$ f）称为具有分歧型 λ，如果在所有标记点处都有 mult$_{q_{i,j}} f = \lambda_{i,j}$，并且如果两个点$q_{i,j}$，$q_{i,k}$对应于同一个分拆，则它们位于 f的同一个纤维中，即 $f(q_{i,j}) = f(q_{i,j})$。用 df 的周期来表示，这意味着

$$\int_{q_{i,j}}^{q_{i,k}} df = 0.$$

此处的积分是在 X 上沿连接 $q_{i,j}$ 与 $q_{i,k}$ 的任意路径进行的，并且与所选择的路径无关，因为我们已经知道 df 的所有绝对周期均为零。

2.2. 恰当微分分层。 转而考虑恰当微分，具有给定分歧型 λ 的有理函数可以用具有指定阶数和零点的亚纯微分来描述,–并附加对某些周期的线性约束。

我们令 μ 为一个具有分歧型 λ的精确微分的零点和极点阶数元组。一般来说，由于选择 f 的一个极点，会存在歧义。不过，我们始终假设第一个分拆 λ_1 对应于 f 的极点。按照这一约定，λ 唯一确定一个分拆 μ，我们称之为与之相关联的分拆 λ。例如

如果我们考虑超椭圆曲线，则分歧型为 $\lambda = (2^{2g+2})$，相应的分拆为 $\mu = (-3, 1^{2g+1})$，其中我们使用指数记法来表示重复项。

现在我们的目标是为恰当微分定义模空间。分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 参数化由带标记黎曼曲面 X（亏格为 g）以及亚纯微分 ω 组成的元组 $(X, Q = (q_1, \dots, q_n)\ \omega)$，其中微分在 p_i 处的消失阶为 μ_i。大多数时候，我们只考虑相差一个缩放因子的微分，它们由射影化分层 $\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{H}(\mu) / \mathbb{C}^*$ 参数化。恰当微分分层

$$\mathrm{Exc}\,(\mu) = \left\{ (X, \omega) \,:\, \int_\gamma \omega = 0 \text{ for all } \gamma \in H_1(X \setminus P(\omega); \mathbb{Z}) \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mu)$$

是射影化分层的余维为 $2g + |P(\omega)| - 1$ 的子簇。

$\mathrm{Exc}\,(\mu)$ 中的微分是恰当微分，且具有指定的分歧重数。为了进一步指定分歧型 λ，我们还需要转向一个更小的子簇，并考虑哪些点位于同一纤维中。我们将其记为 $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$，其中 $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,l(\lambda_i)})$。有时，重新对标记点 $Q = (q_1, \dots, q_n)$ 编号会很有用，将其记为 $(q_{1,1}, \dots, q_{1,l(\lambda_1)} \cdots, q_{m,1}, \dots, q_{m,l(\lambda_m)})$，使得标记点 $q_{i,j}$ 对应于分拆 λ_i 中的项 $\lambda_{i,j}$。我们称 $(q_{i,1}, \dots, q_{i,l(i)})$ 是位于 λ 的第 i 个纤维中的标记点。

现在我们可以定义 $\underline{\lambda}$-恰当微分的分层

$$\mathrm{Exc}_{\underline{\lambda}} := \left\{ (X, Q, \omega) \in \mathrm{Exc}\,(\mu) \,:\, \int_{q_{i,j}}^{q_{j,k}} \omega = 0 \text{ for all } 1 \le i \le m, 1 \le j \le l(\lambda_i) \right\}.$$

$\mathrm{Exc}_{\underline{\lambda}}$ 在分层中的预期余维是

$$d_{\underline{\lambda}} = 2g + P(\omega) - 1 + \sum_{i=1}^{m} (l(\lambda_i) - 1)\,.$$

3. Local systems on strata

在分层 $\mathcal{P}(\mu)$ 上，相对同调群 $H_1(X \setminus P(\omega)\ Z(\omega); \mathbb{C})$ 组装成一个$\mathbb{C}$-局部系统。此处，$P(\omega)$和 $Z(\omega)$分别表示 ω的极点集和零点集。我们令 $\mathcal{H}$ 为与之关联的平坦向量丛，它带有 求值态射

$$\mathrm{ev} : \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{H} \mapsto \mathcal{O},\ \omega \otimes \alpha \mapsto \int_\alpha \omega.$$

我们的目标是研究由周期 $\int_\alpha \omega$ 的消失所定义的分层子簇。为了将这一思想形式化，设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ 为一个子局部系统。在本文及下文中，我们不区分局部系统与其对应的平坦向量丛。令

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{V}} : \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{O}$$

是求值截面在 $\mathcal{V}$ 中闭路上的限制，然后将 湮灭子$\mathcal{V}$ 定义为

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V}) := Z(\mathrm{ev}_{\mathcal{V}}) = \left\{ (X, \omega) \in \mathcal{P}(\mu) : \int_\alpha \omega = 0 \text{ for all } \alpha \in \mathcal{V}_{(X,\omega)} \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mu).$$

零点轨迹 $\mathrm{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})$ 要么为空，要么在分层 $\mathcal{P}(\mu)$ 中具有余维 $\mathrm{rank}(\mathcal{V})$。例如，可以在局部周期坐标中验证这一点。

接下来我们将主要关注局部系统 $\mathcal{V}$ 的三个例子，现逐一讨论。

第一个是绝对同调的局部系统 $\mathcal{H}_{abs}$，其在点 $(X,\ \omega)$ 上方的纤维为$H_1(X \setminus P(\omega);\ \mathbb{C})$。零点轨迹 $\mathrm{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{H}_{\mathrm{abs}})$ 与恰当微分的分层 $\mathrm{Exc}\ (\mu)$ 重合。$\mathrm{Exc}\ (\mu)$ 的预期余维为 $\mathrm{rank}(\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}) = 2g + |P(\omega)| - 1$。

若要将有理函数的分歧型纳入考虑，就需要要求某些相对周期为零，因此需要转而考虑一个包含$\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$的局部系统。这将是我们的第二个例子。给定一个分歧型 λ，我们定义

$$H_{\underline{\lambda}}(X,\omega) \subseteq H_1(X \setminus P(\omega), Z(\omega);\mathbb{C})$$

为包含绝对同调 $H_1(X \setminus P(\omega);\ \mathbb{C})$ 以及所有满足两端点 $q,\ q'$ 位于同一纤维中的路径的最小子空间；也就是说，存在 $i,\ k,\ k'$ 使得$q = q_{i,\ k},\ q' = q_{i,\ k'}$。特别地，我们有 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}} \subseteq \mathcal{H}_\lambda \subseteq \mathcal{H}$。$\mathcal{H}_\lambda$ 的湮灭子由λ-恰当微分构成，换言之

$$\mathrm{Ann}(\mathcal{H}_{\underline{\lambda}}) = \mathrm{Exc}_{\underline{\lambda}}\,.$$

此情形下的预期余维为 $2g + |P(\omega)| - 1 + \sum_{i=1}^{m} (l(\lambda_i) - 1)$，这里回顾一下，$l(\lambda_i)$ 是分拆 λ_i 中各部分的数量。

我们将考虑的最后一个例子与留数之间的线性关系有关。首先考虑局部系统 $\mathcal{H}_{\mathrm{res}}$，其纤维为 $\ker(H_1(X \setminus P(\omega);\ \mathbb{C}) \to H_1(X;\ \mathbb{C}))$。向量丛 $\mathcal{H}_{\mathrm{res}}$ 是平凡的；对于纤维中的任意子空间 $R \subseteq (\mathcal{H}_{\mathrm{res}})^{(X,\omega)}$，我们考虑相应的向量丛$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{res}}$。$\mathcal{R}$ 的湮灭子由所有留数满足 $\mathcal{R}$ 给出的线性方程的微分组成。一个特殊情形是 $\mathcal{R} = \mathcal{H}_{\mathrm{res}}$，它给出无留数微分分层 $\mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}}$。

任意局部系统 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ 的湮灭子都是一个向量丛的零点轨迹，并且具有预期余维。由此我们可以确定 $\mathrm{Ann}(\mathcal{V})$ 的类为 $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{O}(-1)$ 的最高陈类。根据陈-魏尔理论，平坦向量丛的陈类在上同调中消失。对于例子 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}},\ \mathcal{H}_\lambda,\ \mathcal{R}$，我们将在下文重点讨论这些例子；在周环中同样成立。

定义 3.1。一个局部系统 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ 在 $\mathcal{P}(\mu)$ 上，如果 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{res}}$ 或$\mathcal{H}_{\mathrm{abs}} \subseteq \mathcal{V}$，则称为全局定义的。

特别地，$\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}, \mathcal{H}_\lambda, \mathcal{R}$都是全局定义的局部系统。

注记 3.2。如果 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{res}}$，那么 $\mathcal{V}$ 是一个平凡的局部系统。另一方面，如果 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}} \subseteq \mathcal{V}$，那么 $\dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}}$ 是平凡的。

引理 3.3。设 $\mathcal{V}$ 为任意全局定义的局部系统。则 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{P}(\mu)$ 的周环中陈类消失。

证明。 首先，如果该向量丛是平凡的，则其陈类为零。否则，我们可以将 $\mathcal{V}$ 写成一个扩张

$$0 \to \mathcal{H}_{\mathrm{abs}} \to \mathcal{V} \to \mathcal{O}^{n+1} \to 0$$

由平凡丛 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$ 给出。

类似地， $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$ 是 $\mathcal{H}_{\mathrm{res}}$ 的一个扩张，其向量丛为 $\mathcal{H}_1$ ，纤维为 $H_1(X;\ \mathbb{C})$，并由平凡丛扩张而成。最后，向量丛 $\mathcal{H}_1$ 处于一个短正合序列中

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{E}^* \to 0,$$

其中 $\mathcal{E}$ 是$\mathcal{M}_{g,\ n}$上的霍奇丛。由 Mumford 的计算 [Mum83]可得，在$\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的周环中，恒等式 $\mathsf{ch}(\mathcal{H}_1) = \mathsf{ch}(E) + \mathsf{ch}(E^*) = 0$ 成立。因此，该恒等式对拉回到 $\mathcal{P}(\mu)$的情形也成立。□

命题 3.4。 假设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ 是一个全局定义的局部系统。那么，$\mathrm{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})$ 在 $\mathcal{P}(\mu)$ 的周环中的类由下式给出

$$[\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})] = c_1(\mathcal{O}(1))^r \in \mathrm{CH}^r(\mathcal{P}(\mu)),$$

其中 $r :=$ 秩$\mathcal{V}$。

证明。 由于 $\mathsf{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})$ 是一个截面的零点轨迹，其截面属于 $\mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1)\otimes\mathcal{V}, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{V}^*\otimes\mathcal{O}(1)$，且其余维符合预期，因此类 $[\mathsf{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})]$ agrees 与最高陈类 $c_r(\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{O}(1))$ 一致。因此

$$[\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})] = c_r(\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(1)^r,$$

其中，在最后一个等式中，我们用到了 $\mathcal{V}$ 的陈类为零。 □

3.1. **多尺度微分的模空间**。多尺度微分的模空间 $\mathcal{P}(\mu)$ 在 [BCGGM19b] 中构造，并紧化了射影化分层 $\underline{\mathcal{P}}(\mu)$。空间 $\mathcal{P}(\mu)$ 是一个光滑射影 Deligne-Mumford 丛，且边界是一个正规交叉除子。此外，边界 $\mathcal{P}(\mu) \setminus \mathcal{P}(\mu)$ 按层级图分层，下面回顾这一概念。

3.2. **层级图**。 层级图是一个稳定图，其顶点带有全序（允许相等），并且每条半边都带有一个整数，即消失阶；此外，每条边还带有一个额外的非负整数，称为该边处的棘 e。我们的记法与 [BCGGM19b], 略有不同，后者将上述对象称为“增强层级图”。本文只讨论增强层级图，因此简称其为层级图。我们沿用 [CMZ20a] 的约定，将 Γ 的层编为负整数 $\{0, -1, \ldots, -L\}$。第 i个层级通道是位于第 $-i$ 层上方、第 $-i+1$ 层下方的一条水平线，因此层级通道以 $\{1, \ldots, L\}$为索引。连接同一层上顶点的边称为水平边，否则称为竖直边。不含水平边的层级图称为非水平的。

我们将LG表示为所有层级图的同构类集合，并将LG_k 表示为余维 k 层级图的子集。我们还将 $\mathsf{BIC} \subseteq \mathsf{LG}_1$ 表示为非水平两层级图的同构类集合。对于$\Gamma \in \mathsf{BIC}$，我们还定义因子 ℓ_Γ 为所有棱枝的最小公倍数。

3.3. **() 的边界** $\mathcal{P}(\mu)$。 $\mathcal{P}(\mu)$ 的边界由层级图分层。对应于层级图 Γ 的边界分层 D_Γ 的一般点由与 Γ 相容的扭微分（X， Q， ω）组成。 D_{P} 的余维是层级跃迁的数量，即层级 -1的数量，加上水平边的数量，因此等于层级图的余维。关于 $\mathcal{P}(\mu)$的一个特征，最先在 [CMZ20a]，中被注意到，即非水平边界 $\cup_{\Gamma\in\mathrm{BIC}} D_\Gamma$ 是一个简单的正规交叉除子。

3.4. **典范环**。

约定 3.5. 本文中的所有周环均取有理系数。

重言环 $\mathrm{R}^*(\mathcal{M}_{g,n})$ 是周环中对遗忘映射和粘合映射封闭的最小子环。$\mathrm{R}^*(\mathcal{M}_{g,n})$ 的一组加法生成元由带标记分层类构成，其定义如下。给定一个稳定图 Γset$\mathcal{M}_\Gamma = \prod \mathcal{M}_{g_v,n_v}$ 其中 g_v 和 n_v 分别是与 v 相邻的亏格和半边数。对于每个由 ψ- 类构成的多项式 α （取自 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_\Gamma)$），带标记分层类$[\Gamma,\alpha]$ 定义为

$$[\Gamma,\alpha] := \zeta_{\Gamma,*}\alpha,$$

其中 $\zeta_\Gamma : \mathcal{M}_\Gamma \to \mathcal{M}_{g,n}$ 是粘合态射。

多尺度微分模空间 $\mathcal{P}(\mu)$的重言环首次由 [CMZ20a] 引入，其描述方式类似。给定一个层级图 Γ ，对每个顶点 $v \in V(\Gamma)$， 都有相应的划分 μ_v 。此外，每个层级还具有由水平节点处的匹配留数条件和全局留数条件导出的留数条件 $\mathfrak{R}_i$ 。由此我们可以构造非连通分层

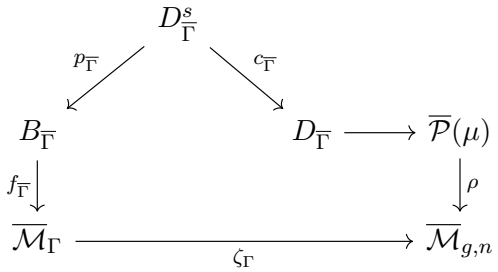
$$\mathcal{H}(\mu_{[i]}) := \prod_{\ell(v)=i} \mathcal{H}(\mu_v)$$

并且广义分层是满足 $\mathfrak{R}_i$中的所有留数条件的子空间 $\mathcal{H}(\mu_{[i]})^{\mathfrak{R}_i} \subseteq \mathcal{H}(\mu_{[i]})$。射影化非连通分层 $\mathcal{P}(\mu_{[i]})^{\mathfrak{R}_i}$ 是关于对角 $\mathbb{C}^*$-作用的商。正如 [CMZ20a,命题4.2], 中所述，多尺度微分的构造也可以应用于广义分层，从而得到紧化 $B_\Gamma^{[i]} := \mathbb{P}\,\Xi\mathcal{M}_{g_{[i]},\ n_{[i]}}(\mu_{[i]})$ of$\mathcal{P}(\mu_{[i]})^{\mathfrak{R}_i}$。于是我们设

$$B_{\overline{\Gamma}} = \prod_{i=-L}^{0} B_{\overline{\Gamma}}^{[i]}.$$

乘积 B_Γ 附带一个遗忘映射 $f_\Gamma : B_\Gamma \to \mathcal{M}_\Gamma$，其中 Γ 是 $\overline{\Gamma}$的底层稳定图。在 [CMZ20a]中，作者构造了一个交换图

(3.1)



其中 c_Γ 和 p_Γ 是有限映射，且 D^s_Γ 是科恩–麦考利。重言环 $\mathrm{R}^*(\mathcal{P}(\mu))$ 是 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{P}(\mu))$ 的最小子环，包含所有广义分层的基本类，并且在对所有非水平层级图的拼接映射 $c_{\Gamma,\ *}p^*_\Gamma$ 作用下保持稳定。[CMZ20a 定理 1.5] 证明，$R^*(B)$ 的一个加法生成集由以下元素给出

$$c_{\Gamma,*}p^*_\Gamma f^*_\Gamma \alpha,$$

其中 $\alpha \in \mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_\Gamma)$ 是一个由 ψ-类构成的多项式，而 Γ 遍历所有非水平层级图。

备注 3.6. 在 [CMZ20a 第 8] 节中，构造了各种重言环。本文仅考虑非水平版本，即（同上文）这些子环中最小的一个。

命题 3.7. 遗忘映射 $\rho : \mathcal{P}(\mu) \to \mathcal{M}_{g,n}$ 保重言环不变，即

$$\rho_* \,\mathrm{R}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu)) \subseteq \mathrm{R}^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

证明. 由于 $\mathrm{R}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu))$ 由形如 $c_{\Gamma,*}p^*_\Gamma f^*_\Gamma \alpha$ 的类生成，因此只需证明

$$\rho_* c_{\Gamma,*}p^*_\Gamma f^*_\Gamma \alpha$$

是陈类。这由等式 (3.1) 的交换性以及分层类是陈类这一事实得出 [BHPSS21]。□

出于维数方面的原因，我们强调，这个包含映射一般是严格的。

3.5. **剖面与边界分层**。广义分层 B 的边界自然地按层级图分层，但为了使交理论具有更好的性质，我们将以稍有不同的方式组织边界分层。非水平双层图的集合带有一个偏序，见 [CMZ20a，第 5]，节；现回顾如下。给定任意层级图 Λ，我们定义 $\delta_i(\Lambda)$ 为如下双层图：将除跨越第 i 个层级通道的边以外的所有边平滑后得到的图。设 $\Gamma, \Gamma' \in \mathrm{BIC}$ 是两个不同的非水平双层图。若存在一个非水平三层图 Λ，使得 $\delta_1(\Lambda) = \Gamma, \delta_2(\Lambda) = \Gamma'$，则我们称 $\Gamma \succ \Gamma'$。由 [CMZ20a，命题 5.1] 可知，这一定义是良定的。

剖面 $\mathrm{P} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ 是由非水平双层图构成的有序元组，其排列满足 $\Gamma_i \succ \Gamma_{i+1}$。我们称 $L(\mathrm{P}) := k + 1$ 为 P 的层数，并定义因子 $\ell_\mathrm{P} := \prod_{i=1}^k \ell_{\Gamma_k}$，其中我们回顾一下，$\ell_{\Gamma_k}$ 是 Γ_k 的所有棘的乘积。B 的所有剖面组成的集合记为 $\Sigma(B)$。每个 $(k+1)$-层级图 Λ 都关联一个剖面 $\delta(\Lambda) = (\delta_1(\Lambda), \ldots, \delta_k(\Lambda))$。

对于一个非水平的两层层级图 Γ，我们通常写作 Γ 而不是 (Γ)。空剖面 $\star$ 对应于唯一的、只有一个顶点的层级图。

与剖面相关联的边界分层是

$$D_\mathrm{P} = \bigcup_{\Lambda\,:\,\delta(\Lambda)=\mathrm{P}} D_\Lambda.$$

D_{P} 的余维是 $L(\mathrm{P})-1$。 [CMZ20a] 中证明了，对于一个剖面 $\mathrm{P}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$，有 $D_{\mathrm{P}}=\cap_{i=1}^{k} D_{\Gamma_i}$。特别地，$D_{\mathrm{P}}$ 是余维为 i 的完全交，并且 $[D_{\mathrm{P}}]=\prod_{i=1}^{k}[D_{\Gamma_i}]\in \mathrm{R}^*(B)$。

给定两个剖面 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$，若交集 $D_{\mathrm{P}_1}\cap D_{\mathrm{P}_2}$非空，则称 P_1 和 P_2 可比较；对于两个可比较的剖面，我们将和 $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$ 定义为 $D_{\mathrm{P}_1}\cap D_{\mathrm{P}_2}$中某个（或等价地，任意一个）层级图的剖面。若 $\mathrm{P}_1=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ 和 $\mathrm{P}_2=(\Delta_1,\dots,\Delta_l)$ 的集合 $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_k\}$和 $\{\Delta_1,\dots,\Delta_l\}$ 不相交，且 P_1,P_2 可比较，则称它们互补。在这种情况下，我们有

$$\ell_{\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2}=\ell_{\mathrm{P}_1}\ell_{\mathrm{P}_2}.$$

若 P_1,P_2 互补，我们记作 $\mathrm{P}_1\oplus\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$，并称 $\mathrm{P}_1\oplus\mathrm{P}_2$ 是直和。例如，若 $\mathrm{P}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$，则 $\mathrm{P}=\bigoplus_{i=1}^{k}\Gamma_i$。若 $\mathrm{Q}=\mathrm{P}_1\oplus\mathrm{P}_2$是直和，则交

$$D_{\mathrm{Q}}=D_{\mathrm{P}_1}\cap D_{\mathrm{P}_2}$$

是一个横截交，特别是$[D_{\mathrm{Q}}]=[D_{\mathrm{P}_1}]\cdot[D_{\mathrm{P}_2}]\in \mathrm{divR}^*(B)$.

我们称 P 退化为 P' 或 P' 是 P 的一个退化，如果 $D_{\mathrm{P}'}\subseteq D_{\mathrm{P}}$。这等价于能够对某个剖面 R写成 $\mathrm{P}'=\mathrm{P}\oplus\mathrm{R}$。我们也称 P 是 P'的一个反退化，并记作 $\mathrm{P}\rightsquigarrow\mathrm{P}'$。对于一个层级图 Λ，如果 Λ 是剖面P'的一个退化，则称其为 P'的退化，其中 Λ的剖面 $\mathrm{P}(\Lambda)$ 是 P'的退化。

类似地，如果 P' 是 P 按分裂层级 i 退化得到的，我们称之为 P 的退化，此时 $\mathrm{P}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$ 且 $\mathrm{P}'=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_{-i},\Delta_1,\dots,\Delta_k,\Gamma_{-i+1},\dots,\Gamma_n)$。我们令 $\Sigma(\mathrm{P},i)$ 表示所有按分裂层级 i 由 P 退化得到的剖面的集合。

3.6. 除子型重言环。令 B 为一个广义边界分层。我们主要研究的并非整个重言环，而是 除子型重言环$\mathrm{divR}^*(B)$，即由 $\mathrm{R}^*(B)$ 中余维为 1 的类生成的重言环 $\mathrm{R}^*(B)$ 的子环。对我们而言，最重要的除子型类是 ψ-类、边界除子 D_Γ （其中 $\Gamma\in\mathrm{BIC}$），以及重言线丛 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mu)}(-1)$ 的第一陈类 $\xi=c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mu)}(-1))$；该线丛的纤维由微分 ω张成。

命题3.8。 如果广义边界分层 B 不包含简单极点，则 $\mathrm{divR}^*(B)$ 的一个乘法生成集为

$$\xi \text{ and } D_{\overline{\Gamma}} \text{ for } \overline{\Gamma}\in \mathrm{BIC}\,.$$

另一方面，如果 B 包含简单极点，那么 $\mathrm{divR}^*(B)$的一个乘法生成集由 D_Γ 给出，其中 $\Gamma\in\mathrm{BIC}$ 和 ψ-类ψ_j 中的 j 遍历所有标记的简单极点。

证明。 根据 [CMZ20a 定理 1.5]，$\mathrm{divR}^*(B)$ 由 D_Γ 生成，其中$\Gamma\in$ 属于 BIC，且 ψ_j 遍历所有标记点。由 [CMZ20a 命题 8.2] 可知，只要第 j 个标记点不是简单极点，ψ_j 就可以表示为边界除子和 ξ的线性组合。同一关系也表明，如果 B 包含简单极点，那么 ξ 是边界除子的线性组合。□

接下来我们主要关注恰当微分的情形，在这种情况下不会出现单极点。

对于边界分层 D_{P}，我们令 $\mathsf{divR}^*(D_{\mathrm{P}})$ 表示沿包含映射$D_{\mathrm{P}} \hookrightarrow B$对 $\mathsf{divR}^*(B)$ 的拉回。在 D_{P} 上有一族线丛 $\xi^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$，它们由每个层级上的微分 $\omega^{[i]}$ 生成，另见 [CMZ20a，第 4.3] 节。线丛 $\xi^{[0]}{}_{\mathrm{P}}$ 是 ξ 的限制，因此包含在 $\mathsf{divR}^*(D_{\mathrm{P}})$ 中。我们稍后将需要用到这样一个事实：所有线丛 $\xi^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 实际上都是 B 上典范除子型类的拉回。

命题 3.9。 设P 为一个剖面。则

$$\xi_{\mathrm{P}}^{[i]} \in \mathrm{divR}^1(D_{\mathrm{P}})$$

对于 $i = -L(\mathrm{P}) \ldots, 0$。

证明。 固定 $i < 0$ 并令 $\overline{\Gamma} := \delta_{-i}(\mathrm{P})$。那么根据 [CMZ20a，引理 7.6] 我们有

$$\xi_{\mathrm{P}}^{[i]} = j_{\mathrm{P},\overline{\Gamma}}^*(\xi_{\overline{\Gamma}}^{[-1]}),$$

其中 $j_{\mathrm{P},\ \mathrm{F}}$：$D_{\mathrm{P}} \hookrightarrow D_{\overline{\Gamma}}$ 表示包含映射。因此，只需证明两层图 $\Gamma \in$BIC 的情形。此时结论可由 [CMZ20a 引理 7.1] 推出。

$$\ell_{\overline{\Gamma}} j_{\overline{\Gamma}}^*[D_{\overline{\Gamma}}] = \ell_{\overline{\Gamma}} c_1(\mathcal{N}_{D_{\overline{\Gamma}}/B}) = -\xi^{[0]} + \xi^{[-1]} - \sum_{\overline{\Gamma}'} \ell_{\overline{\Gamma}'} j_{\overline{\Gamma}'}^*[D_{\overline{\Gamma}'}]$$

其中求和遍历所有带有 $\Gamma' \succ \Gamma$ 的双层图。 □

3.7. 广义边界分层。 边界分层 D_{P} 是光滑子叠，但我们将不得不考虑边界分层 D_{P}的无穷小增厚。设 $\mathrm{P} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$ 和 $\mathrm{Q} = (\Gamma_{m+1}, \ldots, \Gamma_n)$ 为互补剖面。边界分层 $D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$ 的局部方程为

$$t_{\overline{\Gamma}_1} = \ldots = t_{\overline{\Gamma}_n} = 0,$$

其中 $t_{\overline{\Gamma}_i}$ 是除子 D_{Γ_i} 的横截坐标。

定义 3.10。 我们将广义边界分层$D_{\mathrm{P,Q}}$ 定义为$D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$的加厚，其局部由理想

$$(t_{\overline{\Gamma}_1}, \ldots, t_{\overline{\Gamma}_m}, t_{\overline{\Gamma}_{m+1}}^{\ell_{\overline{\Gamma}_{m+1}}}, \ldots, t_{\overline{\Gamma}_n}^{\ell_{\overline{\Gamma}_n}}).$$

特别地$D_{\mathrm{P},\ \mathrm{Q}}$ 是一个完全交，并且

$$[D_{\mathrm{P,Q}}] = \ell(\mathrm{Q}) \prod_{i=1}^{n} [D_{\overline{\Gamma}_i}] \in \mathrm{divR}^*(B).$$

3.8.比较边界处的上同调。我们的目标是将 $[\mathrm{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})]$ 的计算扩展到 $\mathcal{P}(\mu)$的周环。我们将通过扩展向量丛 $\mathcal{V}$ 和求值截面来实现这一点。作为准备，我们需要一种方法，将某个边界分层 $D_{\mathrm{P}} \subseteq \mathcal{P}(\mu)$中扭微分处的相对同调，与 $\mathcal{P}(\mu)$中附近光滑黎曼曲面处的同调进行比较。这一问题已在 [Ben22],中得到一般性的处理；这里我们只回顾所需的基本概念，并采用适合我们情形的记号。

设 $x = (X, \omega)$ 是与层级图 Λ 相容的扭微分，即 x 位于 $\breve{}$ 的内部 D°_{Λ} ，$\bar{}$并记 X 为稳定曲线 X 的正规化，同时标记所有节点的原像。于是，我们可以按层级对 X 的所有连通分支，以及标记的零点和半边进行分层。令 $X_{[i]}$ 为对应于层级 i 的连通分支的并集，令 $Z_{[i]}$, $P_{[i]}$ 为层级 i的标记点，并将其分类为零点和极点。$\tilde{}$例如， $Z_{[0]}$ 由顶层的所有标记零点，以及顶层上不对应于简单极点的所有节点原像组成。

我们定义 $H_1^{[i]}(X, \omega) := H_1(\tilde{X}_i \setminus \tilde{P}_{[i]}, \tilde{Z}_{[i]}; \mathbb{C})$。从现在起，所有上同调群均取复系数。注意，维数 $\underline{\dim} H_1^{[i]}(X, \omega)$ 仅取决于层级图 Λ。

设 $x' = (\Sigma, \omega') \in \mathcal{P}(\mu)$ 是一个邻近平坦曲面，带有一组简单闭曲线$\{\sigma_e, e \in E(\Lambda)\}$，称为消失圈，使得 $\bar{X}$ 是通过收缩消失圈得到的。在节点之外，我们可以将 X 实现为 Σ 的子曲面，从而将$P = P(\omega)$ $Z = Z(\omega)$视为 Σ的子集。根据相应节点是水平的还是垂直的，可以将消失圈分为水平和垂直 消失圈。

为了将退化过程中的周期与极限扭曲微分的周期联系起来，我们需要比较 Σ 和 X的适当相对同调群。从 Σ 上的相对同调到 X的相对同调存在自然的限制映射，但对于与水平消失圈相交的同调类，需要特别加以注意。我们只使用复系数，但本节中的所有构造也可以用整系数进行。

我们将第0 层的非水平闭路定义为

$$W_{[0]} := \{\gamma \in H_1(\Sigma \setminus P, Z; \mathbb{C}) \mid \langle \gamma, [\sigma_e] \rangle = 0 \text{ for any horizontal node } e \text{ of level } 0\}.$$

这里， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示交数配对

$$H_1(\Sigma \setminus P, Z; \mathbb{C}) \times H_1(\Sigma \setminus Z, P; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

而 $[\sigma_e] \in H_1(\Sigma \setminus Z, P; \mathbb{C})$ 表示相应的上同调类。

在 $W_{[0]}$ 上，每个上同调类都可以表示为若干条简单闭曲线之和，且这些曲线与顶层的所有水平消失圈不相交；随后我们可以将上同调类限制到 $H_1^{[0]}(X, \omega)$。由此得到特化态射

$$\mathrm{sp}_{[0]} : W_{[0]} \to H_1^{[0]}(X, \omega).$$

核 $\ker \mathrm{sp}_{[0]}$ 由可表示为 $X_{[-1]}$ 中的类的同调类构成。我们定义

$$W_{[-1]} := \{\gamma \in H_1(\Sigma \setminus P, Z; \mathbb{C}) \,|\, \langle \gamma, [\sigma_e] \rangle = 0 \text{ for any horizontal node } e \text{ of level } -1\}.$$

在 $W_{[-1]}$ 上，我们现在可以将一个同调类限制到 $X_{[-1]}$ ，从而得到层级 -1中的特化态射

$$\mathrm{sp}_{[-1]} : W_{[-1]} \to H_1^{[-1]}(X, \omega).$$

因此，我们得到一个三步滤链。

$$\{0\} \subseteq W_{[-1]} \subseteq \ker \mathrm{sp}_{[0]} \subseteq W_{[0]} \subseteq H_1(\Sigma \setminus P, Z)$$

带有分次部分

$$W_{[0]}/\ker \mathrm{sp}_{[0]} \simeq H_1^{[0]}(X, \omega),$$
$$W_{[-1]} \simeq H_1^{[-1]}(X, \omega).$$

定义 3.11。 假设 $x = (X,\ \omega)$ 是与层级图Λ相容的扭微分。我们定义

$$\mathcal{V}_{\Lambda,x}^{[0]} := \mathrm{sp}_{[0]}(\mathcal{V}_{x'} \cap W_{[0]}),$$
$$\mathcal{V}_{\Lambda,x}^{[-1]} := \mathrm{sp}_{[-1]}(\mathcal{V}_{x'} \cap W_{[-1]}),$$

其中， $\mathcal{V}_{x'}$ 是 $\mathcal{V}$ 在 x'处的纤维。

空间 $\mathcal{V}_{\Lambda,x}^{[0]}$ 和 $\mathcal{V}_{\Lambda,x}^{[-1]}$ 可解释为当 Σ 退化为 X 时同调类的极限。

到目前为止，我们只处理了具有两个层级的层级图情形，但一切都可以推广到任意剖面 P。在这种情况下，有两个滤子

$$0 \subseteq W_{[-L]} \subseteq \ker \mathrm{sp}_{[-L+1]} \subseteq \ldots \subseteq W_{[-1]} \subseteq \ker \mathrm{sp}_{[0]} \subseteq W_{[0]} \subseteq H_1(\Sigma \setminus P, Z),$$

其中 $\mathrm{sp}_{[i]}$ now 将 $W_{[i]}$ 中的一个上同调类限制到第 i 级子曲面。我们定义

$$\mathcal{V}_{\mathrm{P},x}^{[i]} := \mathrm{sp}_{[i]}(W_{[i]}\mathcal{V}_{x'}).$$

在边界分层 D_{P} 的内部 D_{P}° 上，向量空间 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,x}$ 粘合成一个平坦向量丛 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$。

注记3.12。 边界分层 D_{P} 可能有多个分支，因此理论上 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 在每个分支上的秩可能不同。为说明其秩确实与分支无关，首先注意，对于任意层级图 Λ， $\mathcal{V}_{\Lambda}^{[0]}$ 的秩可以根据$\Gamma_1 = \delta_1(\Lambda)$计算，因为我们只需要知道哪些路径位于第 0 层，哪些路径位于较低层。接下来考虑 $\Gamma_2 := \delta_2(\Lambda)$。 Γ_2 顶层上的路径由 $\mathcal{V}_{\Lambda}^{[0]} \oplus \mathcal{V}_{\Lambda}^{[-1]}$中的所有路径构成，因此 $\mathcal{V}_{\Lambda}^{[-1]}$ 的维数仅取决于 Γ_1 和 Γ_2。由归纳法可知， $\mathcal{V}_{\Lambda}^{[i]}$的维数仅取决于剖面 $\delta(\Lambda) = (\{v25, \ldots, \Gamma_{L(\Lambda-1)}\}$。

4. The class of strata of exact differentials

本节余下部分中，我们固定射影化分层 $\mathcal{P}(\mu)$ 上全局定义的局部系统 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ 。现在我们着手计算 Chow 环中 $\mathcal{P}(\mu)$ 的闭包 Ann($\mathcal{V}$)。我们的目标如下，而定理1.1是其推论。

定理4.1。设 $\mathcal{V}$ 是广义边界分层B上的全局定义局部系统。那么闭包 $[\mathrm{Ann}_B(\mathcal{V})]$ 的类包含于除子型重言环$\mathrm{divR}^*(\mathcal{P}(\mu))$中。此外，该类可以显式计算。

本节的概要如下。我们只讨论分层 $\mathcal{P}(\mu)$，而不讨论广义边界分层，但这一论证可以原样推广到更一般的情形。我们首先将向量丛 $\mathcal{V}$ 和求值截面延拓到 $\mathcal{P}(\mu)$，具体做法是采用 Deligne 延拓 $\mathcal{V}$，如 [CMZ20a，第6节3]所述。延拓后截面的零点轨迹包含 Ann$^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})$，以及若干维数各异的多余分支。这些多余分支可以明确确定为广义边界分层上向量丛的截面的零点轨迹；这些向量丛与原向量丛$\mathcal{V}$类似。由此便可开始递归计算。

4.1. $\mathcal{V}$的 Deligne 延拓。$\mathcal{V}$ 局部系统沿着正规交叉除子 $\mathcal{P}(\mu) \setminus \mathcal{P}(\mu)$具有幺模单值化。在这种情况下, Deligne 延拓 $\overline{\mathcal{V}}$是将 $\mathcal{V}$ 从 $\mathcal{P}(\mu)$延拓到 $\mathcal{P}(\mu)$上的向量丛，并且具有沿边界带正规奇点的联络。我们需要 $\mathcal{V}$的局部描述。通过为边界附近的 $\mathcal{P}(\mu)$选取局部解析坐标系，补集 $\mathcal{P}(\mu) \setminus \mathcal{P}(\mu)$同构于（$\Delta^*$）$^k \times \Delta^l$。令 T_i 为 $\mathcal{V}$的单值化，对应于（Δ^*）^{k}的第 i个生成元。我们有（$I - T_i$）$^2 = 0$，因而 $N_i := -\log T_i = I - T_i$。我们选取基点 $x' \in (\Delta^*)^k \times \Delta^l$并令 $V = \mathcal{V}_{x'}$。任意 $v \in V$ 都可以在 x的一个小邻域内延拓为平坦截面。为了将 v 延拓为整个（Δ^*）$^k \times \Delta^l$ 上的截面，我们需要使 v 在单值化下不变。考虑万有覆盖

$$\pi : \mathbb{H}^k \times \Delta^l \to (\Delta^*)^k \times \Delta^l, (z_1, \ldots, z_k, q_1, \ldots, q_l) \mapsto (e^{2\pi i z_1}, \ldots, e^{2\pi i z_k}, q_1, \ldots, q_l).$$

截面 $e^{2\pi i \sum_{i=1}^k z_i N_i} v$ of $\pi^* \mathcal{V}$具有单值化不变性，因此下降为 v for$\mathcal{V}_{|(\Delta^*)^k \times \Delta^l}$的截面。 – Deligne 延拓 $\mathcal{V}$是 $\mathcal{V}$的唯一延拓, 它在 $\Delta^k \times \Delta^l$上局部由截面 v for $v \in \mathcal{V}_{x'}$平凡化。我们称 v 为循环 v 的 Deligne 延拓，并强调它取决于边界附近$\mathcal{P}(\mu)$的局部坐标的选择。

以下结论已在 [CMZ20a] 中针对局部系统 $\mathcal{H}$ 证明，由限制可得它对任意子局部系统 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ 也成立。

命题 4.2. 求值态射 $\mathrm{ev}_{\mathcal{V}}$： $\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mu)}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mu)}$ 延拓为一个态射

$$\overline{\mathrm{ev}}_{\mathcal{V}} : \overline{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{P}}(\mu)}(-1) \to \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{P}}(\mu)}.$$

设 $x = (X, \omega) \in D^\circ_{\mathrm{P}}$, $x' \in \mathcal{P}(\mu)$ 是一个邻近点，并且 $v \in \mathcal{V}_{x'} \cap W_{[0]}$。那么

$$\overline{\mathrm{ev}}_{\mathcal{V}}(\overline{v} \otimes \omega) = \int_{\mathrm{sp}_{[0]}(v)} \omega.$$

特别地，若 $v \in \mathcal{V}_{x'} \cap W_{[-1]}$，则$\mathrm{ev}_{\mathcal{V}}$ 为零。

由此可知，当且仅当 $\mathcal{V}^{[0]}{}_{\mathrm{P}}\,x$ 中所有闭路上的周期均为零时，求值态射在 x 处恒等为零。

到目前为止，关于向量丛 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 在D_{P}°上的一切都可以重复进行。边界 $D_{\mathrm{P}} \setminus D_{\mathrm{P}}^{\circ}$是一个正规交叉除子，并且 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 以及自然的求值态射

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{P},[i]} : \mathcal{V}_{\mathrm{P}}^{[i]} \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}^{\circ}}(-1) \to \mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}^{\circ}} : \gamma \otimes \omega \mapsto \int_{\gamma} \omega,$$

可通过 Deligne 延拓 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 延拓至 D_{P} 。

命题 4.3. 令 $\mathcal{V}$ 为分层 $\mathcal{P}(\mu)$上的一个全局定义的局部系统。*Deligne* 延拓 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 在周 Chow 群$^*(\overline{D}_{\mathrm{P}})$中具有消失的陈类。

证明。我们首先注意到，在有理上同调中该陈述是直接的，因为 Deligne 延拓带有幂零曲率的联络。为了在周环中证明该陈述，我们首先考虑 $B = \mathcal{P}(\mu)$为一个普通分层且 P为空剖面的情形。在这种情况下， $\mathcal{V}_{\star}^{[0]}$是绝对上同调向量丛的一个平凡丛扩张，而根据 Mumford的计算 [Mum83]关于霍奇丛的陈类，该向量丛具有平凡的陈类。

现在考虑一般情形 D_{P}，只需证明该结论对 D_{P} 的每个连通$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$分支 D_{Λ} 都成立。我们考虑通过标记所有边得到的有限覆盖 D_{Λ}。在 D_{Λ} 上，向量丛 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 是从 $\mathcal{M}_{\Lambda}$ 拉回的 Deligne 延拓；根据 Mumford 的计算，它的陈类仍然为零。□

到目前为止，我们只讨论了射影化分层，但所有局部系统 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$， $\mathcal{R}$， $\mathcal{H}_{\lambda}$都可以用类似方式定义在广义分层 B 的光滑部分上。对于 B 上的任意平坦向量丛 $\mathcal{V}$ ，我们可以在边界分层 D_{P} 的光滑部分上定义 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ ，并利用 Deligne 延拓将其延拓到 D_{P} 。对于全局定义的局部系统，命题 4.3 的计算可推广到这一更一般的情形，并表明对于所有 j， $c_i(\mathcal{V}^{[j]}{}_{\mathrm{P}}) = 0$ 。

4.2. **边界附近的坐标和对数周期**。 利用$\mathcal{H}$ 的 Deligne 延拓，我们可以在某个边界点（X, ω）附近，为某个层级图 Λ构造局部解析（轨形）坐标系 $\mathcal{P}(\mu) \in D_{\Lambda}^{\circ}$ 。

首先假设 Λ 没有水平节点。

我们记 $\omega = (\omega_i)_{i\in 0,\dots,-L(\Gamma)_{\circ}}$–对于每个层级 i，我们选取一组基 $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,l_i})$，作为层级 i的同调 $\mathcal{H}_{\Lambda}^{[i]}$的基。对于 X 上的每个圈 $a_{i,k}$ ，我们令 $a_{i,k}$ 为 Deligne 延拓 $\mathcal{H}$ 上的一个圈，它专化为$a_{i,k\circ}$ 我们还需要层级 i的缩放因子

$$T_{\lfloor i \rfloor} := \prod_{i=1}^{L(\overline{\Lambda})} t_i^{\ell_i},$$

其中 $\ell_i = \ell_{\delta_i(\Lambda)}$–且 t_i 是除子 $D_{\delta_i(\Lambda)}$的横截坐标。

然后，我们通过以下公式定义级别为 i $\alpha_i =$ 的对数周期$(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,l_i})$

$$\alpha_{i,k} = \frac{1}{T_{\lfloor i \rfloor}} \int_{\bar{a}_{i,k}} \Omega,$$

其中 Ω 是微分的万有族。

据 [Ben22] 所示，

$$(t_1, \dots, t_{L(\overline{\Gamma})}, \alpha_0, \dots, \alpha_{L(\overline{\Gamma})})$$

是 $(X,\ \omega)$ 附近的局部坐标系，此外

$$\alpha_{i,k}(X, \omega) = \int_{a_{i,k}} \omega.$$

设 P 是某个剖面，Λ 是一个层级图，且它是 P 的退化。现在我们来描述求值态射

$$\overline{\mathrm{ev}}_{\mathrm{P}}^{[i]} : \overline{\mathcal{V}}_{\mathrm{P}}^{[i]} \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}}(-1) \to \mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}}$$

D_Λ 中某点附近用对数周期表示的情形。

在 $\overline{\Lambda}$，i 层已分裂为层 j、.....、$j-k$，其中某个 j，k，并且我们为 $\mathcal{V}_\Lambda^{[l]}$，$j \geq l \geq j-k$ 选取了一组闭路的基 a_l。为了计算求值态射 $\mathbf{ev}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$，我们需要使用 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 的一个标架。另一方面，为了计算对数周期，我们使用 $\mathcal{V}$ 的一个标架。对于 l 层的闭路 $\overline{a_{l,\ m}}$，在 Deligne 延拓 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}_{\mathrm{P}}$ 上的闭路的不同延拓，仅在低于 l 的层上有所不同，因此 $(X,$ $\omega) \in D_\Lambda^\circ$ 在这两种可能的延拓上的周期相同。

在局部标架中，求值态射 $\mathbf{ev}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 由下式给出

$$(\top_{l,j} \alpha_{l,m})_{j-k \leq l \leq j, m}\,, \tag{4.1}$$

这里我们回顾 $\top_{l,\ j} := \dfrac{T_{\lfloor l \rfloor}}{T_{\lfloor j \rfloor}} = \prod_{s=j-k}^{j} t_s^{\ell_s}$。

扩展到水平节点：水平节点的处理略有不同。对于每个水平节点 e（层级为 i），我们选取一条环路 ρ_e，使其与 e 相交一次，且不与任何其他水平节点相交。通过考虑，我们可以使其几乎具有单值化不变性。

$$\hat{e} = e - \sum_{e' \neq e} \langle \rho_e, \lambda_{e'} \rangle [\lambda_{e'}] \ln(s_{e'})$$

环$\hat{}e$ 仅在 λ_e周围具有单值变换。然后

$$q_e := \exp\left(2\pi i \frac{\int_{\hat{e}} \Omega}{\int_{\lambda_e} \Omega} \right)$$

是一个坐标。（我们的正规化与 [CMZ20a] 略有不同。）

4.3. 求值截面的零点轨迹。接下来的目标是描述求值态射 $\mathrm{ev}_{\mathrm{P},\,[i]}\colon \mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}} \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ 的零点轨迹。为简化记号，我们固定一个射影化分层 $B = \mathcal{P}(\mu)$ 和一个全局定义的平坦向量丛 $\mathcal{V}$。

我们首先需要引入更多空间和无穷小加厚，它们将在计算中出现。我们定义

$$A^{[i]}_{\mathrm{P,Q}} := \overline{\{(X,\omega) \in D^{\circ}_{\mathrm{P,Q}} \,:\, \omega \in \mathrm{Ann}(\mathcal{V}^{[i]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}})\}},$$

其中 $D^{\circ}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 是对应于剖面为 $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ 的微分的开集。这里我们默认通过包含映射 $D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}} \subseteq D_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$将 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$向前推送；我们回顾一下第 3.7 节中的广义边界分层 $D_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$。

若 Q 为空剖面，我们就简单地写作 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$。用这种记号重新表述，我们的主要目标是计算 $A^{[0]}_{\star}$，但事实证明，在递归计算中，我们需要计算所有子空间 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 的类。

空间 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 是 BDG 意义下的线性子簇 [BDG20]。因此，[BDG20，第 4] 节中的描述使我们能够明确描述边界点附近的方程。在我们的情形中，方程尤其简单，因为如果 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 中的一条回路穿过水平节点，相应的消失周期也包含在 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$中。因此，在开部分 $D^{\circ}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 上，若 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 的定义方程由一组周期 $a_1,\ \ldots,\ a_n$的消失给出，那么边界附近的局部方程则由相应的对数周期 $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$给出。现在我们明确描述这些方程。

设 P,Q 为两个互补剖面，并考虑 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P,Q}} \subseteq D_{\mathrm{P,Q}}$。固定某个层级图 Λ 对应的 $(X,\omega)^{\perp} \in D_{\Lambda}$，它是 $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ 的一种退化；令 $I \subseteq \{0,\ldots,-L(\Lambda)\}$ 表示将 Λ 退化到剖面 $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ 时，所有退化为层 i 的 Λ 中各层的集合。我们取 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 为 $\oplus_{j\in I}\mathcal{V}^{[j]}_{\Lambda}$ 的一组基上所有对数周期的集合。那么在 (X,ω) 附近，$A^{[i]}{}_{\mathrm{P,Q}} \subseteq D_{\mathrm{P,Q}}$ 的局部方程为

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{4.2}$$

由于对数周期 α 是局部坐标系的一部分，$A^{[i]}{}_{\mathrm{P,Q}}$ 在 $D_{\mathrm{P,Q}}$ 中正则嵌入。

给定一个子集 $J \subseteq \{0,\ldots,-L(\mathrm{P})\}$。我们还定义

$$A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}} = \cap_{i\in J} A^{[i]}_{\mathrm{P,Q}}.$$

注意，交在 $D_{\mathrm{P,Q}}$ 内是代数横截的（代数横截的定义见定义 A.7）。

如果 Q 非空，则 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 是非约化的，而 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$ 是诱导约化子叠。此外，$A^{[i]}{}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 沿 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$ 具有几何重数 $\ell(\mathrm{Q})$，并且 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ 是正则嵌入的

在 $D_{\mathrm{P,Q}}$ 具有法丛 $\mathcal{N}_{A^{[i]}\ \mathrm{P,Q}/D_{\mathrm{P,Q}}}$。因此我们有

$$[A^{[i]}_{\mathrm{P,Q}}] = \ell(\mathrm{Q})[A^{[i]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}] \in \mathrm{CH}^*(D_{\mathrm{P}}),$$
$$c(\mathcal{N}_{A^{[i]}_{\mathrm{P,Q}}/D_{\mathrm{P,Q}}}) \cap [A^{[i]}_{\mathrm{P,Q}}] = \ell(\mathrm{Q})c(\mathcal{N}_{A^{[i]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}}) \cap [A^{[i]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}] \in \mathrm{CH}^*(A^{[i]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}).$$

稍后我们会注意到，子叠的集合 $A^{[i]}$ P、Q 在交的运算下表现良好。

命题 4.4. 设 P 是一个剖面，Q、R $\in \Sigma(\mathrm{P}\ i)$。假设

$$I \subseteq \{i, \dots, i - L(\mathrm{Q}) + 1\}, J \subseteq \{i, \dots, i - L(\mathrm{R}) + 1\}$$

是子集。那么

$$A^{[I]}_{\mathrm{P,Q}} \cap A^{[J]}_{\mathrm{P,R}} = A^{[K]}_{\mathrm{P,Q+R}}$$

对某个子集 $K \subseteq \{i, \dots, i - L(\mathrm{Q} + \mathrm{R}) + 1\}$成立。

证明。我们有包含关系 $A^{[I]}$P,Q $\cap\, A^{[J]}$P,R$\subseteq D_{\mathrm{P,Q+R}}$。在点 (X, ω) 处，$D_{\mathrm{P,Q+R}}$中 $A^{[I]}$P,Q $\cap\, A^{[J]}$P,R$\subseteq D_{\mathrm{P,Q+R}}$ 的局部定义方程由 $\alpha = 0$ 的对数周期给出，其中 $\mathcal{V}_{\mathrm{P+Q+R}}$ 对应于那些退化到 I中某一层的闭路基；该层在 P +Q +R $\rightsquigarrow$P +Q 下退化，或退化到 J中的某一层；该层在 P+Q +R $\rightsquigarrow$P +R 下退化。若将 K所有这些 P +Q +R 的层组成的集合记为，那么

$$A^{[I]}_{\mathrm{P,Q}} \cap A^{[J]}_{\mathrm{P,R}} = A^{[K]}_{\mathrm{P,Q+R}}.$$

□

Pr命题 4.5。零点轨迹 $Z(\mathrm{evP},i) \subseteq D_{\overline{\mathrm{P}}}$是以下各项的概形论并。

$$Z(\overline{\mathrm{ev}}_{\mathrm{P},i}) = A^{[i]}_{\mathrm{P}} \cup \bigcup_{\overline{\Gamma} \in \Sigma^1(\mathrm{P},i)} A^{[i]}_{\mathrm{P},\overline{\Gamma}},$$

其中我们回顾，$\Sigma^1(\mathrm{P}\ i)$ 是满足以下条件的非水平双层图的集合：Γ 其退化P $\rightsquigarrow$P +$\overline{\Gamma}$ 是通过分裂第 i 层而得到的。

证明。令 $(X,\ \omega) \in D^\circ_\Lambda$ 对于某个层级图 Λ。在 Λ 中，P 的第 i 层已分裂为层j、.....、$j-k$，对于某个 j，k。

我们首先处理 Λ 没有水平节点的情形。为了在局部坐标中计算求值截面，我们选取一个元组 $\alpha = (\alpha_j,\ \dots\dots,\ \alpha_{j-k})$，其中 α_l 是向量丛 $\mathcal{V}^{[l]}_\Lambda$ 的对数周期的一个基。在式 (4.1) 中，我们计算了evP, $_i$的局部方程，因此evP, $_i$ 求值截面的零点轨迹的理想 $\mathcal{I}$ 为

$$\mathcal{I} = (\top_j \alpha_j, \dots, \top_{j-k}\alpha_{j-k}),$$

其中我们设 $\top_l := \dfrac{T_{\lfloor l \rfloor}}{T_{\overline{\lfloor j \rfloor}}} = \prod_{s=j-k}^{j} t_s^{\ell_s}$。该理想可以改写为若干理想的交

$$\mathcal{I} = (\alpha_j, t_{j-1}^{\ell_{j-1}}) \cap (\alpha_j, \alpha_{j-1}, t_{j-2}^{\ell_{j-2}}) \cap \dots \cap (\alpha_j, \dots, \alpha_{j-k-1}, t_{j-k}^{\ell_{j-k}}) \cap (\alpha_j, \dots, \alpha_{j-k}).$$

最后一个理想 $(\alpha_j,\dots,\alpha_{j-k})$ 是 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P,Q}}$ 的理想。其余理想是 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,\Gamma}$ 的定义理想，其中 $\Gamma\in$ 是某个BIC，Γ 的构造如下。固定某个理想 $\mathcal{J}=(\alpha_j,\dots,\alpha_{j-l+1},t_{j-l}^{\ell_{j-l}})$。两层图 Γ 是通过仅保留层 $j-l+1$ 与 $j-l$ 之间的层级通道，并收缩所有其他层而得到的，换言之，$\Gamma=\delta_{l-j+1}(\Lambda)$。将 $\mathcal{J}$ 与式 (4.2) 中 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,\Gamma}\subseteq D_{\mathrm{P}}$ 的局部定义方程进行比较，可知这些理想相同。

现在我们讨论剩下的情形，即 Λ 有水平节点。和之前一样，令 $I=\{j,\dots,j-k\}$ 为退化到第 i 层的各层。首先注意，若 Λ 在不包含于 I的某一层 l 上有水平节点，我们可以将第 j 层光滑化，同时仍留在$\mathcal{I}$的零点轨迹中。我们还断言，Λ 不可能在第 j层上有水平节点 e。为此，注意消失周期 λ_e 具有非零周期，且包含于 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$中，因为我们假设 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 是一个全局定义的向量丛。因此，求值态射在第 j层上不可能为零。剩下的情形是，Λ 有一个水平节点 e，它包含于 $I\setminus\{j\}$中的某一层。在这种情形下，ev_i 中涉及水平节点 e 的所有周期都乘以某个缩放因子 $t_l^{\ell_k}$。因此，我们可以将该水平节点光滑化，同时仍留在 $Z(\mathsf{ev}^{[i]}{}_{\mathrm{P}})$中。由此，我们将问题归结为非水平层级图的情形。□

4.4. 留数子空间。现在我们可以快速证明命题1.5。考虑留数映射

$$\mathrm{Res}:\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mu)}(-1)\to\mathcal{O}^r_{\mathcal{P}(\mu)},$$

其中 r 是极点的数量。设 $W\subseteq\mathcal{O}^r$ 为一个子丛。留数子空间 $Z\subseteq\mathcal{P}(\mu)$ 是复合映射 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mu)}(-1)\to\mathcal{O}^r_{\mathcal{P}(\mu)}\to\mathcal{O}^r_{\mathcal{P}(\mu)}/W$ 的零点轨迹的闭包。因此，Z 中的一般点由留数包含于 W 的微分组成。

我们也可以对偶地通过周期的消失来描述留数子空间。为此，令$V=(\mathcal{O}^r/W)^*$满足 $\mathsf{Ann}(V)=W$。回顾由环绕标记极点的小回路生成的平凡局部系统 $\mathcal{H}_{\mathrm{res}}$，并令 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{H}_{\mathrm{res}}$ 为对应于 V 的子局部系统。这里，V 中的任意元素都定义了留数之间的一个线性方程；我们将其视为上同调对偶空间中的元素，因而也视为一个相对同调类。于是，$\mathcal{V}$ 是分层上的全局定义局部系统，并且 $Z=\mathsf{Ann}^{\mathcal{P}(\mu)}(\mathcal{V})$。我们称 Z 为由 V定义的留数子空间。

设 $k=\dim V$，并选取一个完全旗

$$\{0\}=V_0\subsetneq V_1\subsetneq\ldots\subsetneq V_k=V.$$

这将诱导出一个子丛旗 $\mathcal{V}_\bullet$：$\mathcal{V}_0\subsetneq\mathcal{V}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathcal{V}_k=\mathcal{V}$。

命题4.6. 设 Z 是由一个 k 维线性子空间$V\subseteq\mathbb{C}^r$ 定义的留数子空间。Z 在 $\mathcal{P}(\mu)$ 的周环中的类为

$$[Z]=(-1)^k\prod_{i=1}^{k}\left(\xi+\sum_{\overline{\Gamma}\in W_i(\mathcal{V}_\bullet)}\ell_{\overline{\Gamma}}D_{\overline{\Gamma}}\right)\in\mathrm{divR}^k(\overline{\mathcal{P}}(\mu)),$$

其中 $W_i(\mathcal{V}_\bullet)\subseteq$BIC 是所有非水平双层图 Γ 的集合，且限制 $(\mathcal{V}_i)^{[0]}_{\Gamma}=(\mathcal{V}_{i-1})^{[0]}_{\Gamma}$一致。

证明。我们通过令 $Z_i = \mathrm{Ann}_{\mathcal{P}(\mu)} \mathcal{V}_i$ 来定义一列子空间。特别地，我们有$\mathcal{P}(\mu) = Z_0$，$Z = Z_r$。请注意，$Z_i \subseteq Z_{i-1}$ 是一个除子，因为它等于 $(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1})|_{Z_{i-1}\cap\mathcal{P}(\mu)}$ 的湮灭子的闭包。

[CMZ20a 中的命题 8.3]（其论证与 [Sau19 中的命题 7.6]非常相近）所述论证，仅针对由全局留数条件诱导的特殊形式的线性子空间 $V \subseteq \mathbb{C}^r$ 进行了陈述，但可以加以修改，以证明

$$[Z_i] = -(\xi + \sum_{\overline{\Gamma}\in W_{i-1}} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}}) \in \mathrm{CH}^1(Z_{i-1}).$$

为修改该论证，我们注意到求值截面 $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1} \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ 以重数一在 Z_i 上消失，这可在周期坐标中看出。此外，当且仅当 V_i 中的所有留数都位于 D_Γ的较低层级上时，它才会在边界除子 $D_\Gamma \cap Z_{i-1}$ 上恒等于零，至少在模 $(\mathcal{V}_{i-1})^{[0]}_\Gamma$ 的意义下如此。在较低层级上，多尺度微分的普适族由微分 $t^{\ell_\Gamma}\omega$ 给出，因此底层中一个标记点的留数以重数 ℓ_Γ消失。现在通过递归地使用推拉即可完成证明。□

5. The arrangement of exact differentials

在本节余下部分，我们固定一个在广义分层B 上全局定义的局部系统 $\mathcal{V}$，以及一个剖面 P 和层级 i。我们的目标是计算 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 的类。

我们按照 BIC 上偏序 $\succ$ 的顺序排列所有非水平双层图 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \Sigma^1(\mathrm{P}\ i)$。回顾命题 4.5 中 $\Sigma^1(\mathrm{P}\ i)$ 的定义。随后，我们在 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,\Gamma_1}, \dots, A^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,\Gamma_n}$ 中迭代地对 B 进行爆破。在最终的爆破空间 $\widetilde{Z}$ 上将有一个向量丛 $\mathcal{E}$ 以及一个正则截面，其零点轨迹为广义变换和法丛来表示 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 的类及其法丛的陈类。随后，我们对 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,\Gamma_j}$ 和全局定义的向量丛 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}+\Gamma_j}$ 重复这一过程。每一步中，底层边界分层 D_{P} 的余维都会增加，因此这一过程最终必将终止，从而使我们能够递归地计算类 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$。

在本节剩余部分，我们将随时使用附录中的定义和陈述。

5.1. 爆破构造。我们从 Z的显式构造开始。现在记 $Z = B$。为简便起见，令 $W_k := A^{[i]}{}_{\mathrm{P}\,\Gamma_k}$ 以及 $A := A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$，$\mathsf{ev} = \mathsf{ev}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$。随后我们定义第一次爆破 $\widetilde{Z}_1 := \mathrm{Bl}_{W_1} Z$。之后，对于 $i > 1$和 $\widetilde{W}_{(1)\,1}$，令 $\widetilde{W}_i^{(1)}$ 为 W_i 的严格变换，并令其为例外除子。定义第二次爆破 $\widetilde{Z}_2 := \mathrm{Bl}_{\widetilde{W}_2^{(1)}} \widetilde{Z}_1$。然后我们递归进行。如果我们已经构造出 $\widetilde{Z}_i$，就令 $\widetilde{W}_j^{(i)}$ 为 W_j 关于 $j > i$ 和 $\widetilde{j}^{(i)}$，$j \le i$ 的例外除子的拉回的迭代严格变换。随后，我们定义第（$i+1$）次爆破为

$$\widetilde{Z}_{i+1} := \mathrm{Bl}_{\widetilde{W}_{i+1}^{(i)}} \widetilde{Z}_i.$$

~ ~我们记 $Z := Z_n$ 为最终爆破。

回顾一下，在 Z 上我们有向量丛 $\mathcal{E} := \left(\mathcal{V}^{[i]\,\mathrm{P}}\right)^* \otimes \mathcal{O}_Z^{[i]}$ (1) 和求值态射 $\mathsf{ev}: \mathcal{E}^* \to \mathcal{O}_Z$，我们将其视为 $\mathcal{E}$ 的一个全局截面。我们可以将 $\mathcal{E}$ 和 ev 拉回到所有 ~ 部分爆破 Z_i 上，并通常在记号中省略拉回。由于 ev 在 A_{P,Γ_1} 上消失，拉回后的截面在例外除子 $\widetilde{W}^{(1)\,1}$ 上以某个重数 $m(\Gamma_1)$ 消失。将 ev 除以 $\widetilde{W}_1^{(1)}$ 的定义方程，我们得到向量丛 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(\widetilde{W}_1^{(1)})^{\otimes -m(\Gamma_1)}$ 的一个截面 $\tilde{\mathsf{ev}}_1$。

我们现在断言

$$Z(\tilde{\mathrm{ev}}_1) = \widetilde{A}^{(1)} \cup_{j\geq 2} \widetilde{W}_j^{(1)}.$$

特别地，我们移除了一个例外分支。

这将作为命题 5.1 的一部分加以证明。从这里开始，我们进行归纳。现在我们对 $\widetilde{W}_2^{(1)}$ 进行爆破，将 $\tilde{\mathsf{ev}}_1$ 的拉回除以例外除子的定义方程，从而得到 $\tilde{\mathsf{ev}}_2$ 在 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(\widetilde{W}_{(2)\,1})^{\otimes -m(\Gamma_1)} \otimes \mathcal{O}(\widetilde{W}_2^{(2)})^{\otimes -m(\Gamma_2)}$</style}上的一个截面。于是，$\tilde{\mathsf{ev}}_2$ 的零点轨迹将为

$$Z(\tilde{\mathrm{ev}}_2) = \widetilde{A}^{(2)} \cup_{j\geq 3} \widetilde{W}_j^{(2)}.$$

因此，在最后一次爆破之后，我们将构造出一个 $\tilde{\mathsf{ev}} = \tilde{\mathsf{ev}}_n$ 的截面，该截面属于

$$\mathcal{E} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{O}(\widetilde{W}_i)^{\otimes -m(\Gamma_i)}$$

其零点轨迹为

$$Z(\tilde{\mathrm{ev}}) = \widetilde{A}$$

$A = A^{[i]\,\mathrm{P}}$ 的严格变换。由于 $\operatorname{codim}_{\widetilde{Z}} \widetilde{A} = \operatorname{rank} \mathcal{E}$ 具有预期的余维，~截面 $\tilde{\mathsf{ev}}$ 是正则的，因此我们可以计算 $[A]$ 的类以及 ~的陈类，其中 A是其法丛。所有这些信息都总结在总陈类 $P_{\widetilde{A}/\widetilde{Z}}$中（见定义 A.9）。

~**命题 5.1**。 在最终的爆破 Z 上，我们有

$$P_{\widetilde{A}/\widetilde{Z}} = c(\mathcal{O}^r \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{O}(-\widetilde{W}_i)),$$

其中 r 是 $\mathcal{E}$ 的秩。

证明。 首先注意到 $\mathcal{V}^{[i]\,\mathrm{P}}$ 的陈类由命题 4.3 可知为零，因此在计算陈类时，我们可以用平凡丛替代它。现在来讨论重数$m(\Gamma_k)$。它可以通过取 $\tilde{\mathsf{ev}}^{(k-1)}$ 沿$\widetilde{W}_k^{(k-1)}$一般点展开后的最低次项来计算。由于 $\widetilde{W}_{(k-1)\,k}$与 W_k双有理，计算 ev 沿 W_k的重数即可。 W_k 的一般点具有剖面 $\mathrm{P}+\Gamma_k$。现在有两种可能。或者 $\mathcal{V}$ 中有某个周期位于第 i 层，此时沿该周期的重数为 1。因此，在这种情况下，求值截面以重数 1 消失。在另一种情况下， $\mathcal{V}$ 的所有周期都位于较低层，因此求值截面可写为 $t_i^{\ell_k}\alpha$，其中 α 表示 $\mathcal{V}$ 在较低层的对数周期，且 $\ell_k = \ell(\Gamma_k)$。一般而言，某个较低层

层周期非零。因此重数为 1，因为我们是在非约化空间 $A^{[i]} \operatorname{P} \Gamma_k$上进行计算，而在爆破 $t^{\ell(\Gamma_i)}$ $_i$ 中，$_i$ 是一个局部参数。

尚需证明以下断言：在每一步

$$Z(\widetilde{\mathrm{ev}}_k) = \widetilde{A}^{(k)} \cup \bigcup_{j=k+1}^{n} \widetilde{A}^{(k)}_{\mathrm{P},\overline{\Gamma}_j}.$$

我们用归纳法论证。 $k = 0$ 的情形由命题 4.5 得出。归纳步骤~中，我们假设该命题已对某个 k 证明。我们断言，在 Z_k 上， $\widetilde{W}^{(k)}_{k+1} = \widetilde{A}^{(k)} \operatorname{P} \Gamma_{k+1}$ 的局部方程由一个正则序列给出

$$(\alpha, T_k)$$

其中， α 是一个对应于专化到第 i 层的周期的元组，而 T_k 对应于横截坐标 $t^{\ell(\Gamma_{k+1})}{}_{i+1}$ 。这可通过归纳法看出，利用如下观察：严格变换的局部方程可通过将正则序列中的某些项替换为相应的射影坐标而得到；局部坐标中的描述见附录 A.2。类似地，现在求值截面可写成如下形式

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_k = (\alpha, T_k \cdot \beta),$$

其中， β是一个元组，使得 (α, β, T_k) 是一个正则序列。

因此，在爆破上除以例外除子后， ~ev_{k+1} 的零点轨迹由（$\tilde{\alpha}$， β）$= 0$给出，其中 $\tilde{\alpha}$ 表示相应的射影坐标。特别地，求值截面的零子叠没有任何一个分支完全支撑在新的例外除子 $\widetilde{W}$（$_{k+1}$）$_{k+1}$上，其余分支的形式为 $\widetilde{A}^{(k)} \operatorname{P} \Gamma_{j}$。为减少记账工作，我们仅在以下情形中讨论细节。设（X， ω）$\in W_2$ ，其底层为 3 层图 Λ。另外设Λ 的剖面为 Γ_1， Γ_2，且有 $W_i = A^{[i]} \operatorname{P} \Gamma_{1}$。令 α、β、γ分别为限制 $\mathcal{V}^{[i]}_{\Lambda}$ 在层 0、-1 和 -2 上的一个基，并令 t_1 和 t_2 分别为层 -1 和 -2的层参数。为简单起见，我们假设 $i = 0$ 和 ℓ（Γ_1）$= \ell$（Γ_2）$= 2$。W_1和 W_2的理想层在局部由 $\mathcal{I}$（W_1）$=$（α、t_1） $\mathcal{I}$（W_2）$=$（α、β、t_2）生成，而求值截面为

$$\mathrm{ev} = (\alpha, t_1\beta, t_1t_2\gamma).$$

在例外除子上，我们需要引入射影坐标 α' 和 t'_1。在爆破 Z_1 的例外除子上支撑的点~处，W_2 的严格变换的方程由正则序列 $(\alpha'$， β， $t_2)$ 给出，其中 α' 表示对应于 α'的射影坐标。在坐标图 $\alpha'_j \neq 0$上，求值截面 ~$\mathrm{ev}^{(1)}$ 为

$$\widetilde{\mathrm{ev}}^{(1)} = (\hat{\alpha}, t'_1\beta, t'_1t_2\gamma),$$

其中 $\hat{\alpha} =(\alpha'_1$，……，α'_{j-1}，1，α'_{j+1}，……，$\alpha'_d)$。因此 ~$\mathrm{ev}^{(1)}$ 不消失。在坐标图$t'_1 \neq 0$上，我们有

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_{(1)} = (\alpha', \beta, t_2\gamma).$$

因此，零点轨迹是 $Z(\alpha'$， β， $t_2) = \widetilde{W}^{(1)}_2$ 与 $Z(\alpha'$， β， $\gamma) = \widetilde{A}^{(1)}$的并集。

□

现在，我们已经具备了完成主定理证明所需的一切要素。

定理*1.1*的证明。 在我们的新语言中，我们试图计算 $A_\star^{[0]}$的总陈类，其中 $\star$ 表示具有单个顶点的唯一层级图。
我们将更一般地证明， $A^{[I]}{}_{\mathrm{P}}$ 在 D_{P} 上的总陈类可以显式计算，且属于除子型重言环 $\mathrm{divR}^*(D_{\mathrm{P}})$。正如我们已经指出的，交

$$A_{\mathrm{P}}^{[I]} = \cap_{i\in I} A_{\mathrm{P}}^{[i]} \subseteq D_{\mathrm{P}},$$

是代数横截的。因此，只需计算 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 的总陈类，适用于所有剖面和所有层 i。

命题 5.2。 假设我们已经证明了 $A^{[j]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}} \in \mathrm{divR}^*(D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}})$ 对任意 $\mathrm{Q} \in \Sigma(\mathrm{P}, i)$以及任意 j 退化到第 i层的层级均成立。那么 $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}} \in \mathrm{divR}^*(D_{\mathrm{P}})$ ，并且可以显式计算。

在证明该断言之前，我们先说明它如何完成定理的证明。对于一个没有退化会分裂层级 i 的剖面 P，由命题 4.5 可得，

$$Z(\overline{\mathrm{ev}}_{\mathrm{P},i}) = A_{\mathrm{P}}^{[i]}$$

因此 $\mathrm{ev}_{\mathrm{P},i}$是一个正则截面。特别地， $A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ 的总陈类由 $(\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}})^* \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}}^{[i]}(1)$ 的总陈类给出，因此 $P_{A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}/D_{\mathrm{P}}} = c(\mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}}^r \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathrm{P}}}^{[i]}(1)) \in \mathrm{divR}^*(B)$，其中 $r =$ 秩 $\mathcal{V}^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$。一般情形现在由该断言通过对 $\Sigma(\mathrm{P}, i)$ 中剖面的最大长度进行归纳法得到。由于剖面的长度有界，该过程终止。

现在我们证明该断言。我们的目标是应用定理 A.19，并使用由以下内容给出的正则嵌入系统牲交

$$\mathcal{S} = \{D_{\mathrm{P}}\} \cup \{A^{[I]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}} : \mathrm{Q} \in \Sigma(\mathrm{P}, i),\ L(\mathrm{Q}) \geq 2 \text{ 且 } I \text{ 中的任意层非退化为层 } i\},$$

建筑集 $B = \{A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}{}_{\Gamma} : \Gamma \subseteq \Sigma^1(\mathrm{P}, i)\}$ 和 $A = A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}$ $R^* = \mathrm{divR}^*$。要看出 $\mathcal{S}$ 确实是一个正则嵌入系统，我们需要检查 $\mathcal{S}$ 在有限交下闭合，并且如果 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}} \subseteq A^{[J]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{R}}$是一个包含关系，那么包含映射是一个正则嵌入。在有限交下的闭合性由命题 4.4得出。通过检查 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$和 $A^{[J]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{R}}$在 B中的局部方程，我们看到 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$由 I 中不会退化为 J 的层上的对数周期的额外消失，以及一些额外的层缩放参数 $t_i^{\ell_i}$定义；这些参数属于一个正则序列，从而表明包含映射是一个正则嵌入。我们还需要验证所有 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$都是Alexander 堆栈。根据引理 A.2，2)，只需对约化子叠 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$证明该断言即可。但是 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}$ 是光滑的，因为局部方程构成 B 的一个参数系统的一部分，而任意光滑的Deligne-Mumford 丛都是 Alexander 的，参见引理 A.2，3)。

现在我们讨论总陈类。首先，我们证明对于任意 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}} \in \mathcal{S}$ ，总陈类 $P_{A^{[I]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}}}$定义在 divR^* 上。根据该断言的假设，我们知道

$P_{A^{[I]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}} = \prod_{j\in I} P_{A^{[j]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}}$对所有 $\mathrm{divR}^*\ A^{[I]}{}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}} \in \mathcal{S}$均有定义，因此

$$P_{A^{[I]}_{\mathrm{P,Q}}/D_{\mathrm{P,Q}}} = \cdot P_{A^{[I]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}} \in \mathrm{divR}^*(D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}).$$

另一方面 $P_{D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}}} \in \mathrm{divR}^*(D_{\mathrm{P}})$。然后我们将命题 A.12 应用于包含映射$A^{[I]}{}_{\mathrm{P,Q}} \subseteq D_{\mathrm{P},\mathrm{Q}} \subseteq D_{\mathrm{P}}$。

只需证明，对于任意包含映射 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P,Q}} \subseteq A^{[K]}{}_{\mathrm{P,S}}$，若 $A^{[I]}{}_{\mathrm{P,Q}} \in \mathcal{S}, A^{[K]}{}_{\mathrm{P,S}} \in \mathcal{S} \cup \{A^{[i]}{}_{\mathrm{P}}\}$，则总陈类 $P_{A^{[I]}{}_{\mathrm{P,Q}}/A^{[K]}{}_{\mathrm{P,S}}}$ 在 divR^* 上有定义。

我们可以将 $\mathrm{Q} = \mathrm{R} + \mathrm{S}$ 写成某个剖面 R 的形式，然后

$$A^{[K]}_{\mathrm{P,S}} \cap D_{\mathrm{P,Q}} = A^{[K]}_{\mathrm{P,S}} \cap D_{\mathrm{P,R}} = A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}}$$

对于某个集合 $J \subseteq I$。由于 R 和 S 不相交，交 $A^{[J]}{}_{\mathrm{P,Q}} = A^{[K]}{}_{\mathrm{P,S}} \cap D_{\mathrm{P,R}}$ 在 D_{P} 内是代数横截的。特别地，我们看到

$$P_{A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}}/A^{[K]}_{\mathrm{P,S}}} = P_{D_{\mathrm{P,R}}/D_{\mathrm{P}}} = \ell(\mathrm{R}) P_{D_{\mathrm{P}+\mathrm{R}}/D_{\mathrm{P}}} \in R^*(A^{[K]}_{\mathrm{P,S}}). \tag{5.1}$$

此外，

$$A^{[I]}_{\mathrm{P,Q}} = A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}} \cap \bigcap_{j\in I\setminus J} A^{[j]}_{\mathrm{P,Q}} \subseteq D_{\mathrm{P,Q}}$$

是代数横截交，因而

$$P_{A^{[I]}_{\mathrm{P,Q}}/A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}}} = \prod_{i\in I\setminus J} P_{A^{[i]}_{\mathrm{P,Q}}/D_{\mathrm{P,Q}}} = \prod_{i\in I\setminus J} P_{A^{[i]}_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}/D_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}} \in R^*(A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}}), \tag{5.2}$$

省略显然的拉回。

这种情况总结在下面的笛卡尔方块图中。

$$\begin{array}{ccccc}
A^{[I]}_{\mathrm{P,Q}} & \longrightarrow & A^{[J]}_{\mathrm{P,Q}} & \longrightarrow & A^{[K]}_{\mathrm{P,S}} \\
\downarrow{\scriptstyle \cap_{j\in I/J} A^{[j]}{}_{\mathrm{P,Q}}} & & \downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow & & D_{\mathrm{P,Q}} & \longrightarrow & D_{\mathrm{P,S}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & D_{\mathrm{P,R}} & \longrightarrow & D_{\mathrm{P}}
\end{array}$$

由等式 (5.1) 和 (5.2)，现在可由命题 A.12 (2) 得出 $P_{A^{[I]}{}_{\mathrm{P,Q}}/A^{[K]}{}_{\mathrm{P,S}}} \in \mathrm{divR}^*(A^{[K]}{}_{\mathrm{P,S}})$.

这就完成了归纳步骤的证明。 □

6. Low genus formulas and crosschecks

计算 $[\mathrm{Exc}_\lambda]$ 类的迭代过程已在 SAGE 中实现，基于 admcycles 和 diffstrata 软件包。代码可在作者的网站上获取。该算法需要列出所有双层图以及它们之间的偏序。层级图的数量呈指数增长，因此会拖慢计算速度。本节将说明几种情形，在这些情形中，我们可以利用爆破避免复杂的递归，并得到更显式的公式。

施加分歧。如果已经在 $\mathcal{P}(\mu)$ 的周环中计算出类 $[\mathrm{Exc}\,(\mu)]$，那么施加额外的分歧就会施加除子型条件。特别地，我们可以如下得到类 $[\mathrm{Exc}_\lambda] \in \mathrm{CH}^*(\mathrm{Exc}\,(\mu))$ 的闭公式。

设 λ 是一个分歧型。回顾子局部系统 $\mathcal{H}_\lambda \subseteq \mathcal{H}$，它由绝对同调向量丛 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$ 张成；该向量丛在点 (X, ω) 上的纤维为 $H_1(X - P(\omega))$，并且还包括所有端点都包含在对应于 λ 的一个分拆 λ_i 的纤维中的相对闭路。限制到 $\mathrm{Exc}\,(\mu)$ 上时，局部系统 $\mathcal{H}_\lambda/\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$ 的单值化是平凡的，因此我们可以选取一个子丛旗

$$\mathcal{U}_\bullet : \mathcal{H}_{\mathrm{abs}} = \mathcal{U}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{U}_l = \mathcal{H}_\lambda.$$

事实上，我们可以选取该旗，使得 $\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i-1}$ 由一个端点位于同一纤维中的单个闭路生成。现在令 $W_i(\mathcal{U}_\bullet) \subseteq \mathrm{BIC}$ 为满足顶层限制条件 $\mathcal{U}_i^{[0]} = \mathcal{U}_{i-1,\Gamma}^{[0]}$ 的二层层级图的集合。回顾定义 3.11中的顶层限制定义。换言之，$W_i(\mathcal{U}_\bullet)$由这样的层级图构成：$\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i-1}$ 的生成元位于底层，模去 $\mathcal{U}_{i-1}$ 中的闭路。我们强调，$W_i(\mathcal{U}_\bullet)$ 取决于对子丛旗 $\mathcal{U}_\bullet$的选择。与命题4.6的证明完全相同，我们得到

命题 6.1. 设 λ 为一个分歧型。Exc_λ 在 $\mathrm{Exc}(\mu)$ 的周环中的闭包类为

$$[\overline{\mathrm{Exc}_\lambda}] = (-1)^l \prod_{i=1}^{l} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(\mathcal{U}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \in \mathrm{divR}^l(\overline{\mathrm{Exc}\,(\mu)}),$$

其中 $l = \mathrm{codim}^{\mathrm{Exc}\,(\mu)} \mathrm{Exc}_\lambda$。

特别地，我们有

$$[\overline{\mathrm{Exc}_\lambda}] = (-1)^l \prod_{i=1}^{l} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(\mathcal{U}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \cdot [\overline{\mathrm{Exc}\,(\mu)}] \in \mathrm{CH}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu)).$$

亏格零与球面分支覆盖的可实现性。每个λ-精确微分分层都可以分解为

$$\overline{\mathrm{Exc}_\lambda} \subseteq \overline{\mathrm{Exc}\,(\mu)} \subseteq \overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}} \subseteq \overline{\mathcal{P}}(\mu),$$

其中 $\mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}}$ 是无留数微分分层的闭包。我们有 Exc_λ 在 $\mathrm{Exc}\,(\mu)$ 中的类以及 $\overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}} \subseteq \overline{\mathcal{P}}(\mu)$ 的闭合公式。因此，如果我们令 $\iota : \mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}} \subseteq \mathcal{P}(\mu)$

为包含映射，且 $\alpha \in \mathrm{divR}^*(\mathcal{P}(\mu))$ 为一个重言类，使得 $\iota^*\alpha = [\mathrm{Exc}(\mu)] \in \mathrm{divR}^* \mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}}$，那么

$$[\overline{\mathrm{Exc}_\lambda}] = (-1)^{k+l} \prod_{i=1}^{l} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(\mathcal{U}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \prod_{j=1}^{k} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_j(\mathcal{V}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \cdot \alpha \in \mathrm{divR}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu)),$$

其中我们结合了命题4.6和命题6.1。

对于一般的 g，我们只能使用递归的爆破过程来计算 α，但对于 $g = 0,1$，余维足够小，因此我们可以得到闭式公式。

对于亏格为零的情形，每个无留数微分都是恰当微分，因此 $\mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}} = \mathrm{Exc}(\mu)$，即我们有 $\alpha = 1$。

命题 6.2。设 Exc_λ 是亏格 $g = 0$ 中的 λ-恰当微分分层。那么

$$[\overline{\mathrm{Exc}_\lambda}] = (-1)^{k+l} \prod_{i=1}^{l} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(\mathcal{U}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \prod_{j=1}^{k} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_j(\mathcal{V}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \in \mathrm{divR}^{k+l}(\overline{\mathcal{P}}(\mu)),$$

其中

- $k = \text{余维}_{\mathrm{Exc}(\mu)} \mathrm{Exc}_\lambda$, $l = \text{余维}_{\mathcal{P}(\mu)} \mathrm{Exc}(\mu)$,
- $\mathcal{V}_\bullet$ 是留数局部系统 $\mathcal{H}_{\mathrm{res}} = \mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$ 的完全子丛旗，
- $\mathcal{U}_\bullet$ 是以下对象的完全子丛旗：$(\mathcal{H}_\lambda / \mathcal{H}_{\mathrm{abs}})|_{\overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}}}$ —

哪些分歧型 λ 可以实现为 $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 的分支覆盖，仍是一个悬而未决的问题；关于当前进展，请参见例如 [PP06]。一个必要条件是 λ 满足黎曼-赫尔维茨定理的条件，但通常这并不充分。例如，在次数为 $d = 4$ 时，分歧型 $\lambda = (3,1),(2,2),(2,2)$ 无法由分支覆盖实现。我们可以通过计算验证，对应于 λ-恰当微分分层的类在 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{P}(\mu))$ 中为零。我们没有高效的方法来检验一个类在 $\mathcal{P}(\mu)$ 的周环中是否为零，因此沿着 ρ 推前会更容易：$\mathcal{P}(\mu) \to \mathcal{M}_{0,n}$。利用 Sage 软件包 admcycles 和命题 6.2，我们可以验证，对于 $\lambda = (3,1),(2,2),(2,2)$，类 $[\mathrm{Exc}_\lambda]$ 在 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_{0,6})$ 中确实为零。同样，我们可以检验其余次数 $d = 4$ 的分歧型对应的类均非零。

由于对射影簇而言，子簇非空当且仅当其在周环中的类为零，因此我们得到以下判据，用于判断分支覆盖何时可以实现。

推论 6.3。设 λ 是亏格为零的分歧型。那么，当且仅当类 λ 可以由分支覆盖 $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 实现时，...

$$\rho_* \left[\prod_{i=1}^{l} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(\mathcal{U}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \prod_{j=1}^{k} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_j(\mathcal{V}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \right] \neq 0 \in \mathrm{CH}^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}).$$

亏格一。 对于亏格1，Exc(μ)在 $\mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}}$ 内的余维为 2。特别地，在去除除子分量后，评价截面的零点轨迹具有预期余维。

我们回顾绝对同调与留数的局部系统，分别记为 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}} \supseteq \mathcal{H}_{\mathrm{res}}$。令 $N_i \subseteq$ BIC 为所有满足秩 $\mathcal{H}^{[0]}_{\text{绝对 }\Gamma} - i = \mathcal{H}^{[0]}_{\text{留数 }\Gamma}$，$i = 0,\ 1$ 的双层图。这里$\mathcal{H}^{[0]}_{\text{绝对}\Gamma}$，$\mathcal{H}^{[0]}_{\text{留数}\Gamma}$分别是 $\mathcal{H}_{\mathrm{abs}}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathrm{res}}$ 的 Deligne 延拓的特化态射的像。那么 N_i 恰好对应所有满足 $A^{[0]}_{\Gamma}$ 在 $\mathcal{P}(\mu)$ 中余维为 $1+i$ 的双层图。

Prop命题 6.4。 设Exc_{λ} 是亏格 $g = 1$ 中的 λ-恰当微分分层。 *en*

$$[\overline{\mathrm{Exc}_{\lambda}}] = (-1)^d \prod_{i=1}^{l} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_i(\mathcal{U}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \prod_{j=1}^{k} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in W_j(\mathcal{V}_\bullet)} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right) \times \left[\left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma} \in N_0} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \right)^2 + \sum_{\overline{\Gamma} \in N_1} \ell_{\overline{\Gamma}} D_{\overline{\Gamma}} \left(\xi + \sum_{\overline{\Gamma}' \in N_1(\overline{\Gamma})} \ell_{\overline{\Gamma}'} D_{\overline{\Gamma}'} \right) \right] \in \mathrm{divR}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu)),$$

其中

- $d = \mathrm{codim}_{\overline{\mathcal{P}}(\mu)} \mathrm{Exc}_{\lambda}$,
- $N_i \subseteq \mathrm{BIC}$ *is the set of two level graphs such that* $\mathrm{rank}\, \mathcal{H}^{[0]}_{\mathrm{abs},\overline{\Gamma}} - i = \mathcal{H}^{[0]}_{\mathrm{res},\overline{\Gamma}}$,
- $N_1(\overline{\Gamma})$ *is the set of all two level graphs* $\overline{\Gamma}'$ *with* $\overline{\Gamma}' \succ \overline{\Gamma}'$ *and*

$$\mathrm{rank}\, \mathcal{H}^{[0]}_{\mathrm{abs},\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}'} - 1 = \mathrm{rank}\, \mathcal{H}^{[0]}_{\mathrm{res},\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}'}.$$

证明。 我们回顾，评价截面的零点轨迹支集于 $A^{[0]}_{\star}$和 $A^{[0]}_{\star\,\Gamma}$,对于 $\Gamma \in$BIC。如果 $A^{[0]}_{\star\ ,\Gamma}$ 非空，那么余维要么为一，要么为二。在第一种情况下 $A^{[0]}_{\star\ ,\Gamma} = D^{\bullet}_{\Gamma}$ 和 $\Gamma \in N_0$，其中我们回顾，$D^{\bullet}_{\Gamma}$ 是具有重数 ℓ_{Γ}的–D_{Γ}的无穷小加厚。后一种情况对应于 $\Gamma \in N_1$。特别地，经 $\otimes_{\Gamma \in N_0} \mathcal{O}(-D_{\Gamma})^{-\ell_{\Gamma}}$ 扭曲的求值截面 ev 的零点轨迹具有预期余维，因此

$$[\overline{\mathrm{Exc}\,(\mu)}] = [A^{[0]}_{\star}] = c_2 \left(\mathcal{O}(1) \otimes \bigotimes_{\overline{\Gamma} \in N_0} \mathcal{O}(D_{\overline{\Gamma}})^{-\ell_{\overline{\Gamma}}} \otimes \mathcal{O}^{\oplus 2} \right) - \sum_{\overline{\Gamma} \in N_1} [A^{[0]}_{\star,\overline{\Gamma}}] \in \mathrm{CH}^*(\overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}}).$$

为了计算 $A^{[0]}_{\star\ ,\Gamma}$，我们将改为计算 $[A^{[0]}_{\star,\Gamma}] \in \mathrm{CH}^1(\mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}} \cap D^{\bullet}_{\Gamma})$ 的周 Chow 群类，然后使用推拉。与之前类似，我们有一个定义在$\mathcal{P}(\mu)^{\mathrm{res}} \cap D^{\bullet}_{\Gamma}$ 上的求值截面，它在 $A^{[0]}_{\star\ ,\Gamma}$ 上消失；此外

$$D^{\bullet}_{\overline{\Gamma}'} \cap \overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}} \cap D^{\bullet}_{\overline{\Gamma}} \text{ for } \overline{\Gamma} \in N_1(\overline{\Gamma}).$$

并且我们有

$$[D^{\bullet}_{\overline{\Gamma}'} \cap \overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}} \cap D^{\bullet}_{\overline{\Gamma}}] = \ell_{\overline{\Gamma}'} D_{\overline{\Gamma}'} \in \mathrm{CH}^1(\overline{\mathcal{P}}(\mu)^{\mathrm{res}} \cap D^{\bullet}_{\overline{\Gamma}}).$$

□

例如，我们可以考虑分歧型 $\lambda = (2), (2), (2), (2)$，也就是说，我们考虑

$$Z := \{(E, p, q, r, s) \in \mathcal{M}_{1,4} \mid \exists f : E \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1 \text{ ramified at } p, q, r, s\},$$

或者换句话说，具有完整二阶挠点结构的椭圆曲线。将 $[\mathrm{Exc}_\lambda]$ forward 的类向前推，我们得到

$$\frac{75}{2}\kappa_3 - \frac{45}{4}\kappa_1\kappa_2 + \frac{3}{4}\kappa_1^3 + \frac{3}{2}\kappa_2\,(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \in \mathrm{CH}^3(\overline{\mathcal{M}}_{1,4}),$$

这与 admcycles 计算出的公式一致。

通过进一步的工作，还可以得到 $g = 2$ 或者甚至更高亏格的公式。主要区别在于，对于更高亏格，会出现既不是除子型、维数也不符合预期的多余分支，而且无法避免爆破过程，这使得公式复杂得多。

AppendixA. Intersection theory on iterated blowups

Alexander 叠。设 X，Y 为 $\mathbb{C}$上的分离 Deligne-Mumford 丛。对于一个可表示态射 f：$X \to Y$，我们令 $\mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X \to Y)$ 表示双变 Chow 群。元素 $c \in \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X \to Y)$是一个算子 c：$\mathrm{CH}^*(Z) \to \mathrm{CH}^*(X \times_Y Z \to Z)$，对任意来自概形 Z 的态射 f：$Z \to Y$ 均如此；该算子与适当推前、平坦拉回以及正则嵌入的 Gysin 同态相容（精确定义见 [Ful98，第 17]章）。正如 Vistoli 所解释的，运算 Chow 类 $c \in \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X \to Y)$也定义了一个算子 $c \in \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(F \to X \times_Y F)$，适用于 Deligne-Mumford 丛之间的任意可表示态射 $F \to Y$。此外，我们有一个求值映射

$$\mathrm{ev}_Y : \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(F \to Y) \to \mathrm{CH}^*(F), c \mapsto c \cap [Z].$$

我们将运算有理 Chow 环记作 $\mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X) := \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X \xrightarrow{id} X)$。$\mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X)$ 上的环结构由乘积诱导。

$$\mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X \to Y) \otimes \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(Y \to Z) \to \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X \to Z)$$

且是交换的。

我们称 Deligne-Mumford 丛 X 为*Alexander* 叠，如果 X 是等维的，并且对于每个可表示态射 f：$F \to X$，求值映射 $\mathrm{ev}_X : \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(F \to X) \to \mathrm{CH}^*(F)$ 都是同构。

注记 A.1。在 [Vis89b] 中还需要一个额外的交换条件。本文的应用是在特征零的域上进行的，因此每个 Deligne-Mumford 丛都有奇点消解，从而交换性自动得到满足。

我们将使用 [Vis89a]中的以下性质。注意，在（loc.cit.）中，所有内容都是针对概形陈述的，但证明对于 Deligne-Mumford 堆栈同样适用。

引理 A.2。设 X、Y、Z 为 *Deligne-Mumford* 堆栈，且 f：$X \to Y$ 是一个可表示态射。

(1) 假设 f 是常纤维维数的光滑态射。如果 Y 是 *Alexander* 叠，那么 X也是。(2) 假设 f 是泛同胚，那么 X 是 *Alexander* 叠，当且仅当 Y 是 *Alexander* 叠。特别地，X 是 *Alexander* 叠，当且仅当既约堆栈 X^{red} 是 *Alexander* 叠。(3) 每个光滑 *Deligne-Mumford* 丛都是 *Alexander* 叠。

证明。 (1)是 [Vis89b, 命题2.2], (2)是 [Vis89b,命题 2.7]且 (3) 是 [Vis89a, 命题 5.6].

□

以下内容很可能对专家而言众所周知，但我们未能找到相关参考文献。

命题 A.3。假设 $X \subseteq Y$ 是 *Alexander* 叠，且 X 在 Y中正则嵌入$\widetilde{}$。那么 $Y := \mathrm{Bl}_Y X$ 是一个 *Alexander* 叠。

~证明。令 X 为例外除子。对于任意可表态射 $Y' \to Y$，我们定义

~ ~ ~ ~$X' = X \times_Y Y'$, $X' = X' \times_X X$, $Y' = Y' \times_Y Y$。

我们有短正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(X' \to X) & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(\widetilde{X}' \to \widetilde{X}) \oplus \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(Y' \to Y) & \xrightarrow{\widetilde{\beta}} & \mathrm{CH}^*_{\mathrm{op}}(\widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{\widetilde{X}} \oplus \mathrm{ev}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{\widetilde{Y}}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(X') & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathrm{CH}^*(\widetilde{X}') \oplus \mathrm{CH}^*(Y') & \xrightarrow[\beta]{} & \mathrm{CH}^*(\widetilde{Y}') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中竖直映射为求值映射。

水平映射由

$$\widetilde{\alpha}(c) = (c_{d-1}(E) \cdot g^* c, i_*(c \cdot [i])), \quad \widetilde{\beta}(r,s) = -j_*(r \cdot [j]) + f^* s,$$
$$\alpha(x) = c_{d-1}(E) \cap g^* x, \quad \beta(\widetilde{x}, y) = j_* \widetilde{x} + f^* y$$

且该图表是交换的。（关于运算型~肖氏群上的运算，参见 [Ful98，第 17] 章。）由于 X 是一个射影向量丛，若 X 是亚历山大空间，则 X 也是亚历山大空间。由四引理可知，求值态射 ev$_{\widetilde{Y}}$ 是一个同构。□

从交理论的观点来看，Alexander堆栈的行为与光滑Deligne-Mumford 堆栈非常相似。特别地，周环具有交积，并满足投影公式。给定一个Alexander堆栈 Z 和 $\alpha \in$周Chow群*(Z)，我们令 T_α 为满足 $T_\alpha \cap [Z] = \alpha$的唯一算子。周 Chow 群*(Z)上的交积具有如下形式

$$\alpha \cdot \beta = T_\alpha \cap \beta = \alpha \cap T_\beta = T_\alpha \cap T_\beta \cap [Z].$$

对于任意适当、可表的态射 $f\colon X \to Z$，存在投影公式

$$f_*(f^*\beta \cdot \alpha) = \beta \cdot f_*\alpha. \tag{A.1}$$

由运算乔氏群上的投影公式诱导。

对于任意可表态射 $f\colon X \to Y$，我们在运算乔氏群上有一个拉回；另一方面，如果 f 另外是一个局部完全交态射，我们在乔氏群上也有一个拉回。

引理 A.4. 设 $f : X \to Y$ 是 *Alexander* 堆栈之间一个可表示的局部完全交态射。则

$$f^* T_\alpha = T_{f^*\alpha}.$$

证明。由于 f 是一个局部完全交态射，我们可以将其分解为一个正则嵌入和一个光滑态射。特别地，根据 [Vis89a，引理 5.5]，我们有 $f^*[Y] = [X]$。因此

$$f^* T_\alpha \cap [Y] = f^* T_\alpha \cap f^*[X] = f^*(T_\alpha \cap [X]) = f^*\alpha.$$

由于 X 是一个 Alexander 叠，我们得出 $f^* T_\alpha = T_{f^*\alpha}$。 □

约定 A.5。在本附录余下部分，我们假设所有 *Deligne-Mumford* 叠都是 *Alexander* 叠，并从现在起通过求值映射将 周 Chow 群$^*_{\mathrm{op}}$ 与 周 Chow 群* 识别。

重言环。设 Y 是一个 Alexander 叠，$X \subseteq Y$ 是一个闭子叠。回顾一下，若在 étale 局部意义下 Y 由一个正则序列定义，则称 X 为正则嵌入。因此，法层 $\mathcal{N}_{X/Y}$ 是一个秩为 $\operatorname{codim}_Y X$的向量丛。

给定一个子环 $R^*(Z) \subseteq \mathrm{CH}^*(Z)$ 和一个正则嵌入 $i\colon W \hookrightarrow Z$，我们定义 $R^*(W) = \widetilde{\ } \widetilde{\ } i^* R^*(Z)$。此外，设 $\pi\colon Z \to Z$ 为沿着 W 对 Z 进行爆破所得的空间。我们定义 $R^*(Z) = \widetilde{\ } \widetilde{\ } \pi^* R^*(Z)[E]$，其中 E 表示例外除子。$\widetilde{\ }$对于 Z 的子叠 Y，我们也令 $R^*(Y)$ 为 $R^*(Z)$ 的拉回。

因此，对于沿着一个正则嵌入的子叠对 Z 进行爆破所得的概形中的每个正则嵌入子概形，我们定义了一个环 $R^*(Y)$。我们将赋值 $Y \mapsto R^*(Y)$ 称为一个 **重言环**。

$\widetilde{\ }$注记 A.6. 假设 $R^*\colon Y \subseteq Z$ 是正则嵌入，并令 $Z = \mathrm{Bl}_W Z, Y = \mathrm{Bl}_{W\cap Y} Y$. $\widetilde{\ }$那么，包含映射 $j\colon Y \to Z$ 是正则嵌入（见附录 A.2），且有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{j} & \widetilde{Z} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[i]{} & Z \end{array}$$

此外，

$$R^*(\widetilde{Y}) = j^* R^*(\widetilde{Z}) = g^*(R^*(Y))[E_Y],$$

$\widetilde{\ }$其中 E 是 Z 中的例外除子，$E_Y = j^* E$ 是 Y 中的例外除子。特别地，定义 R^* 时不存在歧义。

代数地干净且横截相交。

定义 A.7. 若笛卡尔图中的每个态射都满足代数干净地相交，则称两个子叠 $W, Y \subseteq Z$ 在 Z 内代数干净地相交。

$$\begin{array}{ccc} X = W \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Z \end{array}$$

是一个正则嵌入。此外，如果

$$\operatorname{codim}_Z(X) = \operatorname{codim}_Z(W) + \operatorname{codim}_Z(Y),$$

我们称该交为代数横截。

注 A.8. 光滑簇之间的干净交与横截交的类比如下。若 X 和 W 有代数干净交，则在 étale 局部可以找到正则序列，使得理想层 $\mathcal{I}(W)$ 和 $\mathcal{I}(Y)$ 由以下元素生成

$$\mathcal{I}(W) = (a_1, \ldots, a_n), \quad \mathcal{I}(Y) = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k), m \le n.$$

这里我们允许 $m = 0$，在这种情况下，交在代数上是横截的 e.

总陈类。

定义 A.9. 假设 $i\colon V \hookrightarrow Z$ 是余维为 k的正则嵌入。若存在一个多项式，使得V 具有总陈类

$$P_{V/Z}(t) = \overline{c}_0(\mathcal{N}_{V/Z}) + \overline{c}_1(\mathcal{N}_{V/Z}) + \ldots + \overline{c}_{k-1}(\mathcal{N}_{V/Z}) + \overline{c}_k(\mathcal{N}_{V/Z}) \in \mathrm{CH}^*(Z)$$

使得

- $\overline{c}_0(\mathcal{N}_{V/Z}) \cap [Z] = [Z]$, $\overline{c}_k(\mathcal{N}_{V/Z}) \cap [Z] = [V]$.
- $i^*\overline{c}_i(\mathcal{N}_{V/Z}) = c_i(\mathcal{N}_{V/Z})$ for all i.

请注意，总陈类仅在 ker(i^* : 周 Chow 群*(Z) →周 Chow 群*(X))中的元素意义下唯一。我们强调，我们的约定与 [FM94] 不同；后者使用多项式，且指标方式也不同。

命题 A.10. 总陈类具有以下性质。

(1) 若 $D \subseteq Z$ 是一个除子，则 $P_{D/Z} = 1 + [D]$。

(2) 假设 X 和 Y在 Z 内代数横截相交，且 X 在 Z中有总陈类 $P_{X/Z}$ 。那么

$$P_{X\cap Y/Y} = P_{X/Z},$$

以及

$$P_{X\cap Y/Z} = P_{X/Z} \cdot P_{Y/Z},$$

省略显然的拉回。

证明。 [FM94，引理 5。1] □

我们的主要目标是确定总陈类是否可以被选取为包含于某个子环 $R^*(Z) \subseteq$ 周Chow群*(Z) 中。例如 R^* 可以是曲线模空间的重言环。

定义 A.11. 令 $R^*(Z) \subseteq$ 周 Chow 群*(Z) 为一个重言子环，且 $V \subseteq Z$ 正则嵌入。

我们称 V 在 Z 上定义的 R^* 具有一个总陈类，如果存在一个总陈类 $P_{V/Z} \in R^*(Z)$。

命题 A.12. 假设 $X \subseteq Y \subseteq Z$ 是正则嵌入的子叠。

(1) 如果 $P_{X/Y}$、$P_{Y/Z}$在 R^*上定义，那么 $P_{X/Z}$在 R^*上定义。

(2) 如果 $X = Y \cap W \subseteq Z$ 是某个子叠$W \subseteq Z$ 与 $P_{W/Z} \in R^*(Z)$的代数横截交，那么 $P_{X/Y} = i^*P_{W/Z} \in R^*(Y)$，其中 $i\colon Y \hookrightarrow Z$ 是包含映射。

A.1. **爆破的交理论**。 设 $W \subseteq Z$ 是 Deligne-~ ~
Mumford 叠的正则嵌入，并考虑 W 中沿 Z 的爆破 Z，其例外除子为 W。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W} & \xrightarrow{j} & \widetilde{Z} \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ W & \xrightarrow[i]{} & Z \end{array}$$

令 $s(W, Z) = \sum_i s_i(\mathcal{N}_{W/Z})$ 为法丛 $\mathcal{N}_{W/Z}$ 的总 Segre 类。由 Segre 类的双有理不变性可知，蓬莱娱乐注册

$$s(W, Z) = \pi_{\widetilde{W},*} s(\widetilde{W}, \widetilde{Z}) = \sum_{i \geq 0} \pi'_*(\mathcal{O}(-1)^i \cap [\widetilde{W}]) = \sum_{i \geq 0} s_{i-r+1}(\mathcal{N}_{W/Z})$$

如果 W 在 Z 中有一个总陈类，那么存在类 $s_i(\mathcal{N}_{W/Z}) \in$ 周 Chow 群$^*(Z)$，其在 X 上限制为 $s_i(\mathcal{N}_{W/Z})$。于是我们可以写成

$$\pi_*[\widetilde{W}]^i = (-1)^{i-1} \overline{s}_{i-\mathrm{codim}(W)}(\mathcal{N}_{W/Z}) \cap [W] \text{ for } i \geq 1. \tag{A.2}$$

我们得到如下有用的推论。

命题 A.13。 令 $R^*(Z) \subseteq$ 周 Chow 群$^*(Z)$ 为一个重言环，且 $W \subseteq Z$ 正则嵌入于 ~。此外，假设 $P_{W/Z} \in R^*(Z)$。考虑 Z 中沿 W的爆破 $\pi : Z \to Z$。则 π_* 保留 R^*，即，

$$\pi_*(R^*(\widetilde{Z})) = R^*(Z).$$

~证明。由 $\pi_*\pi^* =$id 可得 $\pi_*(R^*(Z)) \supseteq R^*(Z)$。另一方面，根据定义有 $R^*(\widetilde{Z})[\widetilde{W}]$，因此只需证明 $\pi_*[\widetilde{W}^i] \in R^*(Z)$，这正是等式 (A.2) 的内容。□

A.2. **严格变换的局部方程**。 假设 $W, V \subseteq Z$ 在 Z 中代数地~干净地相交。令 $Z = \mathrm{Bl}_W Z$ 和 $X = W \cap V$。局部地，我们可以找到一个正则序列$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$，使得 X 和 V 的理想分别为 $\mathcal{I}(W) = (x_1, \ldots, x_n)$ $\mathcal{I}(V) =(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_m)$，其中 $d \leq n$。

Fur此外，爆破 $\widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_X Z$ 在 $Z \times \mathbb{P}^{n-1}$ 中局部由方程定义 s

$$\{x_i T_j = x_j T_i \text{ for } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

~可以将 V的严格变换 V识别为 $\mathrm{Bl}_{W \cap V} V$。在~$T_i \neq 0$的仿射坐标图中，例外除子 W 的方程为 $z_i = 0$。 $Z \times \mathbb{P}^{n-1}$ 中严格变换 $\widetilde{V}$的局部方程为

$$\mathcal{I}(\widetilde{V}) = (T_1, \ldots, T_d, y_1, \ldots, y_m), \tag{A.3}$$

~ ~其中 T_1，...， T_d是射影坐标。特别地， $V \subset Z$是正则嵌入。（详情参见 [Alu10，引理 4.1]）。

A.3. **严格变换的总陈类**。我们的下一个目标是计算爆破中严格变换的类和法丛。在 $W \subseteq V \subseteq Z$ a 的情形下， [Ful98]，中给出了一个公式，并在 [Alu10] 中将其推广到了更一般的情形。

~主要结果是，严格变换 V 以及其法丛可以根据 $W, V, V \cap W$ 的类以及它们的法丛计算得出。

~**推论 A.14.** 设 V 和 W 在 Z 中代数干净地相交。令 $Z = \mathrm{Bl}_W Z$ 和 $\sim V = \mathrm{Bl}_X V$, $X = V \cap W$.
此外，假设 *exikarhi*

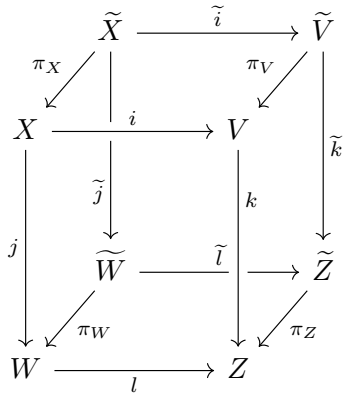
$$P_{X/V},\, P_{X/W},\, P_{W/Z}$$

定义在 R^* 上。

~那么 $P_{V/Z} \in R^*(Z)$ 当且仅当 $P_{\widetilde{V}/\widetilde{Z}} \in R^*(Z)$。

事实上，我们将证明总陈类 $P_{\widetilde{V}/\widetilde{Z}}$ 的一个显式公式，由此可得推论 A.14。

我们首先为 Aluffi 公式 [Alu10] 建立记号。与之前一样，我们考虑 Z 在 W 中沿 Z 的爆破，其例外除子为 W。此外， V 与 W 在 $\sim$ $\sim Z$ 中干净相交，并令 $X = V \cap W$。例外除子为 W，而 V 是 V 的严格变换，~ 为 V。以下图示总结了这一情形。



我们定义这些类

$$C = \sum_m C_m := j^* c(\mathcal{N}_{W/Z}) c(\mathcal{N}_{X/V})^{-1} \in \mathrm{CH}^*(X),$$
$$N = \sum_n N_n := c(\mathcal{N}_{X/W}) \in \mathrm{CH}^*(X)$$

如果我们形式上假设 C 和 N 是向量丛总陈类的拉回，其中向量丛为 $\mathbb{C}$， $\mathbb{N}$ 位于 V 上，那么我们可以展开

$$c(\mathbb{N}) \cdot c(\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}(-\widetilde{X})) = c(\mathbb{N}) \cdot c(\mathbb{C}) + Q(c_m(\mathbb{N}), c_n(\mathbb{C}), [\widetilde{X}]) \cdot \widetilde{X} \in \mathrm{CH}^*(V).$$

对于多项式 $Q = \sum_k Q_k(c_m(\mathbb{N})\ c_n(\mathbb{C}))[\widetilde{X}]^k$。尽管一般而言我们无法确保向量丛的存在，但多项式 Q 仍会出现在以下公式中。

在下一个命题中，我们省略某些拉回映射，有时也将沿包含映射 $V \subset V', \alpha \in \mathrm{CH}^*(V')$ 的拉回记作 $\alpha_{|V}$。

命题 A.15。令 Z 为一个 *Alexander* 叠。假设 V与 $W \subseteq Z$ 干净相交，并令 $X = V \cap W$。此外，假设 $P_{X/W}$、$P_{X/V}$、$P_{W/Z}$ 都定义在 R^* 上。

令 $\overline{C}, \overline{N}, \overline{X} \in R^*(Z)$ 使得

$$\overline{N}_{|X} = N, \overline{C}_{|X} = C \in R^*(X), \overline{X}_{|W} = X \in R^*(W).$$

~ V 的严格变换类 V 具有以下形式

$$[\widetilde{V}] - \pi_Z^*[V] = -\sum_{k=1}^{d-e} \overline{C}_{d-e-k} \cdot \overline{X} \cap (-[\widetilde{W}]^k) \in R^*(\widetilde{Z})$$

其中 $d = \mathrm{codim}_Z V$， $e = \mathrm{codim}_W X$。

对于严格变换的法丛，我们有

$$c(\mathcal{N}_{\widetilde{V}/\widetilde{Z}}) - \pi_V^* c(\mathcal{N}_{V/Z}) = \left[Q(\overline{N}_m, \overline{C}_n, [\widetilde{W}]) \cap \widetilde{W} \right]_{|\widetilde{V}} \in R^*(\widetilde{V}).$$

证明。根据 [Ful98，定理 6.7] 我们有

$$[\widetilde{V}] = \pi_Z^*[V] + \widetilde{l}_* \left\{ \frac{c(\pi_W^* \mathcal{N}_{W/Z})}{c(\mathcal{O}(\widetilde{W}))} \cap \pi_W^*(c^{-1}(\mathcal{N}_{X/V}) \cap [X]) \right\}^{d-1} \tag{A.4}$$

By a假设我们有 $c(\mathcal{N}_{W/Z})c^{-1}(\mathcal{N}_{X/Y}) = j^* l^* C, [X] = \overline{l}^* X$ 对于 $\overline{C}, X \in \overline{R^*}(Z)$.

现在我们可以将等式 (A.4) 改写为

$$\begin{aligned}
[\widetilde{V}] &= \pi_Z^*[V] + \widetilde{l}_* \left\{ \frac{\widetilde{l}^* \pi_Z^* \overline{C}}{c(\mathcal{O}(\widetilde{W}))} \cap \widetilde{l}^* \pi_Z^* \overline{X} \right\}^{d-1} \\
&= \pi_Z^*[V] + \widetilde{l}_* \sum_{k=1}^{d-e} \widetilde{l}^* \overline{C}_{d-e-k} \cdot \widetilde{l}^* \overline{X} \cap (-c_1(\mathcal{O}(\widetilde{W}))^{k-1} \\
&= \pi_Z^*[V] - \sum_{k=1}^{d-e} \overline{C}_{d-e-k} \cdot \overline{X} \cap (-[\widetilde{W}])^k \in \mathrm{CH}^d(\widetilde{Z})
\end{aligned}$$

~ ~其中 $e =$ 余维数$_W X$。特别地，差异 $[V] - \pi_Z^*[V]$ 属于 $R^*(Z)$。

我们现在继续讨论严格变换的法丛。根据 [Alu10, 定理 4.2] 我们可以写出

$$\begin{aligned} c(\mathcal{N}_{\widetilde{V}/\widetilde{Z}}) \cap \alpha - \pi_V^*(\mathcal{N}_{V/Z}) \cap \alpha &= \widetilde{i}_* \left[Q(\pi_X^* c_m(\mathcal{N}_{X/W}), \pi_X^* C_n, c_1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-1)) \cap \widetilde{i}^* \alpha \right] \\ &= \sum_{k=0} \widetilde{i}_* \left[Q_k(\overline{N}_m, \overline{C}_n) \cdot c_1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-1))^k \cap \widetilde{i}^* \alpha \right] \\ &= \sum_{k=0} Q_k(\overline{N}_m, \overline{C}_n) \cdot [\widetilde{X}]^{k+1} \cap \alpha \\ &= \left[\sum_{k=0} \left(Q_k(\overline{N}_m, \overline{C}_n) \cdot [\widetilde{W}]^{k+1} \right) \cap \alpha \right]_{|\widetilde{V}} . \end{aligned}$$

□

推论 *A.14* 的证明。 由命题 A.15，差异

$$[\widetilde{V}] - \pi_Z^*[V],\ c(\mathcal{N}_{\widetilde{V}/\widetilde{Z}}) - \pi_V^* \mathcal{N}_{V/Z}$$

都定义在 R^* 上，并且都可以仅用总陈类$\sim P_{X/V}, P_{X/W}, P_{W/Z}$和例外除子 W表示。特别地，如果 $P_{V/Z}$定义在 R^*上，那么 $P_{\widetilde{V}/\widetilde{Z}}$也如此。

对于第二个断言，我们回顾 $\pi_{Z,*}\pi_Z^* = \mathrm{id}\, \pi_{V,*}\pi_V^* = \mathrm{id}$，并且 $\pi_{Z,*}[\widetilde{W}]^k$可以用 Segre 类 $s(W, Z) = c^{-1}(\mathcal{N}_{W/Z}) \cap [W]$ 来计算。类似地，$\pi_{V,*}[\widetilde{X}]^k$可以用 Segre 类 $s(X, V) = c^{-1}(\mathcal{N}_{X/V}) \cap [X]$ 来计算。所有这些类都可以从总陈类 $P_{W/Z}$ 和 $P_{X/V}$ 中读出。□

A.4. **正则嵌入系统**。到目前为止，我们讨论了单次爆破后严格变换的总陈类；现在将这一计算推广到一系列爆破的情形。粗略地说，如果我们对一系列子空间 $W_1, \ldots, W_n$依次进行爆破，并且能够计算 W_i 的总陈类，以及不同 W_j的所有有限交的总陈类，那么只要还知道所有交集$V \cap W$ 的总陈类（其中 W 是品种 W_i的任意有限交），就能计算某个子空间 V的严格变换的总陈类。

定义 A.16。若由 Z 中的子叠构成的集合 S 满足以下条件，则称其为 Z 中的正则嵌入系统：

- 每个叠 $Y \in S$ 都是 Alexander 叠，
- $Z \in S$ 并且 S 在有限交下封闭
- 对于任意 $A, B, C \in S$，若 $A, B \subseteq C$，则 A 与 B 在 C 内的交是干净的。

一个建筑集 $B = (W_1, \ldots\ldots, W_n)$ $W_i \in S$是一个子空间的有序列表，其中 W_i和 W_j彼此不包含，适用于 $i \neq j$。

从 Z 中的一组正则嵌入 S 和一个建筑集 $B \subseteq S$ 出发，我们按如下方式构造~一个迭代爆破 Z。我们首先令

$$\widetilde{Z}_0 = Z, S_0 = S, B_0 = B, \widetilde{Z}_0 := Z_0, \widetilde{W^{(0)}} = W \text{ for all } W \in S_0.$$

假设我们已经构造了 $\widetilde{Z}_i, \widetilde{W}_{(i)} S_i, B_i$。接着设 $\widetilde{Z}_{i+1} = \mathrm{Bl}_{W_{i+1}^{(i)}} \widetilde{Z}_i$。对于任意子空间 $W_{(i)} \in S_i$，我们令 $W_{(i+1)}$ 为 $W^{(i)}$ 的严格变换，若 $W^{(i)}$ 不包含于 $W_{(i)\,i+1}$；否则，则取爆破下的原像。我们称 $W^{(i+1)}$ 为 W 的第 i 次迭代变换。

随后我们定义

$$S_{i+1} := \{\widetilde{W^{(i+1)}} : \widetilde{W^{(i)}} \in S_i, W \not\subseteq W_{i+1}\}, \quad B_{i+1} = (\widetilde{W}_{i+2}^{(i+1)}, \ldots, \widetilde{W}_n^{(i+1)}).$$

~ ~我们将所得空间 Z 称为: $= Z_n$ 与 B 相关的迭代爆破。

Proposition A.17. 假设 S 是 Z 中的正则嵌入系统，其建筑集为 B .

对于任意 i，等式

$$\widetilde{A}_1^{(i)} \cap \widetilde{A}_2^{(i)} = \widetilde{A_1 \cap A_2}^{(i)}$$

~ ~对所有 A_1、$A_2 \in S$都成立。如果 A_1 与 A_2 代数横截相交，那么 $\widetilde{A}_1^{(i)}$ 、 $\widetilde{A}_2^{(i)}$ 也具有同样的性质。

此外，对于每个 i ，子空间的集合 S_i 是~中的正则嵌入系统，Z_i 和 B_i 是一个建筑集。

证明。 证明通过对 i进行归纳法完成。当 $i = 0$ 时，根据定义结论成立。

在证明的其余部分，我们令 $X_1 = \widetilde{A}_1^{(i-1)}$ ， $X_2 = \widetilde{A}_2^{(i-1)}$ ， $X_3 = W_i^{(i-1)}$ 。

如果我们已经证明 S_{i-1} 是一个正则嵌入系统，那么可知S_i 也是一个正则嵌入系统，因为我们可以显式计算出定义严格变换的理想（见公式(A.3)）及其原像的正则序列。

我们可以将问题化归到局部情形，此时 $Z = \mathrm{Spec}\, R$ and X_i， $i = 1$、2、3 都是仿射的。由于在 X_3 之外，爆破是一个同构，只需在 $x \in X_3$ 附近验证等式。设 $\mathcal{I}_i$ 是在 x 的某个邻域内定义 X_i 的理想。我们断言，存在正则序列组 a、b_{12}、b_{13}、b_{23}、c_1、c_2、c_3，使得它们的串接 (a、b_{12}、b_{13}、b_{23}、c_1、c_2、c_3) 是 R 中的正则序列，并且

$$\mathcal{I}_1 = (a, b_{12}, b_{13}, c_1), \quad \mathcal{I}_2 = (a, b_{12}, b_{23}, c_2), \quad \mathcal{I}_3 = (a, b_{13}, b_{23}, c_3),$$
$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = (a, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2),$$
$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = (a, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, c_3).$$

设 $x \in Z$。要在 x 的某个邻域内构造这样的正则序列组，我们可以提升 $\kappa(x)$-向量空间 $(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)$ $/\mathfrak{m}_x(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)$ 的一个适当的基。根据 [Sta18，标签 067N] ，该提升是一个正则序列。

接下来，我们可以按照附录 A.2 计算严格变换的理想层。对于~ ~每个元素 $\alpha\, \mathcal{I}_3$，我们引入相应的射影坐标 $\tilde{\alpha}$。令 $\tilde{a}, b_{13}, b_{23}, \tilde{c}_3$ 为

~ ~相应的射影坐标元组。如前所述，序列 $(\widetilde{a}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, \widetilde{c_3})$
~ ~是爆破 Z_i 上的正则序列，对于严格变换的理想层 $\mathcal{I}_i$ ，我们得到

$$\widetilde{\mathcal{I}_1} = (\widetilde{a}, b_{12}, \widetilde{b}_{13}, c_1), \quad \widetilde{\mathcal{I}_2} = (\widetilde{a}, b_{12}, \widetilde{b}_{23}, c_2),$$
$$\widetilde{\mathcal{I}_1} + \widetilde{\mathcal{I}_2} = (\widetilde{a}, b_{12}, \widetilde{b}_{13}, \widetilde{b}_{23}, c_1, c_2).$$

~ ~ 因此
$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$。

□

定义 A.18。 设 S 为一个正则嵌入系统， B 为一个建筑集。若对于 V， $W \in S$ 满足 $V \subseteq W$ 总陈类$P_{V/W}$ 存在且定义在 R^*上，则称S 具有足够的总陈类 。

定理A.19。设 S 是一个具有足够总陈类~的正则嵌入系统，且 B 是一个带有迭代爆破 $Z \to Z$ 的建筑集。

令 $A \subseteq Z$，其不一定包含于 S 中。我们假设，对任意 $W \in S$ ，交 $W \cap A$ 都是干净的，并且所有总陈类

$$P_{A\cap W/A}, P_{A\cap W/W}, P_{\widetilde{A}/\widetilde{Z}}$$

定义在 R^* 上。

那么， A 有一个定义在 $R^*(Z)$ 上的总陈类，并且可以显式计算。

证明。 通过归纳法和命题 A.17，我们可以将问题归结为单次爆破的情形，即$B = \{W_1\}$。由于所有总陈类

$$P_{A\cap W_1/A}, P_{A\cap W_1/W_1}, P_{W_1/Z}, P_{\widetilde{A}/\widetilde{Z}}$$

定义在 R^* 上，该断言由推论 A.14 得出。 □

References

[AP19] A. Abreu 和 M.Pacini, *The resolution of the universal Abel map via tropical geometry and applications* 1903 08569 ,

预印本 arxiv: . .[Alu10] P. Aluffi *Chern classes of blow-ups.*《剑桥哲学学会数学论文集》, 148(2), 227-242。(2010)[BCGGM18] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Martin M ¨oller。*Compactification of strata of abelian differentials* 167 12 2018 2347 2416 。.《杜克数学杂志》。(), 第 – 页。[BCGGM19a] M. Bainbridge、D. Chen、Q. Gendron、S. Grushevsky 和 M. M¨oller。*Strata of k-differentials*。《代数几何》6.2(2019), 第 196–233 页。[BCGGM19b] M. Bainbridge、D. Chen、Q. Gendron、S. Grushevsky 和 M. M ¨oller。. 预印本 arXiv: . .[BHPSS21] , Y. Bae、D. Holmes、R. Pandharipande、J. Schmitt、R. Schwarz *The moduli space of multi-scale differentials* 1910 13492, 2019 *Pixton's formula and Abel-Jacobi theory on the Picard stack* 2004 08676 2004 08676, arXiv 预印本

hrefhttps://arxiv.org/abs/。arXiv: . 2021[Ben22] F. Benirschke。*The boundary of linear subvarieties in strata of differentials*《欧洲数学学会杂志》(2022)。[Ben20] F. Benirschke。*The closure of double ramification loci via strata of exact differentials* 2020) [BDG20] F. Benirschke、B. Dozier 和 S. Grushevsky *Equations of linear subvarieties of strata of differentials* 26, 2773 2830, 2022 《几何与拓扑》第 – 页。[BRZ21] A. Buryak、P. Rossi、D. Zvonkine。*Moduli spaces of residueless meromorphic differentials and the KP hierarchy.* 2110 01419 2021 预印本 arXiv: .

[17] Che D. Chen。*Teichmüller dynamics in the eyes of an algebraic geometer*。《代数几何近期进展综述》, 《纯数学专题研讨会论文集》第95卷(2017), 第171–197页, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州 [CGHMJ22] D. Chen、S. Grushevsky、D. Holmes、M. M ¨oller、J. Schmitt。. arXiv 预印本 arXiv: . .[CMS19] D¿ Chen、M. M ¨oller 和 A. Sauvaget, *Masur-Veech volumes and intersection theory: the principal strata of quadratic differentials* 1912 02267, 2019 Ariv 预印本 arXiv: . .[CMSZ20] D. Chen、D、M. M ¨oller、M.、A. Sauvaget、D. Zagier。《数学发明》页码 – ()。[CMS23] M. Costantini、M. M ¨oller、J. Schwab。, arXiv: . .[CMZ20a] M. Costantini、M. M ¨oller、J. Zachhuber。预印本 arXiv: .[20] *Masur–Veech volumes and intersection theory on moduli spaces of Abelian differentials* 222, 283 373 2020 *Chern classes of linear submanifolds with application to spaces of k-differentials and ball quotients* 2303 17929, 2023 *The Chern classes and the Euler characteristic of the moduli space of Abelian differentials* 2006 12803, 2020 CMZ

b M. Costantini、M. Moller 和 J. Zachhuber。*diffstrata – a Sage package for calculations in the tautological ring of the moduli space of Abelian differentials* 2020 2006 12815 。. arXiv: . .[DSZ21] V. Delecroix、J. Schmitt 和 J. van Zelm。*admcycles—a Sage pack- age for calculations in the tautological ring of the moduli space of stable curves* 11 1 2021 。《软件代数与几何杂志》. (), 第89–112页。[EH87] D. Eisenbud 和 J. Harris。*The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus ≥ 23*。《数学发明》, 90(2):359–387, (1987)[FP05] C. Faber 和 R. Pandharipande。*Relative maps and tautological classes.*《欧洲数学学会杂志》, 7.1(2005), 第13-49页。[FP15] C. Faber 和 N. Pagani。*The class of the bielliptic locus in genus 3.*《国际数学研究论文集》, 2015(12):3943–3961(2015)。[FP18] Farkas, G. 和 Pandharipande, R. *The moduli space of twisted canonical divisors.*《Jussieu 数学研究所杂志》, 17.3(2018), 第615-672页。[Ful98] W. Fulton *Intersection theory* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998, ISBN 978-0-387-98549-7, 出版日期: 26 1992, 2 June Edition number FM W. Fulton 和 R. MacPherson。*A Compactification of Configuration Spaces*。《数学年刊》139, 第1期(1994), 第183–225页。[Gen15] Q. Gendron。*The Deligne-Mumford and the Incidence Variety Compactifications of the Strata of* $\Omega\mathcal{M}_g$。《傅里叶研究所年刊》。68(2015), 10.5802/aif.3187。

[94]

[GP03] T¿ Graber 和R.Pandharipande。 *Constructions of nontautological classes on moduli spaces of curves.* 51 2003 1, 93 109 Michigan 数学杂志（），

第 期，第 – 页。[GV05] TomGraber和Ravi Vakil，《相对虚拟局部化与曲线模空间上重言类的消失》，Duke数学杂志 130.1（2005），第 1–37 页。[GZ14] S. Grushevsky 和D. Zakharov。 *The zero section of the universal semiabelian variety and the double ramification cycle* 163 5 2014 953 982 。Duke 数学杂志。。

（），第 – 页。[HKP18] D.Holmes、J.Kass 和 N.Pagani。 *Extending the double ramification cycle using Jacobians*。欧洲数学杂志，4.3（2018），第 1087–1099页。[Hol19] D. Holmes,

Extending the double ramification cycle by resolving the Abel-Jacobi map。Jussieu数学研究所杂志，1-29，2019。[JRPZ17] F. Janda、R. Pandharipande、A. Pixton 和 D. Zvonkine， *Double ramification cycles on the moduli spaces of curves* ´ 125 1 2017 221 266 ，《IH ´ES 数 [22] *Abelian differentials and their periods: the bialgebraic point of view* 学出版物》。（），第 –页。KLB. Klingler和 L. Lerer，。arXiv预印本2022）[Li01] J.Li。

Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms，《微分几何杂志》57.3（2001），509–578。[Li02] J. Li。GW不变量的一个退化公式，《微分几何杂志》60.2（2002），第 2期，199–293。[Lia21] C. Lian。

The H-tautological ring，《数学选刊》（新系列）27（2021），文章编号 96。[MPS23] S. Molcho、R.Pandharipande 和 J. Schmitt。 *The Hodge bundle the universal 0-section and the* ，《》， *log Chow ring of the moduli space of curves.* 159 2 306 354, 2023 Compositio Mathematica，（）第 - 页。[Mul22] S. Mullane。

Strata of differentials of the second kind positivity and irreducibility of certain ，《》，法国傅里叶研究 *Hurwitz spaces.* 72 2022 4, 1379 所年刊，第 卷（）第期，第 -页 1416

[83] *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves* Mum D.Mumford。。

数论与几何，1983，第 271-328 页。[PP06] F.Pervova和 C.Petronio。 *On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data I.* 6 4, 1957 1985, 2006 ，《代数与几何拓扑》。。

第 -页。[Sau17] A.Sauvaget。 *Théorie de l'intersection sur les espaces de différentielles holomorphes et méromorphes* 。学位论文[Sau19]

A.Sauvaget。 *Cohomology classes of strata of abelian differentials.*《几何与拓扑》，23(3):1085–1171（2019）。[SvanZ20] J. Schmitt 和 J. vanZelm。 *Intersections of loci of admissible covers with tautological classes*。《选择数学》新系列 26，79（2020）[Sta18] Stacks 项目作者。 *Stacks*。 *Stacks Project*，https://stacks.math.columbia.edu，（2023）[Vis89a] A. Vistoli *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*《数学发明》 90 3 1989 613 670 。（），第 – 页。Vis b A. Vistoli。

[89] *Alexander duality in intersection theory.* Compositio Mathematica 70.3（1989），第 199-225 页。