arXiv:2304.04102v1 [math.CA] 8 Apr 2023

论可转化为超几何级数的双伽马级数

Asena Çetinkaya*和 Dmitrii Karp†

摘要

包含双伽马函数的级数，常见于计算超几何函数的参数导数，并在费曼图的求值中发挥作用。由于这类级数通常不是超几何级数，因此，少数可用超几何函数求和的情形尤为重要。本文通过适当的极限过程，将广义超几何函数在单位元处取值的多项恒等式，转化为将其与双伽马级数联系起来的恒等式。所得公式可视为广义超几何函数关于其所有参数的梯度 1-范数的超几何表达式，在现有文献中似乎没有直接对应的结果。

1 引言与记号

含有欧拉伽马函数的对数导数 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 的级数 $\Gamma(z)$，称为 digamma 函数或 psi 函数，在许多场合中都会出现。首先，它们可以表示超几何函数关于参数的导数；超几何函数在数学物理的若干领域中发挥着重要作用，尤其是在计算费曼图时，参见 [15, 16]，以及涉及分数阶微分方程的问题 [3]。数学物理中的许多其他问题也涉及超几何函数及其关于参数的导数，可见[1]和 [18]。因此，前述论文以及 [9] 均发表在物理或数学

2020*AMS*数学学科分类：*33C20,33B15,33C99* 关键词和短语：超几何级数，双伽马级数，求和公式

*土耳其伊斯坦布尔，伊斯坦布尔文化大学。电子邮件：asnfigen@hotmail.com

†通讯作者。以色列霍隆，霍隆理工学院。电子邮件：dimkrp@gmail.com

物理学期刊。可能最早的双伽马级数求值综合集载于Hansen 的著作[14, 第55节, 360–6]（另见Borwein在附录 [5] 中按 55.∗编号的公式）。过去二十年间，这一主题相当活跃， [1, 3, 6, 7, 9, 11, 12, 17, 18, 19, 20]中发现了许多不同的结果，这些论文中还列出了大量参考文献。2008年以前的结果总结于 Brychkov的著作[6], 中，特别参见第 1.30.2 节和第 6.2节。文献中推导的大多数公式，都将通过对超几何函数关于其参数求导而得到的ψ级数转换为多重超几何级数，这些级数通常属于Kamp´e deF´eriet型[1, 7, 9, 11, 17, 18, 20]。然而，在更特殊的情形下，这类级数可以通过求和，或者更确切地说，转换为单个超几何级数 [2, 第 3]章。此类特殊情形十分重要，因为超几何函数的性质及其计算算法已经发展得相当完善，从而便于处理相应的ψ级数。Cvijovi´c在[9] 中建立了一组优雅的此类公式，作为对 Miller 先前工作的延续[18], ，后来 Cvijovi´c 和 Miller 又利用这些公式建立了Kamp´ede F´eriet函数 [10]的新约化公式。这些文献所处理的级数是幂级数，其系数包含双伽马函数，而推导主要基于Gauss超几何函数的 Euler–Pfaff变换 ${}_2F_1$ 以及合流超几何函数的Kummer 变换 ${}_1F_1$。其他研究则采用级数重排和超几何微分方程。沿这一方向的较新结果见 [12, 13]。我们的证明方法不同于所有这些技巧，而是基于在正或负单位元处求值的广义超几何函数的多项恒等式的退化，其中包括最近建立的那些恒等式[8]。我们将采用这一方法，把某些包含双伽马函数的相当一般的级数转换为在同一点求值的单变量超几何函数的组合。由于在固定自变量处，超几何函数具有丰富得多的变换集合，我们的公式具有任意数量的自由参数，不像Miller 和Cvijovi´c 的公式[10, 9, 18] ， 也不像Gonz´alez-Santander和 S´anchezLasheras的公式[12, 13] ， 以及 [6, 6中列出的公式。2.1.62-81]。

为说明本文所预期结果的特点，我们先引入以下简写记号：

$$\begin{gathered}\Gamma(\mathbf{a})=\prod_{i=1}^{p}\Gamma(a_i),\quad (\mathbf{a})_k=\prod_{i=1}^{p}(a_i)_k,\quad \sin(\mathbf{a})=\prod_{i=1}^{p}\sin(a_i),\\ \mathbf{a}+\beta=(a_1+\beta,\ldots,a_p+\beta),\quad \mathbf{a}_{[k]}=(a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_p)\end{gathered}\tag{1}$$

对于任意向量a $=(a_1,\ldots,a_p)\in\mathbb{C}^p$ （复数 p-元组的集合）以及标量 β。

除此之外，我们还将证明以下恒等式：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k(\pm1)^k}{\pi(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]\\
&=\left[\sum_{a\in\mathbf{a}}\cot(\pi a)-\sum_{b\in\mathbf{b}}\cot(\pi b)\right]{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle|\pm1\right)\mp\frac{(1-\mathbf{b})_1}{\pi(1-\mathbf{a})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{b}\\ 2-\mathbf{a}\end{matrix}\middle|\pm1\right)\\
&+\frac{\Gamma(1-\mathbf{a})}{\Gamma(1-\mathbf{b})}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{[\cos(\pi b_k)]^{\{1\}_0}\Gamma(b_k-1)\Gamma(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}{\sin(\pi b_k)\Gamma(b_k-\mathbf{a})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-b_k+\mathbf{a}\\ 2-b_k,1-b_k+\mathbf{b}_{[k]}\end{matrix}\middle|\pm1\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

and

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k}{(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]\\
&=\frac{\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a})}\sum_{k=1}^{p}\frac{\pi\Gamma(a_k)\Gamma(\mathbf{a}_{[k]}-a_k)}{\sin(\pi a_k)\Gamma(\mathbf{b}-a_k)}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}a_k,1-\mathbf{b}+a_k\\ 1-\mathbf{a}_{[k]}+a_k\end{matrix}\right)-\frac{(1-\mathbf{b})_1}{(1-\mathbf{a})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{b}\\ 2-\mathbf{a}\end{matrix}\right),
\end{aligned}\tag{3}$$

此处及下文中 ${}_pF_q(\mathbf{a};\mathbf{b};z)$ 表示广义超几何函数[4, (2.1.2)]而省略的自变量 z 表示 $z=1$。注意，利用初等关系

$$\frac{d}{da}(a)_n=(a)_n(\psi(a+n)-\psi(a)),\qquad \frac{d}{db}\left[\frac{1}{(b)_n}\right]=\frac{1}{(b)_n}(\psi(b)-\psi(b+n))$$

（2）和（3）左端的表达式可写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k(\pm1)^k}{(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]\\
&=-\mathbf{1}\cdot\nabla_{\mathbf{a},\mathbf{b},\beta}\,{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{a},1\\ \mathbf{b},\beta\end{matrix}\middle|\pm1\right)\Big|_{\beta=1}+\left\{\sum_{b\in\mathbf{b}\cup\{1\}}\psi(b)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a)\right\}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle|\pm1\right),
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}\cdot\nabla_{\mathbf{a},\mathbf{b},\beta}f(\mathbf{a},\mathbf{b}\ \beta)$ 表示 f 关于 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的各分量及变量 β 的一阶偏导数之和。因此，本文中的公式（2）、（3）以及许多其他恒等式都可以视为广义超几何函数关于其所有参数的梯度的 1-范数的表达式

广义超几何函数关于其所有参数的梯度

（2）和（3）左端的另一种写法是通过 Kamp´e de F´eriet 函数 [21,(28)]。事实上，利用

$$\psi(b+k)-\psi(b)=\frac{1}{b}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(b)_j}{(b+1)_j}$$

并重新排列求和，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k(\pm1)^k}{(\mathbf{b})_k k!}&\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]\\&=\pm\frac{(\mathbf{a})_1}{(\mathbf{b})_1}\sum_{b\in\mathbf{b}\cup\{1\}}\frac{1}{b}F^{p:2:1}_{p:1:0}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}+1 & :b,1 & :1\\ \mathbf{b}+1,2 & :b+1 & :-\end{matrix}\,\middle|\,\pm1,\pm1\right)\\&\quad\mp\frac{(\mathbf{a})_1}{(\mathbf{b})_1}\sum_{a\in\mathbf{a}}\frac{1}{a}F^{p:2:1}_{p:1:0}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}+1 & :a,1 & :1\\ \mathbf{b}+1,2 & :a+1 & :-\end{matrix}\,\middle|\,\pm1,\pm1\right)\\&\qquad+\left\{\sum_{b\in\mathbf{b}\cup\{1\}}\psi(b)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a)\right\}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\,\middle|\,\pm1\right).\end{aligned}$$

本文结构安排如下。在接下来的三个章节中，我们将分别对三个恒等式 [8, (5.2)], [8, (5.1)] 和 [8, (5.4)], 应用退化过程。这将得到三个含有双伽马函数的级数变换公式，这些公式的组合及其特例尤其可导出上述恒等式（2）和（3）。第4节末尾的公式（19）给出了另一个重要特例。比较（2）和（3）的右端以及其他类似公式，我们还得到了两个可能是新的多项超几何函数恒等式，其取值点为单位元，见公式（16）和（20）。

2 第一个变换公式

引言中 प्रस्तुत的公式将作为若干级数变换公式的推论加以推导，这些变换公式包含与上升阶乘相一致的双伽马函数。其中一个分母参数必须是正整数。在本节中，这个整数表示

恒等式中适当的参数差 [8, （5.2）]，该恒等式将作为退化过程的起点。使用以下记号将十分方便

$$ {}_p\phi_q\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(\mathbf{a})}{\Gamma(\mathbf{b})}{}_pF_q\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathbf{a}+k)}{\Gamma(\mathbf{b}+k)k!}. \tag{4} $$

本节的主要结果是

定理 2.1. 设 $\mathbf{c} \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})^{p+1}$, $\mathbf{d} \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})^{p-1}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及 $\Re(\sum_{j=1}^{p-1} d_j - \sum_{j=1}^{p+1}(c_j)) > -m-1$. 则

$$ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{c})_k}{(\mathbf{d})_k(m+k)!k!}\Big\{\sum_{d\in\mathbf{d}}\psi(d+k)+\psi(k+1)+\psi(1+m+k)-\sum_{c\in\mathbf{c}}\psi(c+k)\Big\} \\ &\qquad = \frac{\pi}{m!}\left\{\sum_{c\in\mathbf{c}}\cot(\pi c)-\sum_{d\in\mathbf{d}}\cot(\pi d)\right\}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{c}\\ 1+m,\mathbf{d}\end{matrix}\right) \\ &\qquad + \frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c})_1(m-1)!}{}_{p+2}F_{p+1}\left(\begin{matrix}1-m,2-\mathbf{d},1,1\\ 2-\mathbf{c}\end{matrix}\right) - \frac{\Gamma(1-\mathbf{c})}{\Gamma(1-\mathbf{d})} \\ &\times\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^m\Gamma(d_k-m)\Gamma(d_k)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})}{(d_k-m-1)(d_k-1)\Gamma(d_k-\mathbf{c})}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1+\mathbf{c}-d_k\\ 2-d_k,2-d_k+m,1+\mathbf{d}_{[k]}-d_k\end{matrix}\right). \end{aligned} \tag{5} $$

证明。 我们从恒等式 [8, (5.2)]写成如下形式开始

$$ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[1]}-b_1)}{\Gamma(\mathbf{w}-b_1)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_1\\ 1-\mathbf{b}_{[1]}+b_1\end{matrix}\right)+\frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[2]}-b_2)}{\Gamma(\mathbf{w}-b_2)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_2\\ 1-\mathbf{b}_{[2]}+b_2\end{matrix}\right) \\ &\qquad = -\sum_{k=3}^{p+1}\frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[k]}-b_k)}{\Gamma(\mathbf{w}-b_k)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_k\\ 1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k\end{matrix}\right) \end{aligned} \tag{6} $$

并且对于 $\mathbf{b}$、$\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{p+1}$ 成立，其中 $\mathbf{b}$ 的各分量模整数互不相同。令 $b_2 = b_1+m+\varepsilon$、$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，利用反射公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$，以及初等关系 $\sin(\pi(z+m)) = (-1)^m\sin(\pi z)$，对于（6）的左端，我们得到

$$ \begin{aligned} \text{LHS of (6)} &= \frac{(-1)^m}{\pi\sin(\pi\varepsilon)}\Big(f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)\Big) \\ &= \frac{(-1)^m}{\sin(\pi\varepsilon)}\Big(f_1(0)+\varepsilon f_1'(0)-f_2(0)-\varepsilon f_2'(0)+O(\varepsilon^2)\Big) \\ &= \frac{(-1)^m\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon)}\Big(f_1'(0)-f_2'(0)+O(\varepsilon)\Big) \to \frac{(-1)^m}{\pi}\Big(f_1'(0)-f_2'(0)\Big) \text{ as } \varepsilon\to 0, \end{aligned} $$

其中我们对函数应用了泰勒定理

$$f_1(\varepsilon) = \frac{\sin(\pi(\mathbf{w} - b_1))}{\pi \sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]} - b_1))} {}_{p+1}\phi_p \left(\begin{matrix} 1 - \mathbf{w} + b_1 \\ 1 - m - \varepsilon, 1 - \mathbf{b}_{[1,2]} + b_1 \end{matrix} \right)$$

and

$$f_2(\varepsilon) = \frac{\sin(\pi(1 - \mathbf{w} + b_1 + \varepsilon))}{\pi \sin(\pi(1 - \mathbf{b}_{[1,2]} + b_1 + \varepsilon))} {}_{p+1}\phi_p \left(\begin{matrix} 1 - \mathbf{w} + b_1 + m + \varepsilon \\ 1 + m + \varepsilon, 1 - \mathbf{b}_{[1,2]} + b_1 + m + \varepsilon \end{matrix} \right)$$

其中 ϕ 定义于（4）中。上面的倒数第二个等式归因于 $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0})$，验证这一点相当直接。为了计算导数，我们需要以下两个求导法则：

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\sin(\pi(\mathbf{a} + \varepsilon))}{\sin(\pi(\mathbf{d} + \varepsilon))} \right] = \pi \frac{\sin(\pi(\mathbf{a} + \varepsilon))}{\sin(\pi(\mathbf{d} + \varepsilon))} \left[\sum_{a \in \mathbf{a}} \cot(\pi(a + \varepsilon)) - \sum_{d \in \mathbf{d}} \cot(\pi(d + \varepsilon)) \right] \tag{7}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\Gamma(\mathbf{a} + \varepsilon + k)}{\Gamma(\mathbf{d} + \varepsilon + k)} \right] = \frac{\Gamma(\mathbf{a} + \varepsilon + k)}{\Gamma(\mathbf{d} + \varepsilon + k)} \left[\sum_{a \in \mathbf{a}} \psi(a + \varepsilon + k) - \sum_{d \in \mathbf{d}} \psi(d + \varepsilon + k) \right] \tag{8}$$

对于任意固定的向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{d}$。因此，我们得到：

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\sin(\pi(\mathbf{w} - b_1))}{\pi \sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]} - b_1))} {}_{p+1}\phi_p \left(\begin{matrix} 1 - \mathbf{w} + b_1 \\ 1 - m - \varepsilon, 1 - \mathbf{b}_{[1,2]} + b_1 \end{matrix} \right) \right]_{\varepsilon = 0} \\ &= \frac{\sin(\pi(\mathbf{w} - b_1))}{\pi \sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]} - b_1))} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi(1 - m + k)\Gamma(1 - \mathbf{w} + b_1 + k)}{\Gamma(1 - m + k)\Gamma(1 - \mathbf{b}_{[1,2]} + b_1 + k)k!} \\ &\quad + \frac{\sin(\pi(\mathbf{w} - b_1))}{\pi \sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]} - b_1))} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\psi(1 - m + k)\Gamma(1 - \mathbf{w} + b_1 + k)}{\Gamma(1 - m + k)\Gamma(1 - \mathbf{b}_{[1,2]} + b_1 + k)k!}. \end{aligned}$$

根据反射公式，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\Gamma(z)} \right] &= \frac{d}{dz} \left[\frac{\sin(\pi z)\Gamma(1 - z)}{\pi} \right] \\ &= \cos(\pi z)\Gamma(1 - z) - \frac{1}{\pi} \sin(\pi z)\psi(1 - z)\Gamma(1 - z) = -\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}, \end{aligned}$$

因此对于 $n=0$、1、2、.....

$$\frac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)} = -\cos(\pi(-n))\Gamma(1+n) = (-1)^{n+1}n!, \tag{9}$$

并且，根据（7），导数 $f_1'(0)$ 具有如下形式

$$f_1'(0) = V + \frac{\sin(\pi(\mathbf{w}-b_1))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(1+k)\Gamma(1-\mathbf{w}+b_1+m+k)}{\Gamma(1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)k!},$$

其中

$$V = \frac{\sin(\pi(\mathbf{w}-b_1))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)!\Gamma(1-\mathbf{w}+b_1+k)}{\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+k)k!}.$$

类似地，根据（7）和（8），我们有：

$$\begin{aligned}
&f_2'(0)\\
&= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\sin(\pi(1-\mathbf{w}+b_1+\varepsilon))}{\pi\sin(\pi(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+\varepsilon))}{}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_1+m+\varepsilon\\ 1+m+\varepsilon, 1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+\varepsilon\end{matrix}\right)\right]_{\varepsilon=0}\\
&\quad = U + \frac{\sin(\pi(\mathbf{w}-b_1))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\mathbf{w}+b_1+m+k)}{\Gamma(1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)k!}\\
&\times\left\{\sum_{w\in\mathbf{w}}\psi(1-w+b_1+m+k) - \sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\psi(1-b+b_1+m+k) - \psi(1+m+k)\right\},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
U = \frac{\sin(\pi(\mathbf{w}-b_1))}{\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}&\left\{\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\cot(\pi(b-b_1)) - \sum_{w\in\mathbf{w}}\cot(\pi(w-b_1))\right\}\\
&\times {}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_1+m\\ 1+m, 1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m\end{matrix}\right)
\end{aligned}$$

并且我们应用了基本关系式 $\sin(\pi(x-m)) = (-1)^m\sin(\pi x)$、$\cot(\pi(x\pm m)) = \cot(\pi x)$、$\cot(\pi(1-x)) = -\cot(\pi x)$。于是得到

$$\begin{aligned}
&f_1'(0) - f_2'(0) = V - U + \frac{\sin(\pi(\mathbf{w}-b_1))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\mathbf{w}+b_1+m+k)}{(m+k)!\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)k!}\\
&\times\left\{\psi(k+1)+\psi(1+m+k)+\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\psi(1-b+b_1+m+k) - \sum_{w\in\mathbf{w}}\psi(1-w+b_1+m+k)\right\}.
\end{aligned}$$

将其代回6式，取 $b_2 = b_1 + m$ 可得

$$\frac{\sin(\pi(\mathbf{w}-b_1))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\mathbf{w}+b_1+m+k)}{\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)(m+k)!k!}$$
$$\times\left\{\psi(k+1)+\psi(1+m+k)+\sum\psi(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)-\sum\psi(1-\mathbf{w}+b_1+m+k)\right\}$$
$$= U - V - (-1)^m\pi\sum_{k=3}^{p+1}\frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[k]}-b_k)}{\Gamma(\mathbf{w}-b_k)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_k\\1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k\end{matrix}\right)$$

或者，根据 V和 U的定义：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\mathbf{w}+b_1+m)_k}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m)_k(m+k)!k!}$$
$$\times\left\{\psi(k+1)+\psi(1+m+k)+\sum\psi(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)-\sum\psi(1-\mathbf{w}+b_1+m+k)\right\}$$
$$= \frac{\pi}{m!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\cot(\pi(b-b_1))-\sum_{w\in\mathbf{w}}\cot(\pi(w-b_1))\right]{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_1+m\\1+m,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m\end{matrix}\right)$$
$$-\frac{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_m}{(1-\mathbf{w}+b_1)_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)!(1-\mathbf{w}+b_1)_k}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_k k!}$$
$$-\frac{(-1)^m\Gamma(\mathbf{w}-b_1-m)}{\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)}\sum_{k=3}^{p+1}\frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[k]}-b_k)}{\Gamma(\mathbf{w}-b_k)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{w}+b_k\\1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k\end{matrix}\right).$$

令 $1-\mathbf{w}+b_1+m=\mathbf{c}\in\mathbb{C}^{p+1}$, $1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m=\mathbf{d}\in\mathbb{C}^{p-1}$，应用关系式即可得到(5)

$$\frac{(1-\mathbf{d})_m}{(1-\mathbf{c})_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!(\mathbf{c}-m)_k}{(-1)^{m-k}(\mathbf{d}-m)_k k!}=\frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c})_1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^{j+1}(2-\mathbf{d})_j j!}{(2-\mathbf{c})_j(m-1-j)!}$$
$$=-\frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c})_1(m-1)!}{}_{p+2}F_{p+1}\left(\begin{matrix}1-m,2-\mathbf{d},1,1\\2-\mathbf{c}\end{matrix}\right),\quad(10)$$

其中在第一个等式中，我们使用了

$$\frac{(1-\mathbf{d})_m}{(\mathbf{d}-m)_k}=(-1)^{k(p-1)}(1-\mathbf{d})_1(2-\mathbf{d})_{m-k-1}.\qquad\square$$

3 第二个变换公式

这里我们将推导出（5）左端的另一种超几何表示。比较这两种表示，我们将得到广义超几何函数的一个可能是新的多项恒等式，以及公式（2）的“+”情形。

定理 3.1. 设 $\mathbf{c} \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})^{p+1}$, $\mathbf{d} \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})^{p-1}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且 $\Re(\sum_{j=1}^{p-1} d_j - \sum_{j=1}^{p+1}(c_j)) > -m-1$. 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{c})_k}{(\mathbf{d})_k (m+k)!k!}\Big\{\sum_{d\in\mathbf{d}} \psi(d+k) + \psi(k+1) + \psi(1+m+k) - \sum_{c\in\mathbf{c}} \psi(c+k)\Big\} \\
&\qquad = \frac{\pi}{m!}\Bigg[\sum_{c\in\mathbf{c}_{[1]}} \cot(\pi c) - \sum_{d\in\mathbf{d}_{[1]}} \cot(\pi d)\Bigg]\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{c}\\ 1+m, \mathbf{d}\end{matrix}\right) \\
&\qquad\quad + \frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c})_1 (m-1)!}\, {}_{p+2}F_{p+1}\left(\begin{matrix}1-m, 2-\mathbf{d}, 1, 1\\ 2-\mathbf{c}\end{matrix}\right) \\
&+ \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(d_1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]})\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]}+c_1)}{(1-c_1)_m \Gamma(d_1-c_1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]}+c_1)\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]})}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}c_1, c_1-m, 1-\mathbf{d}+c_1\\ 1-\mathbf{c}_{[1]}+c_1\end{matrix}\right) \\
&- \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mathbf{c})\sin(\pi c_1)}{\Gamma(1-\mathbf{d})\sin(\pi d_1)} \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\Gamma(d_k-m)\Gamma(d_k)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})\sin(\pi(d_k-d_1))}{(d_k-m-1)(d_k-1)\Gamma(d_k-\mathbf{c})\sin(\pi(d_k-c_1))} \\
&\qquad\qquad \times {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1+\mathbf{c}-d_k\\ 2-d_k, 2-d_k+m, 1+\mathbf{d}_{[k]}-d_k\end{matrix}\right). \qquad (11)
\end{aligned}$$

证明. 我们从恒等式 [8, (5.1)] 写成如下形式

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(a_2)\Gamma(\mathbf{a}_{[1,2]}-a_2)}{\Gamma(1-a_1+a_2)\Gamma(\mathbf{b}-a_2)}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_2, 1-\mathbf{b}+a_2\\ 1-\mathbf{a}_{[2]}+a_2\end{matrix}\right) \\
&\qquad + \frac{\Gamma(a_3)\Gamma(\mathbf{a}_{[1,3]}-a_3)}{\Gamma(1-a_1+a_3)\Gamma(\mathbf{b}-a_3)}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_3, 1-\mathbf{b}+a_3\\ 1-\mathbf{a}_{[3]}+a_3\end{matrix}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\mathbf{a}_{[1]})}{\Gamma(1-a_1)\Gamma(\mathbf{b})}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\right) - \sum_{k=4}^{p+1} \frac{\Gamma(a_k)\Gamma(\mathbf{a}_{[1,k]}-a_k)}{\Gamma(1-a_1+a_k)\Gamma(\mathbf{b}-a_k)}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_k, 1-\mathbf{b}+a_k\\ 1-\mathbf{a}_{[k]}+a_k\end{matrix}\right). \qquad (12)
\end{aligned}$$

如果我们设 $a_3 = a_2 + \varepsilon + m$ 这里，经过与 th 中类似的简单计算后 e

定理的证明 2.1 我们得到

$$\begin{aligned}\text{LHS of (12)} &= \frac{(-1)^m}{\sin(\pi\varepsilon)}\big\{f_1(\varepsilon)+f_2(\varepsilon)\big\} = \frac{(-1)^m}{\sin(\pi\varepsilon)}\Big[f_1(0)+\varepsilon f_1'(0)+f_2(0)+\varepsilon f_2'(0)+O(\varepsilon^2)\Big]\\ &= \frac{(-1)^m\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon)}\Big(f_1'(0)+f_2'(0)+O(\varepsilon)\Big) \to \frac{(-1)^m}{\pi}\Big(f_1'(0)+f_2'(0)\Big) \text{ as } \varepsilon\to 0,\end{aligned}$$

其中，鉴于（4），

$$f_1(\varepsilon) = \frac{\sin(\pi(a_1-a_2))\sin(\pi(\mathbf{b}-a_2))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{a}_{[2,3]}-a_2))}{}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}a_2, 1-\mathbf{b}+a_2\\ 1-\varepsilon-m, 1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2\end{matrix}\right),$$

$$\begin{aligned}f_2(\varepsilon) = &\frac{\sin(\pi(a_2-a_1+\varepsilon))\sin(\pi(1-\mathbf{b}+a_2+\varepsilon))}{\pi\sin(\pi(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+\varepsilon))}\\ &\times {}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}a_2+\varepsilon+m, 1-\mathbf{b}+a_2+\varepsilon+m\\ 1+\varepsilon+m, 1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+\varepsilon+m\end{matrix}\right),\end{aligned}$$

并且我们应用了容易验证的恒等式 $f_1(0) = -f_2(0)$。然后，经过简单计算，我们得到

$$\begin{aligned}f_1'(0) = &\frac{\sin(\pi(\mathbf{b}-a_2))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{a}_{[1,2,3]}-a_2))}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)!\Gamma(a_2+k)\Gamma(1-\mathbf{b}+a_2+k)}{\Gamma(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+k)k!}\\ &+\frac{\sin(\pi(\mathbf{b}-a_2))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{a}_{[1,2,3]}-a_2))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_2+m+k)\Gamma(1-\mathbf{b}+a_2+m+k)\psi(1+k)}{\Gamma(1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+m+k)k!},\end{aligned}$$

并且，根据（7）和（8），

$$\begin{aligned}f_2'(0) = &-\frac{\sin(\pi(\mathbf{b}-a_2))}{\sin(\pi(\mathbf{a}_{[1,2,3]}-a_2))}\Big\{\sum_{a\in\mathbf{a}_{[1,2,3]}}\cot(\pi(a-a_2))-\sum_{b\in\mathbf{b}}\cot(\pi(b-a_2))\Big\}\\ &\times {}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}a_2+m, 1-\mathbf{b}+a_2+m\\ 1+m, 1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+m\end{matrix}\right)\\ &-\frac{\sin(\pi(\mathbf{b}-a_2))}{\pi\sin(\pi(\mathbf{a}_{[1,2,3]}-a_2))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_2+m+k)\Gamma(1-\mathbf{b}+a_2+m+k)}{\Gamma(1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+m+k)k!}\times\\ &\Big[\psi(a_2+m+k)+\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(1-b+a_2+m+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}_{[2,3]}}\psi(1-a+a_2+m+k)-\psi(1+m+k)\Big].\end{aligned}$$

将 $(f_1'(0)+f_2'(0))/\pi$代入（12）的左端，经过一些繁琐但初等的变换后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_2+m)_k(1-\mathbf{b}+a_2+m)_k}{(1+m)_k(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+m)_k k!}\Bigg\{\sum_{a\in\mathbf{a}_{[2,3]}}\psi(1-a+a_2+m+k)\\
&\quad+\psi(1+m+k)+\psi(1+k)-\psi(a_2+m+k)-\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(1-b+a_2+m+k)\Bigg\}\\
&\quad=\hat{U}-\hat{V}+\frac{(-1)^m\Gamma(\mathbf{b}-a_2-m)\Gamma(1-a_1+a_2+m)m!\Gamma(\mathbf{a}_{[1,2]})}{\Gamma(\mathbf{a}_{[1,2,3]}-a_2-m)(a_2)_m\Gamma(1-a_1)\Gamma(\mathbf{b})}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\right)\\
&\quad-\frac{(-1)^m\Gamma(\mathbf{b}-a_2-m)\Gamma(1-a_1+a_2+m)}{\Gamma(\mathbf{a}_{[1,2,3]}-a_2-m)\Gamma(a_2+m)}\sum_{k=4}^{p+1}\frac{m!\Gamma(a_k)\Gamma(\mathbf{a}_{[1,k]}-a_k)}{\Gamma(1-a_1+a_k)\Gamma(\mathbf{b}-a_k)}\\
&\qquad\qquad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_k,1-\mathbf{b}+a_k\\ 1-\mathbf{a}_{[k]}+a_k\end{matrix}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$\hat{U}=\pi\left[\sum_{a\in\mathbf{a}_{[1,2,3]}}\cot(\pi(a-a_2))-\sum_{b\in\mathbf{b}}\cot(\pi(b-a_2))\right]{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_2+m,1-\mathbf{b}+a_2+m\\ 1+m,1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+m\end{matrix}\right)$$

and

$$\hat{V}=\frac{(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2)_m m!}{(1-\mathbf{b}+a_2)_m(a_2)_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)!(a_2)_k(1-\mathbf{b}+a_2)_k}{(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2)_k k!}.$$

写出 $\mathbf{c}=(a_2+m,1-\mathbf{b}+a_2+m)\in\mathbb{C}^{p+1}$, $\mathbf{d}=(1-\mathbf{a}_{[2,3]}+a_2+m)\in\mathbb{C}^{p-1}$ 并应用（10），我们得到（11）。□

接下来，我们从上述定理推导出公式（+）的“2”情形。

推论 3.2. 设 $\mathbf{c}\in(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})^p$, $\mathbf{d}\in(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})^{p-1}$ 以及 $\Re(\sum_{j=1}^{p-1}d_j-\sum_{j=1}^{p}(c_j))>0$。则

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{c})_k}{(\mathbf{d})_k k!}\Bigg\{\sum_{d\in\mathbf{d}}\psi(\mathbf{d}+k)+\psi(1+k)-\sum_{c\in\mathbf{c}}\psi(\mathbf{c}+k)\Bigg\}\\
&\quad=\pi\left[\sum_{c\in\mathbf{c}}\cot(\pi c)-\sum_{d\in\mathbf{d}}\cot(\pi d)\right]{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{d}\end{matrix}\right)-\frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{d}\\ 2-\mathbf{c}\end{matrix}\right)\\
&-\frac{\pi\Gamma(1-\mathbf{c})}{\Gamma(1-\mathbf{d})}\sum_{k=1}^{p-1}\cot(\pi d_k)\frac{\Gamma(d_k-1)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})}{\Gamma(d_k-\mathbf{c})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-d_k+\mathbf{c}\\ 2-d_k,1-d_k+\mathbf{d}_{[k]}\end{matrix}\right).\qquad(13)
\end{aligned}$$

证明。令 $c_1 = 1 + m$ 在（11）中代入，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{c}_{[1]})_k}{(\mathbf{d})_k k!} \left[\sum_{d\in\mathbf{d}} \psi(d+k) + \psi(1+k) - \sum_{c\in\mathbf{c}_{[1]}} \psi(c+k) \right]$$
$$= \pi \left[\sum_{c\in\mathbf{c}_{[1]}} \cot(\pi c) - \sum_{d\in\mathbf{d}_{[1]}} \cot(\pi d) \right] {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} \mathbf{c}_{[1]} \\ \mathbf{d} \end{matrix} \right) - m!\hat{V}$$
$$+ \frac{(-1)^m m!\Gamma(d_1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]})\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]}+m+1)}{\Gamma(d_1-m-1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]}+m+1)\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]})} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} m+1, 1, 1-\mathbf{d}+c_1 \\ 1-\mathbf{c}_{[1]}+c_1 \end{matrix} \right)$$
$$+ \frac{\Gamma(d_1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]})}{\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]})} \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\Gamma(d_k-1)\Gamma(d_k)\Gamma(1-d_k)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[1,k]})}{\Gamma(d_k-\mathbf{c}_{[1]})\Gamma(1-d_k+d_1)}$$
$$\times {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} 1-d_k+\mathbf{c}_{[1]} \\ 2-d_k, 1-d_k+\mathbf{d}_{[k]} \end{matrix} \right), \quad (14)$$

其中

$$\hat{V} = \frac{(1-\mathbf{d})_m}{(1-\mathbf{c})_m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)!(\mathbf{c}-m)_k}{(\mathbf{d}-m)_k k!} = \frac{(1-\mathbf{d})_1}{m!(1-\mathbf{c}[1])_1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j!(2-\mathbf{d})_j}{(2-\mathbf{c}_{[1]})_j}$$

（我们在最后一个等式中用到了 $c_1 = m+1$）。显然，对于 $c_1 = m+1$，根据（$a+m)_j = (a)_{m+j}/(a)_m$，有

$$-m!\hat{V} + \frac{(-1)^m m!\Gamma(d_1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]})\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]}+m+1)}{\Gamma(d_1-m-1)\Gamma(1-\mathbf{c}_{[1]}+m+1)\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]})}$$
$$\times {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} m+1, 1, 1-\mathbf{d}+c_1 \\ 1-\mathbf{c}_{[1]}+c_1 \end{matrix} \right) = -\frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c}_{[1]})_1} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} 1, 1, 2-\mathbf{d} \\ 2-\mathbf{c}_{[1]} \end{matrix} \right). \quad (15)$$

将（15）代入（11并将 $\mathbf{c}_{[1]} \to \mathbf{c}$ 变更为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{c})_k}{(\mathbf{d})_k k!} \left[\sum_{d\in\mathbf{d}} \psi(d+k) + \psi(1+k) - \sum_{c\in\mathbf{c}} \psi(\mathbf{c}+k) \right]$$
$$= \pi \left[\sum_{c\in\mathbf{c}} \cot(\pi c) - \sum_{d\in\mathbf{d}_{[1]}} \cot(\pi d) \right] {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{matrix} \right) - \frac{(1-\mathbf{d})_1}{(1-\mathbf{c})_1} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} 1, 1, 2-\mathbf{d} \\ 2-\mathbf{c} \end{matrix} \right)$$
$$+ \frac{\pi\Gamma(1-\mathbf{c})}{\Gamma(1-\mathbf{d})} \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\sin[\pi(d_k-d_1)]\Gamma(d_k-1)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})}{\sin(\pi d_1)\sin(\pi d_k)\Gamma(d_k-\mathbf{c})} {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} 1-d_k+\mathbf{c} \\ 2-d_k, 1-d_k+\mathbf{d}_{[k]} \end{matrix} \right).$$

利用

$$\frac{\sin(\pi(d_k-d_1))}{\sin(\pi d_1)\sin(\pi d_k)}=\cot(\pi d_1)-\cot(\pi d_k)$$

并由 [8,(5.3)]

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{p-1}\frac{\Gamma(d_k-1)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})}{\Gamma(d_k-\mathbf{c})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-d_k+\mathbf{c}\\2-d_k,1-d_k+\mathbf{d}_{[k]}\end{matrix}\right)\\&\quad=-\frac{\Gamma(1-\mathbf{d})}{\Gamma(1-\mathbf{c})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{c}\\\mathbf{d}\end{matrix}\right)-\frac{\Gamma(d_1-1)\Gamma(d_1-\mathbf{d}_{[1]})}{\Gamma(d_1-\mathbf{c})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-d_1+\mathbf{c}\\2-d_1,1-d_1+\mathbf{d}_{[1]}\end{matrix}\right),\end{aligned}$$

我们最终得到（13）。 □

将（5）与（11）相等，并经过一些整理和三角变换后，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(d_1)\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]}+a_1)}{(1-a_1)_m\Gamma(d_1-a_1)\Gamma(1-\mathbf{a}_{[1]}+a_1)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_1,a_1-m,1-\mathbf{d}+a_1\\1-\mathbf{a}_{[1]}+a_1\end{matrix}\right)+\frac{\Gamma(d_1-\mathbf{d}_{[1]})}{\Gamma(d_1-\mathbf{a})}\\&\times\frac{\Gamma(d_1-m-1)}{(-1)^m\Gamma(1-d_1)}\Gamma(1-a_1)\Gamma(d_1-1){}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-d_1+\mathbf{a}\\2-d_1,2-d_1+m,1-d_1+\mathbf{d}_{[1]}\end{matrix}\right)\\&\qquad-\frac{\pi\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]})}{m!\Gamma(1-\mathbf{a}_{[1]})}\left(\cot(\pi a_1)-\cot(\pi d_1)\right){}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\1+m,\mathbf{d}\end{matrix}\right)\\&\quad=-(-1)^m\sum_{k=2}^{p-1}\frac{\Gamma(d_k-m-1)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})\Gamma(d_1)\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-d_k+a_1)}{\Gamma(2-d_k)\Gamma(a_1-d_1)\Gamma(1-a_1+d_1)\Gamma(d_k-\mathbf{a}_{[1]})}\\&\qquad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-d_k+\mathbf{a}\\2-d_k,2-d_k+m,1-d_k+\mathbf{d}_{[k]}\end{matrix}\right).\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(d_1)\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]}+a_1)}{(1-a_1)_m\Gamma(d_1-a_1)\Gamma(1-\mathbf{a}_{[1]}+a_1)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_1,a_1-m,1-\mathbf{d}+a_1\\1-\mathbf{a}_{[1]}+a_1\end{matrix}\right)\\&\qquad-\frac{\pi\Gamma(1-\mathbf{d}_{[1]})}{m!\Gamma(1-\mathbf{a}_{[1]})}\left(\cot(\pi a_1)-\cot(\pi d_1)\right){}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\1+m,\mathbf{d}\end{matrix}\right)\\&\quad=-(-1)^m\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_k-m-1)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-d_k+a_1)}{\Gamma(2-d_k)\Gamma(a_1-d_1)\Gamma(1-a_1+d_1)\Gamma(d_k-\mathbf{a}_{[1]})}\\&\qquad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-d_k+\mathbf{a}\\2-d_k,2-d_k+m,1-d_k+\mathbf{d}_{[k]}\end{matrix}\right).\end{aligned}$$

重新整理上述公式，我们得到以下可能是新的 $p+1$- 项恒等式。

推论3.3。对于 $m \in \mathbb{N}$ 以及使所涉及的超几何级数终止的参数，以下恒等式成立：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Gamma(1-\mathbf{d})}{m!\Gamma(1-\mathbf{a})}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ 1+m,\mathbf{d}\end{matrix}\right)+\frac{\sin(\pi a_1)\Gamma(a_1)\Gamma(1-\mathbf{d}+a_1)}{\pi\Gamma(1-a_1+m)\Gamma(1-\mathbf{a}_{[1]}+a_1)}\\
&\quad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_1,a_1-m,1-\mathbf{d}+a_1\\ 1-\mathbf{a}_{[1]}+a_1\end{matrix}\right)=(-1)^m\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\Gamma(d_k-m-1)\Gamma(d_k-\mathbf{d}_{[k]})}{\Gamma(2-d_k)\Gamma(d_k-\mathbf{a})}\\
&\qquad\qquad\times\frac{\sin(\pi a_1)}{\sin(\pi(d_k-a_1))}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-d_k+\mathbf{a}\\ 2-d_k,2-d_k+m,1-d_k+\mathbf{d}_{[k]}\end{matrix}\right).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

这个公式可视为[8, (5.3)]的退化情形，即其中一个底部参数为正整数。我们强调，在[8, (5.3)] 中计算相应的极限将得到 ψ级数，而非上述公式；后者看起来要复杂得多。

4 第三个变换公式

假设 $0\le n\le p$、 $0\le s\le p$ 是满足 $s+n\ge p$的整数，且 $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^n$、$\mathbf{b}\in\mathbb{C}^s$、$\mathbf{c}\in\mathbb{C}^{p-n}$、$\mathbf{d}\in\mathbb{C}^{p-s}$ 是满足

$$\Re\Big(\sum\nolimits_{j=1}^{n}a_j+\sum\nolimits_{j=1}^{p-n}c_j-\sum\nolimits_{j=1}^{s}b_j-\sum\nolimits_{j=1}^{p-s}d_j\Big)>0.$$

在这些条件下，我们最近建立了恒等式 [8, 定理 5。1]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s}\frac{A_k}{b_k}{}_{p+1}F_p\left(\left.\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_k,1-\mathbf{c}+b_k,b_k\\ 1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k,1-\mathbf{d}+b_k,b_k+1\end{matrix}\right|(-1)^{p-s-n}\right)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(1-a_k)}{}_{p+1}F_p\left(\left.\begin{matrix}1+\mathbf{b}-a_k,1+\mathbf{d}-a_k,1-a_k\\ 1+\mathbf{a}_{[k]}-a_k,1+\mathbf{c}-a_k,2-a_k\end{matrix}\right|(-1)^{p-s-n}\right)=\frac{\Gamma(1-\mathbf{a})\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{c})\Gamma(1-\mathbf{d})},
\end{aligned}
\tag{17a}
$$

其中

$$A_k=\frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[k]}-b_k)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_k)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_k)},\quad B_k=\frac{\Gamma(a_k-\mathbf{a}_{[k]})\Gamma(1+\mathbf{b}-a_k)}{\Gamma(a_k-\mathbf{d})\Gamma(1+\mathbf{c}-a_k)},\tag{17b}$$

并假设没有分子伽马因子变为无穷大。如果不满足后一个条件，仍然可以计算相应的极限，从而自然地得到ψ级数。采用这种方法，我们将建立以下结论

定理 4.1。设 $0 \le n \le p,\quad 0 \le s \le p-1,\quad \kappa := s-n \ge -2$ 且

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1 \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})^n,\quad \mathbf{a}_2 \in \mathbb{C}^{p-n},\quad \mathbf{a}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\in\mathbb{C}^p,\\ &\mathbf{b}_1 \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})^s,\quad \mathbf{b}_2 \in \mathbb{C}^{p-1-s},\quad \mathbf{b}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\in\mathbb{C}^{p-1}.\end{aligned}$$

进一步假设 $\Re\big(\sum_{b\in\mathbf{b}} b-\sum_{a\in\mathbf{a}} a\big)>0$。那么

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k[(-1)^\kappa]^k}{\pi(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]\\ &\qquad=\left\{\sum_{a\in\mathbf{a}_1}\cot(\pi a)-\sum_{b\in\mathbf{b}_1}\cot(\pi b)\right\}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle|(-1)^\kappa\right)\\ &\qquad-\frac{(-1)^\kappa(1-\mathbf{b})_1}{\pi(1-\mathbf{a})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{b}\\ 2-\mathbf{a}\end{matrix}\middle|(-1)^\kappa\right)+\frac{\Gamma(1-\mathbf{a}_1)\Gamma(\mathbf{b}_2)}{\Gamma(1-\mathbf{b}_1)\Gamma(\mathbf{a}_2)}\\ &\quad\times\sum_{a_k\in\mathbf{a}_2}\frac{\Gamma(a_k)\Gamma(\mathbf{a}_{2[k]}-a_k)\Gamma(1-\mathbf{b}_1+a_k)}{\sin(\pi a_k)\Gamma(\mathbf{b}_2-a_k)\Gamma(1-\mathbf{a}_1+a_k)}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}a_k,1-\mathbf{b}+a_k\\ 1-\mathbf{a}_{[k]}+a_k\end{matrix}\middle|(-1)^\kappa\right)\\ &\qquad+\frac{\Gamma(1-\mathbf{a}_1)\Gamma(\mathbf{b}_2)}{\Gamma(1-\mathbf{b}_1)\Gamma(\mathbf{a}_2)}\sum_{b_k\in\mathbf{b}_1}\frac{\Gamma(b_k-1)\Gamma(b_k-\mathbf{b}_{1[k]})\Gamma(1-b_k+\mathbf{a}_2)}{\sin(\pi b_k)\Gamma(b_k-\mathbf{a}_1)\Gamma(1-b_k+\mathbf{b}_2)}\\ &\qquad\qquad\times{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-b_k+\mathbf{a}\\ 2-b_k,1-b_k+\mathbf{b}_{[k]}\end{matrix}\middle|(-1)^\kappa\right).\end{aligned}\tag{18}$$

证明。设定 $b_2=b_1+m+\varepsilon$ 等式左端 (17a) 中的前两项，其系数为 $A_1,\,A_2$ 形式如下（为简便起见，设 $\varkappa=p-s-n$）：

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\varepsilon+m)\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1)}{b_1\Gamma(\mathbf{c}-b_1)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1)}\\ &\qquad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1,1-\mathbf{c}+b_1,b_1\\ 1-m-\varepsilon,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1,1-\mathbf{d}+b_1,b_1+1\end{matrix}\middle|(-1)^\varkappa\right)\\ &\qquad+\frac{\Gamma(-\varepsilon-m)\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m-\varepsilon)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m+\varepsilon)}{(b_1+m+\varepsilon)\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m-\varepsilon)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m+\varepsilon)}\\ &\quad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m+\varepsilon,1-\mathbf{c}+b_1+m+\varepsilon,b_1+m+\varepsilon\\ 1+m+\varepsilon,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+\varepsilon,1-\mathbf{d}+b_1+m+\varepsilon,b_1+m+\varepsilon+1\end{matrix}\middle|(-1)^\varkappa\right).\end{aligned}$$

对该表达式进行简单变换可得到

$$\frac{(-1)^m}{\pi^{\varkappa+1}\sin(\pi\varepsilon)}\big\{f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)\big\}=\frac{(-1)^m}{\pi^{\varkappa+1}\sin(\pi\varepsilon)}\Big[f_1(0)+\varepsilon f_1'(0)-f_2(0)-\varepsilon f_2'(0)+O(\varepsilon^2)\Big]$$

当 $\varepsilon\to 0$，其中 ϕ 定义见（4），且

$$f_1(\varepsilon)=\frac{\sin(\pi(\mathbf{c}-b_1))}{\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}{}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1,1-\mathbf{c}+b_1,b_1\\1-m-\varepsilon,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1,1-\mathbf{d}+b_1,b_1+1\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right),$$

$$\begin{aligned}f_2(\varepsilon)&=\frac{(-1)^{m\varkappa}\sin(\pi(1-\mathbf{c}+b_1+\varepsilon))}{\sin(\pi(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+\varepsilon))}\\&\quad\times{}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m+\varepsilon,1-\mathbf{c}+b_1+m+\varepsilon,b_1+m+\varepsilon\\1+m+\varepsilon,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+\varepsilon,1-\mathbf{d}+b_1+m+\varepsilon,b_1+m+\varepsilon+1\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right).\end{aligned}$$

注意，由于 $\sin(\pi(1-\mathbf{c}+b_1))=\sin(\pi(\mathbf{c}-b_1))$，因此 $f_1(0)=f_2(0)$，且

$$\begin{aligned}&{}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1,1-\mathbf{c}+b_1,b_1\\1-m,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1,1-\mathbf{d}+b_1,b_1+1\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right)\\&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+k)\Gamma(1-\mathbf{c}+b_1+k)\Gamma(b_1+k)[(-1)^{\varkappa}]^k}{\Gamma(1-m+k)\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+k)\Gamma(b_1+1+k)k!}\\&\quad=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+k)\Gamma(1-\mathbf{c}+b_1+k)\Gamma(b_1+k)[(-1)^{\varkappa}]^k}{\Gamma(1-m+k)\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+k)\Gamma(b_1+1+k)k!}\\&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{c}+b_1+m+k)\Gamma(b_1+m+k)[(-1)^{\varkappa}]^k}{k!\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m+k)\Gamma(b_1+1+m+k)(m+k)!}\\&=(-1)^{m\varkappa}{}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m,1-\mathbf{c}+b_1+m,b_1+m\\1+m,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m,1-\mathbf{d}+b_1+m,b_1+m+1\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^m}{\pi^{\varkappa+1}\sin(\pi\varepsilon)}\big\{f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)\big\}\\&\quad=\frac{(-1)^m\varepsilon}{\pi^{\varkappa+1}\sin(\pi\varepsilon)}\Big(f_1'(0)-f_2'(0)+O(\varepsilon)\Big)\to\frac{(-1)^m}{\pi^{\varkappa+2}}\Big(f_1'(0)-f_2'(0)\Big)\text{ as }\varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

鉴于 $\frac{d}{d\varepsilon}\left[\Gamma(1-m-\varepsilon)\right]^{-1}=\psi(1-m-\varepsilon)/\Gamma(1-m-\varepsilon)$ 和公式（9），通过对 $k=0$、.....、 $m-1$ 和 $k=m$， $m+1$、.....进行求和分离，我们得到:

$$
\begin{aligned}
f_1'(0) &= \frac{\sin(\pi(\mathbf{c}-b_1))}{\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))} \\
&\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)![(-1)^{\varkappa}]^k\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+k)\Gamma(1-\mathbf{c}+b_1+k)\Gamma(b_1+k)}{\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+k)\Gamma(b_1+1+k)k!} \\
&+\frac{\sin(\pi(\mathbf{c}-b_1))}{\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))} \\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(-1)^{\varkappa}]^{k+m}\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{c}+b_1+m+k)\Gamma(b_1+m+k)\psi(1+k)}{\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}!+!b_1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m+k)\Gamma(b_1+1+m+k)\Gamma(1+m+k)k!}
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
f_1'(0) &= \frac{\pi^{\varkappa+2}\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1)\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1)} \\
&\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)![(-1)^{\varkappa}]^k(1-\mathbf{a}+b_1)_k(1-\mathbf{c}+b_1)_k}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_k(1-\mathbf{d}+b_1)_k(b_1+k)k!} \\
&+\frac{\pi^{\varkappa+2}\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)} \\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa k}(1-\mathbf{a}+b_1+m)_k(1-\mathbf{c}+b_1+m)_k\psi(1+k)}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m)_k(1-\mathbf{d}+b_1+m)_k(b_1+m+k)(m+k)!k!}.
\end{aligned}
$$

类似地，应用(7)和(8)，并注意到$\sin(\pi(1-\alpha)) = \sin(\pi\alpha)$ 以及

$\cot(\pi(1-\alpha)) = -\cot(\pi\alpha)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
f_2'(0) = \frac{(-1)^{m\varkappa}\pi\sin(\pi(\mathbf{c}-b_1))}{\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}&\left[\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\cot(\pi(b-b_1))-\sum_{c\in\mathbf{c}}\cot(\pi(c-b_1))\right]\\
&\times {}_{p+1}\phi_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m, 1-\mathbf{c}+b_1+m, b_1+m\\ 1+m, 1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m, 1-\mathbf{d}+b_1+m, b_1+m+1\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\\
&+\frac{(-1)^{m\varkappa}\sin(\pi(\mathbf{c}-b_1))}{\sin(\pi(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1))}\\
\times\sum_{k=0}^{\infty}&\frac{[(-1)^{\varkappa}]^k\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{c}+b_1+m+k)\Gamma(b_1+m+k)\Psi}{\Gamma(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m+k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m+k)\Gamma(b_1+1+m+k)(m+k)!k!}\\
=\frac{\pi^{\varkappa+3}\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)(b_1+m)m!}&\left[\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\cot(\pi(b-b_1))-\sum_{c\in\mathbf{c}}\cot(\pi(c-b_1))\right]\\
&\times {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m, 1-\mathbf{c}+b_1+m, b_1+m\\ 1+m, 1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m, 1-\mathbf{d}+b_1+m, b_1+m+1\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\\
&+\frac{\pi^{\varkappa+2}\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)}\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(-1)^{\varkappa}]^k(1-\mathbf{a}+b_1+m)_k(1-\mathbf{c}+b_1+m)_k\Psi}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m)_k(1-\mathbf{d}+b_1+m)_k(b_1+m+k)(m+k)!k!},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Psi = \sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(1-a+b_1+m+k)&+\sum_{c\in\mathbf{c}}\psi(1-c+b_1+m+k)+1/(b_1+m+k)\\
&-\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\psi(1-b+b_1+m+k)-\sum_{d\in\mathbf{d}}\psi(1-d+b_1+m+k)-\psi(1+m+k).
\end{aligned}
$$

结合以上表达式，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^m}{\pi^{\varkappa+2}}\Big(f_1'(0)-f_2'(0)\Big) &= \frac{(-1)^m\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1)\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1)} \\
&\quad\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)![(-1)^{\varkappa}]^k(1-\mathbf{a}+b_1)_k(1-\mathbf{c}+b_1)_k}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_k(1-\mathbf{d}+b_1)_k(b_1+k)k!} \\
&-\frac{\pi(-1)^m\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)(b_1+m)m!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\cot(\pi(b-b_1))-\sum_{c\in\mathbf{c}}\cot(\pi(c-b_1))\right] \\
&\quad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m,1-\mathbf{c}+b_1+m,b_1+m\\1+m,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m,1-\mathbf{d}+b_1+m,b_1+m+1\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right) \\
&\quad-\frac{(-1)^m\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)} \\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(-1)^{\varkappa}]^k(1-\mathbf{a}+b_1+m)_k(1-\mathbf{c}+b_1+m)_k\Psi}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m)_k(1-\mathbf{d}+b_1+m)_k(b_1+m+k)(m+k)!k!}.
\end{aligned}$$

代入 (17) 然后得到:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1)\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1)}{(-1)^m\Gamma(\mathbf{c}-b_1)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)![(-1)^{\varkappa}]^k(1-\mathbf{a}+b_1)_k(1-\mathbf{c}+b_1)_k}{(-1)^{m-k}(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_k(1-\mathbf{d}+b_1)_k(b_1+k)k!} \\
&-\frac{\pi(-1)^m\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)(b_1+m)m!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}}\cot(\pi(b-b_1))-\sum_{c\in\mathbf{c}}\cot(\pi(c-b_1))\right] \\
&\quad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_1+m,1-\mathbf{c}+b_1+m,b_1+m\\1+m,1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m,1-\mathbf{d}+b_1+m,b_1+m+1\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right) \\
&\quad+\frac{(-1)^m\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_1+m)}{\Gamma(\mathbf{c}-b_1-m)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_1+m)} \\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(-1)^{\varkappa}]^k(1-\mathbf{a}+b_1+m)_k(1-\mathbf{c}+b_1+m)_k\Psi}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m)_k(1-\mathbf{d}+b_1+m)_k(b_1+m+k)(m+k)!k!} \\
&=\frac{\Gamma(1-\mathbf{a})\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{c})\Gamma(1-\mathbf{d})}-\sum_{k=3}^{m'}\frac{A_k}{b_k}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_k,1-\mathbf{c}+b_k,b_k\\1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k,1-\mathbf{d}+b_k,b_k+1\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right) \\
&\quad-\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(1-a_k)}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1+\mathbf{b}-a_k,1+\mathbf{d}-a_k,1-a_k\\1+\mathbf{a}_{[k]}-a_k,1+\mathbf{c}-a_k,2-a_k\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\varkappa = p - m' - n$ 且这些数 A_k, B_k 由（17b）定义，其中 $b_2 = b_1 + m$位于右侧。对上述等式进行简单变换可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^{\varkappa}]^k (1-\mathbf{a}+b_2)_k (1-\mathbf{c}+b_2)_k \Psi}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_2)_k (1-\mathbf{d}+b_2)_k (b_2+k)(m+k)!k!} \\
&\qquad = -\frac{(-1)^{m\varkappa}(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_m (1-\mathbf{d}+b_1)_m}{(1-\mathbf{c}+b_1)_m (1-\mathbf{a}+b_1)_m} \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-k}(m-k-1)![(-1)^{\varkappa}]^k (1-\mathbf{a}+b_1)_k (1-\mathbf{c}+b_1)_k}{(1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1)_k (1-\mathbf{d}+b_1)_k (b_1+k)k!} \\
&\qquad + \frac{\pi}{b_2 m!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}_{[1,2]}} \cot(\pi(b-b_1)) - \sum_{c\in\mathbf{c}} \cot(\pi(c-b_1))\right] \\
&\qquad \times {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} 1-\mathbf{a}+b_2, 1-\mathbf{c}+b_2, b_2 \\ 1+m, 1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_2, 1-\mathbf{d}+b_2, b_2+1 \end{matrix}\middle| (-1)^{\varkappa}\right) \\
&+ \frac{(-1)^m \Gamma(\mathbf{c}-b_2)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_2)}{\Gamma(\mathbf{b}_{[1,2]}-b_2)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_2)} \left\{ \frac{\Gamma(1-\mathbf{a})\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{c})\Gamma(1-\mathbf{d})} - \sum_{k=3}^{m'} \frac{\Gamma(\mathbf{b}_{[k]}-b_k)\Gamma(1-\mathbf{a}+b_k)}{b_k \Gamma(\mathbf{c}-b_k)\Gamma(1-\mathbf{d}+b_k)} \right. \\
&\qquad \times {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} 1-\mathbf{a}+b_k, 1-\mathbf{c}+b_k, b_k \\ 1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k, 1-\mathbf{d}+b_k, b_k+1 \end{matrix}\middle| (-1)^{\varkappa}\right) \\
&\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(a_k-\mathbf{a}_{[k]})\Gamma(1+\mathbf{b}-a_k)}{(1-a_k)\Gamma(a_k-\mathbf{d})\Gamma(1+\mathbf{c}-a_k)} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} 1+\mathbf{b}-a_k, 1+\mathbf{d}-a_k, 1-a_k \\ 1+\mathbf{a}_{[k]}-a_k, 1+\mathbf{c}-a_k, 2-a_k \end{matrix}\middle| (-1)^{\varkappa}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

记

$$\boldsymbol{\alpha} = 1-\mathbf{a}+b_1+m, \quad \boldsymbol{\beta} = 1-\mathbf{c}+b_1+m, \quad \boldsymbol{\gamma} = 1-\mathbf{b}_{[1,2]}+b_1+m, \quad \boldsymbol{\delta} = 1-\mathbf{d}+b_1+m$$

并且回想起 $b_2 = b_1 + m$，因此

$$\mathbf{a} = 1-\boldsymbol{\alpha}+b_2, \quad \mathbf{b} = (b_2-m, b_2, 1-\boldsymbol{\gamma}+b_2), \quad \mathbf{c} = 1-\boldsymbol{\beta}+b_2, \quad \mathbf{d} = 1-\boldsymbol{\delta}+b_2.$$

那么，后一个恒等式的形式为（回顾 $b_2 = b_1 + m$）：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_2 m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{\alpha})_k(\boldsymbol{\beta})_k(b_2)_k[(-1)^{\varkappa}]^k}{(\boldsymbol{\gamma})_k(\boldsymbol{\delta})_k(b_2+1)_k(1+m)_k k!}\Psi_1\\
&\quad=\frac{\pi}{m!b_2}\left[\sum_{\beta\in\boldsymbol{\beta}}\cot(\pi\beta)-\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\cot(\pi\gamma)\right]{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},b_2\\ 1+m,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},b_2+1\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\\
&\qquad+\frac{(-1)^m\Gamma(1-\boldsymbol{\beta})\Gamma(\boldsymbol{\delta})}{\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma})\Gamma(\boldsymbol{\alpha})}\left\{\frac{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}-b_2)\Gamma(b_2-m)\Gamma(b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+b_2)}{\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-b_2)}\right.\\
&\qquad\quad-\sum_{k=1}^{m'-2}\frac{\Gamma(\gamma_k-m-1)\Gamma(\gamma_k-1)\Gamma(\gamma_k-\boldsymbol{\gamma}_{[k]})\Gamma(1-\gamma_k+\boldsymbol{\alpha})}{(1-\gamma_k+b_2)\Gamma(\gamma_k-\boldsymbol{\beta})\Gamma(1-\gamma_k+\boldsymbol{\delta})}\\
&\qquad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1-\gamma_k+\boldsymbol{\alpha},1-\gamma_k+\boldsymbol{\beta},1-\gamma_k+b_2\\ 2+m-\gamma_k,2-\gamma_k,1-\gamma_k+\boldsymbol{\gamma}_{[k]},1-\gamma_k+\boldsymbol{\delta},2-\gamma_k+b_2\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\\
&\qquad\quad-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_{[k]}-\alpha_k)\Gamma(\alpha_k-m)\Gamma(\alpha_k)\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+\alpha_k)}{(\alpha_k-b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-\alpha_k)\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+\alpha_k)}\\
&\qquad\times{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_k-m,\alpha_k,1-\boldsymbol{\gamma}+\alpha_k,1-\boldsymbol{\delta}+\alpha_k,\alpha_k-b_2\\ 1-\boldsymbol{\alpha}_{[k]}+\alpha_k,1-\boldsymbol{\beta}+\alpha_k,1+\alpha_k-b_2\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\left.\right\}\\
&\qquad-\frac{(1-\boldsymbol{\gamma})_m(1-\boldsymbol{\delta})_m}{(1-\boldsymbol{\alpha})_m(1-\boldsymbol{\beta})_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)![(-1)^{\varkappa-1}]^{k+m}(\boldsymbol{\alpha}-m)_k(\boldsymbol{\beta}-m)_k}{(\boldsymbol{\gamma}-m)_k(\boldsymbol{\delta}-m)_k(b_2-m+k)k!},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Psi_1=\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\psi(\gamma+k)+\sum_{\delta\in\boldsymbol{\delta}}\psi(\delta+k)+\psi(1+m+k)+\psi(1+k)\\
-\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\alpha}}\psi(\alpha+k)-\sum_{\beta\in\boldsymbol{\beta}}\psi(\beta+k)+\frac{1}{b_2+k}.
\end{aligned}$$

鉴于（10）可得

$$\frac{(1-\boldsymbol{\gamma})_m(1-\boldsymbol{\delta})_m}{(1-\boldsymbol{\alpha})_m(1-\boldsymbol{\beta})_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)![(-1)^{\varkappa-1}]^{k+m}(\boldsymbol{\alpha}-m)_k(\boldsymbol{\beta}-m)_k}{(\boldsymbol{\gamma}-m)_k(\boldsymbol{\delta}-m)_k(b_2-m+k)k!}$$

$$=\frac{(-1)^{\varkappa-1}(1-\boldsymbol{\gamma})_1(1-\boldsymbol{\delta})_1}{(m-1)!(1-\boldsymbol{\alpha})_1(1-\boldsymbol{\beta})_1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(1-m)_j(2-\boldsymbol{\gamma})_j(2-\boldsymbol{\delta})_j[(1)_j]^2(-1)^{\varkappa j}}{(2-\boldsymbol{\beta})_j(2-\boldsymbol{\alpha})_j(b_2-1-j)j!}$$

$$=\frac{(-1)^{\varkappa-1}(1-\boldsymbol{\gamma})_1(1-\boldsymbol{\delta})_1}{(m-1)!(1-\boldsymbol{\alpha})_1(1-\boldsymbol{\beta})_1(b_2-1)}{}_{p+2}F_{p+1}\left(\begin{matrix}1-m,2-\boldsymbol{\gamma},2-\boldsymbol{\delta},1,1,1-b_2\\2-\boldsymbol{\alpha},2-\boldsymbol{\beta},2-b_2\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right).$$

接下来，我们将 $\boldsymbol{\alpha}=(1+m,b_2+1,\boldsymbol{\alpha}')$ 代入上面的恒等式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{\alpha}')_k(\boldsymbol{\beta})_k(b_2)_k[(-1)^{\varkappa}]^k}{(\boldsymbol{\gamma})_k(\boldsymbol{\delta})_k k!}$$

$$\times\left\{\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\psi(\gamma+k)+\sum_{\delta\in\boldsymbol{\delta}}\psi(\delta+k)+\psi(1+k)-\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\alpha}'}\psi(\alpha+k)-\sum_{\beta\in\boldsymbol{\beta}}\psi(\beta+k)-\psi(b_2+k)\right\}$$

$$=\pi\left[\sum_{\beta\in\boldsymbol{\beta}}\cot(\pi\boldsymbol{\beta})-\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\cot(\pi\boldsymbol{\gamma})\right]{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta},b_2\\\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right)$$

$$+\frac{(-1)^m\Gamma(1-\boldsymbol{\beta})\Gamma(\boldsymbol{\delta})}{\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma})\Gamma(\boldsymbol{\alpha}')\Gamma(b_2)}\left\{\frac{\pi\Gamma(\boldsymbol{\alpha}'-b_2)\Gamma(b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+b_2)}{(-1)^m\sin(\pi b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-b_2)}\right.$$

$$\times{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}b_2,1-\boldsymbol{\gamma}+b_2,1-\boldsymbol{\delta}+b_2\\1-\boldsymbol{\alpha}'+b_2,1-\boldsymbol{\beta}+b_2\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{m'-2}\frac{\pi\Gamma(\gamma_k-1)\Gamma(\gamma_k-\boldsymbol{\gamma}_{[k]})\Gamma(1-\gamma_k+\boldsymbol{\alpha}')\Gamma(1-\gamma_k+b_2)}{(-1)^m\sin(\pi(\gamma_k-1))\Gamma(\gamma_k-\boldsymbol{\beta})\Gamma(1-\gamma_k+\boldsymbol{\delta})}$$

$$\times{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}1-\gamma_k+\boldsymbol{\alpha}',1-\gamma_k+\boldsymbol{\beta},1-\gamma_k+b_2\\2-\gamma_k,1-\gamma_k+\boldsymbol{\gamma}_{[k]},1-\gamma_k+\boldsymbol{\delta}\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\pi\Gamma(b_2-\alpha_k')\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_{[k]}'-\alpha_k')\Gamma(\alpha_k')\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+\alpha_k')}{(-1)^m\sin(\pi\alpha_k')\Gamma(\boldsymbol{\delta}-\alpha_k')\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+\alpha_k')}$$

$$\left.\times{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}\alpha_k',1-\boldsymbol{\gamma}+\alpha_k',1-\boldsymbol{\delta}+\alpha_k'\\1-b_2+\alpha_k',1-\boldsymbol{\alpha}_{[k]}'+\alpha_k,1-\boldsymbol{\beta}+\alpha_k'\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right)\right\}$$

$$-\frac{(-1)^{\varkappa}(1-\boldsymbol{\gamma})_1(1-\boldsymbol{\delta})_1}{(1-b_2)(1-\boldsymbol{\alpha}')_1(1-\boldsymbol{\beta})_1}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1,1,2-\boldsymbol{\gamma},2-\boldsymbol{\delta}\\2-b_2,2-\boldsymbol{\alpha}',2-\boldsymbol{\beta}\end{matrix}\middle|(-1)^{\varkappa}\right),$$

其中我们应用了容易验证的恒等式

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^m\Gamma(1-\boldsymbol{\beta})\Gamma(\boldsymbol{\delta})}{\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma})\Gamma(\boldsymbol{\alpha}')\Gamma(b_2)}\frac{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}'-m-1)\Gamma(b_2-m)m!\Gamma(2-\boldsymbol{\gamma}+m)}{(m+1-b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-m-1)\Gamma(2-\boldsymbol{\beta}+m)}\\
&\qquad\qquad\times {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1,m+1,2-\boldsymbol{\gamma}+m,2-\boldsymbol{\delta}+m\\2-\boldsymbol{\alpha}'+m,2-\boldsymbol{\beta}+m,2-b_2+m\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\\
&+\frac{(-1)^m(1-\boldsymbol{\gamma})_m(1-\boldsymbol{\delta})_m}{(1-b_2)_m(1-\boldsymbol{\alpha}')_m(1-\boldsymbol{\beta})_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!(1)_k(b_2-m)_k(\boldsymbol{\alpha}'-m)_k(\boldsymbol{\beta}-m)_k}{[(-1)^{\varkappa-1}]^{k+m}(\boldsymbol{\gamma}-m)_k(\boldsymbol{\delta}-m)_k k!}\\
&\qquad\qquad=\frac{(-1)^{\varkappa}(1-\boldsymbol{\gamma})_1(1-\boldsymbol{\delta})_1}{(1-b_2)(1-\boldsymbol{\alpha}')_1(1-\boldsymbol{\beta})_1}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1,1,2-\boldsymbol{\gamma},2-\boldsymbol{\delta}\\2-b_2,2-\boldsymbol{\alpha}',2-\boldsymbol{\beta}\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi\Gamma(\boldsymbol{\alpha}'-b_2)\Gamma(b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+b_2)}{(-1)^m\sin(\pi b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-b_2)}+\frac{\pi\Gamma(\boldsymbol{\alpha}'-b_2-1)\Gamma(b_2+1)\Gamma(2-\boldsymbol{\gamma}+b_2)}{(-1)^m\sin(\pi b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-b_2-1)\Gamma(2-\boldsymbol{\beta}+b_2)}\\
&\qquad\qquad\times {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}b_2+1,2-\boldsymbol{\gamma}+b_2,2-\boldsymbol{\delta}+b_2,1\\2-\boldsymbol{\alpha}'+b_2,2-\boldsymbol{\beta}+b_2,2\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)\\
=&\frac{\pi\Gamma(\boldsymbol{\alpha}'-b_2)\Gamma(b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+b_2)}{(-1)^m\sin(\pi b_2)\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+b_2)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-b_2)}{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}b_2,1-\boldsymbol{\gamma}+b_2,1-\boldsymbol{\delta}+b_2\\1-\boldsymbol{\alpha}'+b_2,1-\boldsymbol{\beta}+b_2\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right).
\end{aligned}$$

因此，记作 $\boldsymbol{\alpha}=(b_2,\boldsymbol{\alpha}')\in\mathbb{C}^{n-1}$ 并回忆到 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^{p-n}$, $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{C}^{m'-2}$,

$\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{C}^{p-m'}$、 $\varkappa=p-n-m'$ 和 $m'+n\geq p$，我们得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{\alpha})_k(\boldsymbol{\beta})_k[(-1)^{\varkappa}]^k}{(\boldsymbol{\gamma})_k(\boldsymbol{\delta})_k k!}\Bigg\{\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\psi(\gamma+k)+\sum_{\delta\in\boldsymbol{\delta}}\psi(\delta+k)+\psi(1+k)-\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\alpha}}\psi(\alpha+k)$$
$$-\sum_{\beta\in\boldsymbol{\beta}}\psi(\beta+k)\Bigg\}=\pi\left[\sum_{\beta\in\boldsymbol{\beta}}\cot(\pi\beta)-\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\cot(\pi\gamma)\right]{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)$$
$$-\frac{(-1)^{\varkappa}(1-\boldsymbol{\gamma})_1(1-\boldsymbol{\delta})_1}{(1-\boldsymbol{\alpha})_1(1-\boldsymbol{\beta})_1}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1,1,2-\boldsymbol{\gamma},2-\boldsymbol{\delta}\\ 2-\boldsymbol{\alpha},2-\boldsymbol{\beta}\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(1-\boldsymbol{\beta})\Gamma(\boldsymbol{\delta})}{\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma})\Gamma(\boldsymbol{\alpha})}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_{[k]}-\alpha_k)\Gamma(\alpha_k)\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma}+\alpha_k)}{\sin(\pi\alpha_k)\Gamma(\boldsymbol{\delta}-\alpha_k)\Gamma(1-\boldsymbol{\beta}+\alpha_k)}$$
$$\times{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}\alpha_k,1-\boldsymbol{\gamma}+\alpha_k,1-\boldsymbol{\delta}+\alpha_k\\ 1-\boldsymbol{\alpha}_{[k]}+\alpha_k,1-\boldsymbol{\beta}+\alpha_k\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(1-\boldsymbol{\beta})\Gamma(\boldsymbol{\delta})}{\Gamma(1-\boldsymbol{\gamma})\Gamma(\boldsymbol{\alpha})}\sum_{k=1}^{m'-2}\frac{\pi\Gamma(\gamma_k-1)\Gamma(\gamma_k-\boldsymbol{\gamma}_{[k]})\Gamma(1-\gamma_k+\boldsymbol{\alpha})}{\sin(\pi\gamma_k)\Gamma(\gamma_k-\boldsymbol{\beta})\Gamma(1-\gamma_k+\boldsymbol{\delta})}$$
$$\times{}_{p-1}F_{p-2}\left(\begin{matrix}1-\gamma_k+\boldsymbol{\alpha},1-\gamma_k+\boldsymbol{\beta}\\ 2-\gamma_k,1-\gamma_k+\boldsymbol{\gamma}_{[k]},1-\gamma_k+\boldsymbol{\delta}\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{\varkappa}\right).$$

引入记号

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{a}_1\in\mathbb{C}^n,\quad \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{a}_2\in\mathbb{C}^{p-n},\quad \mathbf{a}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\in\mathbb{C}^p,$$
$$\mathbf{b}_1=\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{C}^m,\quad \mathbf{b}_2=\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{C}^{p-1-m},\quad \mathbf{b}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\in\mathbb{C}^{p-1},$$

最终，我们在以下条件下得到（18）： $0\leq n\leq p$， $0\leq m\leq p-1$ 和κ：
$=m-n\geq -2$。□

这个恒等式在 $n=p$、 $m=p-1$ 中的一个特殊情形为:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k(-1)^k}{\pi(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]=$$
$$\left[\sum_{a\in\mathbf{a}}\cot(\pi a)-\sum_{b\in\mathbf{b}}\cot(\pi b)\right]{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)+\frac{(1-\mathbf{b})_1}{\pi(1-\mathbf{a})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{b}\\ 2-\mathbf{a}\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)$$
$$+\frac{\Gamma(1-\mathbf{a})}{\Gamma(1-\mathbf{b})}\sum_{b_k\in\mathbf{b}}\frac{\Gamma(b_k-1)\Gamma(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}{\sin(\pi b_k)\Gamma(b_k-\mathbf{a})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-b_k+\mathbf{a}\\ 2-b_k,1-b_k+\mathbf{b}_{[k]}\end{matrix}\,\middle|\,-1\right).\quad(19)$$

将此公式与（13）结合，我们得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k(\pm1)^k}{\pi(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]$$
$$=\left[\sum_{a\in\mathbf{a}}\cot(\pi a)-\sum_{b\in\mathbf{b}}\cot(\pi b)\right]{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\,\middle|\,\pm1\right)\mp\frac{(1-\mathbf{b})_1}{\pi(1-\mathbf{a})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{b}\\ 2-\mathbf{a}\end{matrix}\,\middle|\,\pm1\right)$$
$$+\frac{\Gamma(1-\mathbf{a})}{\Gamma(1-\mathbf{b})}\sum_{b_k\in\mathbf{b}}\frac{[\cos(\pi b_k)]^{\{1\}_0}\Gamma(b_k-1)\Gamma(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}{\sin(\pi b_k)\Gamma(b_k-\mathbf{a})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-b_k+\mathbf{a}\\ 2-b_k,1-b_k+\mathbf{b}_{[k]}\end{matrix}\,\middle|\,\pm1\right)$$

这恰好是引言中给出的公式（2）。另一方面，公式（3）是通过在（ $m=n=0$ 中取18）得到的：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_k}{\pi(\mathbf{b})_k k!}\left[\sum_{b\in\mathbf{b}}\psi(b+k)+\psi(1+k)-\sum_{a\in\mathbf{a}}\psi(a+k)\right]$$
$$=\frac{\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a})}\sum_{a_k\in\mathbf{a}}\frac{\Gamma(a_k)\Gamma(\mathbf{a}_{[k]}-a_k)}{\sin(\pi a_k)\Gamma(\mathbf{b}-a_k)}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}a_k,1-\mathbf{b}+a_k\\ 1-\mathbf{a}_{[k]}+a_k\end{matrix}\right)-\frac{(1-\mathbf{b})_1}{\pi(1-\mathbf{a})_1}{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}1,1,2-\mathbf{b}\\ 2-\mathbf{a}\end{matrix}\right).$$

将其与（+）的情况2结合起来，我们还可得到：

$$\left[\sum_{a\in\mathbf{a}}\cot(\pi a)-\sum_{b\in\mathbf{b}}\cot(\pi b)\right]{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a})}\sum_{k=1}^{p}\frac{\Gamma(a_k)\Gamma(\mathbf{a}_{[k]}-a_k)}{\sin(\pi a_k)\Gamma(\mathbf{b}-a_k)}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}a_k,1-\mathbf{b}+a_k\\ 1-\mathbf{a}_{[k]}+a_k\end{matrix}\right)$$
$$-\frac{\Gamma(1-\mathbf{a})}{\Gamma(1-\mathbf{b})}\sum_{k=1}^{p-1}\cot(\pi b_k)\frac{\Gamma(b_k-1)\Gamma(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}{\Gamma(b_k-\mathbf{a})}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-b_k+\mathbf{a}\\ 2-b_k,1-b_k+\mathbf{b}_{[k]}\end{matrix}\right)\quad(20)$$

- 另一个似乎是新的、兼具 [8, (5.1)]和 [8, (5.3)]这两个特征的多项超几何恒等式。

参考文献

[1] L.U. Ancarani 和 G. Gasaneo，关于超几何函数 ${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q;\ z)$ 对参数 a_i 和 b_i的任意阶导数，J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 085210 (11 页)。

[2] A. Apelblat, 《贝塞尔函数及相关函数》。第1卷：理论方面，De Gruyter，2020年。[3] A. Apelblat 和 F. Mainardi, 《对 Wright 函数关于参数的求导及其他结果》，《应用科学》，2022年，12卷，12825。[4] G.E. Andrews、R. Askey 和 R. Roy, 《特殊函数》，剑桥大学出版社，1999年。[5] J. Borwein, 《Hansen 级数与乘积表补遗》，可通过
https://car
ma.newcastle.edu.au/resources/jon/Preprints/Books/Other/hansen07 获取。

pdf

[6] Yu.A. Brychkov, 《特殊函数：导数、积分、级数及其他公式》，C
hapman & Hall/CRC，2008。[7] Yu.A. Brychkov 和 K.O.Geddes，关于超几何函数对参数求导，Abstract and Applied Analysis，第 15–28 页（2004）。[8] A. ̧Cetinkaya、D.B. Karp 和 E.G. Prilepkina，单位参数处的超几何函数：新旧恒等式的简明推导，SIGMA 17（2021），098。[9] D. Cvijovi´c，含有 digamma 函数的某些超几何型级数的闭式求和，J. Phys. A: Math. Theor. 41（2008）455205。[10] D. Cvijovi´c 和 A.R. Miller，Kamp´e de F´eriet 函数的一个约化公式，Applied Mathematics Letters 23（2010）769–771。[11] B.Xh. Fejzullahu，广义超几何函数对参数的导数，Integral Transforms and Special Functions，第 28 卷，第 11 期，2017，781–788。[12] J. Gonz´alez-Santander、F. S´anchez Lasheras，涉及 digamma 函数的有限与无限超几何求和。Mathematics 2022，10，2990。[13] J. Gonz´alez-Santander、F. S´anchez Lasheras，与不完全贝塔函数和贝塞尔函数相关的 digamma 函数求和，预印本，2023。arXiv:2304.01208v1。[14] E.R. Hansen, 《级数与乘积表》，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：Prentice-Hall，1975。

[15] M.Yu. Kalmykov 和 B.A. Kniehl，一元超几何函数的全阶展开，Physics of Particles and Nuclei，2010，第 41 卷，第 6 期，第 942–945 页。[16] M. Kalmykov、V. Bytev、B.A. Kniehl、S.-O. Moch、B.F.L. Ward 和 S.A. Yost，超几何函数与费曼图，载于《反微分与费曼振幅计算》（J. Bl¨umlein 和 C. Schneider 编），第 189–234 页，Springer，2021。[17] H. Kang、C. An，关于所有参数的若干超几何函数求导公式，Applied Mathematics and Computation 258（2015）454–464。[18] A.R. Miller，含 digamma 函数的某些级数的求和，J. Phys. A: Math. Gen. 39（2006），3011–20。[19] T.M. Rassias 和 H.M. Srivastava，与黎曼 zeta 函数、多伽马函数及广义调和数相关的若干类无穷级数，Appl. Math. Comp. 131（2002）593–605。[20] P.C. Sofotasios 和 Yu.A. Brychkov，关于超几何函数及经典多项式对参数的导数，Integral Transforms and Special Functions，第 29 卷，第 11 期，2018，852–865。[21] H.M.Srivastava、P. Karlsson，《多重高斯超几何级数》，Ellis Horwood Limited，1985。