arXiv:2304.04109v1 [math.NT] 8 Apr 2023

特殊形式的奇完全数

Luis H. Gallardo 和 Olivier Rahavandrainy

摘要。我们给出了一些具有特殊乘法形式的奇数族成为奇完全数的必要条件。这是对 Steuerwald、Kanold、McDaniel 等人早期工作的拓展。

1. 引言

数 n 是完全数，当且仅当它等于其所有真因数之和。设 n 为一个奇完全数。欧拉 [7] 证明了

$$n = p^{4k+1}c^2 \tag{1}$$

其中， p 是一个模 4 同余于 1 的素数， $k \geq 0$ 是非负整数， $c > 0$ 是一个不能被 p 整除的正整数。令 $\alpha = 4k+1$，并令 $c = a_1^{e_1} \cdots q_t^{e_t}$，其中 $q_1, \ldots, q_t$ 为素数， $e_1, \ldots, e_t$ 为正整数。如果所有 e 均相等，则记为 $\beta = e_1 = \ldots = e_t$；如果除一个以外其余均相等，则记为，例如， $\gamma = e_2 = \ldots = e_t$。如果所有 e 模 m 同余于 a，则记为 $\delta \equiv e_1 \ldots \equiv e_t \equiv a$ （模 m）。令 $g =$ 最大公约数$(2e_1+1, \ldots, 2e_t+1)$。

Steuerwald [19] 证明了 $\beta \neq 1$，Kanold [11] 证明了 $\beta \neq 2$，并且 g^4 整除 n。他推导出 9，15，21，33 均不能整除 g。Brauer [1] 和 Kanold [12] 分别独立证明了 $e_1 = 2$, $\gamma = 1$也不可能；关于这两个证明的讨论，参见 Brauer 的 [2]。Kanold [13] 宣布并由 Kanold [14] 证明，当 $\gamma = 1$ 时，有 $e_1 \notin \{3, 4\}$。Kanold [15] 证明了两种情形 $e_1 = e_2 = 2$， $e_3 = \ldots = e_t = 1$ 和 $\alpha = 5$， $e_1 = \ldots = e_r = 1$， $e_{r+1} = \ldots = e_t = 2$ 均不可能。McCarthy [16] 证明了 $3 \nmid n$ 和 $\delta \equiv 1$ (模 3)不能成立。他还在同一篇论文中证明， $3 \nmid n$, $\gamma = 1$ 和 $q_1 \equiv 2$ (模 3)不可能。

McDaniel 证明了 [17] $\delta \equiv 1$ （模 3）不可能成立。Hagis 和 McDaniel [9]证明了 $\beta \neq 3$，并且（$q_1 = 7$， $e_1 = 6$ 以及 7 整除 e_2，.....， e_t）是不可能的。Hagis 和 McDaniel [10] 证明了 $\beta \notin \{5, 12, 17, 24, 62\}$。Hagis 和 McDaniel[10] 提出了一个至今尚未解决的猜想：不存在所有 e'都相等的奇完全数。Cohen 和 Williams [3] 证明了 $\beta \notin \{6, 8, 11, 14, 18\}$。因此，所有小于 20 的 β 情形都已解决。他们还证明，对于 $\gamma = 1$ ，有$e_1 \notin \{5, 6\}$，扩展了先前的结果。

近期，Evans 和 Pearlman [6] 证明了以下两个事实：i) $\delta \equiv 32$ （模 65）以及 ii) $7 \mid n$， $\delta \equiv 2$ （模 5）是不可能的。近期，Gallardo [8] 也证明了 n不可能是立方数。

另请参阅 [4, 第 1] 章，了解该领域的全面综述。

通常， $a \,||\, b$ 表示 a 整除 b （也记作 $a \mid b$），并且最大公约数$(a, b/a)$ =1。对于正整数 $n > 0$, 我们用 $\Phi_n(x)$ 表示第 n阶圆分多项式。我们用 $\sigma(n)$ 表示 n 的所有正因数之和。我们用 $\omega(n)$ 表示

日期：2023年4月11日。2010 年数学主题分类。 主要分类 11A25；次要分类 11A07。关键词和短语。因数和、奇完全数、分圆多项式、同余。

n的不同素因子个数。对于有限集 A，我们用 $\sharp(A)$ 表示 A 的元素个数。

本文旨在证明以下两个结果：

定理 1.1. 不存在形如……的奇完全数。

$$n = 5^{\alpha} M^{2\beta}$$

其中 M 是无平方因子且 $5 \nmid M$。

为了陈述我们的第二个结果，我们需要以下定义。设$\Sigma = \{p \text{ 素数：} \ p \in \{2, 4\} \pmod 7\}$。对于任意素数 $x > 7$，令 $T(x) = \{q \text{ 素数：} \ q \neq 3 \text{ 且 } q \mid \Phi_3(x)\}$。令 $p > 7$ 为一个素数。若对于某个非负整数 $n \geq 0$，集合 $S_n(p) \cap \Sigma$ 非空，则称 p 为优良，其中$S_n(p)$是递归定义的集合：

(a) $S_0(p) = \{p\}$.
(b) $S_{n+1}(p) = S_n(p) \bigcup_{x \in S_n(p)} T(x)$.

注意，$T(x)$ 非空，因为我们断言不存在素数x 满足以下条件：

$$\Phi_3(x) = 3^m \tag{2}$$

其中 m 是一个正整数。为证明该断言，将（2）的两边模 3 化简，得到 $x \equiv 1$（模 3）。因此 $x \in \{1, 4, 7\}$（模 9）。但 $x > 1$，所以（2）推出 $m > 1$。现在将（2）的两边模 9 化简，得到矛盾 $3 \equiv \Phi_3(x) \equiv 0$（模 9）。这就证明了该断言。

例如，$x = 31$ 是好的，因为 $S_0(31) = \{31\}$，$S_1(31) = \{31, 331\}$，且 $331 \in S_1(31) \cap \Sigma$，因为 $331 \equiv 2$（模 7）。一个更复杂的例子是 $x = 13$是好的这一事实；事实上，McDaniel 对引理 2.3 的证明（在我们的特殊情形 $p = 5$ 中）实质上就是证明 $x = 13$ 是好的：

$$S_0(13) = \{13\}, S_1(13) = \{13, 61\}, S_2(13) = \{13, 61, 97\},$$
$$S_3(13) = \{13, 61, 97, 3169\}, S_4(13) = \{13, 61, 97, 3169, 3348577\},$$
$$S_5(13) = \{13, 61, 97, 3169, 3348577, 3737657091169\},$$
$$S_6(13) \supseteq R_6 = \{13, 61, 97, 3169, 3348577, 3737657091169, 181\},$$
$$S_7(13) \supseteq R_7 = R_6 \cup \{79, 139\},$$

and $79 \equiv 2 \pmod 7$，使得 $S_7(13) \cap \Sigma$ 是一个非空集合。这证明了该结果。现在我们能够确立第二个结果。

定理 1.2. (a) 不存在形如……的奇完全数。

$$n = 5^{\alpha} 3^{2b} q_1^{6k_1+2} \cdots q_t^{6k_t+2}$$

其中至少有一个素数 $5 < q_1 < \cdots < q_t$ 是良好的。

(b) 不存在形如

$$n = 5^{\alpha} 3^{2b} q_1^{6k_1+2} \cdots q_t^{6k_t+2}$$

其中 $5 < q_1$，且素数 $q_1 < \cdots < q_t$ 中至少有一个不超过157。

(c)

假设猜想 *1.4* 成立，则不存在以下形式的奇完全数。

$$n = 5^{\alpha} 3^{2b} q_1^{6k_1+2} \cdots q_t^{6k_t+2}$$

其中 q_1、……、q_t 是大于 5 的素数。

命题 4.1 描述了满足定理 1.2的 (a) 部分条件的某些对 $(\alpha,\ b)$。

命题 1.3。 所有素数 $p > 7$ 且小于160 均为良好的。

证明。 由一些计算机计算可得。 □

猜想 1.4. 所有素数 $p > 7$ 都是好的。

2. 一些工具

下面给出一些经典结果。

引理 2.1。 [21] 不存在素因子少于3个的奇完全数。

引理 2.2。 [11] 不存在其中 c 无平方因子的奇完全数 $n = p^{\alpha}c^2$ 。

引理 2.3。 [17] 不存在满足 $e_1 \equiv e_2 \equiv \cdots \equiv e_t \equiv 1 \pmod 3$的奇完全数$n = p^{\alpha}q_1^{2e_1}\cdots q_t^{2e_t}$。

引理 2.4。 [18] 若 $n = p^{\alpha}3^{2\beta}d^{2\beta}$ 满足 d 无平方因子且$\gcd(3, d) = 1 = \gcd(p, d)$，并且是奇完全数，则 $\sigma(p^{\alpha}) \equiv 0$ (模 $3^{2\beta}$)。

引理 2.5。 [20, 页下注 590] 不存在被 $105 = 2 \cdot 5 \cdot 7$整除的奇完全数 n 。

对于互不相同的素数 $p \neq q$ ，我们用 $ord_q(p)$ 表示满足 $p^d \equiv 1 \pmod q$ 的最小自然数 d 。我们用 $a_q(p)$ 表示整数 e ，使得 $q^e || p^d - 1$，其中 $d = ord_q(p)$。

以下引理出现在 Pomerance 的论文 [5, 引理 1] 中。

引理2.6。 假设 p、q 是不同的素数，其中 $q \neq 2$ 和 b、c 是自然数。那么

(a) 若 $p \equiv 1 \pmod q$，则 $q^b || \sigma(p^c)$ 当且仅当 $q^b || c + 1$，(b) 若 $p \not\equiv 1 \pmod q$，则 $q^b || \sigma(p^c)$ 当且仅当 $b \geq a_q(p)\ ord_q(p) \mid c + 1$，且 $q^{b-a_{q(p)}} \mid c + 1$。

Yamada [22] 的一项近期结果是

引理2.7。 如果 n 是一个奇完全数，满足 $\beta = e_1 = \cdots = e_t \geq 1$ 那么

$$\omega(n) \leq 4\beta^2 + 2\beta + 3.$$

3. 定理 1.1 的证明

由于 $6 = \Phi_2(5)$ 整除 $\sigma(5^{\alpha})$，且 M 无平方因子，因此对于某个与 3 互素的正的无平方因子整数 Q ，有 $M = 3Q$ ，于是可写作 $n = 5^{\alpha}3^{2\beta}Q^{2\beta}$。由引理 2.1 可知 $\omega(n) > 2$，因此 $Q \neq 1$。注意到$3^{2\beta+1} \in \{3,2\} \pmod 5$，因此 $5 \nmid \sigma(3^{2\beta})$。换言之，$5 \mid \sigma(5^{\alpha})\sigma(3^{2\beta})$。因此，由于 n 是完全数，我们有 $5 \mid \sigma(q^{2\beta})$，其中 q 是 Q的某个素因子。现在令

$$S = \{p \equiv 1 \pmod 5 \colon p \mid Q\} \text{ and } \gamma = \sharp(S). \tag{3}$$

由于对于每个满足 $p \not\equiv 1 \pmod 5$ 的 Q 的素因子 p， $d = ord_5(p) \in \{2,4\}$ 是偶数，由引理 2.6 可得 $\gamma > 0$ 。更确切地说，引理 2.6 表明，若 Q 的素因子 p 满足 $p \not\equiv 1 \pmod 5$，则 $5 \nmid \sigma(p^{2\beta})$，因为偶数 d 不可能整除奇数 $c + 1$，其中 $c = 2\beta$。换言之，$q \in S$，因此 S 非空。于是，由引理 2.6(a)，又因为 $q \equiv 1 \pmod 5$，并且因为

$5 \mid \sigma(q^{2\beta})$，定义正整数 $b>0$ 使得 $5^b||2\beta+1$。由引理 2.6 以及 S 的定义可得，对所有 $p \in S$，均有 $5^b||\sigma(p^{2\beta})$。因此，由于 n 是完全数，我们得到

$$\alpha = b\gamma. \tag{4}$$

由引理 2.3，我们可以假设 $3 \nmid 2\beta+1$。由引理2.6 可知$3 \nmid \sigma(Q^{2\beta})$。但由于显然有 $3 \nmid \sigma(3^{2\beta})$ 且 n 是完全数，我们必须有 $3^{2\beta}||\sigma(5^{\alpha})$。我们也可以从引理 2.4 得到这一点。因此由 Pomerance 的引理 2.6，我们得到

$$3^{2\beta-1}||\alpha+1. \tag{5}$$

由于 $b \leq b\cdot \ln(5) \leq \ln(2\beta+1)$，由（4）和（5）可得

$$\gamma \geq \frac{3^{2\beta-1}-1}{\ln(2\beta+1)}. \tag{6}$$

但是，显然，$\gamma \leq \omega(n)$。因此由 Yamada 的引理 2.7 和 (6) 可得

$$3^{2\beta-1}-1 \leq \ln(2\beta+1)\cdot(4\beta^2+2\beta+3). \tag{7}$$

这迫使 $\beta \in \{1,2\}$，从而 $\beta=2$ 因为 $\beta \not\equiv 1$ （模 3）。这与引理 2.2 矛盾，从而证明了该定理。

4. 定理 1.2 的证明

c）由 a）推出。b）由 a）和命题 1.3 推出。现在证明 a）。注意，对于所有整数 y，$\Phi_3(y)$都是奇数。假设对于某个 $j \in \{1,\ldots,t\}$，素数 q_j 是良好的。令 $k \geq 0$ 为非负整数。注意，$S_k(q_j)$中的任意元素都是 n 的素因子，因为 n 是完全数。还要注意，对于任意指标 i，有 $5 \notin S_k(q_i)$，因为对于任意整数 y，都有 $\Phi_3(y) \not\equiv 0$ （模 5）。因此，根据 q_j 是良好的定义，存在一个指标$i \in \{1,\ldots,t\}$，并且存在一个正整数 $k \geq 0$，使得素数 q_i满足 $q_i \in S_k(q_j)$，因此特别地，我们得到 $q_i \mid n$；此外，还有$q_i \in \{2,4\}$（模 7）。因此，$\Phi_3(q_i) \equiv 0$ （模 7）。

由于 $3 \mid 6k_i+3$，我们有 $\Phi_3(q_i) \mid \sigma(q_i^{6k_i+2})$。因此，$\Phi_3(q_i) \mid n$，因为 n 是完全数且 $\Phi_3(q_i)$ 是奇数。但是 $7 \mid \Phi_3(q_i)$。所以 $7 \mid n$。根据引理2.5，这是不可能的，因为3和5也是 n的因数。这就证明了该定理。

下面给出一个充分条件，以使定理 1.2 的 a) 部分中的条件成立。

命题 4.1。设 n 为一个奇完全数，使得

$$15 \mid n,\ 5^{\alpha}||n \ \ and \ \ 3^{2b}||n$$

对于某些正整数 α、$b>0$。如果

$$3 \mid (\alpha+1)(2b+1), \tag{8}$$

那么 n 有一个良素因子。

证明。若 $3 \mid \alpha+1$ 则有 $31=\Phi_5(3) \mid \sigma(5^{\alpha})$。因此，$31 \mid n$ 且31是良好的。若$3 \mid 2b+1$ 则 $13=\Phi_3(3) \mid \sigma(3^{2b})$，从而 $13 \mid n$ 且13也是良好的。□

参考文献

[1] A. Brauer，论形如 $p^{\alpha}q_1^2q_2^2\cdots q_{t-1}^2q_t^2$ 的奇完全数不存在性，《美国数学会通报》**49** (1943年)，第 712–718 页。[2] A. Brauer，关于形如 $p^{\alpha}q_1^2q_2^2\cdots q_{t-1}^2q_t^2$ 的奇完全数不存在性的注记，《美国数学会通报》**49** (1942年)，第 1943年 页。[3] G. L. Cohen，R. J. Williams，关于奇完全数的一些结果的推广，《斐波那契季刊》**23** (1985年)，第 70–76 页。

[4] B. Crstici、J. Sandor，《数论手册 II》，KluwerAcademicPublishers，多德雷赫特，2004年，ii+637 页。[5] G. G. Dandapat„J.L.Hunsucker、C.Pomerance，关于奇完全数的一些新结果，《太平洋数学杂志》57（1975），第359–364页。[6] R. Evans、J. Pearlman，某种形式的奇完全数不存在，《斐波那契季刊》45（2007），第122–127页。[7] L.欧拉，《关于亲和数》，重印于《遗著》，欧拉档案（E798a], http://www.math.dartmouth.edu/euler 1（1862），第85–100页。[8] L. H. GALLARDO，关于Makowski对完全数的一条评论，《数学基础》65（2010），第121–126页。[9] P. J. Hagis、W.L.McDaniel，关于奇完全数结构的新结果，《美国数学学会会刊》32（1972），第13–15页。[10] P. J.Hagis、W. L. McDaniel，关于形如 $p^{\alpha}M^{2\beta}$的奇完全数不存在性的一些结果，《斐波那契季刊》13（1975），第25–28页。[11] H. J.Kanold，关于奇完全数的研究，《纯粹与应用数学杂志》183（1941），第98–109页。[12] H.J. Kanold，关于奇完全数存在性之必要条件的强化，《纯粹与应用数学杂志》184（1942），第116–123页。[13] H.J. Kanold，分圆多项式与奇完全数，《图宾根数学会议报告》1946（1947），第84–87页。[14] H. J. Kanold，关于分圆多项式的定理及其在若干数论问题上的应用。II，《纯粹与应用数学杂志》188（1950），第129–182页。[15] H. J. Kanold，关于奇完全数存在性的若干较新条件，《纯粹与应用数学杂志》192（1953），第24–34页。[16] P.J. McCarthy，关于奇完全数不存在性的评论，《美国数学月刊》64（1957），第257–258页。[17] W. L.McDaniel，某种形式的奇完全数不存在，《数学档案》（巴塞尔）21（1970），第52–53页。[18] P.Starni，关于某些奇完全数的欧拉因子的一些性质，《数论杂志》116（2006），第483–486页。[19] R.Steuerwald，关于奇完全数存在性之必要条件的强化，《巴伐利亚科学院数学与自然科学部学报》（1937），第69–72页。[20] J.J.Sylvester，关于向普通算术词汇中增添一个术语的提议，《J.J. Sylvester数学论文集》，H. F. Baker编，剑桥大学出版社，第4卷（1912），第588–591页。重印自《自然》37（1888），第152–153页。[21] J. J. Sylvester，《论完全数》，《J.J. Sylvester数学论文集》，H. F. Baker编，剑桥大学出版社，第4卷（1912），第604–606页；第615–619页。重印自《报告》106（1888），第403–405页，第641–642页；《数学》8（1888），第57–61页。[22] T.Yamada，特殊形式的奇完全数，《数学论文集》103（2005），第303–307页。

布雷斯特大学，CNRSUMR6205，布列塔尼-大西洋数学实验室，LeGorgeu大道6号，C.S. 93837，Cedex 3，F-29238布雷斯特，法国。电子邮箱： Luis.Gallardo@univ-brest.fr布雷斯特大学，CNRSUMR6205，布列塔尼-大西洋数学实验室，LeGorgeu大道6号，C.S. 93837，Cedex 3，F-29238布雷斯特，法国。电子邮箱：
Olivier.Rahavandrainy@univ-brest.fr