关于具有模幂 Schmidt 子群的群

Victor S. Monakhov 和 Irina L. Sokhor

数学与编程技术系，白俄罗斯弗朗齐斯克·斯科里纳戈梅利国立大学

victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com

arXiv:2304.04081v1 [math.GR] 8 Apr 2023

摘要

我们证明，如果群 G 中的每个 Schmidt 子群都是次正规或模的，那么 $G/F(G)$ 是循环的。

1 引言

本文中的所有群都是有限群。

若群 G 是 Schmidt 群，则 G 是非幂零的，且 G 的每个真子群都是幂零的。B. Huppert 在其专著 [1] 中专门辟了一节讨论 Schmidt 群。V.S. Monakhov [2] 回顾了有关 Schmidt 群性质、有限群中 Schmidt 子群的存在性及其在有限群类理论中的一些应用的研究成果。

在 [3, 4]中研究了具有次正规 Schmidt 子群的群。特别是，V. A. Vedernikov 证明了以下结论。

如果群 G 的所有Schmidt 子群在 G中都是次正规的，那么 $G/F(G)$ 是循环的，[4]。

这里， $F(G)$ 是群 G 的 Fitting 子群。

[3,4] 的结果向各个方向发展。具有部分次正规Schmidt 子群的群的性质在 [5] 中进行了描述。具有 σ-次正规Schmidt 子群的群在 [6–9]中进行了研究。具有模 Schmidt 子群的群在 [9–11]中进行了研究。在 [5], 中提出了描述所有 Schmidt 子群都是模子群的群的群的结构这一问题。特别是,

问题 1 ([5, 第 175]页)。 对于一个(G) 所有 *Schmidt* 子群都是模的群 G，其商群 G/F是否为循环的?

下面的定理是我们的结果。

定理1。 如果群 G 的每个 *Schmidt* 子群都是次正规的或模的，那么G/F（G） 是循环的。

推论 1.1。 如果群 G 的每个 *Schmidt* 子群都是模子群，那么 $G/F(G)$是循环的。

2 预备知识

模子群的概念源于格论。如果群 G 的子群 M在 G 中是模的，即 M 是 G的子群格中的一个模元。R. Schmidt [12]对模子群进行了详细分析。

我们称群 G 是一个 P-群，如果 G 要么是阶为p^{n+1} 的初等阿贝尔群，其中 p 为素数；要么是一个初等阿贝尔正规子群A （阶为 p^n ）与一个素数阶群 q的半直积， $q \neq p$，它在 A [12,p上诱导出一个非平凡的幂自同构。 49]。

引理 1 ([12, 定理 5.1。14])。 M 是群 G 的子群，当且仅当其在 G 中是模的

$$G/M_G = S_1/M_G \times \ldots \times S_r/M_G \times T/M_G,$$

其中 $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，且对于所有 i， $j \in \{1, \ldots, r\}$,

(1) S_i/M_G 是一个非阿贝尔P-群，(2) $(|S_i/M_G|, |S_j/M_G|) = (|S_i/M_G|, |T/M_G|) = 1$对于 $i \neq j$，(3) $M/M_G = Q_1/M_G \times \ldots \times Q_r/M_G \times (T \cap M)/M_G$且 Q_i/M_G是 S_i/M_G 的非正规 *Sylow* 子群，

(4) $M \cap T$ 在 G中是可置换的。

下文中，用 $\mathfrak{A}_1$ 表示由所有具有初等阿贝尔 Sylow 子群的阿贝尔群组成的非饱和形成，用 $G^{\mathfrak{A}_1}$ 表示群 G的 $\mathfrak{A}_1$-剩余，即 G 中商群属于 $\mathfrak{A}_1$的最小正规子群。

引理 2 ([13, 引理 4]). 若 H 是群 G的模子群，则 H' 和$H^{\mathfrak{A}_1}$ 是 G的次正规子群。

引理 3 ([1–4]). 设 S 是一个 *Schmidt* 群。以下结论成立。

(1) $S = P \rtimes Q$，其中 P 是正规 *Sylow* p-子群， $Q = \langle y \rangle$ 是非正规 *Sylow* q-子群，且 p 和 q是不同的素数。(2) $S' = P$, $\Phi(S) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$, $y^q \in Z(S)$.(3) S 是超可解的，当且仅当 $|P| = p$ 且 q 整除 $p - 1$。

根据 [2], ，我们用 $S_{\langle p,\ q \rangle}$ 表示所有具有正规 Sylow p-子群和非正规循环的 Sylow q-子群的 Schmidt 群组成的类。因此，每个$S_{\langle p,\ q \rangle}$-群都可以表示为 $P \rtimes Q$, 其中 P 是正规 Sylow p-子群，而$Q = \langle y \rangle$ 是循环的非正规 Sylow q-子群。

引理 4. 设 $M = P \rtimes Q$ 是群 G 的一个模$S_{\langle p,\ q \rangle}$-子群。以下结论成立。

(1) $P \times \langle y^q \rangle \leq F(G)$，其中 $\langle y \rangle = Q$。

(2) 若 M 在 G 中不是次正规子群，则 G/M_G 是一个阶为$p_1^n q$的非阿贝尔 P-群，其中 $p_1 > q$和 $|G| = |M| p_1^n$为素数。

证明。 (1) 根据引理 3 (2)， $M' = P$，因此 $M^{\mathfrak{A}_1} = P \times \langle y^q \rangle$。由引理 2，$P \times \langle y^q \rangle$ 是 G 的次正规子群。由于 $P \times \langle y^q \rangle$ 是幂零的，我们得到 $P \times \langle y^q \rangle \leq F(G)$。

(2) 由于 $M_G < M$ 和 M/M_G 由 [12, 定理 5.1.14], 是幂零的，我们推得 $P \leq M_G$和 $M/M_G = (P \rtimes Q)/M_G \cong Q/(Q \cap M_G)$ 是一个循环的 q-群。因此， M/M_G 不能分解为两个真子群的直积。利用引理 1 (3)，我们得到 $r = 0$ 或 $r = 1$。

若 $r = 0$，则 $G/M_G = T/M_G$，并根据引理 1 (4)， M是可置换的。但根据定理 5.1， [12, 中的可置换子群是次正规子群。1], 矛盾。因此 $r = 1$。由引理 1 (3) 可知， $T/M_G = 1$，且 $M/M_G = Q_1/M_G$是 S_1/M_G的一个非正规 Sylow q_1-子群，特别地， $q_1 = q$。根据引理 1 (1)， G/M_G 是非阿贝尔 P-群。 □

例 1。 在阶为 D_{30} 30 的二面体群中，一个非次正规的 Schmidt 子群 S_3 是模的，并且 $|D_{30}| = |S_3| \cdot 5$。因此，李玛 4 (2) 中的 $p_1 \neq p$ 一般成立。

3 定理1的证明

如果群 G 的每个 Schmidt 子群在 G中都是次正规的，那么 $G/F(G)$ 是循环的 [4, 推论 1]。设 G 包含一个非次正规的 $S_{\langle p,\ q\rangle}$-子群 $M = P \rtimes Q$。根据 G的选取，M 在 G中是模的。由李玛 4 (2) 可知， G/M_G 是一个阶为 $p_1^n q$的非交换 P-群，$p_1 > q$，并且 $|G| = |M|p_1^n$。由于 $|\pi(M)| = 2$，我们得到$|\pi(G)| \leq 3$。

设 $|\pi(G)| = 2$。则 $p_1 = p$ 和 $|G| = |P|p^n|Q|$。根据 P-群的定义，q整除（$p-1$）。因此，根据引理3（3）， M是超可解的，且 $|P| = p$。由于P-群是超可解的并且 $P \leq F(G)$，所以 G 是 p-闭的。由于 Q 是 G的一个西洛子群，我们得到 $G/F(G)$ 是循环的。

设 $|\pi(G)| = 3$。则 $G = MP_1 = (P \rtimes Q)P_1$、 $p \neq p_1$，且 P_1 是 G的 Sylowp_1-子群。根据P-群的定义， P_1 是一个初等阿贝尔子群，且 q 整除 $(p_1 - 1)$。不妨设 P_1Q是 G的一个子群。由于 q 整除$(p_1 - 1)$，我们得到 P_1Q 是超可解的。由于 P_1 是一个初等阿贝尔子群，根据 Maschke 定理，存在元素 a_1、...、 a_n使得

$$P_1 = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_n\rangle$$

并且对于每个 i， $\langle a_i\rangle Q$ 都是一个子群。根据引理 4 (2),

$$G/M_G = (P_1M_G/M_G) \rtimes (QM_G/M_G)$$

是一个 P-群。因此， QM_G/M_G 在 P_1M_G/M_G上诱导一个非平凡的幂自同构，特别是,

$$(\langle a_i\rangle M_G/M_G) \rtimes (QM_G/M_G)$$

对于每个 i，它都不是幂零的。因此， $\langle a_i\rangle Q$ 不是幂零的，并且存在一个 Schmidt 子群 $S_i = \langle a_i\rangle \rtimes Q_i$。根据 G的选取， S_i 在 G中是次正规或模的。根据引理 3 (2), $\langle a_i\rangle = S_i'$。如果 S_i 在 G中是次正规的，那么 $\langle a_i\rangle$ 在 G中也次正规。设 S_i 在 G中是模的。由引理 2， $\langle a_i\rangle$ 在 G 中是次正规的。因此，对于每个 i， $\langle a_i\rangle$ 在 G 中是次正规的。因此， $P_1 = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_n\rangle$ 在 G 中正规，且 $PP_1 \leq F(G)$。但现在 $G/F(G) \cong QF(G)/F(G)$ 是循环的。

参考文献

[1] B.Huppert，《有限群》I，Springer-Verlag，柏林–海德堡–纽约，1967年。[2] V. S.Monakhov，Schmidt 子群、其存在性及其一些应用。载于：《2001年乌克兰数学大会论文集》，乌克兰国家科学院数学研究所，基辅（2002年），81–90。[3] V. N. Knyagina，V.S.Monakhov，具有次正规Schmidt 子群的有限群，《西伯利亚数学杂志》，45(6)（2004年）1075–1079。[4] V. A. Vedernikov，具有次正规 Schmidt 子群的有限群，《代数与逻辑》，46(6)（2007年）363–372。[5] J.Huang，B. Hu，A.N.Skiba，A.N.，具有弱次正规和部分次正规子群的有限群，《西伯利亚数学杂志》，62 (1)（2021年）169–177。[6] K.A.Al-Sharo，A. N. Skiba，关于具有 σ-次正规 Schmidt子群的有限群，《代数通讯》，45(10)（2017年）4158–4165。[7] X. Yi，S. F. Kamornikov，具有 σ-次正规Schmidt子群的有限群，《代数杂志》，560（2020年）181–191。[8] A. Ballester-Bolinches，S. F. Kamornikov，X. Yi，具有 σ-次正规 Schmidt 子群的有限群，《马来西亚数学科学学会通报》，45（2022年）2431–2440。

[9] B. Hu、J. Huang, 《具有广义 σ-次正规 Schmidt 子群的有限群》, 《代数通讯》, 46(7)（2018年）3127–3134。[10] I. V. Bliznets、V. M. Selkin, 《具有模 Schmidt 子群的有限群》, 《概率、物理、数学与技术》, 4(41)（2019年）36–38。[11] B. Hu、J. Huang、D. Song、I. N. Safonova, 《具有 K-$\mathfrak{F}$-次正规 Schmidt 子群的有限群》, 《代数通讯》, 49(10)（2021年）4513–4518。[12] R. Schmidt, 《群的子群格》, DeGruyter, 柏林—纽约, 1994年。[13] I. Zimmermann, 《有限群中的次模子群》, 《数学杂志》, 202（1989年）545–557。