arXiv:2304.04104v1 [math.AP] 8 Apr 2023

高维调和映射热流中缩小解的存在性与稳定性

IRFAN GLOGIĆ、SARAH KISTNER 和 BIRGIT SCHÖRKHUBER

摘要。我们研究从 $\mathbb{R}^d$ 出发的调和映射热流中的奇点形成。对于每个 $d \geq 4$，我们构造一个紧致的、 d 维的旋转对称目标流形，使得存在一个共旋自相似缩小解（简称缩小解），它为相应的柯西问题提供了一种稳定的爆破解机制。

1. 引言

˜给定黎曼流形 $(M,\ h)$ 和 $(N,\ h)$，若光滑映射 $U\colon M \to N$ 是能量泛函的临界点（相对于紧支变分），则称其为调和映射

$$S(U) := \frac{1}{2}\int_M |dU|^2 d\mathrm{vol}_{\tilde{h}}, \tag{1.1}$$

其中，映射 U 的微分 dU 被视为向量丛 $(T^*M \otimes U^*TN,\ h \otimes U^*h)$ 的截面。利用局部坐标，该泛函可写成更明确的形式[1]

$$S(U) = \frac{1}{2}\int_M \tilde{h}^{ij}(x) h_{ab}(U(x))\partial_i U^a(x)\partial_j U^b(x)\sqrt{|\tilde{h}(x)|}dx. \tag{1.2}$$

此外，与 (1.2) 相对应的欧拉-拉格朗日方程组为

$$\Delta_{\tilde{h}} U^a + \tilde{h}^{ij}\Gamma^a_{bc}(U)\partial_i U^b \partial_j U^c = 0,$$

其中，$\Delta_{\tilde{h}}$ 表示作用于 M上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，Γ^a_{bc} 是与度量 h相对应的克里斯托费尔符号。

调和映射的研究内容极其丰富，不可能对所有相关文献逐一综述。因此，我们请读者参阅以下著作及其中的参考文献 [15, 16, 30, 32]。1964 年，Eells 和 Sampson [17] 提出了一种研究调和映射存在性问题的尤为重要的方法。具体而言，他们考虑了 (1.2) 的负 L^2-梯度流

$$\partial_t U^a - \Delta_{\tilde{h}} U^a - \tilde{h}^{ij}\Gamma^a_{bc}(U)\partial_i U^b \partial_j U^c = 0, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

对于任意初始映射 $U(0,\cdot) = U_0$。由于（1.3）的抛物性，预期该演化将收敛到一个静态解，该解表示一个调和映射。在目标流形满足某些曲率条件的情况下，这种方法证明是非常有效的。特别地， [17] 中证明了：如果 M 是闭的且 N 是具有非正截面曲率的紧流形，那么（1.3）对任意光滑初始数据存在一个全局

Irfan Glogić 受奥地利科学基金 FWF 的项目 P 30076 和 P 34378 资助。[1]本文中及全文其余部分均采用爱因斯坦求和约定。

在 $t \to \infty$时收敛于调和映射的解。如果靶流形 N的曲率符号不受限制，则对于“较小”的数据 [31]，整体存在性已得到证明。然而，一般而言，流（1.3）可能在有限时间内形成奇点，正如 [9, 11] 中对映射到球面的情形首次展示的那样。

为了在爆破后继续延拓解（可能是在较弱的意义下），需要详细了解奇点的性质。此外，由于爆破具有局部性，只需考虑从定义域流形的切空间出发的映射，即 $\mathbb{R}^d$；相关讨论见例如 [37, 28, 19] 。在 $d \geq 3$ 的情形下，Struwe [37] 给出的刻画可将爆破解（沿一列时刻）分解为极限剖面，这些剖面要么是从 $\mathbb{S}^{d-1}$ 映入N 的非恒定调和映射，要么是来自自相似解的剖面函数。对于 $N = \mathbb{S}^d$，每种类型的爆破都已有明确例子构造出来 [19, 20, 1, 2, 5, 6], ，其中有些甚至会导致稳定的爆破动力学 [3, 4, 22]。然而，对于一般的目标流形，爆破是否存在且是否稳定，尤其是自相似奇点的问题，在很大程度上仍未解决。

下文中，我们将注意力限制在 $d \geq 3$ 以及旋转对称靶流形上。更确切地说，我们研究从 $\mathbb{R}^d$ 到 N的映射所满足的方程 (1.3)，其中 $(N,\ h)$ 是一个d维、完备、旋转对称的扭曲积黎曼流形

$$(N, h) = (0, a^*) \times_g \mathbb{S}^{d-1} \quad \text{for some} \quad a^* \in (0, \infty], \tag{1.4}$$

其中 g 是一个适当的扭曲函数；例如参见 [39, 10]。在 N上的极坐标 $(u,\ \Omega) \in (0,\ a^*) \times \mathbb{S}^{d-1}$ 中，度量 h 定义为

$$h = du^2 + g(u)^2 d\Omega^2, \tag{1.5}$$

其中 $d\Omega^2$ 是球面 $\mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$上的标准球面度量。此外，扭曲函数 g 必须满足以下条件

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad g \text{ is odd}, \quad g'(0) = 1. \tag{1.6}$$

与极限值 $u = 0$ 相对应的点称为 N的顶点。若 N具有紧致性，即若 g的最小正零点为 $a^* < \infty$ ，则除 (1.6) 外，我们还要求 $g'(a^*) = -1$ ，并且 g 以 $2a^*$为周期延拓至区间 $(-a^*,\ a^*]$ 之外。靶流形的旋转对称性使我们可以将注意力限制在从 $\mathbb{R}^d$到 N的共旋映射上。具体而言，通过在定义域上引入极坐标 $(r,\ \omega)$，$r > 0,\ \ \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$，我们将映射限制为以下形式

$$(u(t, r, \omega), \Omega(t, r, \omega)) = (u(t, r), \omega). \tag{1.7}$$

通过这一试探解，系统 (1.3) 化为关于 u 的单个偏微分方程。特别地，通过设置$rv(t, r) := u(t, r)$，(1.3) 的初值问题等价于

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_r^2 v - \dfrac{d+1}{r} \partial_r v + \dfrac{d-1}{r^3} (g(rv) g'(rv) - rv) = 0, \quad t > 0, \\ v(0, \cdot) = v_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

从解析的观点来看，在 N 上考虑所谓的正规坐标 $U = (U^1,\ \ldots\ldots,\ U^d)$，其中

$$U^j := u\, \Omega^j, \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, d; \tag{1.9}$$

例如，参见 [36]。通过这种方式， N （包括其顶点）可以与球 $B^d_{a^*}(0) \subset \mathbb{R}^d$ 相识别。然后，在正规坐标中，共旋转解 $U(t,\cdot)$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 对于 (1.3) 可以写成

$$U(t,x) = u(t,|x|)\frac{x}{|x|} = xv(t,|x|), \tag{1.10}$$

其中 v 满足 (1.8)。下文我们将采用这一观点。

1.1. **主要结果**。

1.1.1. 收缩子的存在性。展示爆破的一种方式是通过自相似解。由于系统 (1.3) 在如下缩放下保持不变

$$U(t,x) \mapsto U_\lambda(t,x) := U(t/\lambda^2, x/\lambda), \quad \lambda > 0,$$

因此，寻找以下形式的非平凡解是合理的

$$U_T(t,x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right), \quad T > 0, \tag{1.11}$$

其中剖面函数为 $\Phi: \mathbb{R}^d \to N$。这类自相似（收缩）解也称为收缩子或齐次收缩孤子。在共转情形下， U_T 对应于

$$v_T(t,r) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\phi\left(\frac{r}{\sqrt{T-t}}\right), \tag{1.12}$$

在正规坐标中，相似剖面函数之间的关系为 $\Phi(x) = x\phi(|x|)$。

在本文中，我们研究解(1.11) 的存在性与稳定性。我们对剖面函数 $\Phi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 所提出的最低要求是光滑且有界。将试探解 (1.12)代入(1.8)，我们得到关于剖面函数 $\phi = \phi(\rho)$的常微分方程，

$$\phi'' + \left(\frac{d+1}{\rho} - \frac{\rho}{2}\right)\phi' - \frac{1}{2}\phi - \frac{d-1}{\rho^3}\Big(g(\rho\phi)g'(\rho\phi) - \rho\phi\Big) = 0. \tag{1.13}$$

收缩子的存在性当然取决于靶流形 N 的几何，而后者又完全由扭曲函数 g编码。由 [17, 29], 我们知道，假设 N 具有非正曲率会阻止奇点的形成。对于 (1.4)-(1.5) 类型的流形，具有非正截面曲率这一性质可以简单地表征为以下条件:

$$g''(u) \geq 0 \quad \text{for all} \quad u \in [0,\infty);$$

参见例如 [14]。一个自然的问题是，能否（以及如何）扩大这一类流形，同时仍能普遍排除爆破的存在，尤其是缩小解。一个显而易见的候选对象是 Shatah 和 Tahvildar-Zadeh 在 [36]，中称为“测地凸”的流形族，其特征是

$$g'(u) > 0 \quad \text{for all} \quad u \in [0,\infty). \tag{1.14}$$

我们指出，在波映射这一调和映射热流的双曲型对应物的背景下，已经在 [36] 中研究了这类流形的自相似爆破的存在性。利用有限传播速度，作者特别证明了，对于每个 $d \geq 4$, 都存在一个满足(1.14) 的旋转对称目标流形，使其允许一个共旋自相似爆破解。事实证明，对于调和映射热流

事实并非如此。我们将其表述为一个命题，并在第 1.3 节中给出简短证明。

命题 1.1。设 $d \geq 2$，并假设 (N, h) 是一个 d维扭曲乘积黎曼流形，由 (1.4)-(1.5)给出。若扭曲函数 g 满足(1.14)，则从 $\mathbb{R}^d$ 到 N 的调和映射热流不承认非平凡、光滑且有界的共旋自相似缩小解。这里的有界性是指缩小解的像包含在 N的顶点的某个有界邻域内。

请注意，命题 1.1 适用于一大类正曲率流形，即具有递增但严格凹的扭曲函数 g的流形。此外，对于一个流形 (1.4)-(1.5) 要存在一个等变收缩解，一个必要条件是它包含一个“赤道”，也就是说，存在 $u^* > 0$ 使得 $g'(u^*) = 0$。当然，属于这一类型的一个突出流形是球面。更进一步，众所周知，从 $\mathbb{R}^d$ 到 d-球面的调和映射热流对于所有 $3 \leq d \leq 6$ 都存在一个等变收缩解；例如参见 $[19, 20]$。然而，对于 $d \geq 7$，这一点不再成立；参见 $[7]$。据作者所知，目前还没有已知的目标流形能够对于 $d \geq 7$ 存在等变收缩解。本文两个主要结果中的第一个旨在填补这一空白。

定理 1.2。令 $0 < \gamma < \sqrt{2}-1$。对于每个 $d \geq 4$，存在一个紧致的、 d 维的、旋转对称的黎曼流形 (N, h)，由 (1.4) - (1.5) 给出，使得以下结论成立：从 $\mathbb{R}^d$ 到 N 的调和映射热流存在一个非平凡的等变收缩解

$$U_T(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right),$$

其中剖面函数 Φ： $\mathbb{R}^d \to N$ 是光滑的，并且，

$$d(\Phi(x), p) \leq r_g + \gamma \tag{1.15}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^d$，其中 p 是 N 的顶点，且 r_g 是扭曲函数 g的最小正临界点。

我们将证明推迟到第1.4 节，尽管在此之前我们将在下文定理 1.4 的陈述中引用它。

注记 1.3. 注意，命题 1.1 意味着，任意等变收缩解的像都严格包含以目标流形顶点为中心的闭测地球，其特征由 $g'(u) > 0$ 给出。另一方面，定理 1.2 表明，这一结论在一般情形下仅勉强成立。也就是说，存在一些目标流形，它们允许存在某个缩小解，使得上述测地球仅以微小差距未能包含该缩小解的像。特别地，(1.15) 意味着在正规坐标中

$$\|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq r_g + \gamma.$$

1.1.2. 收缩解的稳定性。 对于一个爆破解，最自然的问题是它在小扰动下是否稳定。我们证明，在定理 1.2 的证明中构造的缩小解 U_T 在初始数据的小协旋转扰动下具有非线性渐近稳定性。更确切地说，我们证明，在适当的拓扑下，存在一组包含 $U_1(0, \cdot) = \Phi$的协旋转初始数据的开集，对其中的数据，方程 (1.3) 的柯西演化会在有限时间 $T > 0$ 形成奇点，并收敛到 U_T，也就是剖面函数

Φ，经自相似缩放后。出于下文将要说明的原因，我们固定 γ的取值，并将讨论限制在某个维数范围内。

定理 1.4。 设 $\gamma = \frac{1}{4}$, $d \in \{4, 5, 6, 7\}$，且 $N, h)$ 和 U_T分别为定理 *1.2* 的证明中构造的黎曼流形及相应的缩小解。假设 $s, k > 0$ 满足

$$\frac{d}{2} < s \leq \frac{d}{2} + \frac{1}{2d}, \quad k > d + 2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

那么，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意具有如下形式的共旋初始数据

$$U_0 = \Phi + \eta_0,$$

其中 $\eta_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是满足以下条件的施瓦茨函数

$$\|\eta_0\|_{\dot{H}^s \cap \dot{H}^k(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon,$$

存在 $T > 0$ 和一个经典解 $U \in C^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^d)$，它满足 (1.3)，且其梯度在原点处于 $t \to T^-$时爆破。此外， U 可以分解为以下形式

$$U(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right) + \eta\left(t, \frac{x}{\sqrt{T-t}}\right), \tag{1.17}$$

其中对任意 $r \in [s, k]$，都有

$$\|\eta(t, \cdot)\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^d)} \to 0 \tag{1.18}$$

在极限 $t \to T^-$下。

下面我们给出几点补充说明。

注 1.5。 由 (1.18) 可得

$$\|U(t, \sqrt{T-t}\cdot) - \Phi\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^d)} \to 0, \quad \text{for } t \to T^-.$$

换言之，从 Φ 出发、仅有微小偏差的解 U，经过自相似缩放后，会在适当选取的拓扑中收敛回 Φ。这对应于通常所说的自相似解的稳定性。根据 (1.16) 对较低 Sobolev 指数 s 的选取所施加的限制，我们几乎无法控制扰动 η 的 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 范数，这意味着它原则上可能在逐点意义下不受控制地增长，从而多次绕靶流形缠绕。然而，根据 Sobolev 嵌入定理，我们可推得 $\|\nabla\eta(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$，这意味着在极限情形$t \to T^-$ 下有

$$\sqrt{T-t}\|\nabla U(t, \sqrt{T-t}\cdot) - \nabla\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \to 0.$$

注 1.6。 定理 1.4 的证明取决于表示围绕缩小解线性化的算子的谱性质。要获得关于 d 一致的结果似乎很困难。因此，为了给出完全严格的证明，我们将讨论限制在较低的空间维数，并固定 γ 的取值。不过，对于任意给定的维数 $d \geq 4$ 以及某个 $\gamma^* = \gamma^*(d) < \sqrt{2} - 1$，只要满足 $\gamma \in (0, \gamma^*)$，也可以得到与定理 1.4 类似的结果。

此外，(1.16) 中对 s, k 的限制，保证了线性化流在适当子空间上的指数衰减，以及由扭曲函数 g产生的非线性项的局部 Lipschitz 连续性；参见第 4.1 节和第 5 节。

注 1.7。 定理 1.4 的证明与第一作者和第三作者在 [25]中针对 $d \geq 5$中的 Yang-Mills 热流所采用的方法在精神上相似；另请参见 Biernat、Donninger 和第三作者关于三维调和映射热流到球面的研究 [4] 。然而，与 [4, 25], 不同，我们无法完全在整数阶 Sobolev 空间中开展工作。特别是，为了控制交 Sobolev 空间 $\dot{H}^s \cap \dot{H}^k$中的演化，我们必然有 $s \notin \mathbb{N}$；更多细节见下文第 1.5 节。反过来，通过将这一方法推广到这种情形，我们为研究任意维数 $d \geq 3$下旋转对称情形中调和映射热流借助缩小解形成奇点的稳定性提供了一个框架。特别地，在解决一个谱问题的前提下，我们的方法可用于将 [4] 的结果推广到 $d \in \{4,5,6\}$。

1.2. **相关结果**。 调和映射热流的分析是一个非常广泛的课题，不可能在此回顾所有相关研究。因此，我们重点介绍与本文相关的奇点形成结果；有关一般背景，读者可参阅例如 [38, 32]。我们强调，我们主要综述从 $\mathbb{R}^d$ 到旋转对称流形的映射相关的论文。

首先注意，对于共旋映射，能量泛函 (1.1) 可化简为（相差一个常数）

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^{d-1}\left((\partial_r u)^2 + \frac{d-1}{r^2}g(u)^2\right)dr.$$

由自然缩放 $u_\lambda(t,r) = u(t/\lambda^2, r/\lambda)$，我们得到$\mathrm{E}(u_\lambda)(t) = \lambda^{d-2}\mathrm{E}(u)(t/\lambda^2)$，这表明该问题在 $d = 2$ 中是能量临界的，而在 $d \geq 3$ 中是超临界的。

在能量临界情形下，Raphaël 和 Schweyer 在 [33] 中证明，存在一大类旋转对称目标流形（包括二维球面）允许共旋爆破解。此外，他们还获得了底层爆破机制的稳定性；另见 [34] ，其中对可能的爆破机制进行了更细致的描述，其中也包括不稳定的情形。正如临界型问题中通常出现的那样，上述论文中的爆破并非自相似的，而是通过对调和映射进行重新缩放实现的。关于有界二维定义域上映射的爆破经典结果，参见 [9], ；关于较新的结果，参见 [12, 13]。

在能量超临界情形下， $d \geq 3$，Coron 和 Ghidaglia [11], 首次构造了映入 $\mathbb{S}^d$的爆破解。随后，Fan [19] 证明，在映入 $\mathbb{S}^d$ 的共旋映射类中，存在无穷多个自相似爆破解，但仅当参数处于受限范围 $3 \leq d \leq 6$内时才成立。对于 $d \geq 7$，之后 Bizoń 和 Wasserman [7]证明，缩小解实际上并不存在。另一方面，Gastel 在 [20] 中指出，如果允许非共旋映射，即允许取值于维数严格高于定义域维数的球面、且具有较高等变类的映射，那么对任意 $d \geq 3$都存在自相似解。关于自相似爆破的稳定性，作者所知的相关研究仅有 [3], ： Biernat 和 Donninger 在 $d = 3$中构造了一个谱稳定的自相似解；在 [4], 中，他们与本文第三作者共同证明，所构造的爆破剖面函数具有非线性稳定性。多篇研究探讨了非自相似爆破解的存在性与稳定性，特别是 Biernat [1], 、Ghoul、Ibrahim 和 Nguyen [22], 以及 Biernat 和 Seki [6] 对映入球面的映射所做的研究。关于爆破后延拓问题的研究结果，请参阅 [2, 21]。

1.3. 命题 1.1 的证明。 我们用反证法。假设存在一个非平凡的共旋映射 $\Phi\colon\ \mathbb{R}^d \to N$，它光滑、有界，并且使得 (1.11) 对 $t < T$满足 (1.3)。这尤其意味着，在 N上的正规坐标中，有 $\Phi(x) = x\phi(|x|)$，其中 $\phi\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是光滑的，并满足 (1.13)。此外，Φ 的有界性意味着 $\rho \mapsto \vartheta(\rho)\colon = \rho\phi(\rho)$ 在 $[0,\infty)$上有界。

现在，不失一般性，我们可以假设 $\phi(0) > 0$，否则利用反射对称性，我们可以考虑 $-\phi$。注意到 (1.14) 和 (1.6) 蕴含

$$f(u) := g(u)g'(u) > 0 \quad \text{for} \quad u > 0. \tag{1.19}$$

还要注意，(1.13) 蕴含

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{d-1}e^{-\frac{\rho^2}{4}}\vartheta'(\rho)\right) = (d-1)\rho^{d-3}e^{-\frac{\rho^2}{4}}f\big(\vartheta(\rho)\big). \tag{1.20}$$

由于 $\phi(0) > 0$，我们有，对于 ρ 的较小正值，$\vartheta(\rho) > 0$。据此，我们得出结论：ϑ 在整个区间 $(0,\infty)$ 上必定为正。事实上，否则就会存在最小的 $\rho^* > 0$ 使得 $\vartheta(\rho^*) = 0$，而在 $(0,\rho^*)$ 上对 (1.20) 积分，将得到左侧非正、右侧为正。现在，由于 ϑ 在全局范围内为正，由 (1.20) 可知，$\rho \mapsto \rho^{d-1}e^{-\rho^2/4}\vartheta'(\rho)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增。

因此，由于存在足够小的 $\rho_0 > 0$ 使得 $C := \rho_0^{d-1}e^{-\frac{\rho_0^2}{4}}\vartheta'(\rho_0) > 0$，我们有

$$\vartheta'(\rho) \geq C\rho^{1-d}e^{\frac{\rho^2}{4}}$$

对于 $\rho \geq \rho_0$。由此可得，当 $\rho \to +\infty$ 时，$\vartheta(\rho) \to +\infty$，这与 Φ 的有界性矛盾。

1.4. 定理 1.2 的证明。为了构造流形 $(N,\ h)$，我们只需指定扭曲函数 g。首先，我们固定 $0 < \gamma < \sqrt{2} - 1$。对于 $d \geq 4$，我们按以下方式在自变量取较小值时定义 g

$$g(u) := u\sqrt{1 - \alpha u^2 + \beta u^4}, \tag{1.21}$$

其中

$$\alpha = \frac{3}{2(d-1)(1+\gamma)^4} + \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{(d-1)(1+\gamma)^4}. \tag{1.22}$$

对于 g 的这一选择，相应的收缩子方程

$$\phi''(\rho) + \left(\frac{d+1}{\rho} - \frac{\rho}{2}\right)\phi'(\rho) - \frac{1}{2}\phi(\rho) + (d-1)\big(2\alpha\phi(\rho)^3 - 3\beta\rho^2\phi(\rho)^5\big) = 0$$

存在一个显式解

$$\phi(\rho) = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + b}}, \tag{1.23}$$

其中

$$a = 1 + \gamma \quad \text{and} \quad b = \frac{2\gamma(2+\gamma)\big((d-1)(1+\gamma)^2 - 3\big)}{(1+\gamma)^2}. \tag{1.24}$$

显然可得，g' 的最小正零点为 $r_g = 1$。此外，我们有 ϕ 是光滑的，并且

$$\sup_{\rho \geq 0} |\rho\phi(\rho)| = 1 + \gamma. \tag{1.25}$$

我们现在还证明，对于 $u \in (0, 1+\gamma]$，$g(u) > 0$。若 $\alpha^2 - 4\beta < 0$，则对所有$u > 0$ 都有 $g(u) > 0$，特别是对于 $u \in (0, 1+\gamma]$。否则，g 的最小正零点为

$$u^* = \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}},$$

因此，只需证明 $1+\gamma < u^*$。通过简单的代数运算可见，这等价于

$$(d-1)(1+\gamma)^4 - 2d(1+\gamma)^2 + 3 < 0,$$

这在 $d \geq 4$ 和 $\gamma < \sqrt{2} - 1$时成立。现在，我们只需将 g 延拓到 $u = 1+\gamma$ 之外，并以一种能得到紧流形的方式进行。总之，我们构造了一个扭曲函数g，它定义了一个紧流形（N, h），并且缩小解常微分方程 (1.13) 具有一个显式解(1.23)（注意，这由(1.25) 保证）。此外，由 (1.25) 我们推导出 (1.15)。

1.5. **定理 1.4 的证明概要**。由于 U_T 的旋转对称扰动的热流由 $(d+2)$ 维径向热方程 (1.8) 控制，我们令 $n := d+2$，并考虑在 $w(t,x)$ 中相应的 n 维半线性热方程的柯西问题：$= v(t, |x|)$

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = \dfrac{n-3}{|x|^3}\Big(|x|w - g(|x|w)g'(|x|w)\Big), & t > 0, \\ w(0,\cdot) = w_0(|\cdot|), \end{cases}$$

其存在一个显式的自相似解

$$w_T(t,x) = \tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\phi\left(\tfrac{|x|}{\sqrt{T-t}}\right),$$

其中，ϕ 由 (1.23)-(1.24)给出。因此，我们的大部分工作都在于证明 w_T 在小的径向扰动下的稳定性，随后利用共旋映射的 Sobolev范数与其径向剖面函数的 Sobolev范数之间的等价性，将其转化为关于 U_T 的结果。出发点是相似变量

$$\tau := \ln\left(\tfrac{T}{T-t}\right) \quad \text{and} \quad y := \tfrac{x}{\sqrt{T-t}}.$$

通过这一点，以及因变量 $\psi(\tau, y) = \sqrt{T-t}\, w(t,x)$的缩放，自相似的收缩解变为静态的，即与 τ无关，从而爆破的有限时间稳定性问题转化为稳态剖面函数的渐近稳定性问题。特别地，假设 $\psi(\tau,\cdot) = \phi(|\cdot|) + \varphi(\tau,\cdot)$，我们得到关于扰动 φ 的方程，

$$\begin{cases} \partial_\tau \varphi(\tau,\cdot) = L\varphi(\tau,\cdot) + \mathcal{N}(\varphi(\tau,\cdot)), & \tau > 0, \\ \varphi(0,\cdot) = \sqrt{T} w_0(\sqrt{T}|\cdot|) - \phi(|\cdot|), \end{cases} \tag{1.26}$$

with

$$Lf(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2} x \cdot \nabla f(x) - \tfrac{1}{2} f(x) + V(x) f(x),$$

其中，势 V 来自围绕 $\phi(|\cdot|)$ 进行线性化，而 N 是非线性余项。首先要注意，L 可以在希尔伯特空间 H 上实现为一个自伴算子；H 对应于径向函数的加权 L^2-空间，见 (2.14)。然而，由于权函数呈指数衰减，因此无法控制不中返

在此类设定下的非线性项。相反，我们研究在交集径向索伯列夫空间中的演化

$$X_s^k(\mathbb{R}^n) = \dot{H}_r^s(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_r^k(\mathbb{R}^n),$$

其中 $0 < s - s_c \ll 1$，其中 $s_c = n/2 - 1$ 是临界索伯列夫指数，且 $k \in \mathbb{N}$、$k \gg 1$。关于 s, k 的条件由以下要求所决定。首先，选择 $s > s_c = \frac{n}{2} - 1$ 可确保线性化演化在适当子空间上的指数衰减。此外，为了获得合理的分布空间，我们需要 $s < \frac{n}{2}$，因此，s 必须是非整数。另外，如果 $k > \frac{n}{2}$，那么 X_s^k 连续嵌入到 L^∞(ℝ^n) 中。(1.16)所蕴含的更强假设源于广义 Schauder 估计（[23], 命题 A.1）的应用，该估计使我们能够证明非线性项的局部利普希茨性质。

在 X_s^k 中，线性化问题的自伴结构丧失，因此标准的自伴谱方法和半群方法变得无法使用。然而，利用 X_s^k 连续嵌入 H 这一事实（见引理 2.1），我们可以将 L 在 H 中的谱结果转化为由 L 在X_s^k中生成的半群的增长界。在这一步中，与以往的工作相比，s 的分数阶特性带来了严重困难，尤其参见引理 4.5 和命题4.6。

为了分析 L 在 H 中的谱性质，我们研究相应的薛定谔算子，并采用超对称方法证明 L的谱仅由实孤立特征值组成，且除$\lambda = 1$之外均位于左半平面。然而，这个特征值是时间平移对称性所产生的人为产物，因此并不是真正的不稳定性。因此，L 在 H 上生成一个半群，该半群在与不稳定模态 G正交的稳定子空间上呈指数衰减。由于$G \in X_s^k$，H 中到 G 的正交投影在 X_s^k 中产生一个（非正交）投影，借此我们能够证明X_s^k 中的线性化演化在一个不变子空间上呈指数衰减。

在此之后，我们采用不动点论证，其中通过Lyapunov-Perron 型论证，我们证明对于每个足够接近 $\phi(|\cdot|)$的初始数据 w_0，存在一个接近1 的时间选择 T，使得方程 (1.26) 存在一个全局且指数衰减的解。通过使用正则性论证，我们证明光滑且快速衰减的初始数据$\varphi(0,\cdot)$导出光滑解。最后，通过利用齐次索伯列夫范数的等价性，我们将其转化为关于 U_T 的稳定性结果，从而建立定理 1.4。

1.6.记号与约定。若存在常数 $C > 0$，使得 $a \le Cb$，我们记作 $a \lesssim b$；若 $a \lesssim b$ 且 $b \lesssim a$，我们记作 $a \simeq b$。如果常数 C 依赖于某个参数 ε，则我们记作 $a \lesssim_\varepsilon b$。我们将 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 $R > 0$ 的开球记作 B_R^d，并且当维数可由上下文明确时省略指标 d。我们还使用通常的日式括号记号 hxi：$= \sqrt{1 + |x|^2}$。用 C^∞(ℝ^d) 和S(ℝ^d) 分别表示光滑函数空间和施瓦茨函数空间。用 C_c^∞(ℝ^d) 表示由光滑且紧支撑函数组成的标准测试函数空间。对于径向函数，我们使用下标 r，例如 C_r^∞(ℝ^d)、S$_r$(ℝ^d)、C_c^∞、$_r$(ℝ^d)。为方便起见，对于每个分量都属于相应空间的向量值函数集合，我们也分别记作 C^∞(ℝ^d)、 C_c^∞(ℝ^d)和S(ℝ^d)。对于闭线性算子(L,D(L))，我们将预解集记作 ρ(L)，并将谱记作 σ(L)：$= \mathbb{C} \setminus \rho$(L)。给定 $\lambda \in \rho$(L)，对于预解算子 $R_{\mathcal{L}}(\lambda)$，我们采用以下约定：$= (\lambda - \mathrm{L})^{-1}$。对于 $f \in C_c^\infty$(ℝ^d),

我们使用傅里叶变换的以下定义

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

2. 问题的表述

本节引入相似变量，使自相似爆破解ϕ 成为静态解。注意，方程 (1.8) 是维数为 $d+2$ 的半线性热方程。下文定义 $n := d+2$, $n \geq 6$，并研究关于 $w(t,\ x)$ 的以下柯西问题：$= v(t,\ |x|)$，$x \in \mathbb{R}^n$，以及接近 w_T 且满足 $T = 1$ 的径向初始数据，其中

$$w_T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{T-t}}\right), \quad \phi(\rho) = \frac{a}{\sqrt{\rho^2+b}}, \tag{2.1}$$

其中 $a,\ b$ 在 (1.24) 中给出。更确切地说，对于径向函数 $\varphi_0 :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们考虑以下初值问题

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, w(t,x) = \dfrac{n-3}{|x|^3}\Big(|x|w(t,x) - F\big(|x|w(t,x)\big)\Big), & t > 0, \\ w(0,\cdot) = \phi(|\cdot|) + \varphi_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $F := gg'$，且 g 是定理 1 的证明中构造的扭曲函数。 2.

2.1. 相似变量。令 $T > 0$，对于 $t \in [0,T)$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，我们定义

$$\tau = \tau(t) := \ln\left(\frac{T}{T-t}\right) \quad \text{and} \quad y = y(t,x) := \frac{x}{\sqrt{T-t}}. \tag{2.3}$$

因此，时间区间 $[0,T)$ 被映射为 $[0,\infty)$。关于 t 的偏导数和拉普拉斯算子变为

$$\partial_t = \frac{e^\tau}{T}\left(\partial_\tau + \frac{1}{2}y\cdot\nabla_y\right), \quad \Delta_x = \frac{e^\tau}{T}\Delta_y.$$

With

$$\psi(\tau,y) := \sqrt{T}e^{-\frac{\tau}{2}} w\left(T - Te^{-\tau}, \sqrt{T}e^{-\frac{\tau}{2}}y\right) \tag{2.4}$$

我们将 (2.2) 重新表述为

$$\begin{cases} (\partial_\tau - \Delta_y + \Lambda)\, \psi(\tau,y) = \dfrac{n-3}{|y|^3}\Big(|y|\psi(\tau,y) - F\big(|y|\psi(\tau,y)\big)\Big), & \tau > 0, \\ \psi(0,\cdot) = \sqrt{T}\phi(\sqrt{T}|\cdot|) + \sqrt{T}\varphi_0(\sqrt{T}\cdot), \end{cases} \tag{2.5}$$

其中我们定义形式算子

$$[\Lambda f](y) := \frac{1}{2}\big(y\cdot\nabla f(y) + f(y)\big), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

作用于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f。为研究 ϕ 附近的演化，我们采用如下试探解

$$\psi(\tau,\cdot) = \phi(|\cdot|) + \varphi(\tau,\cdot)$$

对于径向函数 φ，将扰动的演化方程写为

$$\begin{cases} \partial_\tau\varphi(\tau,\cdot) = L\varphi(\tau,\cdot) + \mathcal{N}(\varphi(\tau,\cdot)), & \tau > 0, \\ \varphi(0,\cdot) = \mathcal{U}(\varphi_0, T), \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $L := L_0 + L_1$,

$$L_0 f := \Delta f - \Lambda f, \quad L_1 f := V f, \tag{2.8}$$

其中径向势 V 给定为

$$V(y) := 3(n-3)\big(2\alpha\phi^2(|y|) - 5\beta|y|^2\phi^4(|y|)\big), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

对在 (1.22) 中定义的 α, β。非线性项可写为

$$\begin{aligned}&[\mathcal{N}(\varphi(\tau,\cdot))](y)\\ &= \frac{(n-3)}{|y|^3}\Big(F(|y|\phi(|y|)) + F'(|y|\phi(|y|))|y|\varphi(\tau,y) - F\big(|y|\phi(|y|) + |y|\varphi(\tau,y)\big)\Big).\end{aligned} \tag{2.10}$$

最后， φ 的初始条件为

$$\varphi(0,\cdot) = \sqrt{T}\phi(\sqrt{T}|\cdot|) + \sqrt{T}\varphi_0(\sqrt{T}\cdot) - \phi(|\cdot|) =: \mathcal{U}(\varphi_0, T). \tag{2.11}$$

2.2. 函数空间框架。为了构建一个合适的函数空间框架，我们依赖于齐次索博列夫内积

$$\langle f, g\rangle_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} := \langle |\cdot|^s \mathcal{F} f, |\cdot|^s \mathcal{F} g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中 f， $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$、 $s \geq 0$，且 F 是 n 维傅里叶变换。这在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上诱导出齐次索伯范数

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} := \langle f, f\rangle_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.12}$$

与通常一样，齐次索伯空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 定义为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在范数（2.12）下的完备化。现在，给定 $s, k \geq 0$ 和 $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，我们定义内积

$$\langle f, g\rangle_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} := \langle f, g\rangle_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} + \langle f, g\rangle_{\dot{H}^k(\mathbb{R}^n)},$$

它在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上诱导范数 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}$。由此引出本文的核心空间 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 的定义：将径向测试函数空间 $C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 关于满足条件的 (s,k) 的 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}$ 范数完备化，得到该空间。

$$\frac{n}{2} - 1 < s < \frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2(n-2)}, \quad \text{and } k > n, \quad n \geq 6. \tag{2.13}$$

此外，我们令 $\sigma(x) := e^{-|x|^2/4}$ for $x \in \mathbb{R}^n$，并定义一个由径向函数构成的加权 L^2-空间

$$\mathcal{H} := \{f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) : f \text{ is radial}\}, \tag{2.14}$$

其诱导范数 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathcal{H}}$ 来自内积

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\sigma(x)dx, \quad \text{for } f, g \in \mathcal{H}.$$

引理 2.1。 对于 (s,k) 如 (2.13)中所述，以下嵌入成立

$$X_s^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{H}.$$

此外， $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 在乘法运算下封闭，即

$$\|fg\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对所有 $f, g \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$。

证明。 嵌入 $X_s^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 由选取 $s < \frac{n}{2} < k$ and$L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{H}$ 得出。该结论是权函数 σ 强衰减的结果。详见附录 A.1。代数性质由广义莱布尼茨法则得出，参见 [27], 定理 1，以及 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的嵌入。□

引理 2.2。 令 (s, k) 满足 (2.13)。若 $f \in C_r^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$|\partial^\alpha f(x)| \lesssim \langle x\rangle^{-1-|\alpha|},$$

对于 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^n$，则 $f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$.

证明。 该结论通过标准的逼近论证得以证明。感兴趣的读者可参阅附录 A.3 中附上的详细证明。□

3. 自伴谱理论

在本节中，我们研究主问题 (2.7) 中出现的线性算子 L。首先，我们在自伴情形下确定 L 的谱，并以此证明由 L 在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中生成的半群具有指数衰减（在某个合适的子空间上）。分解 $L = L_0 + L_1$ 使我们能够先研究自由算子 L_0，随后通过扰动将结果推广到完整情形。

容易看出， L 连同定义域 $\mathrm{D}(L) := C_c^\infty{}_{,r}(\mathbb{R}^n)$ 是 H 上的一个无界、稠密定义的对称算子。我们有如下结果。

命题 3.1。 算子 $(L, \mathcal{D}(L))$ 在 $\mathcal{H}$ 中是可闭的，其闭包 $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是自伴的，具有紧预解式，并生成 $(S_0(\tau))_{\tau\ge 0}$ 上的有界算子强连续半群 $\mathcal{H}$。对于 $\mathcal{L}$ 的谱（其仅由特征值组成），我们有

$$\sigma(\mathcal{L}) \subseteq (-\infty, 0) \cup \{1\}.$$

谱点 $\lambda = 1$ 是一个单特征值，其对应的归一化特征函数是

$$G(x) = \frac{\varrho(|x|)}{\|\varrho\|_{\mathcal{H}}}, \quad \varrho(|x|) = (|x|^2 + b)^{-\frac{3}{2}} \tag{3.1}$$

其中常数 b来自 (1.24)。

证明。 我们首先证明，算子 L_0 （其定义域为 $\mathrm{D}(L_0) := \mathrm{D}(L)$）是可闭的，其闭包 $\mathrm{L}_0 : \mathrm{D}(\mathrm{L}_0) \subseteq \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 是自伴的，具有紧预解式，并在 H 上生成一个强连续半群。这个半群可显式表示为

$$[S_0(\tau)f](x) = e^{-\frac{\tau}{2}}\big(H_{\kappa(\tau)} * f\big)(e^{-\frac{\tau}{2}}x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

其中 $H_{\kappa(\tau)}(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa(\tau)}}(4\pi\kappa(\tau))^{-\frac{n}{2}}$和 $\kappa(\tau) := 1 - e^{-\tau}$。这由 L_0 与一维薛定谔算子酉等价得出。

$$[A_0 u](\rho) = -u''(\rho) + q(\rho)u(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \tag{3.3}$$

with

$$q(\rho) := \frac{\rho^2}{16} + \frac{(n-3)(n-1)}{4\rho^2} - \frac{n-2}{4},$$

以及定义域 $\mathrm{D}(A_0) = U^{-1}\mathrm{D}(L_0)$，其中酉算子 U 定义为

$$U : L^2(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{H}, \quad u \mapsto Uu = |S^{n-1}|^{-\frac{1}{2}}|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} e^{\frac{|\cdot|^2}{8}} u(|\cdot|).$$

容易看出 $-L_0 = UA_0U^{-1}$。利用 q的性质，标准结果表明， A_0 的唯一自伴扩张由极大算子 A_0 给出：$D(A_0) \subseteq L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^+) : u, u' \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+), A_0u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}; \tag{3.4}$$

参见 [25], 引理 3.1了解详情。此外，A_0 具有紧预解式且有下界，这意味着自伴算子 $L_0 := -UA_0U^{-1}$,$D(L_0) := UD(A_0)$也具有相同性质。因此，L_0 在H 上生成一个强连续半群。利用 (2.3)中给出的时间变量变换，对于 $T = 1$，我们推断 $H_{\kappa(\tau)}$ 恰好是自相似坐标中的标准热核。通过考察半群生成元的定义，可以验证 L_0 生成半群 $(S_0(\tau))_{\tau\geq 0}$。

为了研究算子 $L = L_0 + L_1$，我们从以下观察开始：由 (2.9) 给出的势V 是有界的，即 $\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$，这意味着算子 L_1 在 H上是有界的。因此， L 是可闭的，且其闭包由$L := L_0 + L_1$ 给出，定义域为 $D(L) = D(L_0)$。Kato–Rellich定理（例如参见 [41], 定理 6.4）表明L的自伴性，并且同样可推出 L 具有紧预解式。此外，有界扰动定理（例如参见 [18], 第158 页，定理 1.3）给出了以下事实：L 是H 上强连续半群 $(S(\tau))_{\tau\geq 0}$ 的生成元。

接下来，我们通过算子 A 的性质来研究 L 的谱：$D(A) \subseteq L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ 定义为 $D(A) = D(A_0)$，$Au = A_0u - L_1u$。该算子与 $-L$ 通过映射 U 酉等价。因此，只需研究 A 的谱。为证明 $\sigma(A) \subseteq \{-1\} \cup (0, \infty)$，我们首先注意到

$$\varrho_A(\rho) := e^{-\frac{\rho^2}{8}} \rho^{\frac{n-1}{2}} (\rho^2 + b)^{-\frac{3}{2}}, \quad \rho > 0,$$

属于 $D(A)$ 且满足 $(-Id - A)\varrho_A = 0$，这意味着 $-1 \in \sigma(A)$。 $-L$ 与 A 的酉等价性意味着

$$(U\varrho_A)(x) = |S^{n-1}|^{-\frac{1}{2}} (|x|^2 + b)^{-\frac{3}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

是 L 对应于特征值 $\lambda = 1$ 的一个特征函数，即 $1 \in \sigma(L)$，并且 (3.1) 中定义的 G 是一个归一化特征函数。通过考察谱常微分方程可知，几何特征空间确实是一维的。

为证明 $\sigma(A) \setminus \{-1\}$ 包含于 $(0, \infty)$ 中，我们将 $A + 1$ 分解，以得到一个与 A 等谱的新自伴算子，除了 $\lambda = -1$。对于适当的算子 A^+, A^-，我们将 $A = A^+A^- - 1$ 写成，使得 $\ker(A^-) = \mathrm{span}(\varrho_A)$。明确地,

$$A^+ = -\partial_\rho - \frac{\varrho_A'}{\varrho_A}, \quad \text{and} \quad A^- = \partial_\rho - \frac{\varrho_A'}{\varrho_A}.$$

我们定义一个与 $A^-A^+ - 1$ 相对应的自伴算子,

$$\mathcal{A}_S : \mathcal{D}(\mathcal{A}_S) \subseteq L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+), \quad [\mathcal{A}_S u](\rho) = -u''(\rho) + \Big(\frac{n^2 - 1}{4\rho^2} + Q(\rho)\Big)u(\rho),$$

其中 Q 由下式给出

$$Q(\rho) = \frac{\rho^2}{16} - \frac{n}{4} + 1 + \frac{3b(5a^4\beta(n-3) - 6)}{(\rho^2 + b)^2} + \frac{3(2 - b - (n-3)(5a^4\beta - 2a^2\alpha + 2))}{\rho^2 + b},$$

对于 $\rho > 0$。这里出现的常数取自 (1.22) 和 (1.24)。为了排除 A_S 的非正特征值，我们采用了 {6}GGMT 型积分判据,{7},{8},{9}，如

见 [25], 定理 A.1。更确切地说，我们为 $n \in \{6,7,8,9\}$ 和 $p > 1$ 定义，

$$B(n,p) := c(n,p) \int_0^\infty \rho^{2p-1} |Q_-(\rho)|^p d\rho, \quad c(n,p) := \frac{(p-1)^{p-1}\Gamma(2p)}{n^{2p-1}p^p\Gamma(p)^2}, \tag{3.5}$$

其中 $Q_-(\rho) := \min\{0, Q(\rho)\}$对于 $\rho > 0$。我们证明，对于每个 n，都能找到一个适当的 p，使得 $B(n,p) < 1$。容易看出，势 Q 恰好有一个零点 $\rho^* = \rho^*(n) > 0$，并且满足$Q|_{(0,\rho^*)} < 0$ 和$Q|_{(\rho^*,\infty)} > 0$。对于 $n = 6$ 和 $p = 2$，(3.5) 中的被积函数是一个简单的有理函数。因此，可以得到

$$B(6,2) < c(6,2) \int_0^{\frac{21}{5}} \rho^3 Q(\rho)^2 < \frac{4}{5},$$

其中，最后一个积分可以显式计算。对于 $n \in \{7,8,9\}$，我们采用类似的方法，并为 (n,p) 选择以下配对：(7,2),(8,4),(9,4)。 [25] 中的定理 A.1 现在表明，A_S 的谱包含于 $[0,\infty)$ 中，并且零不是特征值。由于 A_S 与 A 关于 $\lambda = -1$等谱，我们推断 $\sigma(\mathsf{A}) \subseteq \{-1\} \cup (0,\infty)$，而根据酉等价性可得 $\sigma(\mathsf{L}) \subseteq (-\infty,0) \cup \{1\}$。□

备注 3.2。L的特征值 $\lambda = 1$ 源于该问题的时间平移对称性，稍后将通过 (2.7) 中爆破时间 T 的变化加以控制。

I在下文中，我们定义到不稳定模态上的正交投影 G，

$$\mathcal{P}f := \langle f, G\rangle_{\mathcal{H}} G, \quad \text{for } f \in \mathcal{H}. \tag{3.6}$$

根据 L 的谱结构，线性演化在不变子空间ker P上呈指数衰减。此外，对于与正算子 $1 - \mathsf{L}$ 的分数次幂相对应的图范数，还成立一个更强的结果。更确切地说，对于$k \in \mathbb{N}_0$ 以及 $f \in \mathsf{D}((1-\mathsf{L})^{\frac{k}{2}})$，我们定义

$$\|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{k}{2}})} := \|f\|_{\mathcal{H}} + \|(1-\mathcal{L})^{\frac{k}{2}} f\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.7}$$

作为阶数为 k 的图范数。我们注意到 $C_c^\infty{}_{,r}(\mathbb{R}^n)$ 是 $(1-\mathsf{L})^{\frac{k}{2}}$ 的核。

推论 3.3. 存在 $\omega_0 > 0$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\tau \geq 0$，我们都有

$$\|S(\tau)(1-\mathcal{P})f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{k}{2}})} \leq e^{-\omega_0 \tau} \|(1-\mathcal{P})f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{k}{2}})}, \tag{3.8}$$

其中 $f \in \mathcal{D}((1-\mathcal{L})^{\frac{k}{2}})$.

证明。该证明直接由命题3.1以及 $(1-\mathsf{L})^{\frac{k}{2}}$ 对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 的交换性质得出；详细内容参见 [25], 命题 3.6。 □

4. The linear evolution on $X_s^k(\mathbb{R}^n)$

在本节中，我们考察命题 3.1 中构造的半群限制在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 上时的性质。我们先陈述一些技术结果。

引理 4.1。 对于 $j \in \{0, ..., k\}$，我们有 $X_s^k(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})$ 并且

$$\|(1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}} f\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.1}$$

对所有 $f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$。

证明。 可以发现，存在光滑、径向且具有多项式增长界的函数 w_α，满足

$$\|(1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}} f\|_{\mathcal{H}} \lesssim \sum_{|\alpha|\le j} \|w_\alpha \partial^\alpha f\|_{\mathcal{H}},$$

对所有 $f \in C_c^\infty$, $r(\mathbb{R}^n)$。利用权函数 σ 的指数衰减，我们得到

$$\|w_\alpha \partial^\alpha f\|_{\mathcal{H}} \lesssim \| |\cdot|^{-s_\alpha} \partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{s_\alpha+|\alpha|}} \lesssim \|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

由 Hardy不等式可得，其中 $s_\alpha = \max\{s-|\alpha|,0\}$。注意，最后一个不等式由 $s \le s_\alpha + |\alpha| \le k$ 得出。对于一般的 $f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，我们利用 $C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$ 在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性，以及 $(1-\mathrm{L})^{\frac{j}{2}}$ 的闭性。 □

引理 4.2。 设 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $R > 0$。那么

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^2(B_R^n)} \lesssim \sum_{m=0}^{j} \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{m}{2}})}, \tag{4.2}$$

对于所有 $f \in C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$ 以及所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 满足 $|\alpha| = j$。

证明。 令 $R > 0$。我们定义算子

$$Bf := \varrho\left(\frac{\tilde{f}}{\varrho}\right)',$$

˜对于 $f \in C_c^\infty$, $r(\mathbb{R}^n)$，其中 $f = f(|\cdot|)$，且 $x \in \mathbb{R}^n$，其中 ϱ 表示算子 L 对应于特征值 $\lambda = 1$ 的特征函数；参见命题 3.1。H 中的形式伴随算子为

$$B^* f = -\frac{\tilde{f}'}{\mu},$$

对于 $\mu(\rho) := e^{-\frac{\rho}{4}} \rho^{n-1} \varrho(\rho)$，我们可以写成 $(1-L)f = (B^* B\tilde{f})(|\cdot|)$。对于 $f \in C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$，这意味着

$$\begin{aligned}\|(Bf)(|\cdot|)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle Bf(|\cdot|), Bf(|\cdot|)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle (B^*Bf)(|\cdot|), f)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle (1-\mathcal{L})f, f\rangle_{\mathcal{H}} = \|(1-\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} f\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

由于指数权函数σ的衰减，不等式 (4.2)对于 $|\alpha| = 0$ 是显然的，我们首先考虑 $|\alpha| = 1$ 的情形，然后通过归纳法证明该估计。对于 $|\alpha| = 1$ 和 $i \in \{1, ..., n\}$，我们有

$$\begin{aligned}\|\partial_i f\|_{L^2(B_R)}^2 &= \int_{B_R} \frac{x_i^2}{|x|^2} |\tilde{f}'(|x|)|^2 dx \le \int_{B_R} \left(|(Bf)(|x|)|^2 + |f(x)|^2 \left(\tfrac{\varrho'(|x|)}{\varrho(|x|)}\right)^2 \right) dx \\ &\le e^{\frac{R^2}{4}} \int_{B_R} e^{-\frac{|x|^2}{4}} \left(|(Bf)(|x|)| + |f(x)|^2 \left(\tfrac{\varrho'(|x|)}{\varrho(|x|)}\right)^2 \right) dx \\ &\le C_R(\|Bf\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f\|_{\mathcal{H}}^2),\end{aligned}$$

这意味着

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^2(B_R)} \lesssim_R \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{1}{2}})},$$

对所有 $f \in C_{c,r}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，以及满足 $|\alpha| = 1$ 的 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。为使用归纳法，我们需要以下估计

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^2(B_R)} \lesssim \sum_{i=0}^{|\alpha|} \|D^j f\|_{L^2(B_R)}, \tag{4.3}$$

这对所有 $f \in C_r^\infty(B_R^n)$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 均成立（见 [26], 引理 A.1），其中算子 D^j 定义如下：若 j 为偶数，则有 $D^j f := \Delta_r^{\frac{j}{2}} \tilde{f}$；若 j 为奇数，则有 $D^j f := (\Delta_r^{\frac{j-1}{2}} \tilde{f})'$，其中 Δ_r 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的径向拉普拉斯算子。注意，[26] 中的引理 A.1 是在维数 $n = 5$ 下陈述的，但可以直接推广到高维。此外，我们使用对易关系

$$D^j \Lambda = \Lambda D^j + \frac{j}{2} D^j,$$

对于具有形式算子 Λ （见 (2.6)）的 $j \in \mathbb{N}_0$。现在假设不等式 (4.2) 对某个 $j \in \mathbb{N}$ 成立。于是

$$\begin{aligned}
\|D^{j+1} f\|_{L^2(B_R)} &= \|D^{j-1}(D^2 f)\|_{L^2(B_R)} = \|D^{j-1}((\mathcal{L} - 1 + 1 + \Lambda - V)f)\|_{L^2(B_R)} \\
&\lesssim \|D^{j-1}((1-\mathcal{L})f)\|_{L^2(B_R)} + \|D^{j-1}((\Lambda+1)f)\|_{L^2(B_R)} + \|D^{j-1}(Vf)\|_{L^2(B_R)} \\
&\lesssim \|D^{j-1}((1-\mathcal{L})f)\|_{L^2(B_R)} + \|(\Lambda + \tfrac{j+1}{2}) D^{j-1} f\|_{L^2(B_R)} + \|D^{j-1}(Vf)\|_{L^2(B_R)} \\
&\lesssim_R \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le j-1}} \|\partial^\alpha ((1-\mathcal{L})f)\|_{L^2(B_R)} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le j}} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(B_R)} \\
&\lesssim_R \sum_{l=0}^{j-1} \|(1-\mathcal{L})f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{l}{2}})} + \sum_{l=0}^{j} \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{l}{2}})} \\
&\lesssim_R \sum_{l=0}^{j+1} \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{l}{2}})},
\end{aligned}$$

对所有 $f \in C_{c,r}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，这与 (4.3) 一起推出该结论。 □

4.1. X_s^k **上的半群**$(\mathbb{R}^n)$。

命题 4.3. $S(\tau(\tau \ge 0))$在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 上的限制定义了作用于 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$的强连续单参数半群 $(S_{X_s^k}(\tau))_{\tau \ge 0}$。其生成元由 $\mathcal{L}$在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$中的部分给出，即

$$\mathcal{L}_{X_s^k} f := \mathcal{L} f, \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}_{X_s^k}) := \{f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \cap X_s^k(\mathbb{R}^n) : \mathcal{L} f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)\}.$$

此外，径向施瓦茨函数 $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}^n)$ 是$\mathcal{L}^{X_s^k}$ 的核。

证明。 我们首先考虑自由半群 $S_0(\tau)$，并证明 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 在其作用下保持不变。设 $f \in C_{c,r}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\tau > 0$。由显式表示式 (3.2) 可得

$$\| |\cdot|^s \mathcal{F}(S_0(\tau) f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)\tau} \| |\cdot|^s \mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.4}$$

其中我们用到了热核 $H_{\kappa(\tau)}$ 是 $\tau > 0$ 的 $L^1(\mathbb{R}^n)$中的一个元素，且范数等于 1。对于 k 而非 s，同样成立。这意味着算子范数满足以下界

$$\|S_0(\tau)\|_{\mathcal{L}(X_s^k(\mathbb{R}^n))} \lesssim \max\{e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)\tau}, e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-k)\tau}\} = e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)\tau}.$$

同样地，我们得到等式

$$\||\cdot|^s\mathcal{F}(S_0(\tau)f-f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\||\cdot|^s(e^{\frac{\tau}{2}(n-1)}e^{-(e^\tau-1)|\cdot|^2}\mathcal{F}(f)(e^{\frac{\tau}{2}}\cdot)-\mathcal{F}f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

根据傅里叶侧热核的显式形式。同样，将 s 替换为 k 后结论仍成立。应用控制收敛定理可得

$$\lim_{\tau\to0^+}(S_0(\tau)f-f)=0$$

对于所有 $f\in C_c^{\infty},r(\mathbb{R}^n)$，结论在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中成立，因而对于所有 $f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 也成立。结合引理 2.1 给出的嵌入$X_s^k(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow \mathrm{H}$，$(S_0(\tau))_{\tau\geq0}$ 成为 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 上的强连续半群所需的所有条件均已满足。半群理论中的一个标准结果（见 [18],第 60 页，命题 2.3）表明，L_0 在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 上的限制（记作 $\mathrm{L}_0|_{X_s^k}$，其定义域为 $\mathrm{D}(\mathrm{L}_0|_{X_s^k})=\{f\in\mathrm{D}(\mathrm{L}_0)\cap X_s^k(\mathbb{R}^n):\mathrm{L}_0f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)\}$）生成受限半群 $(S_0(\tau)|_{X_s^k})_{\tau\geq0}$。

由于 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$在乘法下封闭，见引理2.1，且$V\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，我们推断，算子 L_1 （见(2.8)）在$X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的。有界扰动定理意味着 $\mathrm{L}^{X_s^k}$生成一个强连续半群$(S_{X_s^k}(\tau))_{\tau\geq0}$ 在$X_s^k(\mathbb{R}^n)$上。该半群确实与 $(S(\tau))_{\tau\geq0}$ 对 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$的限制一致，这可由 [25], 命题 3.14得出。最后，由于径向施瓦茨函数 $\mathrm{S}_r(\mathbb{R}^n)\subset X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 是稠密的，并且在 $S_0(\tau)$ 的作用下对 $\tau\geq0$ 保持不变，我们推断 $\mathrm{S}_r(\mathbb{R}^n)$是$\mathrm{L}_0|_{X_s^k}$ 的一个核，因而也是完整算子 $\mathrm{L}^{X_s^k}$的一个核。□

引理 4.4. 由$\mathcal{P}$ 定义于(3.6) 的投影算子在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$上的限制，在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$上诱导出一个（非正交）投影$\mathcal{P}^{X_s^k}$，

$$\mathcal{P}_{X_s^k}f=\langle f,G\rangle_{\mathcal{H}}G,\quad for\ f\in X_s^k(\mathbb{R}^n),$$

它与算子 $\mathcal{L}^{X_s^k}$及半群 $S_{X_s^k}(\tau)$ 对所有 $\tau\geq0$均可交换。$\mathcal{P}^{X_s^k}$ 的核由下式给出。

$$\ker\mathcal{P}_{X_s^k}=\{f\in X_s^k(\mathbb{R}^n):\langle f,G\rangle_{\mathcal{H}}=0\}.$$

证明。由引理 2.2 以及对某个常数 $C\in\mathbb{R}$ 有 $G=C\phi(|\cdot|^3$ 这一事实，我们推得 $G\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$。对于 $f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\|\mathcal{P}_{X_s^k}f\|_{X_s^k}=|\langle f,G\rangle_{\mathcal{H}}|\|G\|_{X_s^k}\leq\|f\|_{\mathcal{H}}\|G\|_{\mathcal{H}}\|G\|_{X_s^k}\lesssim\|f\|_{X_s^k},$$

由引理 2.1。$\mathrm{P}^{X_s^k}$与 $\mathrm{L}^{X_s^k}$交换，这直接源于 G是L的特征函数，对应特征值 $\lambda=1$，以及 L 在 H中的自伴性。利用上述性质，同样可以很容易地看出，对于所有 $\tau\geq0$，$\mathrm{P}^{X_s^k}$与$S_{X_s^k}(\tau)$交换。□

本节的主要目标是证明，受限半群$(S_{X_s^k}(\tau))_{\tau\geq0}$ 在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中的稳定子空间$\ker\mathrm{P}^{X_s^k}$上表现出指数衰减。为此，我们需要以下关于势的估计。

引理 4.5。 设 $R>0$。存在常数 C_R、C、$\varepsilon_V>0$ 使得

$$\|Vf\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\leq C_R\sum_{j=0}^k\|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})}+\frac{C}{R^{\varepsilon_V}}\|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对所有 $f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$.

证明。为证明所述估计，我们利用对于所有 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 以及 s，如 中所述，我们有 (2.13)

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \simeq \| |\cdot|^{-(n-\lceil s\rceil+s)} * (|\nabla|^{\lceil s\rceil} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \||\nabla|^{\lceil s\rceil} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} =: \|f\|_{\dot{W}^{\lceil s\rceil,p}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.5)$$

对于 $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{\lceil s\rceil - s}{n}$，根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式（例如参见 [40], 第 335 页），这使我们可以对乘积 Vf 取整数阶导数，而不是取 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 范数中出现的分数阶导数。特别地，我们可以利用范数的等价性（参见 [40], 第 331 页）以及标准的莱布尼茨法则，推得

$$\begin{aligned}\|Vf\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|Vf\|_{\dot{W}^{\lceil s\rceil,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=\lceil s\rceil}} \|\partial^\alpha (Vf)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=\lceil s\rceil}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ \beta\le\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

对于所有 $f \in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$。因此，只需估计 $\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的值，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ 且 $\beta \le \alpha$。为此，我们分解

$$\|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^p(B_R)} + \|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^p(B_R^c)},$$

并利用衰减 $|\partial^\beta V(x)| \lesssim \mathrm{h}x\mathrm{i}^{-2-|\beta|}$，对所有 $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立。在 B_R 中，由 Hölder不等式、$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ 以及引理 4.2，我们得到

$$\|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^p(B_R)} \le \|\partial^\beta V\|_{L^q(B_R)} \|\partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(B_R)} \le C_R \sum_{j=0}^{|\alpha|-|\beta|} \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})},$$

对某个常数 $C_R > 0$。在 B_R^c 中，我们再次使用 Hölder不等式，并利用 V 的衰减得到

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^p(B_R^c)} &\le C \||\cdot|^{-2+m}\|_{L^q(B_R^c)} \||\cdot|^{-|\beta|-m} \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(B_R^c)} \\ &\le \frac{C}{R^{\varepsilon_V}} \|f\|_{\dot{H}^{|\alpha|+m}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C}{R^{\varepsilon_V}} \|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

对于某些 $C = C(m) > 0$ 和 $\varepsilon_V = \varepsilon(m) > 0$，其中 $m = \max\{s - |\alpha|, -|\beta|\}$。注意，$m$ 的选取使得可以应用 Hardy不等式和嵌入 $X_s^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{H}_r^{|\alpha|+m}(\mathbb{R}^n)$。对于指数 k，我们得到

$$\|Vf\|_{\dot{H}^k(\mathbb{R}^n)} \simeq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=k}} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=k}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ \beta\le\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

对于所有 $f \in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$，其中

$$\|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(B_R)} + \|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(B_R^c)}.$$

再次结合引理 4.2，V 的行为蕴含

$$\|\partial^\beta V \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2(B_R)} \le C_R \sum_{j=0}^{|\alpha|-|\beta|} \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})} \le C_R \sum_{j=0}^{k} \|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})},$$

对于某个常数 $C_R>0$。在 B_R^c 中，我们推得

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta V\partial^{\alpha-\beta}f\|_{L^2(B_R^c)} &\le C\||\cdot|^{-2-|\beta|}\partial^{\alpha-\beta}f\|_{L^2(B_R^c)}\\ &\le \frac{C}{R^2}\||\cdot|^{-|\beta|}\partial^{\alpha-\beta}f\|_{L^2(B_R^c)}\\ &\le \frac{C}{R^2}\||\cdot|^{-(|\beta|-l)}\partial^{\alpha-\beta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\le \frac{C}{R^2}\|f\|_{\dot H^{k-l}(\mathbb{R}^n)}\\ &\le \frac{C}{R^2}\|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

对于满足 $0\le|\beta|-l<\frac{n}{2}$ 和 $k-l\ge s$ 的某些 $C>0$ 和 $l\ge 0$，这为应用Hardy不等式和嵌入 $X_s^k(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow \dot H_r^{k-l}(\mathbb{R}^n)$ 提供了依据。

最后，通过综合以上所有结果，利用 $C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)\subseteq X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 的稠密性以及 $(1-\mathrm{L})^{\frac{j}{2}}$ 对 $j\in\mathbb{N}_0$ 的闭性，我们得到

$$\|Vf\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\le C_R\sum_{j=0}^k\|f\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})}+\frac{C}{R^{\varepsilon_V}}\|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对于所有 $f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，只要适当选取 $C_R>0$、$C>0$ 和某个 $\varepsilon_V>0$。 □

命题4.6。存在 $\omega>0$ 使得

$$\|S_{X_s^k}(\tau)(1-\mathcal{P}_{X_s^k})f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\lesssim e^{-\omega\tau}\|(1-\mathcal{P}_{X_s^k})f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\tag{4.6}$$

对于所有 $\tau\ge0$ 和 $f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$。

˜证明。令 $f\in C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$和 $\tau\ge0$。容易看出，$f:=(1-\mathrm{P}^{X_s^k})f$ 属于$\mathrm{D}(\mathrm{L}^{X_s^k})$。首先注意到，根据傅里叶变换的标准性质，我们有

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{L}_0f,f\rangle_{\dot H^s(\mathbb{R}^n)}&=\langle|\cdot|^s\mathcal{F}(\Delta f-\Lambda f),|\cdot|^s\mathcal{F}f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &=-\|f\|^2_{\dot H^{s+1}(\mathbb{R}^n)}+\tfrac12\left(\tfrac n2-1-s\right)\|f\|^2_{\dot H^s(\mathbb{R}^n)}\le-\omega_s\|f\|^2_{\dot H^s(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

对于所有 $f\in C_c^{\infty,\,r}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\omega_s:=\frac12(s+1-\frac n2)>0$，对于 $\dot H^k(\mathbb{R}^n)$–范数同样成立，只需将 $\omega_k:=\frac12(k+1-\frac n2)>0$ 替换即可。由 $C_c^{\infty,\,r}(\mathbb{R}^n)$ 在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性以及 $\mathrm{L}_0|_{X_s^k}$ 的闭性，我们推得

$$\langle\mathcal{L}_0f,f\rangle_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\le-\omega_s\|f\|^2_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对于所有 $f\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，由于 $\omega_s<\omega_k$ 成立。这意味着

$$\begin{aligned}&\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\frac{d}{d\tau}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\\ &\qquad=\frac12\frac{d}{d\tau}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|^2_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\\ &\qquad=\langle\mathcal{L}_{X_s^k}S_{X_s^k}(\tau)\tilde f,S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\rangle_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\\ &\qquad\le-\omega_s\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|^2_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}+|\langle VS_{X_s^k}(\tau)\tilde f,S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\rangle_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}|\\ &\qquad\le-\omega_s\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|^2_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}+\|VS_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

˜对于所有 $f \in C_c^{\infty,\,r}(\mathbb{R}^n)$。将等式两边除以 $S_{X_s^k}(\tau)$ 的范数，f 结合引理 4.5、推论 3.3 和引理 4.1 的结果，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\frac{C}{R^{\varepsilon_V}}-\omega_s\right)\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + C_R\sum_{j=0}^{k}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})}\\ &\leq \left(\frac{C}{R^{\varepsilon_V}}-\omega_s\right)\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + C_R e^{-\omega_0\tau}\|\tilde{f}\|_{\mathcal{G}((1-\mathcal{L})^{\frac{j}{2}})}\\ &\leq \left(\frac{C}{R^{\varepsilon_V}}-\omega_s\right)\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + C_R e^{-\omega_0\tau}\|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

接下来，我们选取足够大的 $R>0$，使得

$$\frac{d}{d\tau}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq -\frac{\omega_s}{2}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + Ce^{-\omega_0\tau}\|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.7}$$

这等价于

$$\frac{d}{d\tau}[e^{\frac{\omega_s}{2}\tau}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}] \leq Ce^{(\frac{\omega_s}{2}-\omega_0)\tau}\|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}.$$

对两边从 0 到 τ 积分，得到

$$e^{\frac{\omega_s}{2}\tau}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} - \|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\frac{e^{(\frac{\omega_s}{2}-\omega_0)\tau}-1}{\frac{\omega_s}{2}-\omega_0},$$

这进而推出

$$\begin{aligned}\|S_{X_s^k}(\tau)\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}(e^{-\frac{\omega_s}{2}\tau} + \tfrac{2C}{\omega_s-2\omega_0}(e^{-\omega_0\tau}-e^{-\frac{\omega_s}{2}\tau}))\\ &\lesssim e^{-\omega\tau}\|\tilde{f}\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

其中 $\omega := \min\{\omega_0, \frac{\omega_s}{2}\} > 0$ 对所有 $f \in C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$ 均成立。注意，在 $\omega_s = 2\omega_0$ 的情况下，必须在（4.7）中选取另一个 $R>0$，以避免这种情形。结论现由 $C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$ 在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性得出。□

5. 非线性时间演化

下文中，我们仅考虑从 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 到实数值函数的情形。注意，根据引理 2.2，爆破剖面函数满足 $\phi(|\cdot|) \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，见 (2.1)。

5.1. 非线性项和初始数据算子的估计。

引理 5.1. 式 (2.10) 中的非线性项 $\mathcal{N}$ 可扩展为一个映射 $\mathcal{N}\colon X_s^k(\mathbb{R}^n) \to X_s^k(\mathbb{R}^n)$，满足

$$\|\mathcal{N}(f)-\mathcal{N}(h)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma(\|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\|g\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)})(\|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}+\|h\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)})\|f-h\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对所有 $f,h \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 均成立，其中 $\gamma\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数。

证明。 由稠密性，只需证明该不等式对属于 $C_c^{\infty,r}(\mathbb{R}^n)$ 的函数成立。我们首先为满足 $u''(0)=0$ 的函数 $u \in C^3(\mathbb{R})$ 建立一个辅助恒等式。令 $a,b,c \in \mathbb{R}$，则由三次应用微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}&u(a+c)-u(a+b)-u'(a)(c-b)\\ &= (c-b)\int_0^1 (b+x(c-b))\int_0^1 (a+w(b+x(c-b)))\int_0^1 u'''(z(a+w(b+x(c-b))))dzdwdx.\end{aligned}$$

对于非线性项，我们得到

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{N}(f)-\mathcal{N}(h)](y)\\
&=\frac{n-3}{|y|^3}\Big(F\Big(|y|\phi(|y|)+|y|f(y)\Big)+F\Big(|y|\phi(|y|)+|y|h(y)\Big)-F'\Big(|y|\phi(|y|)\Big)|y|(h(y)-f(y))\Big).
\end{aligned}
$$

由于 F 是奇函数，因此 $F''(0)=0$，由上述恒等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{[\mathcal{N}(f)-\mathcal{N}(h)](y)}{n-3}\\
&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big(h(y)-f(y)\Big)\Big(f(y)+x(h(y)-f(y))\Big)\Big(\phi(|y|)+w(f(y)+x(h(y)-f(y)))\Big)\\
&\qquad\cdot F^{(3)}\Big(|y|z\Big(\phi(|y|)+w(f(y)+x(h(y)-f(y)))\Big)\Big)dzdwdx.
\end{aligned}
$$

注意，$F^{(3)}$ 是一个所有导数均有界的奇函数。我们使用 [23], 命题 A.1 中给出的广义 Schauder 估计，其形式为

$$
\begin{aligned}
\|u_1u_2u_3F^{(3)}(|\cdot|v)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}&\lesssim\|u_1u_2u_3F^{(3)}(|\cdot|v)\|_{\dot H^{k_1}\cap\dot H^k(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim\prod_{i=1}^3\|u_i\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^k\|v\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}^{2j},
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

对于 $k_1:=\lfloor\frac{n}{2}-2\rfloor$，其中 u_1，u_2，u_3，$v\in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 v 为实值。显然，将 u_3 分别替换为 $\phi(|\cdot|)$ 和 $v\in C_r^\infty(\mathbb{R}^n)\cap X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 时，同样的界仍然成立。(5.1) 的证明基于 Hardy不等式以及关于径向函数加权导数的 Sobolev 不等式，参见 [23], 命题 B.1。□

我们需要以下对初始数据算子的刻画。

引理 5.2。设 $0<\delta\le\frac12$。那么映射

$$
T\mapsto\mathcal{U}(\varphi,T):[1-\delta,1+\delta]\to X_s^k(\mathbb{R}^n),
$$

如(2.11) 中所定义，对 $\varphi\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$连续。此外，我们有

$$
\|\mathcal{U}(\varphi,T)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|\varphi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}+|T-1|,
\tag{5.2}
$$

对于所有 $\varphi\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 以及 $T\in[\frac12,\frac32]$。

证明。为证明所给映射的连续性，令 $\varphi\in X_s^k(\mathbb{R}^n)$、$T_1$，$T_2\in[1-\delta,1+\delta]$ 并写成

$$
\mathrm{U}(\varphi,T_1)-\mathrm{U}(\varphi,T_2)=(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2})[\phi+\varphi](\sqrt{T_1}\cdot)+\sqrt{T_2}([\phi+\varphi](\sqrt{T_1}\cdot)-[\phi+\varphi](\sqrt{T_2}\cdot)).
$$

接下来令 $\varepsilon>0$，则存在 $\chi\in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|\chi-[\phi+\varphi]\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\le\varepsilon$。由此，我们可以将上面的第二项写成

$$
\begin{aligned}
[\phi+\varphi](\sqrt{T_1}\cdot)-[\phi+\varphi](\sqrt{T_2}\cdot)&=([\phi+\varphi](\sqrt{T_1}\cdot)-\chi(\sqrt{T_1}\cdot))+(\chi(\sqrt{T_1}\cdot)-\chi(\sqrt{T_2}\cdot))\\
&\quad+(\chi(\sqrt{T_2}\cdot)-[\phi+\varphi](\sqrt{T_2}\cdot)),
\end{aligned}
$$

推断

$$
\lim_{T_2\to T_1}\|\mathcal{U}(\varphi,T_1)-\mathcal{U}(\varphi,T_2)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\le C\varepsilon,
$$

对某个 $C > 0$。这里我们使用了以下事实：$\lim_{T_2 \to T_1} \|\chi(\sqrt{T_1}\cdot) - \chi(\sqrt{T_2}\cdot)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} = 0$，因为函数 χ is 光滑且具有紧支集。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意选取的，连续性得证。接下来我们证明（5.2）。令 $\varphi \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 和 $T \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$，则有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}(\varphi, T)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} &= \|\sqrt{T}\varphi(\sqrt{T}\cdot) + \sqrt{T}\phi(\sqrt{T}\cdot) - \phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \sqrt{T}\|\varphi(\sqrt{T}\cdot)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + \sqrt{T}\|\phi(\sqrt{T}\cdot) - \phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + |\sqrt{T}-1|\|\phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\varphi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + |T-1|\|\phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + \|\phi(\sqrt{T}\cdot) - \phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

为估计剩余项，我们进行如下处理。对于 $z \in \mathbb{R}^+$，我们得到

$$\phi(\sqrt{T}z) - \phi(z) = z(\sqrt{T}-1)\int_0^1 \phi'(z((\sqrt{T}-1)\tau + 1))d\tau,$$

根据微积分基本定理，这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\|\phi(\sqrt{T}\cdot) - \phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}}{|\sqrt{T}-1|} &= \tilde{C}\Big\| \int_0^1 \frac{|1 + (\sqrt{T}-1)\tau||\cdot|^2}{(|1+(\sqrt{T}-1)\tau|^2|\cdot|^2 + b)^{\frac{3}{2}}} d\tau \Big\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \tilde{C}\int_0^1 \frac{1}{|t_\tau|}\Big\| \frac{|t_\tau|^2|\cdot|^2}{(|t_\tau|^2|\cdot|^2 + b)^{\frac{3}{2}}}\Big\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} d\tau,\end{aligned}$$

对于某个 $\tilde{C} > 0$ 和 $t_\tau := 1 + (\sqrt{T}-1)\tau$。注意

$$\Big\| \frac{|t_\tau|^2|\cdot|^2}{(|t_\tau|^2|\cdot|^2 + b)^{\frac{3}{2}}}\Big\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \le \max\{|t_\tau|^{s-\frac{n}{2}}, |t_\tau|^{k-\frac{n}{2}}\}\Big\| \frac{|\cdot|^2}{(|\cdot|^2+b)^{\frac{3}{2}}}\Big\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1,$$

根据引理 2.2，由于我们有 $\Big|\partial^\alpha\Big(\frac{|\cdot|^2}{(|\cdot|^2+b)^{\frac{3}{2}}}\Big)(x)\Big| \lesssim \langle x\rangle^{-1-|\alpha|}$，对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 成立。这表明

$$\|\phi(\sqrt{T}\cdot) - \phi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim |\sqrt{T}-1| \lesssim |T-1|,$$

这反过来意味着

$$\|\mathcal{U}(\varphi, T)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\varphi\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + |T-1|,$$

正如所声称的。 □

5.2. 强解的构造。 为证明方程 (2.7) 强解的存在性，我们考虑杜哈梅公式

$$\varphi(\tau) = S_{X_s^k}(\tau)\mathcal{U}(\varphi_0, T) + \int_0^\tau S_{X_s^k}(\tau - \tau')\mathcal{N}(\varphi(\tau'))d\tau', \quad \tau \ge 0. \tag{5.3}$$

我们引入巴拿赫空间

$$\mathcal{X}_s^k := \{\varphi \in C([0,\infty), X_s^k(\mathbb{R}^n)) : \|\varphi\|_{\mathcal{X}_s^k} := \sup_{\tau \ge 0} e^{\omega\tau}\|\varphi(\tau)\|_{X_s^k} < \infty\},$$

其中 $\omega > 0$ 是命题4.6中的常数。我们将 X_s^k 中半径为$\delta > 0$的球记为 $\mathrm{X}_s^k(\delta) := \{\varphi \in \mathrm{X}_s^k : \|\varphi\|_{\mathcal{X}_s^k} \le \delta\}$。为了进行不动点论证，我们定义算子

$$[K(\varphi, u)](\tau) := S_{X_s^k}(\tau)(u - \mathcal{C}(\varphi, u)) + \int_0^\tau S_{X_s^k}(\tau - \tau')\mathcal{N}(\varphi(\tau'))d\tau',$$

对于 $\varphi \in \mathbf{X}_s^k$、 $u \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 和 $\tau \geq 0$，其中

$$\mathcal{C}(\varphi, u) := \mathcal{P}_{X_s^k} u + \int_0^\infty e^{-\tau'} \mathcal{P}_{X_s^k} \mathcal{N}(\varphi(\tau')) d\tau',$$

是定义在不稳定子空间 $\mathrm{P}_{X_s^k}(X_s^k(\mathbb{R}^n))$ 上的修正项。

引理5.3。对于所有充分小的 $\delta > 0$、所有充分大的 $c > 0$ 和 $u \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，且满足 $\|u\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{c}$，算子 $K(\cdot\ u)$ 将球 $\mathcal{X}_s^k(\delta)$ 映入其自身，并且满足

$$\|K(\varphi_1, u) - K(\varphi_2, u)\|_{\mathcal{X}_s^k} \leq \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{X}_s^k}, \tag{5.4}$$

对于所有 φ_1、$\varphi_2 \in \mathcal{X}_s^k(\delta)$ 以及所有 $u \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$。

证明。 首先注意到我们有

$$\begin{aligned}[K(\varphi, u)](\tau) = (1 - \mathcal{P}_{X_s^k}) S_{X_s^k}(\tau) u + \int_0^\tau (1 - \mathcal{P}_{X_s^k}) S_{X_s^k}(\tau - \tau') \mathcal{N}(\varphi(\tau')) d\tau' \\ - \int_\tau^\infty e^{\tau - \tau'} \mathcal{N}(\varphi(\tau')) d\tau',\end{aligned}$$

对于 $\varphi \in \mathbf{X}_s^k$ 和 $u \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，由此得到如下界

$$\begin{aligned}\|[K(\varphi, u)](\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} &\lesssim e^{-\omega\tau} \|u\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + \int_0^\tau e^{-\omega(\tau - \tau')} \|\varphi(\tau')\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau' \\ &\quad + \int_\tau^\infty e^{-(\tau' - \tau)} \|\varphi(\tau')\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau' \\ &\lesssim e^{-\omega\tau} \delta \left(\tfrac{1}{c} + \tfrac{\delta}{\omega} + \tfrac{\delta}{1 + 2\omega} \right),\end{aligned}$$

对于满足 $\mathbf{k}u\mathbf{k}_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{c}$ 的 $\varphi \in \mathbf{X}_s^k(\delta)$ 和 $u \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，根据命题4.6和引理5.1，可得

$$\|K(\varphi, u)\|_{\mathcal{X}_s^k} \lesssim \delta$$

对于适当选取的 δ， $c > 0$。

接下来令 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{X}_s^k(\delta)$，$u \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 和 $\tau \geq 0$，则有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}(\varphi_1(\tau)) - \mathcal{N}(\varphi_2(\tau))\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \delta e^{-\omega\tau} \|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \delta e^{-2\omega\tau} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{X}_s^k},\end{aligned}$$

由引理 5.1 可知，这意味着

$$\|K(\varphi_1, u) - K(\varphi_2, u)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim e^{-\omega\tau} \delta \left(\tfrac{1}{\omega} + \tfrac{1}{1 + 2\omega} \right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{X}_s^k}.$$

通过充分减小 $\delta > 0$ ，我们可以推知

$$\|K(\varphi_1, u) - K(\varphi_2, u)\|_{\mathcal{X}_s^k} \leq \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{X}_s^k},$$

这就证明了（5.4）。 □

利用引理 5.3，我们能够构造方程 (2.7) 的强解。

定理 5.4. 存在 $M > 0$ 充分大的值和 $\delta > 0$ 充分小的值，使得对所有实值的 $\varphi_0 \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，若满足 $\|\varphi_0\|_{X_s^k} \leq \frac{\delta}{M^2}$，则存在一个 $T = T(\varphi_0) \in [1-\frac{\delta}{M}, 1+\frac{\delta}{M}]$，以及唯一解 $\varphi \in C([0,\infty)\ X_s^k(\mathbb{R}^n))$，使其对所有 $\tau \geq 0$都满足 (5.3)，其中

$$\|\varphi(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \delta e^{-\omega\tau}, \quad \forall \tau \geq 0. \tag{5.5}$$

证明。设 $\varphi_0 \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|\varphi_0\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{M^2}$。利用引理 5.2 中的估计 (5.2)，我们选取充分大的 $M > 0$，从而得到

$$\|\mathcal{U}(\varphi_0, T)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{c},$$

对于所有 $T \in [1-\frac{\delta}{M}, 1+\frac{\delta}{M}]$，其中常数 $c > 0$ 来自引理 5.3。应用巴拿赫不动点定理，我们推知，对于每个 $T \in [1-\frac{\delta}{M}, 1+\frac{\delta}{M}]$，方程存在唯一解 $\varphi_T \in \mathrm{X}_s^k(\delta)$

$$\varphi(\tau) = [K(\varphi, \mathcal{U}(\varphi_0, T))](\tau), \quad \tau \geq 0.$$

此外，如此定义的映射 $T \mapsto \varphi_T$ 是连续的。为此，注意到我们有

$$\begin{aligned}\|\varphi_{T_1} - \varphi_{T_2}\|_{\mathcal{X}_s^k} &\leq \|K(\varphi_{T_1}, \mathcal{U}(\varphi_0, T_1)) - K(\varphi_{T_1}, \mathcal{U}(\varphi_0, T_2))\|\mathcal{X}_s^k \\ &\quad + \|K(\varphi_{T_1}, \mathcal{U}(\varphi_0, T_2)) - K(\varphi_{T_2}, \mathcal{U}(\varphi_0, T_2))\|\mathcal{X}_s^k \\ &\leq \|\mathcal{U}(\varphi_0, T_1) - \mathcal{U}(\varphi_0, T_2)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\varphi_{T_1} - \varphi_{T_2}\|_{\mathcal{X}_s^k},\end{aligned}$$

结合引理 5.2，这便推出了所述结论。

为证明方程 (5.3) 存在解，我们需要找到一个 $T = T(\varphi_0)$，使修正项消失，即 $\mathrm{C}(\varphi_{T(\varphi_0)}, \mathrm{U}(\varphi_0, T)) = 0$。注意，这等价于

$$\left\langle \mathcal{P}_{X_s^k}\mathcal{U}(\varphi_0, T) + \int_0^\infty e^{-\tau'}\mathcal{N}(\varphi_{T(\varphi_0)}(\tau'))d\tau', G \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{5.6}$$

在 $T = 1$ 处进行泰勒展开可得

$$\mathcal{U}(\varphi_0, T) = \sqrt{T}\varphi_0(\sqrt{T}\cdot) + C(T-1)G + (T-1)^2 R(T, \cdot),$$

对某个 $C \neq 0$，其中余项关于 T连续，且满足 $\|R(T, \cdot)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1$对所有 $T \in [1-\frac{\delta}{M}, 1+\frac{\delta}{M}]$均成立。有了这一点，我们得到

$$\langle \mathcal{P}_{X_s^k}\mathcal{U}(\varphi_0, T), G\rangle_{\mathcal{H}} = C(T-1) + f(T),$$

对于满足 $|f(T)| \lesssim \frac{\delta}{M^2} + \delta^2$ 的连续函数 f，由初始数据的条件及 T 可知。引理 5.1 表明，(5.6) 等价于

$$T = F(T) + 1 \tag{5.7}$$

对于一个合适的函数 F，它是连续的并满足 $|F(T)| \lesssim \frac{\delta}{M^2} + \delta^2$。通过选择$M$充分大且 δ 充分小，我们推得 $|F(T)| \leq \frac{\delta}{M}$，这进而意味着映射 $T \mapsto F(T) + 1$ 将区间 $[1-\frac{\delta}{M}, 1+\frac{\delta}{M}]$ 映射到其自身。中间值定理现在意味着(5.7)的解存在，这确定了 φ_T满足(5.3)的解。根据构造，对于所有 $\tau \geq 0$，$\|\varphi_T(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \delta e^{-\omega\tau}$。

为证明唯一性，令 $\tilde{\varphi} \in C([0,\infty)\ X_s^k(\mathbb{R}^n))$为(5.3) 的另一个解， $\varphi_T \neq \tilde{\varphi}$。然后，由于两个解具有相同的初始数据，存在 $\varepsilon \in (0,\ \frac{1-\delta}{2})$ 和 $\tau_0 > 0$ 使得

$$\|\varphi_T(\tau_0) - \tilde{\varphi}(\tau_0)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} > \varepsilon, \tag{5.8}$$

and

$$\|\varphi_T(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} < 2\varepsilon \quad \text{for } \tau \in [0,\tau_0].$$

我们得到

$$\|\tilde{\varphi}(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|\tilde{\varphi}(\tau) - \varphi_T(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_T(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} < 2\varepsilon + \delta e^{-\omega\tau} < 1,$$

对于 $\tau \in [0,\tau_0]$。对于半群 $(S_{X_s^k}(\tau))_{\tau\geq 0}$，我们有界$\mathrm{k}S_{X_s^k}(\tau)\mathrm{k} \leq Me^{\tau}$对于$\tau \geq 0$ 以及某个 $M > 0$。结合引理 (5.1)

$$\|\varphi_T(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim (e^{\tau} - 1) \sup_{\tau' \in [0,\tau]} \|\varphi_T(\tau') - \tilde{\varphi}(\tau')\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对于 $\tau \in [0,\tau_0]$。通过适当选择 $\tau_1 \in (0,\tau_0]$，我们得到

$$\sup_{\tau\in[0,\tau_1]} \|\varphi_T(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau\in[0,\tau_1]} \|\varphi_T(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

这表明 $\varphi_T = \tilde{\varphi}$ 在 $[0,\tau_1]$中。反复应用这一论证可得 $\varphi_T = \tilde{\varphi}$ 在 $[0,\tau_0]$ 中，这与（5.8）矛盾。□

注记 5.5. 定理 5.4 得到的唯一强解是实值的，因为 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中实值函数构成的子空间在 $S_{X_s^k}$ 和 $\mathrm{P}^{X_s^k}$ 的作用下保持不变。

5.3.**经典解**。本节将证明，属于施瓦茨空间的初始数据会生成方程 (2.7) 的经典解，并且这些解进一步具有光滑性。

命题 5.6. 如果定理 *5.4* 中的 φ_0 属于 $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}^n)$，则方程 (5.3) 的唯一强解 φ 属于 $C^{\infty}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$，并且以经典意义满足 (2.7) 。

证明. $\mathrm{U}(\varphi_0,T)$ 的正则性意味着 $\mathrm{U}(\varphi_0,T) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}^{X_s^k})$。结合 N 的局部 Lipschitz 连续性可知，方程 (5.3) 的唯一强解 φ确实是经典解（例如参见 [8], 第 60 页，命题 4.3.9）。这意味着 $\varphi \in C([0,\infty), \mathrm{D}(\mathrm{L}^{X_s^k})) \cap C^1([0,\infty)\ X_s^k(\mathbb{R}^n))$，且 φ 满足

$$\partial_\tau \varphi(\tau) = \mathcal{L}\varphi(\tau) + \mathcal{N}(\varphi(\tau)), \quad \text{for } \tau \geq 0, \tag{5.9}$$

在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中。由连续嵌入 $X_s^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$（见引理 2.1），我们推得 (5.9) 逐点成立。由于算子 L 可分解为 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_0 + L_1$，其中 L_1在 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 上有界，因此 φ 满足

$$\varphi(\tau) = S_0(\tau)\mathcal{U}(\varphi_0,T) + \int_0^{\tau} S_0(\tau-\tau')(L_1\varphi(\tau') + \mathcal{N}(\varphi(\tau')))d\tau', \quad \text{for } \tau \geq 0.$$

[{"id": 0, "output": "自由半群的平滑性质（见附录 A.4）现在意味着，对于所有 $\tau \geq 0$， $\varphi(\tau) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$。"}]

为在 τ 中建立更高阶正则性，我们应用广义的 Schwarz 定理（例如参见 [35], 第 235 页，定理 9.41），该定理允许交换作用于 φ的算子 ∂_τ 和 L。因此，所有阶数的混合导数均存在，这表明 $\varphi \in C^{\infty}([0,\infty)\ \times\mathbb{R}^n)$。□

定理 *1.4* 的证明。设 $\eta_0 \in S(\mathbb{R}^d)$，其中 $\eta_0(x) = x\varphi_0$，对径向 Schwartz 函数 $\varphi_0 \in S_r(\mathbb{R}^d)$，$\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0(|\cdot|)$。利用径向函数的傅里叶变换表示，经过显式计算（参见 [24], 命题 A.5），可得

$$\sum_{i=1}^{d} \left|[\mathcal{F}_d \eta_{0,i}](\xi)\right|^2 \simeq |\xi|^2 \left|[\mathcal{F}_{d+2}\tilde{\varphi}_0(|\cdot|)](|\xi|)\right|^2.$$

特别地，φ_0 也可以被视为 $\mathbb{R}^n$ 上的径向 Schwartz 函数，并且

$$\|\eta_0\|_{\dot{H}^s \cap \dot{H}^k(\mathbb{R}^d)} \simeq \|\tilde{\varphi}_0(|\cdot|)\|_{\dot{H}^s \cap \dot{H}^k(\mathbb{R}^{d+2})}.$$

因此，我们可以选择足够小的 $\varepsilon > 0$，以保证 $\|\varphi_0\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{M^2}$，其中 $\delta, M >0$ 是定理 5.4 中的常数。由定理 5.4 可知，对于某个 $T \in [1 - \frac{\delta}{M}, 1 + \frac{\delta}{M}]$，方程 (5.3) 存在唯一的强解 $\varphi \in C([0,\infty) X_s^k(\mathbb{R}^n))$。命题 5.6 意味着 $\varphi \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ 是方程 (2.7) 的经典意义下的解。此外，$\varphi(\tau, \cdot) = \tilde{\varphi}(\tau, |\cdot|)$，并且由 (5.5) 亚洲国产

$$\|\varphi(\tau)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta e^{-\omega\tau}$$

对所有 $\tau \geq 0$ 均成立。为返回原变量，注意

$$\psi(\tau, y) := \phi(|y|) + \varphi(\tau, y)$$

是方程 (2.5) 的经典解，且属于 $C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$。此外，$\psi$ 是径向的，$\psi(\tau, y) = \psi(\tau, |y|)$，并且

$$v(t,r) := \frac{1}{\sqrt{T-t}}\tilde{\psi}\Big(\ln(\tfrac{T}{T-t}), \tfrac{r}{\sqrt{T-t}}\Big) = v_T(t,r) + \tilde{\varphi}\Big(\ln(\tfrac{T}{T-t}), \tfrac{r}{\sqrt{T-t}}\Big)$$

我们得到初始数据为以下形式的方程 (1.8) 的一个解

$$v_0(r) = \phi(r) + \tilde{\varphi}_0(r).$$

最后，由下式定义的 $U \in C^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^d)$

$$U(t,x) := xv(t,|x|)$$

是原问题 (1.3) 在初始条件 $U_0 = \Phi + \eta_0$ 下的解，其中 $\Phi(x) = x\phi(|x|)$。此外，我们有如下分解

$$U(t,x) = \frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big(\phi\left(\tfrac{|x|}{\sqrt{T-t}}\right) + \tilde{\varphi}\left(\ln(\tfrac{T}{T-t}), \tfrac{|x|}{\sqrt{T-t}}\right)\Big),$$

令

$$\eta\left(t, \tfrac{x}{\sqrt{T-t}}\right) := \frac{x}{\sqrt{T-t}}\tilde{\varphi}\left(\ln(\tfrac{T}{T-t}), \tfrac{|x|}{\sqrt{T-t}}\right)$$

得出 (1.17)。再次由 [24], 命题 A.5 可知，

$$\|\eta(t,\cdot)\|_{\dot{H}^s \cap \dot{H}^k(\mathbb{R}^d)} \simeq \left\|\varphi\left(\ln(\tfrac{T}{T-t}), \cdot\right)\right\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta e^{-\omega \ln\left(\frac{T}{T-t}\right)} \lesssim (T-t)^\omega,$$

对于 $t \in [0,T)$。这意味着 $\|\eta(t,\cdot)\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^d)} \to 0$ 当 $t \to T^-$ 对于 $r \in [s,k]$。 □

附录 A.

A.1. 引理 2.1 的证明。 我们首先注意到，鉴于权函数 $\sigma(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ 的指数衰减， $L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow$ H中有连续嵌入。因此，只需证明 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 可连续嵌入到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中。我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|\mathcal{F}f\|_{L^1(B_1)} + \|\mathcal{F}f\|_{L^1(B_1^c)} \\ &\lesssim \||\cdot|^{-s}\|_{L^2(B_1)}\||\cdot|^s\mathcal{F}f\|_{L^2(B_1)} + \||\cdot|^{-k}\|_{L^2(B_1^c)}\||\cdot|^k\mathcal{F}f\|_{L^2(B_1^c)} \\ &\lesssim \|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

对于所有 $f \in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$。设 $f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$，则存在一个序列 $(f_j)_j \subseteq C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $f_j \to f$ 属于 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$。上述不等式意味着$(f_j)_j$ 是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的柯西序列，这意味着极限 $h := \lim_{j\to\infty} f_j$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中存在。这定义了一个映射$i:\ X_s^k(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$， $i(f) = h$。要使其成为嵌入， i必须是单射。

设 $f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 满足 $i(f) = 0$。则存在一个序列 $(f_j)_j \subseteq C_{c,\ r}^\infty(\mathbb{R}^n)$，其中 $f_j \to f$ 属于 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$，且 $f_j \to 0$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$。对于 Schwartz 函数 $\varphi \in \mathsf{S}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned}|\langle|\cdot|^s\mathcal{F}(f_j), \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}| &= |\langle f_j, \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^s\varphi)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}| \\ &\le \|f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^s\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ \to 0 \quad \text{as } j \to \infty.\end{aligned}$$

结合 $\mathsf{S}(\mathbb{R}^n)$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$中的稠密性，我们推断 $|\cdot|^s\mathsf{F}(f_j) \rightharpoonup 0$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中，即 $j \to \infty$。对于序列 $(|\cdot|^k\mathsf{F}(f_j))_j$，同样成立。但强极限 $f_j \to f$在$X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 中尤其意味着弱极限 $|\cdot|^s\mathsf{F}(f_j) \rightharpoonup f$和 $|\cdot|^k\mathsf{F}(f_j) \rightharpoonup f$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中，而这与弱极限的唯一性相矛盾。

A.2. 中的代数性质的另一种证明 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$。 令 $s,\ k \ge 0$ 满足条件 (2.13)。由于$X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 是一个径向函数空间，我们可以给出一个初等证明，说明 $X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 在乘法下封闭，即我们有

$$\|fh\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

对于所有 $f, h \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$。我们首先注意到

$$\|fh\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|fh\|_{\dot{H}^{\lfloor s\rfloor}\cap\dot{H}^k(\mathbb{R}^n)},$$

对于所有 $f, h \in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$，其中$\lfloor s\rfloor = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1$。接下来，我们对整数指数 $l \in \mathbb{N}_0$ 使用以下范数等价关系。

$$\|fh\|_{\dot{H}^l} \simeq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=l}} \|\partial^\alpha(fh)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=l}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n \\ \beta\le\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta f\partial^{\alpha-\beta}h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $f,\ h \in C_{c,\ r}^\infty(\mathbb{R}^n)$。因此，我们估计

$$\|\partial^\beta f\partial^{\alpha-\beta}h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \||\cdot|^{-m}\partial^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\||\cdot|^{\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-m)}\partial^{\alpha-\beta}h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \tag{A.1}$$

对于 $m \geq 0$，由 Hölder不等式。对于 $l = \lfloor s \rfloor$，我们选择 $m = s - |\beta|$。为了控制 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$中的加权导数，我们使用 [23], 命题 B.1，并应用 Hardy不等式得到

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \| |\cdot|^{-s+|\beta|} \partial^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| |\cdot|^{\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-s+|\beta|)} \partial^{\alpha-\beta} h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{\dot{H}^{\lfloor s \rfloor + \frac{n}{2} - s}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f\|_{X^k_s(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{X^k_s(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

如 $\frac{1}{2} < \frac{n}{2} - s + |\beta| < \frac{n}{2}$和 $s \leq \lfloor s \rfloor + \frac{n}{2} - s \leq k$。
对于 $l = k$，需要将莱布尼茨法则中出现的项 $(\partial^\alpha f)h$ 和 $f(\partial^\alpha h)$ 分别处理。我们有

$$\|(\partial^\alpha f)h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{X^k_s(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{X^k_s(\mathbb{R}^n)},$$

由连续嵌入 $X^k_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$（见引理 2.1）可得。对于$f(\partial^\alpha h)$，同样成立。接下来，若 $1 \leq |\beta| \leq k-1$，利用对称性，可不失一般性地限于$1 \leq |\beta| \leq \frac{k-1}{2}$，并使用不等式 (A.1)，取 $m = \frac{n-2}{2}$，得到

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|f\|_{\dot{H}^{|\beta| + \frac{n-2}{2}}(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{\dot{H}^{k-|\beta|+1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f\|_{X^k_s(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{X^k_s(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

由 Hardy不等式、 [23], 中的命题 B.1 以及插值可得。

A.3. 引理 2.2 的证明。设 $f \in C^\infty_r(\mathbb{R}^n)$ 满足 $|\partial^\alpha f(x)| \lesssim \mathrm{h}x\mathrm{i}^{-1-|\alpha|}$，其中$\alpha \in \mathbb{N}^n_0$、$|\alpha| \leq k$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。设 $\chi \in C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^n)$，$\chi \geq 0$ 为一个截断函数，满足

$$\begin{cases}\chi(x) = 1, & |x| \leq 1, \\ \chi(x) = 0, & |x| \geq 2.\end{cases} \tag{A.2}$$

我们定义序列 $(f_j)_j \subset C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^n)$ 为 $f_j(x) := f(x)\chi_j(x)$，对于 $x \in \mathbb{R}^n$和 $j \in \mathbb{N}$，其中$\chi_j(x) := \chi(\frac{x}{j})$。显然，这个函数序列收敛于 f在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中，因为我们有

$$\|f - f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f(1 - \chi(\tfrac{\cdot}{j}))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus B^n_j)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus B^n_j)} \to 0, \quad \text{as } j \to \infty.$$

现在我们利用以下事实:

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\dot{W}^{\lceil s \rceil, p}(\mathbb{R}^n)} \simeq \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n_0 \\ |\alpha| = \lceil s \rceil}} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

对于 $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{\lceil s \rceil - s}{n}$，另见 (4.5)。根据 f 的衰减假设可知，序列 $(f_j)_j$ 在 $\dot{W}^{\lceil s \rceil, p}(\mathbb{R}^n)$ 中是柯西序列，当且仅当 $\frac{n}{2} - 1 < s$，这恰好是我们对 s 的条件。同理可推知，$(f_j)_j$ 是 $\dot{H}^k(\mathbb{R}^n)$ 中的径向函数柯西序列，因此也是 $X^k_s(\mathbb{R}^n)$ 中的柯西序列。由于 $X^k_s(\mathbb{R}^n)$ 是完备的，存在 $\tilde{f} \in X^k_s(\mathbb{R}^n)$，使得 $\lim_{j\to\infty} f_j = \tilde{f}$ 属于 $X^k_s(\mathbb{R}^n)$。由连续嵌入 $X^k_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$，见引理 2.1，可得 $\tilde{f} = f$，这表明 $f \in X^k_s(\mathbb{R}^n)$。

A.4.自由半群的平滑性质。回顾，命题 5.6 中的 φ 满足

$$\varphi(\tau) = S_0(\tau)\mathcal{U}(\varphi_0, T) + \int_0^\tau S_0(\tau-\tau')(L_1\varphi(\tau') + \mathcal{N}(\varphi(\tau')))d\tau', \quad \text{for } \tau \geq 0. \tag{A.3}$$

我们证明 $\varphi(\tau)$属于所有 $X_s^l(\mathbb{R}^n)$，其中 $l \geq k$，并使用连续嵌入$X_s^l(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_r^m(\mathbb{R}^n)$，其中 $l \geq \frac{n}{2} + m$。令 $f \in C_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^n)$。利用显式形式 $S_0(\tau)$，见（3.2），我们得到

$$\begin{aligned}
\|S_0(\tau)f\|_{\dot{H}^{k+1}(\mathbb{R}^n)} &= e^{-\frac{\tau}{2}}\||\cdot|^{k+1}\mathcal{F}((H_{\kappa(\tau)} * f)(e^{-\frac{\tau}{2}}\cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-(k+1))\tau}\||\cdot|^{k+1}\mathcal{F}(H_{\kappa(\tau)} * f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-(k+1))\tau}\||\cdot|^k\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\||\cdot|\mathcal{F}(H_{\kappa(\tau)})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-(k+1))\tau}\kappa(\tau)^{-\frac{1}{2}}\||\cdot|^k\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

对于 $\tau > 0$。结合 (4.4)，我们推断

$$\|S_0(\tau)f\|_{X_s^{k+1}(\mathbb{R}^n)} \lesssim e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)\tau}\kappa(\tau)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)},$$

由稠密性，对所有 $f \in X_s^k(\mathbb{R}^n)$ 均成立。由 (A.3) 可推得

$$\begin{aligned}
\|\varphi(\tau)\|_{X_s^{k+1}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|S_0(\tau)\mathcal{U}(\varphi_0,T)\|_{X_s^{k+1}(\mathbb{R}^n)} + \int_0^\tau \|S_0(\tau-\tau')(L_1\varphi(\tau') + \mathcal{N}(\varphi(\tau')))\|_{X_s^{k+1}(\mathbb{R}^n)}d\tau' \\
&\lesssim e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)\tau}\kappa(\tau)^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{U}(\varphi_0,T)\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \int_0^\tau e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)(\tau-\tau')}\kappa(\tau-\tau')^{-\frac{1}{2}}\|L_1\varphi(\tau') + \mathcal{N}(\varphi(\tau'))\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}d\tau'.
\end{aligned}$$

由于 φ 属于 $C([0,\infty)\, X_s^k(\mathbb{R}^n))$，算子 L_1 和 N 的连续性意味着该估计

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)(\tau-\tau')}\kappa(\tau-\tau')^{-\frac{1}{2}}\|L_1\varphi(\tau') + \mathcal{N}(\varphi(\tau'))\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}d\tau' \\
&\leq \sup_{\tilde{\tau}\in[0,\tau]}\|L_1\varphi(\tilde{\tau}) + \mathcal{N}(\varphi(\tilde{\tau}))\|_{X_s^k(\mathbb{R}^n)}\int_0^\tau e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)(\tau-\tau')}\kappa(\tau-\tau')^{-\frac{1}{2}}d\tau'.
\end{aligned}$$

因此，$\varphi(\tau) \in X_s^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ 对于 $\tau \geq 0$ 若

$$\int_0^\tau e^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1-s)(\tau-\tau')}\kappa(\tau-\tau')^{-\frac{1}{2}}d\tau' < \infty. \tag{A.4}$$

直接计算可得，(A.4) 中的积分等于 $B(\frac{1}{2}, \frac{s}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2})$，其中 B 是标准贝塔函数，且当 $s > \frac{n}{2} - 1$ 时其值定义良好。我们通过归纳推得，对所有 $\tau \geq 0$ 和 $l \geq k$，$\varphi(\tau) \in X_s^l(\mathbb{R}^n)$，由此得证。

致谢。 第一作者谨此感谢 David Wallauch 富有成效的讨论。

参考文献

[1] Paweł Biernat. 高维调和映射热流中的非自相似爆破。非线性，28(1):167–185，2015。[2] Paweł Biernat 和 Piotr Bizoń. 球面之间调和映射热流中的缩小解、扩张解以及一般爆破后的唯一延拓。非线性，24(8):2211–2228，2011。

[3] Paweł Biernat 和 Roland Donninger. 超临界等变调和映射热流中谱稳定自相似爆破解的构造。Nonlinearity，31(8):3543–3566，2018。[4] Paweł Biernat、Roland Donninger 和 Birgit Schörkhuber. 超临界调和映射热流中的稳定自相似爆破。Calc. Var. Partial Differential Equations，56 171，31，2017 6( ):Art. 。[5] Paweł Biernat 和 Yukihiro Seki. 超临界调和映射热流的 II 型爆破机制。Int. Math. Res. Not. IMRN，(2):407–456，2019。[6] Paweł Biernat 和 Yukihiro Seki. k-等变调和映射热流中爆破机制的转变。Nonlinearity，33(6):2756–2796，2020。[7] Piotr Bizoń 和 Arthur Wasserman. 高维调和映射流不存在缩小解。Int. Math. Res. Not. IMRN，(17):7757–7762，2015。[8] Thierry Cazenave 和 Alain Haraux. 半线性演化方程导论，牛津数学及其应用讲座系列第13卷。Clarendon出版社，牛津大学出版社，纽约，1998。由Yvan Martel从1990年法文原著翻译，并由作者修订。[9] Kung-Ching Chang、Wei Yue Ding 和 Rugang Ye. 曲面上的调和映射热流有限时间爆破。J. Differential Geom.，36(2):507–515，1992。[10] Bang-Yen Chen. 扭曲乘积流形及子流形的微分几何。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2017。附有Leopold Verstraelen撰写的序言。[11] Jean-Michel Coron 和 Jean-Michel Ghidaglia. 调和映射流的有限时间爆破。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.，308(12):339–344，1989。[12] Juan Dávila、Manuel Del Pino、Catalina Pesce 和 Juncheng Wei. 三维轴对称调和映射流进入 S^2的爆破。Discrete Contin. Dyn. Syst.，39(12):6913–6943，2019。[13] Juan Dávila、Manuel del Pino 和 Juncheng Wei. 二维调和映射流进入 S^2的奇点形成。Invent. Math.，219(2):345–466，2020。[14] Roland Donninger 和 Irfan Glogić. 波映射进入负曲率靶流形的爆破存在性与稳定性。Anal. PDE，12(2):389–416，2019。[15] James Eells 和 Luc Lemaire. 关于调和映射的报告。Bull. London Math. Soc.，10(1):1–68，1978。[16] James Eells 和 Luc Lemaire. 关于调和映射的另一篇报告。Bull. London Math. Soc.，20(5):385–524，1988。[17] James Eells, Jr. 和 Joseph H. Sampson. 黎曼流形之间的调和映射。Amer. J. Math.，86:109–160，1964。[18] Klaus-Jochen Engel 和 Rainer Nagel. 线性演化方程的单参数半群，数学研究生教材第194卷。Springer-Verlag，纽约，2000。S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 参与撰写。[19] Huijun Fan. 调和映射热流自相似解的存在性。Sci. China Ser. A，42(2):113–132，1999。[20] Andreas Gastel. 调和映射热流与Yang-Mills热流中的第一类奇点。Math. Z.，242(1):47–62，2002。[21] Pierre Germain、Tej-Eddine Ghoul 和 Hideyuki Miura. 超临界维数下调和映射热流解的唯一性。Comm. Pure Appl. Math.，70(12):2247–2299，2017。[22] Tej-eddine Ghoul、Slim Ibrahim 和 Van Tien Nguyen. 1-协旋能量超临界调和热流中II型爆破的稳定性。Anal. PDE，12(1):113–187，2019。[23] Irfan Glogić. 所有维数下超临界波映射的全局稳定爆破剖面函数。arXiv预印本，页码 arXiv:2207.06952，2022年7月。[24] Irfan Glogić. 超临界双曲Yang-Mills方程的稳定爆破。Adv. Math.，408(第二部分):论文编号108633，52页，2022。[25] Irfan Glogić 和 Birgit Schörkhuber. 等变情形下齐次收缩Yang-Mills孤子解的非线性稳定性。Comm. Partial Differential Equations，45(8):887–912，2020。[26] Irfan Glogić 和 Birgit Schörkhuber. 三维Keller-Segel系统的稳定奇点形成。即将发表于Arch. Ration. Mech. Anal.，页码 arXiv:2209.11206，2022年9月。[27] Loukas Grafakos 和 Seungly Oh. Kato-Ponce不等式。Comm. Partial Differential Equations，39(6):1128–1157，2014。

[28] Matthew Gursky 和 Andrew Tsai。调和映射的奇点形成。*Matrix Anal. Appl.*，4(4):525–546，1996。[29] Philip Hartman。关于同伦调和映射。《加拿大数学杂志》，19:673–687，1967。[30] Frédéric Hélein 和 John C. Wood。调和映射。载于《全球分析手册》，第 417–491 页，1213，2008。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹。[31] Jürgen Jost。通过热流方法证明求解狄利克雷问题的调和映射的存在性。*Manuscripta Math.*，34(1):17–25，1981。[32] Fanghua Lin 和 Changyou Wang。《调和映射及其热流的分析》。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2008。[33] Pierre Raphaël 和 Remi Schweyer。能量临界 1-共旋调和热流的稳定爆破动力学。纯粹与应用数学通讯，66(3):414–480，2013。[34] Pierre Raphaël 和 Remi Schweyer。共旋能量临界调和热流的量子化缓慢爆破动力学。《分析：偏微分方程》，7(8):1713–1805，2014。[35] Walter Rudin。《数学分析原理》。纯粹与应用数学国际丛书。McGraw-Hill Book Co.，纽约—奥克兰—杜塞尔多夫，第三版，1976。[36] Jalal Shatah 和 A. Shadi Tahvildar-Zadeh。关于等变波映射的柯西问题。纯粹与应用数学通讯，47(5):719–754，1994。[37] Michael Struwe。关于高维调和映射的演化。微分几何杂志，28(3):485–502，1988。[38] Michael Struwe。调和映射的演化：存在性、部分正则性与奇点。载于《非线性扩散方程及其平衡态，*3*（*Gregynog，1989*）》，第 7 卷，《非线性微分方程及其应用进展》，第 485–491 页。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1992。[39] Atsushi Tachikawa。从球到扭曲乘积流形的旋转对称调和映射。*Manuscripta Math.*，53(3):235–254，1985。[40] Terence Tao。《非线性色散方程》，第 106 卷，《*CBMS* 数学区域会议丛书》。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；由美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，2006。局部与整体分析。[41] Gerald Teschl。《量子力学的数学方法》，第 99 卷，《数学研究生教材》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009。附薛定谔算子的应用。

维也纳大学数学系，Oskar-Morgenstern-Platz 1，1090 维也纳，奥地利电子邮箱：irfan.glogic@univie.ac.at因斯布鲁克大学数学研究所，Technikerstraße 13，6020 因斯布鲁克，奥地利电子邮箱：Sarah.kistner@uibk.ac.at因斯布鲁克大学数学研究所，Technikerstraße 13，6020 因斯布鲁克，奥地利电子邮箱：Birgit.Schoerkhuber@uibk.ac.at