具有模格结构的类 Garside 群的分解与结构定理

CARSTEN DIETZEL

摘要。尽管右 ℓ-群是 Garside群的广泛推广，但具有诺特格结构和强序单位的右 ℓ-群仍保有 Garside 群的许多性质。在本文中，我们证明，每个具有强序单位的模诺特右 ℓ-群都分解为若干束 的直积；这些束是与强序区间的直接不可分解因子相对应的子格。此外，我们证明，维数 $\delta \geq 4$ 的束可以用 Q^δ 中的 R-格进行坐标化，其中 Q 是一个赋有赋值环 R的非交换离散赋值域。特别地，这给出了一个非常庞大的模 Garside 群族的精确描述。

arXiv:2304.04114v1 [math.GR] 8 Apr 2023

1. 引言

Garside群理论源于Garside的一项工作，Garside [Gar69], 作为解决辫群中共轭问题的一种算法解法

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{cc} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & |i-j|>1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right\rangle$$

Garside 的方法利用一个特殊元素，如今称为 ***Garside*** 元；在此情形下，它是由生成元 σ_i 生成的子幺半群 $B_n^+ \subseteq B_n$ 中所有生成元 σ_i（$1 \leq i \leq n-1$）关于（例如）右整除关系的最小公倍数。

Garside 的方法很快被 Saito 和 Brieskorn [BS72] 推广到所有球型 Artin-Tits 群——这些群具有以下意义上的 ***Garside*** 群性质：

定义。 [Deh15, 第一章，第 2] 节 ***Garside*** 群是一个群 G，带有一个指定子幺半群 G^+ 和一个特殊元素 $\Delta \in G^+$ ——即 ***Garside*** 元——并满足以下性质：

(1) G^+ 具有左消去性和右消去性；(2) G^+ 在左整除和右整除关系下均为格；(3) 存在长度函数 $\lambda\colon G^+ \to \mathbb{Z}_0^+$，使得 $\lambda(gh) \geq \lambda(g) + \lambda(h)$；(4) 在 G^+ 中，Δ 的左因子和右因子相同，并构成幺半群 G^+ 的有限生成集；(5) G 是 G^+ 的左分式群，即 $G = \{a^{-1}b\colon a, b \in G^+\}$

该定义可追溯至 Dehornoy 和 Paris [DP99]。
所有此类群都非常适合通过计算方法进行研究，因为它们具有以下性质（参见 [Deh15]）：

(1) 所有 Garside群都有可解的字问题 (2) 所有 Garside 群都有可解的共轭问题

此外，t。 Garside 群的代数性质也颇为优良 [CMW04]:

(1) 所有 Garside 群都有一个有限维的 $K(G, 1)$-空间。(2) 因此，每个 Garside 群都有有限的上同调维数。

尽管我们对 Garside 群整体已有相当多的了解，但要判断哪些群是 Garside 群、哪些不是，仍然是一个难题。因此，或许要准确列出哪些群是Garside 群，也就是哪些群能够赋予 Garside 结构，是一个无解的问题。

日期：2023年4月11日。

我们在此指出，即使是作为群由两个元素生成的 Garside 群，也尚未得到分类 [Deh15, p.25, Question 1.]。
事实证明，当转而考察作为格的整除结构时，还可以多说一些！

以下由 Chouraqui 和 Rump 获得的结果，是此类结果中的第一个：

定理。 具有分配格结构的 *Garside* 群，恰好是有限、非退化、对合的 *Yang-Baxter* 方程集合论解的结构群。

这里对所用术语作一些说明：
一个集合论解由有限集 X 及双射 $R\colon X^2 \to X^2$; $R(x,y) =: ({}^x y, x^y)$（即 R-映射）给出，使得映射 $X^3 \to X^3$ 满足以下方程：

$$R_{12} \circ R_{23} \circ R_{12} = R_{23} \circ R_{12} \circ R_{23}.$$

在此，我们定义 $R_{12}(x,y,z) = ({}^x y, x^y, z)$ 以及 $R_{23}(x,y,z) = (x, {}^y z, y^z)$。如果映射 $y \mapsto {}^x y$对于所有 $x \in X$ 都是双射，且映射 $x \mapsto x^y$ 对于所有 $y \in X$都是双射，则称映射 R 非退化。如果 $R^2 = \mathrm{id}_{X^2}$，则称映射 R 对合。

将集合论解写成一对（X, R），由一个集合和一个 R-映射组成，我们可以定义一个结构幺半群 $M(X,R)$ 和一个结构群，分别指由集合 X 生成的幺半群和群，并满足定义关系 $wx = yz$，对于所有四元组 w,x,y,z，均有 $R(w,x) = (y,z)$。
事实证明，规范的幺半群同态 $M(X,R) \to G(X,R)$ 是单射，并且是 $G(X,R)$上某个 Garside 结构的 Garside幺半群。相应的格结构反过来是一个分配的 格结构。因此，我们实际上了解分配的Garside 群，就像我们了解杨-巴克斯特方程的集合论解一样。
现在我们来介绍 Rump 使用的一种更一般的术语，以避免与生成元集合的有限性相关的问题：

定义。 [Rum15] A 右 ℓ-群 是一个群 G，配备了偏序关系$\leq$，且该关系是右不变的，也就是说

$$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$$

对所有 x、y、$z \in G$ 都成立，并且在此偏序下还是一个格。

设 G 是一个右 ℓ-群。若对所有 x、$y \in G$，等价关系 $x \leq y \Leftrightarrow sx \leq sy$ 均成立，则称元素 $s \in G$ 为正规元素。若 $s > e$，且对所有 $g \in G$，都存在一个整数 n 使得 $s^n \geq g$，则称元素 $s \in G$ 为强序单位。

此外，若每个递增序列 $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$（其中，对某个 $h \in G$，所有 $g_i \leq h$ 均成立）都在某个指标处稳定，且每个递减序列$g_1 \geq g_2 \geq \ldots$（其中，对某个 $h \in G$，所有 $g_i \geq h$ 均成立）也都在某个指标处稳定，则称右 ℓ-群为诺特的。
具有强序单位的诺特右 ℓ-群理论，可以视为 Garside 群理论的恰当推广，而且其成果更加丰硕；例如，这些群可用于阐释拟幺正群中的因子分解理论 [Die19], ——这类群在信号处理中具有重要意义 [Vai92，第 14 章。]。即使不要求诺特性，与冯·诺依曼代数相关的纯拟幺正群中也能出现 Garside 式行为 [DR22]。

Rump 关于具有分配格结构的 Garside 群与杨-巴克斯特方程集合论解的某些结构群相一致的观察，与带有强序单位的局部 模 诺特右 ℓ群理论的发展并行。他证明，在这样的群中，可以选择强序单位 s，使得强序区间 $[s^{-1}, e]$ 是一个模几何的 格，并通过对 $[s^{-1}, e]$ [的哈斯图进行标记，获得了一种图示描述 G 内关系的方法，见 Rum15，第 7+8]节。

在本研究中，我们尝试为具有强序单位的模诺特右 ℓ-群建立一种全局结构理论。在其博士论文中，作者证明了以下结果：

定理。 设 G 是一个模诺特右 ℓ-群，具有强序单位 s，且强序区间 $[s^{-1}, e]$ 是一个长度为 $\delta \geq 4$ 的直接不可分解几何的格。则存在一个带有赋值环 R的非交换离散赋值域 Q ，使得 G 作为格同构于 Q^{δ}中的 R-格所组成的格。

这里， R-格指的是一个有限生成的本质 R-子模。进一步地，借助这种坐标化，可以将 G 描述为广义射影半线性群的一个子群。

我们在此继续分析带有强序单位 s 的模、诺特右 ℓ-群。Rump 已指出，若恰当地选取强序单位 s，则强序区间$[s^{-1}, e]$ 分解为直积 $[s^{-1}, e] = \prod_{i=1}^{k} [z_i, e]$，其中每个区间 $[z_i, e]$ 都是直接不可分解的模几何格。

Picantin [Pic01] 证明，每个 Garside 群都可分解为一系列以循环中心的 Garside 群为因子的交叉积。Rump[Rum17], 将这一结果推广，证明每个诺特右 ℓ-群都存在一种适当的分解，该分解依据其拟中心构造。

对于具有强序单位的模诺特右 ℓ-群，我们给出另一种分解，即束分解：这是一种分解 $G \cong \prod_{i=1}^{k} \beth(z_i)$，即由与 $[s^{-1}, e]$ 作为格的直分解中的不可约分量 $[z_i, e]$ 相对应的格构成的直积。事实证明，只要满足 $\delta_{z_i} := \mathrm{len}([z_i, e]) \geq 4$，束 $\beth(z_i)$ 就具有类似于上文所述的坐标化。不过值得注意的是，束本身并非子群，而只是 G 的子格。显而易见，这种分解的缺点是我们脱离了群的范畴；但其优点在于，对于许多具有强序单位的模诺特右 ℓ-群，束分解可将 G 嵌入半线性射影群的 wreath 积之积中。

我们概述本文的工作：

第1节. 引言

第 2 节. 在预备知识部分，我们介绍后文所需的关于模格（第 2.1 节）和右 ℓ-群（第 2.2 节）的基本定理、记号和定义。

第 3 节。在这里，我们证明了关于（模）诺特右ℓ-群中因子分解的若干结果。特别地，我们证明如下结论：

设 $G^- = \{g \in G\colon\ g \leq e\}$ 为负锥of G and $X(G^-) = \{g \in G^-\colon\ g \prec e\}$位于 e正下方的元素集合，即对偶原子of G^-。如果 G 是模的，那么元素 $g \in G^-$ 的每个因子分解都作为

$$g = x_k x_{k-1} \dots x_1$$

具有相同的长度 k，因此度 $\deg(g) := k$ 是定义良好的，并且可以扩展为同态 $\deg\colon G \to \mathbb{Z}$（命题 3.13）。

此外，我们还给出用带有强序单位的右 ℓ 群来构造 Garside 群中右正规分解的方法。如果 s 是强序单位，那么我们证明，对于所有 $g \in G^-$ ，都存在唯一的因子分解。

$$g = g_k g_{k-1} \dots g_1$$

其中所有 $g_i \in [s^{-1}, e] \setminus \{e\}$ 均满足：没有 g_i ($i > 1$) 可作因子分解 $g_i = h'h$ 并具有h、$h' \in G^-$、 $h \neq e$ 以及 $hg_{i-1} \in [s^{-1}, e]$（定理3.4）。此外，我们还给出了对右正规因子的一个有用描述 g_i ，并提供了左侧对应结果（定理 3.9）。

事实证明，在具有强序单位的模、诺特右 ℓ-群中，当 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 时，度序列 $(\deg(g_i))_{1 \leq i \leq k}$ 是非递增的（定理 3.18）

是一个右正规分解，为理解 G^- 中的因子分解提供了有力工具。

此外，我们证明，若模诺特右 ℓ-群中的强序区间 $[s^{-1}, e]$ 是几何格（只要存在强序单位，总可以通过适当选择 s 来实现），那么 G^- 中的交不可约元素恰好是具有右正规分解 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 且满足 $\deg(g_i) = 1 (1 \leq i \leq k)$ 的元素（命题 3.24）。这意味着这些元素是对偶链（推论 3.25）。

第 4 节。从这里开始，我们只考虑具有模几何强区间 $[s^{-1}, e]$ 的模诺特右 ℓ-群。本节分析格论中心 $\mathrm{Cent}([s^{-1}, e]) =: \mathcal{C}(G^-)$，它由唯一可补的元素 $z \in [s^{-1}, e]$ 组成，这些元素给出直积分解 $[s^{-1}, e] \cong [z, e] \times [z', e]$。我们证明，中心是 $[s^{-1}, e]$ 的一个子格，且在箭头运算 $g \to h := hg^{-1} \vee e$ 下封闭（定理 4.10）。

第 5 节。我们证明，中心 $\mathcal{C}(G^-)$ 的对偶原子 $z_1, \dots, z_k$ 生成 G 的一个子群，该子群同时也是 G 的分配子格——G 的 分配骨架（定理 5.2）。因此，根据 Chouraqui-Rump 定理，G 包含一个非退化对合 Yang- 巴克斯特方程解的结构群。为证明这一结果，我们使用 Rump 的 L-代数。

随后，我们为每个对偶原子 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$ 构造一个元素 $\Phi_n(z) \in G^-$ 的严格递减序列—— z 的冻结幂——使得子格 $\beth^-(z) = \bigcup_{n \geq 1} \Phi_n(z)^\uparrow$ ——与 z 相关联的半束——是 G^- 的直接不可约子格。半束为 G^- 提供了一个因子分解，将其表示为乘积 $\prod_{i=1}^k \beth^-(z_i)$，其中 z_i 遍历 $X(\mathcal{C}(G^-))$ 的所有元素（定理 5.11）。此外，半束具有刚性，即任意 G^- 中的元素进行右乘都会导致半束集合发生置换（命题 5.13）。

最后，我们将半束分解 $G^- \cong \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i)$ 扩展为 束分解 $G \cong \prod_{i=1}^k \beth(z_i)$，其中每个 束 $\beth(z_i)$ 都扩展了半束 $\beth^-(z_i)$（定理 5.14）。我们证明，束分解的各个部分在如下意义下同样是刚性的：右乘 G 中的任意元素会导致各束发生置换（定理 5.16）。

第6节。在本节中，我们为每个束 $\beth(z)$ 赋予其维数，它是整数 $\delta_z := \deg(z)$。我们证明，所有满足 $\delta_z \geq 4$ 的束 $\beth(z)$ 都是可坐标化的，也就是说，存在一个离散赋值域 Q_z，其赋值环为 R_z，使得存在格同构 $\beth(z) \cong \mathrm{Lat}(_{R_z}Q_z^{\delta_z})$，其中 $\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)$ 如上所述，定义为 Q^δ 中所有 R-格所成的格（定理 6.26）。

为了得到这一结果，我们证明每个 $\beth(z)$ 都是一个主格（命题 6.3），并构造区间 $[\Phi_n(z)\ e]$ 的分段坐标化，该坐标化由完全主单列环上的模的子模格给出，其中我们使用了稻葉坐标化定理（命题 6.17）。然后我们证明，这些单独的坐标化可以组合起来，得到一个通过 $\mathrm{Lat}(_{R_z}R_z^{\delta_z}) =: \mathrm{Lat}(R_z, \delta_z)$ 对 $\beth^-(z)$ 的坐标化，其中 R_z 是一个非交换离散赋值环（定理 6.26）。

我们通过将这一坐标化扩展为格同构 $\beth(z) \cong \mathrm{Lat}(_{R_z}Q_z^{\delta_z})$ 来完成证明。

第7节。在最后一节中，我们将简要展示前述结果对具有强序单位的模诺特右 ℓ-群的群论结构所产生的影响。

我们强调，本文与作者的博士论文 [Die21] 在文字上存在一定重叠。这些成果此前尚未在其他任何地方发表。

2. 预备知识

2.1. 格论。 关于格的基础理论，参见 [Grä11]。
下文中，设 $(L, \wedge, \vee)$ 是一个格，其交运算和并运算分别记为 $\wedge$ 和 $\vee$。此外，提及 L 上的偏序关系 $\leq$ 时，除非另有明确说明，我们始终指由 $a \leq b :\Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$ 定义的偏序关系。在大多数情况下，我们只称集合 L 为格，并默认它带有相应的运算 $\wedge, \vee$。

我们有时会使用格的空子集或可能非有限子集上的交和并：若 L 是一个格，且 $A \subseteq L$ 是其子集，我们将 A 的交 定义为满足下述条件的唯一元素$z \in L$ （若存在）：

$$\forall x \in L: \quad (x \leq z) \Leftrightarrow (\forall y \in A : x \leq y).$$

该元素记作 $z =: \bigwedge A$。对偶地，我们将 A 的并 定义为满足下述条件的唯一元素 $z \in L$ （若存在）：

$$\forall x \in L: \quad (x \geq z) \Leftrightarrow (\forall y \in A : x \geq y).$$

如果 $0_L := \bigvee \emptyset$（分别为 $1_L := \bigwedge \emptyset$）在 L 中存在，我们称 L 下有界（分别为）上有界。当这两个元素都存在时，我们显然称 L 有界。

对于 $a, b \in L$，我们记 $[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$ 和 $a^{\uparrow} = \{x \in L : x \geq a\}$.
如果 L_1, L_2 是格，则映射 $\varphi : L_1 \to L_2$ 称为（有界格的）同态，如果它以显然的方式保持 L_1, L_2 的交、并运算（以及 $0_L, 1_L$）。若此同态是双射，则称其为同构。显然，格同构的逆映射也是同构。

如果 L 是格，则子集 $C \subseteq L$ 称为链，当且仅当对于任意 $x, y \in C$， $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 成立。对于链 C，量 $\operatorname{len}(C) = |C| - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq -1} \cup \{+\infty\}$ 称为其长度。此外，对于格 L，其长度定义为

$$\operatorname{len}(L) := \sup\{|C| - 1 : C \subseteq L \text{ is a chain}\}.$$

如果 L 是一个格，则称 L 满足 升链条件，即每个无限升链 $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ 在所有 $x_i \in L$ 的情况下都会在某一点变为稳定；另一方面，L 满足 降链条件，即每个无限降链 $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$都会在某一点变为稳定。

I本文主要关注模格和分配格 :

定义 2.1。 1) 格 L 被称为 模的，如果对于所有 a、b、$c \in L$，满足 $a \leq c$，方程$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ 成立。
2) 格 L称为 分配的，如果对于所有 a、b、$c \in L$，等式 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 成立。

众所周知，模格构成一个方程类，而分配格是其中的真子类。

刻画模格的一个重要性质如下：

引理 2.2 (**菱形同构引理**)。 格 L 是模格，当且仅当对于所有a， $b \in L$，映射

$$\begin{aligned} \varphi_b : [a, a \vee b] &\to [a \wedge b, b] \\ x &\mapsto x \wedge b \end{aligned}$$

是同构 格的同构。如果情况确实如此，则逆映射由 $\psi_a(y) = a \vee$给出 y.

证明。 参见 [Grä11，定理 348]。 □

给定两个元素 x、y，它们位于格 L中，我们记作 $x \prec y$，如果 $x < y$ 且不存在元素 $z \in L$使得 $x < z < y$。如果格 L 是上有界的，且最大元为 1_L，我们记作

$$X(L) := \{x \in L : x \prec 1_L\}$$

˜并将该集合中的元素称为 L的对偶原子。为方便起见，我们记作 $X(L)$ $=X(L) \cup \{1_L\}$。

若不存在满足 a、$b \neq x$ 的表示 $x = a \wedge b$，则称元素 $x \in L$ 为 交不可约。对偶地，若不存在满足 a、$b \neq x$ 的表示 $x = a \vee b$，则称 x 为 并不可约。显然，每个对偶原子都是交不可约的。

（对偶）几何格将发挥核心作用。为简便起见，我们将定义限定为有界模格，这是本文唯一使用的几何格。

定义 2.3 ([Grä11]). 有限长度的模格 L 若为原子生成的，则称为几何的，这意味着每个元素 $a \in L$ 都具有形式 $a = \bigvee A$，其中某个可能为空的有限子集 $A \subseteq L$ 满足 $x \succ 0$ 对所有 $x \in L$均成立。

为完整起见，我们将此定义与其对偶概念进行对比，后者明确涉及相关的对偶原子集合 $X(L)$。

定义 2.4. 有限长度的模格 L 称为对偶几何的，如果它是对偶原子化的，也就是说，每个元素 $a \in L$ 都可表示为 $a = \bigwedge A$，其中 $a = \bigwedge A$ 对应某个有限子集 $A \subseteq X$（L），该子集可以为空。

请注意，对于有限长度的模格，几何性与对偶几何性的概念实际上是等价的；例如，可以从直接不可约几何格的刻画中看出这一点 [Grä11，第 V 章第 5] 节。

注 2.5. 读者或许已经注意到，我们着重讨论对偶概念（关于原子、框架、基、几何性等）。这是因为本文建立在 [Rum15] 和 [Die21], 的结果之上，其中大量使用了 L-代数；由于这些对象源自代数逻辑，其逻辑单位——在右 ℓ-群的锥的情形下，该单位与恒等元重合——应当是最大元。
读者也可以自行体会到，将范围限制在有界模格上更为合理，因为本文中出现的所有几何格都表现为模右 ℓ-群中的强序区间，而这类格必然是有界模格。

定义 2.6. 若有界格 L 满足：对每个 $x \in L$，都存在一个元素 x'——即其补元——使得 $x \vee x' = 1_L$ 且 $x \wedge x' = 0_L$，则称 L 可补。
对偶几何格的一个重要性质如下：
命题 2.7. 每个对偶几何格都是可补的。
证明。 由于可补这一性质显然是自对偶的，这正是 [Grä11，定理392]。□

定义 2.8. 设 L 是一个有界分配格。若 L 的每个元素都有唯一的补元，则称 L 为布尔格。

定义2.9。 设 L 为有界格。则称子集 $X \subseteq L$为（对偶）独立，如果对于任意子集 A、$B \subseteq X$，我们有（$\bigvee A$）$\wedge$（$\bigvee B$）$= \bigvee$（$A \cap B$）（分别地，（$\bigwedge A$）$\vee$（$\bigwedge B$）$=\bigwedge$（$A \cup B$））。

子集 $X \subseteq L$ 被称为 （对偶）张成 如果 $\bigvee X = 1_L$（分别为 $\bigwedge X = 0_L$）。
若子集 $X \subseteq L$ 是（对偶）独立且（对偶）张成的，则称其为一个（对偶）框架；若 X 中的每个元素都是交不可约（分别为并不可约）的，则称其为一个（对偶）基。
对于有界格 L，如果区间 $[0_L, x]$（分别为 $[x, 1_L]$）是链，则称元素 $x \in L$ a 为链（分别为对偶链）。

我们稍后将需要下面这个简单的引理。
引理 2.10。 设 L 是一个有界模格。当且仅当 L 具有对偶框架 x'_1，…，x'_δ时，L 具有框架 x_1，…，x_δ。特别地，可以选择框架使得$[0_L, x_i] \cong [x'_i, 1_L]$。

证明。 假设 L 具有框架 $X = \{x_1, \dots, x_\delta\}$。我们构造以下元素

$$x_i' = \bigvee (X \setminus \{x_i\})$$

利用菱形引理引理 2.2，我们可以看到

$$[x_i', 1_L] = [x_i', x_i' \wedge x_i] \cong [x_i' \vee x_i, x_i] = [0_L, x_i].$$

令 $X' = \{x_1', \dots, x_\delta'\}$。对于 $A \subseteq X$，记 $A' = \{x_i' : \ x_i \in A\}$。采用此记号，我们可以看到

$$\begin{aligned} \bigwedge A' &= \bigwedge_{x_i \in A} \left(\bigcap (X \setminus \{x_i\}) \right) \\ &= \bigvee \left(\bigwedge_{x_i \in A} (X \setminus \{x_i\}) \right) \\ &= \bigvee (X \setminus A). \end{aligned}$$

因此，对于任意的 A'、$B' \subseteq X'$，我们可以计算：

$$\begin{aligned} \left(\bigwedge A \right) \vee \left(\bigwedge B \right) &= \left(\bigvee (X \setminus A) \right) \vee \left(\bigvee (X \setminus B) \right) \\ &= \bigvee (X \setminus (A \cap B)) \\ &= \bigwedge (A \cap B)' \\ &= \bigwedge (A' \cap B'). \end{aligned}$$

因此， X' 中的元素是对偶独立的。它们也是对偶张成的，因为$\bigwedge X' = \bigvee (X \setminus X) = \bigvee \emptyset = 0_L$。

反向结论由对偶性得出。 □

若 L 是模几何格，则 L 的并不可约元素（分别为交不可约元素）与 L 中的原子（分别为对偶原子）相同。我们将 L 的维数 定义为 L 的基的大小；注意这是一个不变量，因为 L 的维数必然等于 len(L)。由引理 2

.10, 我们很容易得出：

命题 2.11. 设 L 是模几何格。那么 L 的维数等于 L 任意对偶基的大小。

我们假设读者熟悉格的直积这一概念，但仍在此回顾一下，因为后文有必要区分格的外部 直积与内部直积。

我们回顾外部直积的定义：
设 $(L_i)_{i \in I}$ 是一族格；则外部直积 定义为笛卡尔积 $\prod_{i \in I} L_i$ ，它在逐坐标序下构成一个格；等价地说，它在逐坐标格运算下构成一个格。

因此，格 L的一个外部分解，简单来说，就是由一个同构 $\varphi : L \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} L_i$ 给出，其中 $(L_i)_{i \in I}$ 是一个非平凡格族。
稍后我们还需要有界格的有限型内部积这一概念，作者尚未在标准文献中找到其明确表述。

若 L 是一个格， $S \subseteq L$ 是其一个子集，则称 S 向上闭，如果 $x \in S$ 且 $y \geq x$ 蕴含$y \in S$。

定义 2.12。设 L 是一个上有界格。设 $L_1, \dots, L_k \subseteq L$ 是向上闭的子格。如果每个元素 $x \in L$ 都能唯一地表示为 $x = \bigwedge_{i=1}^{k} x_i$ ，其中 $x_i \in L_i$，则称 L 是格 L_i $(1 \leq i \leq k)$ 的内部直积。

注意，当 L_i 是格的内部直积的因子时，元素集 $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ （其中 $x_i \in L_i$ ）必然是对偶独立的。

在上有界格的情况下，内部直积等价于外积，这一点稍后将很重要：

命题 2.13。 设 $L, L_1, \ldots, L_k$ 是上有界格。那么存在同构 $\varphi\colon L \to \prod_{i=1}^k L_i$ 当且仅当 L 是子格 $L_i' \subseteq L$ 的内部直积，且$L_i' \cong L_i$。

证明。 注意，在同构 $\varphi\colon L \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k L_i$ 下，因子 L_i 可以与子格

$$L_i' := \varphi^{-1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\{1_{L_j}\} \times L_i \times \prod_{j=i+1}^{k}\{1_{L_j}\}\right),$$

因此，与外积的同构总是意味着内部直积分解。

另一方面，设 $L = \prod_{i=1}^k L_i$ 是一个内部直积乘积分解；那么映射$\psi\colon \prod_{i=1}^k L_i \to L$；$(x_i)_{1\leq i\leq k} \mapsto \bigwedge x_i$显然是保序的且是一个双射，后一个事实源于内部直积的定义。

我们断言， $\varphi\colon L \to \prod_{i=1}^k L_i$ 其中 $\varphi(x) = (x_i)_{1\leq i\leq k}$，其中 $x_i = \min(x^\uparrow \cap L_i)$ 是良定义的，并且是 ψ 的逆映射：
设 $x \in L$，并将其写成 $x = x_1' \wedge \ldots x_k'$，其中 $x_i' \in L_i$。对于任意指标 i，取一个元素$y \in L_i$，满足 $x \leq y$，则

$$x = x_1' \wedge \ldots \wedge (x_i' \wedge y) \wedge \ldots x_k'.$$

由唯一性可知，这说明 $x_i' \wedge y = x_i'$，也就是说， $x_i' \leq y$。因此， φ 确实是 ψ的逆映射。由于 φ 和 ψ 是双射，并且很容易看出它们保持序关系，因此它们是格同构。□

如果 L 是上集 $z_1^\uparrow$、.....、 $z_k^\uparrow \subseteq L$的内部直积，则上述证明表明，相应的同构可以写为：

$$\begin{aligned}\varphi : L &\to \prod_{i=1}^k z_i^\uparrow;\\ x &\mapsto (x \vee z_i)_{1\leq i\leq k}.\end{aligned}$$

如果根据上下文可以清楚看出格的直分解是内部分解还是外部分解，或者这一点无关紧要（根据命题 2.13），我们通常不会特别强调所考虑的积的类型。

设格 K 上有界，并假设给定一个内部分解 $K = \prod_{i=1}^k K_i$，其中每个部分 K_i 都是直接不可分解的，即不能分解为两个非平凡子格的直积。稍后我们会遇到这样的情形： K 是一个较大格中的下集，也就是说， $K \subseteq L$ 满足对于某个 $x \in L$，有 $K = x^\downarrow$。
假设给定一个内部分解 $L = \prod_{i=1}^k L_i$，并且对于某个元素 $1_K \in L$，有一个子格 $K = 1_K^\downarrow$，则我们可以写成 $1_K = \bigwedge_{i=1}^k \varepsilon^{L,\ i\ K}$，其中元素 $\varepsilon^{L,\ i\ K} \in K_i$由此唯一确定。

因此，我们得到一个外部（！）分解 $K \cong \prod_{i=1}^k (\varepsilon^{L,\ i\ K})^\downarrow$，然而它并非内部分解，因为该分解中的因子可能位于 $L \setminus K$ 中。由于 K 是一个有界格，当然存在一种规范的方式，将一个内部分解与由 L 所强制产生的外部分解联系起来。然而，我们将遇到以下问题：

问题。 给定一条格的链 $L^{(1)} \subseteq L^{(2)} \subseteq \ldots$，其并集 $L^{(\infty)}$ 可能无界。假设每个格 $L^{(n)}$ 都有一个针对固定 k的内部分解 $L^{(n)} = \prod_{i=1}^k L_i^{(n)}$，并由此导出 $L^{(m)}$ $(m < n)$ 的相应因子分解。求一个外部（！）因子分解 $L^{(\infty)} =$

$\prod_{i=1}^k L_i^{(\infty)}$，其中每个因子 $L_i^{(\infty)} \subseteq L^{(\infty)}$ 都是凸子格，并且 $L_i^{(\infty)} \cap L^{(1)} = L_i^{(1)}$ 对所有因子都成立。

我们将使用以下构造，通过移位过程以兼容的方式将 $L^{(1)}$ 的因子分解扩展到 $L^{(n)}$。

为此，设 $K \subseteq L$ 是两个格，且 K 是 L 的下集。假设给定一个内部分解 $L = \prod_{i=1}^k L_i$。将 $1_K = \bigwedge_{i=1}^k \varepsilon^{L,}{}_{,i}{}^{K}$ 写成这样，显然有一个外部分解 $K \cong \prod_{i=1}^k (\varepsilon^{L,}{}_{,i}{}^{K})^{\downarrow} =: \prod_{i=1}^k K_i$。

现在定义元素 $\overline{\varepsilon}^{L,}{}_{i}{}^{K} = \bigwedge_{j\neq i} \varepsilon^{L,j}{}^{K}$。

现在作如下定义：给定一个因子 $K_i \subseteq K$，我们将其到 L 的扩展定义为子格

$$K_i^L = \{\overline{\varepsilon}_i^{L,K} \wedge y : y \in L_i\} \subseteq L.$$

将 L 外部表示为 $\prod_{i=1}^k L_i$ 后，可以清楚地看出，K_i^L 表示为由 k 元组 $(x_j)_{1\leq j\leq k}$ 构成，其中 $x_j = \varepsilon^{L,}{}_{j}{}^{K}$ 对于 $j \neq i$ 成立，因此 K_i^L 是 L 的一个子格，且与 L_i 同构。很快就会清楚，$K_i \subseteq K_i^L$

设 $L = \prod_{i=1}^k L_i$ 为一个内部分解，设 $\varphi\colon L \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k L_i$ 为相应的外部直积同构，其坐标为 $\varphi_i(x) = x_i^L$，其中 $x = \bigwedge_{i=1}^k x_i^L$ 是元素 $x_i^L \in L_i$ 的交的（唯一）表示。我们将 x_i^L 固定为关于 $(L_i)_{1\leq i\leq k}$ 的 x 的交表示的 L_i-分量的记号。

由于 φ 是同构，并且由 $x \mapsto x \wedge \overline{\varepsilon}^{L,}{}_{,i}{}^{K}$ 给出的映射 $L_i \xrightarrow{\sim} K_i^L$ 也都是同构，这一点在 L 的外部分解中最容易看出，因此我们现在可以定义该同构：

$$\begin{aligned} \psi^{L,K} : L &\xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k K_i^L \\ x &\mapsto \left(x_i^L \wedge \overline{\varepsilon}_i^{L,K}\right)_{1\leq i\leq k}. \end{aligned}$$

然而，目前尚不清楚这些同构之间是否相互兼容。事实证明它们确实相互兼容，正如下述引理所示：

引理 2.14. 设 $K \subseteq L \subseteq M$ 为格，其中每个包含关系都将一个格嵌入下一个格的下集。则对所有 $x \in L$，都有如下等式：

$$\psi^{L,K}(x) = \psi^{M,K}(x).$$

特别地，$K_i \subseteq K_i^L$。

证明。我们有坐标 $\psi^{L,}{}_{,i}{}^{K}(x) = x_i^L \wedge \overline{\varepsilon}^{L,}{}_{,i}{}^{K}$ 以及 $\psi^{M,}{}_{,i}{}^{K}(x) = x_i^M \wedge \overline{\varepsilon}^{M,}{}_{,i}{}^{K}$。在 M 的乘积表示中，我们看到 $x_i^M \leq \varepsilon^{M,}{}_{,i}{}^{L}$ 和 $\varepsilon^{M,}{}_{,i}{}^{K} \leq \varepsilon^{M,}{}_{,i}{}^{L}$。此外，我们还看到 $x_i^L = x_i^M \wedge 1_L$，类似地 $\varepsilon^{L,}{}_{,i}{}^{K} = \varepsilon^{M,}{}_{,i}{}^{K} \wedge 1_L$。利用这一点，我们计算得：

$$\begin{aligned} \psi_i^{L,K}(x) &= x_i^L \wedge \overline{\varepsilon}_i^{L,K} \\ &= x_i^M \wedge 1_L \wedge \overline{\varepsilon}_i^{M,K} \\ &= x_i^M \wedge \varepsilon_i^{M,L} \wedge \overline{\varepsilon}_i^{M,L} \wedge \overline{\varepsilon}_i^{M,K} \\ &= x_i^M \wedge \overline{\varepsilon}_i^{M,K} = \psi_i^{M,K}(x). \end{aligned}$$

将 L 替换为 K 并将 M 替换为 L 后，$K_i \subseteq K_i^L$ 这一事实便可得出。 □

引理 2.15。令 $K \subseteq L$ 是格 K 作为格 L 的下集的一个包含关系，并且具有一个由因子分解 $L = \prod_{i=1}^k L_i$ 诱导的因子分解 $K = \prod_{i=1}^k K_i$。则对所有 $1 \leq i \leq k$，$K_i^L \cap K = K_i$ 成立。

证明。 K_i^L中的元素在 $\prod_{i=1}^k K_i^L$中表示为$(x_j)_{1\leq j\leq k}$，其中 $x_j = 1_K$ 对于$j \neq i$。因此， $x \in K_i^L \cap K$中的任意元素都表示为一个元组 $\psi^{L,\ \kappa}(x) =(x_j)_{1\leq j\leq k}$，其中 $x_j = 1_K$ 对于 $j \neq i$ 且 $x_i \in K_i$，这意味着 $\psi(x) = x_i \in K$。
□

命题 2.16。 假设给定一个格 $L^{(\infty)} = \bigcup_{n\geq 1} L^{(n)}$，其中 $\left(L^{(n)}\right)_{n\geq 1}$是 $L^{(\infty)}$ 中的主理想递增链——也就是说，对于某个 $x_n \in L^{(\infty)}$，有 $L^{(n)} = x_n^{\downarrow}$。此外，假设每个理想在内部都可分解为

$$L^{(n)} = \prod_{i=1}^{k} L_i^{(n)}$$

并且 $L^{(m)}$ $(m < n)$的因子分解是由 $L^{(n)}$诱导得到的。则存在一个外部因子分解 $L^{(\infty)} = \prod_{i=1}^k L_i$，其中 $L_i \subseteq L^{(\infty)}$ 是子格，且$L_i \cap L^{(1)} = L_i^{(1)}$。

证明。 对于 $j \geq i$，将 L_i^n简记为$= \left(L_i^{(1)}\right)^{L_n}$。我们定义子格 $L_i = \bigcup_{n\geq 1} L_i^n \subseteq L$。

根据引理 2.14，我们有一个良定义的同态 $\psi\colon L^{(\infty)} \to \prod_{i=1}^k L_i$，由 $\psi(x) =_{\psi^{L^{(n)},\ L^{(1)}}}(x)$ if $x \in L^{(n)}$ 给出。由于其在 $L^{(n)}$ 上的限制是同构 $\psi^{L^{(n)},\ L^{(1)}}\colon L^{(n)} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k L_i^n$，映射 ψ 是一个同构。

$L_i \cap L^{(1)} = L_i^{(1)}$ 由引理 2.15 得出。 □

2.2. **右 ℓ群**。 一个右序群 是一个对 $(G, \leq)$，其中 G 是一个群， $\leq$ 是 G 上的偏序关系，并且具有右不变性，即对于任意 x、 y、 $z \in G$，我们有如下蕴含关系

$$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

事实上，这也是一个等价条件。如果右序群 G 中的偏序 $\leq$ 来自 G 上的格结构，我们就称 G 为右格序群，简称右 ℓ群。容易看出，在右 ℓ-群中，格运算也具有右不变性，即

$$(x \wedge y)z = xz \wedge yz \quad ; \quad (x \vee y)z = xz \vee yz$$

对任意 x、 y、 $z \in G$。
与往常一样，在讨论右序群或右 ℓ-群时，我们大多只指集合 G；相应的关系或运算则隐含其中。

右序群中的两个重要子集是负锥 $G^- := \{g \in G\colon g \leq e\}$以及正锥 $G^+ := \{g \in G\colon g \geq e\}$。注意， G^+ 和 G^- 都在乘法下封闭，并且包含单位元 $e \in G$。因此，它们可以被视为 G的子幺半群。负锥的一个重要性质是其纯性，这意味着：

$$\forall x \in G : \big((x \in G^-)\ \&\ (x^{-1} \in G^-)\big) \Rightarrow (x = e). \tag{1}$$

另一方面，群的每个纯子幺半群都会在该群上给出唯一的右不变序，因为根据右不变性，偏序 $\leq$ 由 G^- 通过 $g \leq h \Leftrightarrow gh^{-1} \leq e \Leftrightarrow gh^{-1} \in G^-$ [KM96，定理 1.5.1.].[1] 确定。

由给定的序 $\leq$ 我们还可以在 G上构造<styleid='2'>对偶序，其定义为 $g \lesssim h :\Leftrightarrow h^{-1} \leq g^{-1}$。容易看出，这是 G 上唯一的<styleid='8'>左-不变序，并且其负元素（即 $\leq e$）与 $\leq$的相同。如果 $(G, \leq)$是一个右 ℓ-群，那么 $(G, .)$ 也具有格序结构，并带有格运算

$$g \curlyvee h = (g^{-1} \wedge h^{-1})^{-1} \quad ; \quad g \curlywedge h = (g^{-1} \vee h^{-1})^{-1}.$$

[1]请注意，我们在此强调负锥，而非正锥的作用。原因在于，我们将经常利用 G^-的 L-代数结构。由于 L-代数是逻辑代数，它上有界于一个在代数上表示重言真的元素。

序关系和运算都是左不变的，这相当于说，$(G^{\mathrm{op}}, .)$ -G^{op} 作为群 G，采用相反的乘法 $g \cdot_{\mathrm{op}} h := hg$ -，又是一个右 ℓ-群。就其本身而言，右 ℓ-群已经具有一些重要的 Garside性质，即元素可以表示为 G^- 中元素的右分式或左分式：

命题2.17。 右 ℓ-群 G 是 G^-的左分式群，也就是说，每个 $g \in G$都可以写成 $g = g_1^{-1}g_2$，其中 g_1, $g_2 \in G^-$。类似地， G 是 G^-的右分式群。

证明。 令 $g \in G$。我们可以将 g 表示为左分式 $g_1^{-1}g_2$，其中 $g_2 := g \wedge e \leq e$ 和$g_1 := (gg_2^{-1})^{-1} \leq e$。一个可能的右分式 $g = g_1'^{-1}g_2'$ 由 $g_2' := (g \vee e)^{-1} \leq e$ 和$g_1' := gg_2^{-1} \leq e$给出。 □

下面这个经常有用的结果基本上说明， G 中的关系由 G^-中的关系所决定：

命题2.18。 如果 G 是一个右 ℓ-群，且 H 是任意群，那么任何幺半群同态 $f' \colon G^- \to H$ 都可以唯一地扩张为一个群同态 $f \colon G \to H$，使得 $f|_{G^-} = f'$，其定义为 $f(g_2^{-1}g_1) := f'(g_2)^{-1}f'(g_1)$对所有 $g_1, g_2 \in G^-$成立。

证明。我们只给出证明的概要：容易看出， G^- 和 H 是左*Ore*幺半群，这意味着它们是左消去的，并且任意一对元素都有一个公共左倍数。对于两个幺半群而言，第一个性质源于它们是某个群的子幺半群；对于 G^-，第二个性质源于 G^-中交的存在，而对于群 H，该性质显然成立。现在，该陈述可由 [Deh15，第二章，引理 3.13]立即推出。□

一个稍后将会很重要的运算是 $\to$-运算，它使 G^- 成为一个剩余幺半群，这是一种特殊的 L-代数，由 Rump [Rum08] 引入的一种代数结构。该运算定义如下：

$$\begin{aligned} \to \colon G^- \times G^- &\to G^- \\ g \to h &:= hg^{-1} \wedge e = (h \wedge g)g^{-1}. \end{aligned}$$

由于 $\to$-运算也常用于涉及群乘法的计算中，我们采用以下约定：

约定： 在没有括号的情况下，乘法运算优先于箭头运算！我们将经常使用以下关于 $\to$运算的恒等式。

引理 2.19。 对于所有 x、 y、 $z \in G^-$ 我们有：

$$\begin{aligned}
&\text{(S1a)} && x \to x = x \to e = e \\
&\text{(S1b)} && e \to x = x \\
&\text{(S2)} && (x \to y)x = x \wedge y \\
&\text{(S3)} && (x \wedge y) \to z = (x \to y) \to (x \to z) \\
&\text{(S4)} && x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z) \\
&\text{(S5)} && xy \to z = x \to (y \to z) \\
&\text{(S6)} && x \to yz = ((z \to x) \to y)(x \to z) \\
&\text{(S7)} && x \to y = e \Leftrightarrow x \leq y.
\end{aligned}$$

证明。 本质上，这些陈述要么显而易见，要么早已为人所知。关于这些陈述的完整证明，例如参见 [Die21，命题 2.1.11。□

3. 因子分解理论

以下材料的大部分，包括大多数证明，也可以在作者的论文（[该21]）中找到；然而，这些结果在其他任何地方都未曾发表。

此外，我们所研究的若干基本概念——例如右 ℓ-群中的强序单位概念——归功于 Rump（[Rum15]）。

设 G 是一个右 ℓ-群。此外，设 $s \in G$。如果通过s 进行左乘是一个格同构，即如果对于所有 x、$y \in G$ 我们有

$$s(x \wedge y) = sx \wedge sy \quad , \quad s(x \vee y) = sx \vee sy.$$

此外，如果 $s > e$ 是正规元，且每个 $g \in G$ 都被 s 的某个幂所支配，即对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，有 $g \leq s^k$，则称元素 s 为强序单位。由正规性可轻易推出，每个 $g \in G$ 也支配 g的某个幂，即对于某个 $l \in \mathbb{Z}$，有 $g \geq s^l$。

我们先记下以下有用的观察，以备后用：

引理 3.1. 设 $s \in G^+$ 为正规，则映射 $[s^{-1}, e] \to [s^{-1}, e]; \quad x \mapsto s^{-1}xs$ 是格同构。

注意，尽管在仅具有右不变序的群中，我们不允许将任意不等式相乘，但涉及正规元素时可以这样做：

引理 3.2. 若 s_1, s_2 是 G 中的正规元素，且 $g_1, g_2 \in G$，则 $g_i \geq s_i$ 对于 $i \in \{1,2\}$ 成立意味着 $g_1 g_2 \geq s_1 s_2$。

证明。 在给定条件下， $s_1 s_2 \leq s_1 g_2 \leq g_1 g_2$。 □

即使不存在有限性条件或链条件，强序单位仍具有 Garside 元的足够多性质，因此我们可以使用某些 Garside 理论概念。

其中之一 最重要的是 G 中右正规分解的存在性 $^-$:

定义 3.3. 设 s 是 G 中的强序单位，并设 $g_1, \dots, g_k$ 是 $[s^{-1}, e]$ 中某个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对应的有限元素序列。对于一个元素 $g \in G^-$，若序列 $g_1, \dots, g_k$ 满足以下条件，则称其为 g 的右正规分解：

1) $g = g_k \dots g_2 g_1$，即该序列确实是 g 的因子分解；2) 对所有 $1 \leq i \leq k$， $g_i \neq e$；3) 对所有 $1 \leq i < k$，都不存在 h、$h' \in G^-$ 满足 $h \neq e$、 $h'h = g_{i+1}$ 且 $hg_i \in [s^{-1}, e]$（右极大性）。

注意，因子分解的右极大性意味着，不能通过从其左邻因子中分离出非平凡右因子来“扩大”任何因子。这意味着 $s^{-1}g_i^{-1}$ 和 g_{i+1} 在 G^- 中没有公共右因子，因此右极大条件也可以写成：

$$s^{-1}g_i^{-1} \vee g_{i+1} = e \text{ for } 1 \leq i < k \tag{RM}$$

在具有强序单位的右 $^{\ell-}$格中，右正规分解存在且唯一 e:

定理 3.4。 每个元素 $g \in G^-$ 都有唯一的右正规分解，形式为 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$，其中 $k =$最小值$\{i \geq 0 : \ g \geq s^{-i}\}$ 并且

$$g_i = (g \vee s^{-i})(g \vee s^{-(i-1)})^{-1}. \tag{2}$$

证明。由于 s 为强序单位，整数 k 存在。由于 $g \vee s^{-k} = g$，很容易看出，按照我们对因子 g_i的选择，我们有

$$g_j g_{j-1} \dots g_1 = g \vee s^{-j}.$$

尤其是， $g_k g_{k-1} \dots g_1 = g \vee s^{-k} = g$。

现在我们证明， $g_i \in [s^{-1}, e]$ $(1 \leq i \leq k)$，这意味着

$$s^{-1} \leq (g \vee s^{-i})(g \vee s^{-(i-1)})^{-1} \leq e$$

根据右不变性，这等价于

$$s^{-1}(g \vee s^{-(i-1)}) \leq g \vee s^{-i} \leq g \vee s^{-(i-1)}.$$

利用正规性可知，左侧项为 $s^{-1}g \vee s^{-i}$；现在，第一个不等式直接由以下观察得到： $s^{-1}g \leq g$；而第二个不等式则由 $s^{-i} \leq s^{-(i-1)}$ 得出。

现在我们证明该表达式确实是右极大的。否则，假设我们可以找到一个指标 $1 \leq i < k$ 和一个分解 $g_{i+1} = h'h$，其中 h'、$h \in [s^{-1}, e]$ 和 $h \neq e$，使得 $hg_i \in [s^{-1}, e]$。因此，根据以下定义，我们可以得到另一个因子分解 $g = h_k h_{k-1} \dots h_1$

$$h_j = \begin{cases} g_j & i \notin \{i; i+1\} \\ hg_i & j = i \\ h' & j = i+1. \end{cases}$$

由于所有 $h_j \geq s^{-1}$ (1 ≤ j ≤ k)，反复应用引理3.2 将意味着 $H := h_i h_{i-1} \dots h_1 \geq s^{-i}$。但还有 $H \geq g$，这意味着 $g \vee s^{-i} \leq H < g_i g_{i-1} \dots g_1 = g \vee s^{-i}$，矛盾！

注意，右极大性包含这样一个条件：若对于某个指标 $1 \leq i \leq k$ 有 $g_j = e$，则对于所有指标 $j > i$ 都有 $g_i = e$。若此情况发生，则 $g = g_{i-1} g_{i-2} \dots g_1$，这也由引理 3.2 推出 $g \geq s^{-(i-1)}$。由于这将与我们对 k 的选择相矛盾，因此我们推得所有 $g_i \neq e$ （$1 \leq i \leq k$）。
现在还需证明右正规分解确实唯一。因此，设 g 有两个右正规分解
$g = g_k g_{k-1} \dots g_1 = h_l h_{l-1} \dots h_1$。只需证明 $g_1 = h_1$，其余部分将由归纳法得出。

因此，假设 $g_1 \neq h_1$。我们不妨假设 $g_1 \not\leq h_1$。那么 $g_1 \to h_1 \neq e$。此外，由于 $g_1 \to h_1 \geq g_1 \to s^{-1} = s^{-1} g_1^{-1}$且 $g_2 \vee s^{-1} g_1^{-1} = e$ （等式 (RM)），可得 $g_2 \not\leq g_1 \to h_1$。对这一论证作归纳延续，并应用等式 (S5)，可得：

$$(g_k g_{k-1} \dots g_1) \to h_1 = g_k \to (g_{k-1} \to (\dots \to (g_1 \to h_1))) \neq e,$$

这与 $g \leq h_1$ 矛盾。 □

对于元素 $g \in G^-$，我们将量 $k = \min\{i \geq 0 : g \geq s^{-i}\}$ 称为 g 的长度，并记作 $\lambda(g)$。

推论 3.5。若 $x \in X(G^-)$，则 $\lambda(x) = 1$。

证明。令 $x = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 为右正规分解。由于 $\deg(x) = 1$，唯一可能的情况是 $\lambda(x) = k = 1$。
□

下面我们将看到，s 在群 $(G^{\mathrm{op}}, .)$ 中也是一个强序单位，因此也可以将元素 G^- 的左正规分解定义为在 $(G^{\mathrm{op}}, .)$ 中对应的右正规分解。我们给出一个精确定义：

定义 3.6。对于元素 $g \in G^-$，左正规分解 是满足以下条件的元素序列 h_1、h_2、.....、$h_k \in [s^{-1}, e]$：
1) $g = h_1 \dots h_{k-1} h_k$，2) 对所有 $1 \leq i \leq k$ 均有 $h_i \neq e$，且 3) 对所有 $1 \leq i < k$，不存在 $h, h' \in G^-$ 使得 $h \neq e$, $hh' = h_{i+1}$ 且 $h_i h \in [s^{-1}, e]$（左极大性）。不

注意，左极大性也可以用格理论来表达，其精神与等式 (RM)一致。因此，表达式 $h_1 \dots h_{k-1} h_k$ 是左极大的，当且仅当对于所有 $1 \leq i < k$,

$$h_{i+1} \curlyvee h_i^{-1} s^{-1} = e. \tag{LM}$$

这也等价于 $h_{i+1}^{-1} \wedge s h_i = e$，而在左乘 s^{-1} 后，可以改写为

$$h_i \wedge s^{-1} h_{i+1}^{-1} = s^{-1}. \tag{LM'}$$

为了确保这个定义确实有意义，必须证明 s 相对于反序是一个强序单位，并且相应的强序区间也彼此相同。

引理 3.7. 设 $t \in G$ 是一个正规元素，则 $t \leq g \Leftrightarrow t \lesssim g$。

证明。由于 t 是正规元素，$t \leq g \Leftrightarrow g^{-1} \leq t^{-1} \Leftrightarrow t \lesssim g$。 □

命题 3.8。若 s 是强序单位，则对于所有 $k \geq 0$，关于 $\leq$ 和 $\lesssim$ 的强序区间相同，即

$$[s^{-k}, e]_{\leq} = [s^{-k}, e]_{\lesssim}.$$

证明。由上面的引理可知 $s^{-k} \leq g \Leftrightarrow s^{-k} \lesssim g$ 成立，因为 s^{-k} 是正规元素。根据右不变性，我们还可得到 $g \leq e \Leftrightarrow e \leq g^{-1} \Leftrightarrow g \lesssim e$。 □

由定理 3.4，我们现在可以轻松推导出：

定理 3.9。设 $g \in G^-$，则 g 有唯一的左极大因子分解 $g = h_1 \dots h_{k-1} h_k$，满足 $k = \lambda(g)$，其因子由下式给出

$$h_i = (g \curlyvee s^{-(i-1)})^{-1}(g \curlyvee s^{-i}). \tag{3}$$

证明。根据命题3.8，因子 h_i 确实位于区间 $[s^{-1}, e]$中。由于左正规分解正是对偶群中的右正规分解，等式 (3) 直接由将等式(2)应用于右 ℓ-群 $(G^{\mathrm{op}},.)$得出。由于命题 3.8 还意味着 $g \geq s^{-k} \Leftrightarrow g \gtrsim s^{-k}$，这些分解的长度必定相同。 □

引入链条件后，还存在一种由对偶原子构成的因子分解。称右 ℓ-群 G 诺特，如果：

1) 对于每个 $g \in G$，子格 $g^{\uparrow}$ 满足降链条件，2) 对于每个 $g \in G$，子格 $g^{\downarrow}$ 满足升链条件。

我们指出，这两个条件并不 等价；一般而言，只有在左不变性和 右不变性下，才能由其中一个条件推出另一个条件。

回顾一下，$X(G^-) := \{x \in G : x \prec e\}$。下一个命题的证明相当标准：

命题 3.10. 若 G 是诺特右 ℓ-群且 $g \in G^-$，则存在有限序列 $x_1, \dots, x_k$，属于 $X(G^-)$，其中某个 $k \geq 0$ 使得 $g = x_k x_{k-1} \dots x_1$。

证明。简单。 □

注意，含 $k = 0$ 的乘积是空乘积，因此等于 e。

这种类型的因子分解记作 原子因子分解，并称该整数 k 其长度。与左正规或右正规分解一样，我们将简单地把表达式称为 of 如果因子是对偶原子，则称类型 $(g =) x_k x_{k-1} \dots x_1$ 为（g的）原子因子分解。在一个模诺特右 ℓ-群中，我们有以下定理：

命题 3.11. 若 G 是模诺特右 ℓ-群且 $g \in G^-$。对于两个原子因子分解 $g = x_k x_{k-1} \dots x_1 = y_l y_{l-1} \dots y_1$，等式 $k = l$ 成立。

证明。对于 $0 \leq i \leq k$，令 $a_i = x_i x_{i-1} \dots x_1$ 并且，同样地，令 $b'_j := y_j y_{j-1} \dots y_1$ 对于 $0 \leq j \leq l$。那么 $g = a_k \prec a_{k-1} \prec \dots \prec a_1 \prec a_0 = e$ 和 $g = b_l \prec b_{l-1} \prec \dots \prec b_1 \prec b_0 = e$都是模格 $[g, e]$中的极大链。因此，根据模格的约当-霍尔德定理（[Grä11，定理 374]），它们的长度相同。 □

命题 3.12。函数 $\deg' : G^- \to (\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$，定义为 $\deg'(g) = k$ 只要存在一个原子因子分解 $g = x_k x_{k-1} \dots x_1$，就是幺半群的同态。

证明。根据命题 3.10 和命题 3.11，映射 $\deg'$ 定义良好。显然，$\deg'(e) = 0$。设 $g, h \in G^-$。如果 $\deg'(g) = k$ 且 $\deg'(h) = l$，那么存在原子因子分解$g = x_k x_{k-1} \dots x_1$和 $h = y_l y_{l_1} \dots y_1$，因此 $gh = x_k x_{k-1} \dots x_1 y_l y_{l_1} \dots y_1$是一个具有 $k + l$ 个因子的原子因子分解。因此，$\deg'(gh) = k + l = \deg'(g) + \deg'(h)$。这证明了 $\deg'$ 是一个幺半群同态。 □

命题 3.13。 存在唯一的群同态deg: $G \to \mathbb{Z}$，它以如下意义延拓$\deg'$：对于所有 $g \in G^-$，有 $\deg(g) = \deg'(g)$。该群同态定义为$\deg(g_2^{-1}g_1)$: $= \deg'(g_1) - \deg'(g_2)$，对于所有 g_1, $g_2 \in G^-$。

证明。扩大陪域，我们可以将$\deg'$ 视为一个幺半群同态 G^- 到 $\mathbb{Z}$。根据命题2.18，存在唯一延拓为一个群同态 $\deg: G \to \mathbb{Z}$，其具有所述形式。□

注 3.14。注意，存在一个度同态 $\deg: G \to \mathbb{Z}$，使得对所有 $x \in X(G^-)$都有$\deg(x) = 1$，并不意味着 G 的模性。辫群 B_n 也具有这样的度同态，尽管它们远非模的，这仅仅是因为它们具有长度平衡表示。

模性很容易推出度同态的以下有用的平行四边形恒等式：

引理 3.15。 对所有 g, $h \in G$，都有等式

$$\deg(g) + \deg(h) = \deg(g \vee h) + \deg(g \wedge h).$$

证明。 根据菱形引理（引理 2.2），我们有一个同构 $[g \wedge h, h] \cong [g, g \vee h]$，因此 $\mathrm{len}([g \wedge h, h]) = \mathrm{len}([g, g \vee h])$。因此，

$$\mathrm{len}([g \wedge h, h]) = \mathrm{len}([(g \wedge h)h^{-1}, e]) = \deg((g \wedge h)h^{-1}) = \deg(g \wedge h) - \deg(h).$$

同样地，$\mathrm{len}([g, g \vee h]) = \deg(g) - \deg(g \vee h)$。因此 $\deg(g) - \deg(g \vee h) = \deg(g \wedge h) - \deg(h)$，这就证明了该等式。□

从现在起，我们将始终默认 G 是一个具有强序单位 s^{-1} 的模诺特右 ℓ-群，其相应的次数函数记为 $\deg$。

我们现在 定义一个非常重要的序列，即元素 $g \in G^-$ 的 指标序列：

定义 3.16。 对于元素 $g \in G^-$，我们将其指标序列 定义为

$$\begin{aligned} \iota_*(g) : \mathbb{Z}_{>0} &\to \mathbb{Z}_{\geq 0}; \\ i &\mapsto \deg(g \vee s^{-i}) - \deg(g \vee s^{-(i-1)}). \end{aligned}$$

Remark3.17。回顾一下，根据定理 3.4， g 的右正规因子由 b 给出 y

$$g_i = (g \vee s^{-i})(g \vee s^{-(i-1)})^{-1} \quad (1 \leq i \leq \lambda(g)).$$

与 $i \leq \lambda(g)$ 的 $g \vee s^{-i} = g$ 一样，我们得到ikwalaho

$$\iota_i(g) = \begin{cases} \deg(g_i) & i \leq \lambda(g) \\ 0 & i > \lambda(g). \end{cases}$$

序列 $\iota_i(g)$ 的一个极其有用的性质如下：

定理 3.18。 对于任意 $g \in G^-$，序列 $\iota_i(g)$ 是非递增的。

证明。 </style}令 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 为 g的右正规分解。根据前面的备注，只需证明对于 $1 \leq i < k$, $\deg(g_{i+1}) \leq \deg(g_i)$。由等式 (RM)可得

$$g_{i+1} \vee s^{-1} g_i^{-1} = e$$

现在我们来计算

$$\begin{aligned} \deg(s^{-1}) &\geq \deg(g_{i+1} \wedge s^{-1} g_i^{-1}) \\ &= \deg(g_{i+1}) + \deg(s^{-1} g_i^{-1}) - \deg(g_{i+1} \vee s^{-1} g_i^{-1}) \qquad \text{(Lemma 3.15)} \\ &= \deg(g_{i+1}) + \deg(s^{-1}) - \deg(g_i), \end{aligned}$$

由此可得 $\deg(g_i) \geq \deg(g_{i+1})$。 □

现在我们需要定义 G^- 中的一类特殊元素，它对于 G^-中的格论考察特别有用：

定义 3.19。 设 $g \in G^-$ 具有右正规分解 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$。那么，如果对所有 $1 \leq i \leq k$，$\deg(g_i) = d$，则称 g 为 d-齐次，其中 $d \geq 1$ 是一个整数。

现在我们证明模右 ℓ-群中成立的一个显著对称性质。右正规分解和左正规分解不仅因子数相同，其因子的大小也完全相同！

命题 3.20. 令 $g \in G^-$ 为右正规分解，$g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 和 $g = h_1 \dots h_{k-1} h_k$ 为左正规分解。那么 $\deg(h_i) = \deg(g_i)$ $(1 \leq i \leq k)$。

证明。 根据定理 3.4 和定理 3.9 给出的表达式，只需证明对于所有 i，$\deg(g \vee s^{-i}) = \deg(g \curlyvee s^{-i})$。我们计算

$$\begin{aligned}
\deg(g \curlyvee s^{-i}) &= \deg((g^{-1} \wedge s^i)^{-1}) \\
&= -\deg(g^{-1} \wedge s^i) \\
&= \deg(g^{-1} \vee s^i) - \deg(g^{-1}) - \deg(s^i) && \text{(Lemma 3.15)} \\
&= \deg(s^i) + \deg(s^{-i} \vee g) + \deg(g^{-1}) - \deg(g^{-1}) - \deg(s^i) \\
&= \deg(s^{-i} \vee g).
\end{aligned}$$

□

尽管我们只需要 $d = 1$ 这一情形，仍将以下命题以最一般的形式陈述并证明：

命题 3.21. 设 $g \in G^-$ 是 d-齐次的，其右正规分解为 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$。那么，这个因子分解也是左正规分解。

证明。根据等式 (RM)，我们有 $g_{i+1} \vee s^{-1} g_i^{-1} = e$ $(1 \leq i < k)$。现在可以计算 te

$$\begin{aligned}
\deg(g_{i+1} \wedge s^{-1} g_i^{-1}) &= \deg(g_{i+1}) + \deg(s^{-1} g_i^{-1}) - \deg(g_{i+1} \vee s^{-1} g_i^{-1}) && \text{(Lemma 3.15)} \\
&= \deg(g_{i+1}) + \deg(s^{-1}) - \deg(g_i^{-1}) - 0 \\
&= \deg(s^{-1}).
\end{aligned}$$

由于 $g_{i+1} \wedge s^{-1} g_i^{-1} \geq s^{-1}$，这意味着 $g_{i+1} \wedge s^{-1} g_i^{-1} = s^{-1}$，也就是说，根据等式 (LM')，该因子分解是左极大的（请注意！这里的 g_i's 与等式中的因子编号不同！）。

□

以下分析基于 Rump 的一项结果。

定理 3.22。 设 G 是一个具有模诺特右 ℓ-群。若元素 t

$$s^{-1} := \bigwedge X(G^-)$$

若存在，则 s 是一个强序单位，且强序区间 $[s^{-1}, e]$ 是一个模几何格。

证明。 这些陈述是 [Rum15，命题 14+15.]。 □

之后我们需要用到以下事实：

命题3.23。 设 s 如定理 *3.22* 中所述，则

$$s = \bigvee \{g \in G : g \succ e\}$$

且区间 $[e, s]$ 是一个模几何格。

证明。一旦我们证明了第一个结论，第二个结论就显而易见了。根据右不变性，第一个结论等价于 $e = \bigvee\{g \in G\colon g \succ s^{-1}\}$。
设 δ 为 $[s^{-1}, e]$ 的维数，设 $Y = \{y_1, \dots, y_\delta\}$ 为 $[s^{-1}, e]$的基。由于 $[s^{-1}, e]$ 是几何的， Y由 $[s^{-1}, e]$ 中的原子组成。显然， $e = \bigvee Y \leq \bigvee\{g \in G\colon \ g \succ s^{-1}\}$。若假设 $>$ 成立，则这将意味着存在一个 $z \succ s^{-1}$，使得 $h\colon = z \vee \bigvee Y > e$，且 $Y \cup \{z\}$ 是 $[s^{-1}, h]$ 的基，由此格中的 $\delta + 1$ 个原子组成。这将根据引理 2.10 推出 $[s^{-1}h^{-1}, e] \cong [s^{-1}, h]$ 有一个由 $\delta+1$ 个 G^- 的对偶原子组成的基，因此

$$s^{-1} = \bigwedge X(G^-) \leq s^{-1}h^{-1} < s^{-1},$$

这就产生了矛盾！因此，我们有等式，即 $e = \bigvee\{g \in G\colon g \succ s^{-1}\}$。 □
现在，我们可以更好地理解交不可约元的结构。

命题 3.24. 假设 G 是一个模诺特右 ℓ-群，其中包含由 $s^{-1} := \bigwedge X(G^-)$定义的强序单位 s。当且仅当元素 $g \in G^-$ 相对于 s是1-齐次的， $g \in G^-$ 才是 G^-中的交不可约元。

证明。 假设 g是 G^- 中的交不可约元，并令 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 为右正规因子分解、$g = h_1 \dots h_{k-1} h_k$ 为左正规因子分解。根据定理 3.18，只需证明 $\deg(g_1) = 1$。反之，依据命题 3.20，我们有 $\deg(h_1) = \deg(g_1) > 1$。但由于 $[s^{-1}, e]$ 是对偶原子化的，我们可以用 $h_1 \neq h$、 h' 表示 $h_1 = h \wedge h'$。然而，这样便会得到表示 $g = hh_2 \dots h_{k-1}h_k \wedge h'h_2 \dots h_{k-1}h_k$，其中两项都不等于 g。
为了证明另一个方向，假设元素 $g \in G^-$ 在G^-中不是交不可约的。那么存在元素 y、 $y' \in G^-$，使得 $g \prec y$、 y'，满足 $g = y \wedge y'$。进一步令γ 为: $= y \vee y'$。于是 $\mathrm{len}([g, y \vee y']) = 2$，这意味着元素 $\tilde{h}\colon = g\gamma^{-1}$ 满足 $\deg(\tilde{h}) = 2$。但于是 $\tilde{h} \gtrsim g$。此外，由于 $\tilde{h} = y\gamma^{-1} \wedge y'\gamma^{-1}$ 是对偶原子的交，我们得到 $\tilde{h} \in [s^{-1}, e]$。 ˜因此，如果 $g = h_1 \dots h_{k-1}h_k$ 是左正规分解，则有 $h \gtrsim h_1$。特别地，˜$\deg(h_1) \geq \deg(h) > 1$。根据命题 3.20，我们看到 $\iota_1(g) = \deg(h_1) > 1$，即 g 不是 1-齐次的。
□

若 L 是一个上有界的格，回忆一下：只要$[x, 1_L]$ 是链，元素 $x \in L$ 就是对偶链。

推论 3.25。 元素 $g \in G^-$ 在 G^- 中是交不可约的，当且仅当 g 是对偶链。

证明。 显然，对偶链是交不可约的。另一方面，设 $g \in G^-$ 是交不可约的，并设 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 是右正规分解，其中所有 $\deg(g_i) = 1$，由命题 3.24 得出。取 $h \in G^-$ 使得 $h \geq g$ ，并令 $l := \lambda(h) \leq k$。我们声称$h = g_l g_{l-1} \dots g_1$。显然，$\deg(h) \geq l$。另一方面，$h = h \vee s^{-l} \geq g \vee s^{-l} = g_l g_{l-1} \dots g_1$。由于 $\deg(g_l g_{l-1} \dots g_1) = l$，这证实了所声称的因子分解。因此， $[g, e] = \{g_l g_{l-1} \dots g_1\colon 0 \leq l \leq k\}$ 是链；因此， g是对偶链。□

4. 强序区间的中心

我们希望为具有强序单位的模诺特右 ℓ-群构造一个格分解。我们将从一个适当选取的强序区间的格分解开始，并将其扩展到整个 G。为此，我们需要经典定理：模几何格可以唯一地写成直接不可约模几何格的乘积。

格 L 称为直接不可约，如果在内部直积 $L = L_1 \times L_2$ 中， $|L_1| = 1$ 或 $|L_2| = 1$。

定理 4.1。 设 L 是一个模几何格。那么存在一个内部分解$L = \prod_{i=1}^{k} L_i$，其中每个 L_i 都是直接不可约的模几何格。此外，该分解在因子置换的意义下唯一。

证明。 关于分解的存在性，参见 [Grä11，定理 393]；关于唯一性，参见 [Grä11，推论277]。□

注 4.2。 谨慎的读者可能已经注意到， [Grä11, 推论277] 中的同构是外部 乘积分解。这意味着不可分解因子的同构类已被确定，但它们在内部分解中的位置并非先验确定。然而， [Grä11,定理 276]以及前面的讨论清楚表明，两组不可分解的内部分解因子将拥有一个公共细化——而这只有在这些分解至多相差一个置换时才有可能。

我们有时会提及这一推论，并且始终指的是它对内部分解的推论！

由将模几何格分解为直接不可约格，以及对不可约模几何格的分类（[Grä11，第V 章，第 5.] 节）可知，由于这些格的对偶仍然是模几何格，对于有界模格而言，几何的 与对偶几何的这两个概念实际上是等价的。由于本文所讨论的所有几何格都是有界且模的，为简便起见，我们将使用这些格的对偶几何性，但仍称其为几何性。

从现在起，我们始终假设 G 是一个模诺特右 ℓ-群，其中存在强序单位 s，且满足 $s^{-1} := \bigwedge X(G^-)$，因此定理 3.22 适用。
由于本节将大量讨论 $[s^{-1}, e]$ 的乘积分解，因此考察强序区间中的中心 元素是有意义的：

定义 4.3 ([Mae58, I, 定义 3.2.])。 设 L 是一个有界格。元素 $z \in L$ 称为中心的，当且仅当存在一个同构 $L \xrightarrow{\sim} L_1 \times L_2$，其中 L_1 和 L_2 是有界格，且 z 被映射到元素 $(0_{L_1}, 1_{L_2})$。

我们将 L 中所有中心元素构成的集合称为 L 的中心，并记作 Cent (L).
以下定理对于我们进一步研究 Cent(L) 至关重要：

Th定理 4.4。 若 L 是一个有界格，则$\mathrm{Cent}(L)$ 是 L 的一个布尔子格 .

证明。 [Mae58，I，命题 3.4。]。 □

以下陈述很容易看出：

命题 4.5。 **</style}设 是一个模几何格。那么，当且仅当 Cent(**L) $= \{1_L, 0_L\}$ 时， L 是直接不可约的。

证明。 这直接由定义得出。 □

命题 4.6。 设 L 是一个具有内部分解 $L \cong L_1 \times \ldots \times L_k$ 的模几何格，其中所有因子 L_i 均为非平凡且直接不可约的。那么 $|X(\mathrm{Cent}(L))| = k$。

证明。 为简便起见，我们将 L 与外积 $L_1 \times \ldots \times L_k$ 等同。显然，元素 $z_i = (\epsilon^i_j)_{j=1}^k$ 在 $L_1 \times \ldots \times L_k$ 中是中心的，其中

$$\epsilon^i_j = \begin{cases} 0_{L_i} & j = i \\ 1_{L_j} & j \neq j. \end{cases}$$

显然， $[z_i, 1_L] \cong L_i$。 若存在元素 $\tilde{z} \in L$，使得对某个i有 $z_i < \tilde{z} < 1_L$，那么 $\tilde{z}$ 将是 $[z_i, 1_L]$中的非平凡中心元，这与命题 4.5 矛盾。此外， X(Cent(L))中没有其他元素，因为 $\bigwedge_{i=1}^k z_i = 0_L$。 □

定义子格 $\mathcal{C}(G^-) \subseteq G^-$ 为 $\mathcal{C}(G^-) :=$ Cent($[s^{-1}, e]$)。显然， e 和 s^{-1} 是 $\mathcal{C}(G^-)$的元素；具体而言，它们分别是其中的顶元和底元。
本节旨在证明， $\mathcal{C}(G^-)$ 在第 2.2 节定义的 $\to$-运算下是闭合的。

为实现这一点，令 $\{z_1, \dots, z_k\} = X(\mathcal{C}(G^-))$ 表示 $\mathcal{C}(G^-)$ 中的对偶原子；注意，这些不一定是 $[s^{-1}, e]$ 分别在 G^- 中的对偶原子。现在我们有一个规范的格同构

$$\varphi : \prod_{i=1}^{k} [z_i, e] \xrightarrow{\sim} [s^{-1}, e] \quad ; \quad (a_i)_{i=1}^{k} \longmapsto \bigwedge_{i=1}^{k} a_i$$

其逆映射为

$$\varphi^{-1}(a) = (a \vee z_i)_{i=1}^{k}.$$

区间 $[z_i, e]$ 是不可约模几何格，其所有区间也都是如此。借助 φ，对于所有 $a \in [s^{-1}, e]$，我们都有（规范的）同构

$$[a, e] \cong \prod_{i=1}^{k} [a_i, e] \tag{4}$$

$$[s^{-1}, a] \cong \prod_{i=1}^{k} [z_i, a_i] \tag{5}$$

其中 $(a_i)_{i=1}^{k} = \varphi^{-1}(a)$。
我们在此指出，因此每个上集和下集都分解为不可约模几何格的乘积，这取决于 $\varphi^{-1}(a)$ 的多少个分量分别等于 e 和 z_i。这促使我们引入以下量：

$$\begin{aligned} U(a) &:= \#\{i \in [1, k] : a \vee z_i = e\} \\ L(a) &:= \#\{i \in [1, k] : a \vee z_i = z_i\}. \\ M(a) &:= k - (U(a) + L(a)). \end{aligned}$$

这里，$k := |X(\mathcal{C}(G^-))|$。显然，这三个量均为非负数，且总和为 k。由等式 (4) 可知，$[a, e]$ 的不可约因子数为 $L(a) + M(a)$；而等式 (5) 则意味着，$[s^{-1}, a]$ 的不可约因子数为 $U(a) + M(a)$。在本节余下部分中，令 k 表示 $\mathcal{C}(G^-)$ 中对偶原子的数量。

引理 4.7。元素 $a \in [s^{-1}, e]$ 属于 $\mathcal{C}(G^-)$ 当且仅当 $M(a) = 0$。

证明。将 $[s^{-1}, e]$ 分解为不可约分量后，这可由命题 4.5 得出。□

现在我们可以证明以下引理：

引理 4.8。对于任意 $a \in [s^{-1}, e]$，等式成立

$$U(s^{-1}a^{-1}) = L(a). \tag{6}$$

证明。设 $\varphi^{-1}(a) = (a_i)_{i=1}^{k}$。在分解 $[s^{-1}, a] \cong \prod_{i=1}^{k} [z_i, a_i]$中，恰有 $L(a)$个因子是平凡的。右乘 a^{-1} 给出一个同构 $[s^{-1}, a] \xrightarrow{\sim} [s^{-1}a^{-1}, e]$。因此，令 $\varphi^{-1}(s^{-1}a^{-1}) = (b_i)_{i=1}^{k}$，分解 $[s^{-1}a^{-1}, e] \cong \prod_{i=1}^{k} [b_i, e]$中平凡因子的数量必定相同，即 $U(s^{-1}a^{-1})$。□

引理 4.9. 令 $a, b \in \mathcal{C}(G^-)$ 满足 $b \leq a$，则 $ba^{-1} \in \mathcal{C}(G^-)$ 也满足此条件。在这种情况下，$L(ba^{-1}) = L(b) - L(a)$。

证明。令 $a \in \mathcal{C}(G^-)$。我们首先证明 $b = s^{-1}$ 的特殊情形。根据引理 4.7，$M(a) = 0$这意味着 $L(a) + U(a) = k$。

将式 (6) 使用两次，我们得到：

$$\begin{aligned} L(a) &= U(s^{-1}a^{-1}) \\ &= k - L(s^{-1}a^{-1}) - M(s^{-1}a^{-1}) \\ &= k - U(s^{-1}as) - M(s^{-1}a^{-1}) \\ &= k - U(a) - M(s^{-1}a^{-1}) \\ &= L(a) - M(s^{-1}a^{-1}), \end{aligned}$$

其中，等式 $U(s^{-1}as) = U(a)$源于以下事实： $a \mapsto s^{-1}as$ 限制为 $[s^{-1}, e]$ 的格自同构（引理 3.1）。因此，我们证明了 $M(s^{-1}a^{-1}) = 0$。所以，根据引理 4.7，我们证明了 $s^{-1}a^{-1} \in \mathcal{C}(G^-)$。

现在我们证明一般的 a、b 且满足 $b \leq a$时的结论。通过限制，显然 b 是格 $[s^{-1}, a]$的一个中心的元素。由于右乘 a^{-1} 诱导出一个同构$[s^{-1}, a] \cong [s^{-1}a^{-1}, e]$，我们看到， ba^{-1}—— b 的像——是格$[s^{-1}a^{-1}, e]$中的一个中心的元素。由于 $s^{-1}a^{-1}$ 在 $[s^{-1}, e]$ 中是中心的，且 ba^{-1} 在 $[s^{-1}a^{-1}, e]$中是中心的，我们也推断出 ba^{-1} 在 $[s^{-1}, e]$ 中是中心的。
引理的最后一部分很容易由以下事实推出：区间 $[ba^{-1}, e] \cong [b, a]$ 分解为 $L(b) - L(a)$ 个直接不可分解因子的直积。□

定理 4.10. *$\mathcal{C}(G^-)$ 在第 2.2 节定义的 $\to$-运算下封闭。*

证明。 令 $a, b \in \mathcal{C}(G^-)$。由于 $a \to b = (a \wedge b)a^{-1}$ 且 $a \wedge b \leq a$，由引理 4.9 可得$a \to b \in \mathcal{C}(G^-)$。
□

由于 $\mathcal{C}(G^-)$ 是一个布尔代数（定理 4.4），我们可以定义算子

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}(G^-) &\to \mathcal{C}(G^-) \\ a &\mapsto (s^{-1}a^{-1})', \end{aligned}$$

其中 x' 表示布尔代数 $\mathcal{C}(G^-)$ 中 x 的补元。
注意，对于所有 $a \in \mathcal{C}(G^-)$，都有 $U(D(a)) = U((s^{-1}a^{-1})') = k - U(s^{-1}a^{-1}) = k - (k - U(a)) = U(a)$。还要注意，由于 $a \mapsto s^{-1}a^{-1}$ 和 $a \mapsto a'$ 是从 $\mathcal{C}(G^-)$ 到其自身的双射，因此映射D也是双射。

映射 D 的一个有用性质是，它能够生成右极大表达式：

命题 4.11。 *如果令 $x \in \mathcal{C}(G^-)$，那么 $y := D(x)$ 是唯一的元素 $y \in [s^{-1}, e]$ 使得 $\deg(y) = \deg(x)$，且表达式 yx 是右极大。此外， $z \vee D(x) = e$意味着 $zx \geq s^{-1}$。*

证明。 为了使表达式 yx 成为右极大，必须满足 $y \vee s^{-1}x^{-1} = e$。由于 $\deg(s^{-1}x^{-1}) = \deg(s^{-1}) - \deg(x)$，条件 $\deg(y) = \deg(x)$ 要求 $y \wedge s^{-1}x^{-1} = s^{-1}$，即 y 是 $[s^{-1}, e]$ 中 $s^{-1}x^{-1}$ 的补元。由于 $s^{-1}x^{-1}$ 是中心的（引理 4.9），补元只有一个，即 $(s^{-1}x^{-1})'$。

如果 $z \vee D(x) = e$，那么 $z \geq s^{-1}x^{-1}$，这意味着 $zx \geq s^{-1}$ □

值得注意的是， D 保留了 $\mathcal{C}(G^-)$ 中元素的重要性质 :

命题4.12。令 $z \in \mathcal{C}(G^-)$，则

$$\begin{aligned} \deg(D(z)) &= \deg(z); \\ U(D(z)) &= U(z). \end{aligned}$$

证明。 第一个等式已在前面的证明中得到证明。
对于第二个等式，我们不妨证明 $L(D(z)) = L(z)$，因为 $M(z) = M(D(z)) = 0$（引理 4.7）。利用引理 4.8，我们计算得

$$L(z) = U(s^{-1}z^{-1}) = L((s^{-1}z^{-1})') = L(D(z)).$$

□

我们还将用到以下性质：

引理 4.13。 令 $z \in \mathcal{C}(G^-)$，则对于 $g \in X(G^-)$，我们有以下等价关系：

$$g \geq D(z) \Leftrightarrow \exists h \in [s^{-1}, e] : z \to h = g.$$

证明。 $[s^{-1}, e] \to [s^{-1}, e]$； $h \mapsto (z \to h)$的像是 $[s^{-1}z^{-1}, e]$。由于 $s^{-1}z^{-1}$和 $D(z)$互为补元且均为中心的， $X(G^-)$中的元素要么属于 $[s^{-1}z^{-1}, e]$，因此是 $h \mapsto (z \to h)$下的一个像；要么属于 $[D(z)\ e]$，且在那里位于 $D(z)$之上。□

我们重述一些关于 L-代数 的基本事实。关于 Rump 的 L-代数理论，更多内容请参见奠基性论文 [Rum08],

定义 4.14.一个 L-代数 是三元组 $(X, \to, e)$，其中 e 是 e 的指定元素，且$\to$： $X \times X \to X$ 是二元运算，使得以下恒等式对任意x、 y、 $z \in X$成立：

$$\begin{aligned} x \to x = x \to e = e, \\ e \to x = x, \\ (x \to y) \to (x \to z) = (y \to x) \to (y \to z) \\ x \to y = y \to x = e \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

可以证明，每个 L-代数都带有一个由 $x \leq y$ 定义的规范的典范偏序 $\leq$： $\Leftrightarrow x \to y = e$ ([Rum08, 命题 2.])。从定义可知，在此偏序下，$x \leq e$ 对所有 $x \in X$ 均成立。

下述事实由引理 2.19 中的恒等式推出：

命题 4.15。 如果 G 是具有负锥 G^-的右 ℓ-群，那么 G^- 在箭头运算 $x \to y = yx^{-1} \wedge e$下成为一个 L-代数。

如果在 X 上不存在非平凡的序关系，即如果 $\leq$ 在 $X \setminus \{e\}$ 上的限制是平凡序，那么 X 被称为离散 L-代数。

定义 4.16 ([Rum15]). 令 X 为一个离散的 L-代数。则双射 $D : X \setminus \{e\} \to X \setminus \{e\}$ 称为一种对偶性，如果对于所有 x、 $y \in X \setminus \{e\}$ 满足 $x \neq y$，我们有

$$D(x \to y) = (y \to x) \to D(y).$$

注 4.17. 根据 Rump [Rum20], 的结果，我们现在知道，对偶性的概念不仅适用于离散 L-代数，也适用于更广泛的一类 L-代数。

然而，具有对偶性的离散 L-代数与非退化循环集之间存在 $1-1$-对应关系。非退化循环集是一种代数结构，用于参数化杨-巴克斯特方程的非退化集合论解 [Rum15, 定理 2.]。

定理 4.18. $X(\mathcal{C}(G^-))$ 是一个具有对偶性的 L-代数。

证明. 我们首先证明 $X(\mathcal{C}(G^-))$ 确实是一个 L-代数。根据命题 4.15 和定理 4.10，只需证明：对于满足 $a \neq b$ 的 $a, b \in X(\mathcal{C}(G^-))$，也有 $a \to b \in X(\mathcal{C}(G^-))$。在这种情况下， $L(a) = L(b) = 1$ 且 $L(a \wedge b) = 2$。由引理 4.9 的最后一部分可得

$$L(a \to b) = L((a \wedge b)a^{-1}) = L(a \wedge b) - L(a) = 2 - 1 = 1,$$

[{"id":0,"output":"这意味着 $a \to b \in X(\mathcal{C}(G^-))$。"}]

现在我们证明， $X(\mathcal{C}(G^-)) \to X(\mathcal{C}(G^-))$； $a \mapsto D(a) := (s^{-1}a^{-1})'$ 限制为$X(\mathcal{C}(G^-))$的对偶性。注意，由于命题 4.12中的第二个等式，该映射是良定义的。现在取 $x, y \in X(\mathcal{C}(G^-))$，其中有 $x \neq y$。利用引理 4.13，我们看到， $D(x \wedge y)$ 是 $X(\mathcal{C}(G^-))$ 中所有不在 $z \mapsto (x \wedge y) \to z$ 的像中的元素的交。根据 $(x \wedge y) \to z = (x \to y) \to (x \to z)$（等式 (S3)），我们看到

$$D(x \wedge y) = D(x \to y) \wedge ((x \to y) \to D(x)).$$

另一方面，将 $(x \wedge y) \to z = (y \to x) \to (y \to z)$ 表示为，表明了

$$D(x \wedge y) = D(y \to x) \wedge ((y \to x) \to D(y)) .$$

由于 $L(D(x \wedge y)) = L(x \wedge y) = 2$，显然，

$$D(x \to y) \neq (x \to y) \to D(x) \text{ and } D(y \to x) \neq (y \to x) \to D(y).$$

因此，$D(x \to y) \in \{D(y \to x); (y \to x) \to D(y)\}$。由 $x \wedge y = (x \to y)x = (y \to x)y$ 可知，只有当 $x = y$ 时，$x \to y = y \to x$ 才可能出现；这最终说明 $D(x \to y) = (y \to x) \to D(y)$。□

考虑到注 4.17，该定理因此可解读为：每个带有强序单位的模诺特右 ℓ-群都包含一个杨-巴克斯特方程的对合集合论解。下一节中我们将沿着这一思路，证明 G 包含一个分配诺特右 ℓ-群，而这等价于某个杨-巴克斯特方程集合论解的结构群（参见 [Rum15，第 $2 + 3$] 节）。

5. 分配骨架与束分解

本节旨在证明以下两个结果

1) 在 G 中，由 $X(\mathcal{C}(G^-))$ 生成的子群 H 是一个分配子格。2) 格 分解 $H \cong \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}$ 是由适当子格 $G_i \subseteq G$ 所诱导的格 分解 $G \cong \prod_{i=1}^{k} G_i$。

G给定一个带对偶性的离散 L-代数 X，我们可以定义结构幺半群

$$M(X) := \langle X \setminus \{e\} | (x \to y)x = (y \to x)y \rangle_{\text{mon}}$$

以及结构群

$$G(X) := \langle X \setminus \{e\} | (x \to y)x = (y \to x)y \rangle_{\text{gr}} .$$

存在一个自然的幺半群同态 $\iota : M(X) \to G(X)$，其定义为：当 $x \in X \setminus \{e\}$ 时，将 x 映射为 x。

可以很容易证明（ [Rum15，命题 5.]）：如果 G 是模诺特右 ℓ-群，

~那么集合 $X(G^-)$ 在 $\to$运算下封闭：设 x、$y \in X(G^-)$ 满足 x、$y \neq e$和 $x \neq y$（其他情况都显然），则 $x \vee y = e$，因此 $[x \to y, e] \cong [x \wedge y, x] \cong [y, x \vee y]$ 是长度为 1 的链。因此，$x \to y \in X(G^-)$ 也成立。

我们有以下由 Chouraqui 和 Rump 证明的结果。

定理 5.1。如果 X 是一个有限离散的、具有对偶性的 L-代数，则同态 $\iota : M(X) \to G(X)$ 将 $M(X)$ 嵌入为 $G(X)$ 上一个分配的诺特右不变格序的负锥，该格序具有强序单位。

~对于每个具有强序单位的分配诺特右 ℓ-群，$X(G^-) = X(G^-) \cup \{e\}$~都是具有对偶性的有限离散 L-代数，且典范同态 $G(X(G^-)) \to G$~和 $M(X(G^-)) \to G^-$ 都是同构。

证明。$G = G(X)$ 是一个具有 $X(G^-) = X$ 的右 ℓ-群，这一事实已在 [Cho10，定理 3.3] 中得到证明。关于 G 是一个分配的诺特右 ℓ-群的证明，可见 [Rum15，定理 2，命题 7]。关于每个分配的诺特右 ℓ-群 G 都同构于结构群 $G(X(G^-))$ 的结果，参见 [Rum15，定理 2]。□

~由于 $X := X(\mathcal{C}(G^-))$ 确实是一个带对偶性的 L-代数（定理 4.18），我们知道 $G(X)$ 是一个分配的诺特右 ℓ-群，其负锥为 $M(X)$。现在我们已经可以证明：

定理 5.2。设 G 是一个模诺特右 ℓ-群，其强序单位为 $s = (\bigwedge X(G^-))^{-1}$。则存在一个自然同态 $f : G(\tilde{X}(\mathcal{C}(G^-))) \to G$，将~$G(X(\mathcal{C}(G^-)))$ 嵌入为分配子格。

证明。同态的存在性显然，因为关系$(a \to b)a = (b \to a)b$对$a, b \in X := X(\mathcal{C}(G^-))$是从$G^-$继承而来的。因此，我们只需证明该映射也是一个格的单射同态。

我们首先将范围限制在$M(X)$。给定两个表达式$g_1 = x_k x_{k-1} \dots x_1$、$g_2 = y_l y_{l-1} \dots y_1$，且所有$x_i$、$y_j \in X$，我们可以利用等式 (S5) 和等式 (S6)，将$g_1 \to g_2$和$g_2 \to g_1$表示为由X中元素构成的乘积。如果$g_1 = g_2$在G中成立，那么$g_1 \to g_2 = e = g_2 \to g_1$，且该表达式只包含$e$。于是$g_1 \to g_2 = g_2 \to g_1 = e$在$M(X)$中也成立，由此可知$g_1 = g_2$在$M(X)$中成立。根据规则$a \wedge b = (a \to b)a$，该规则在$M(X)$和$G^-$中均成立，因此我们得出映射$M(X) \to G^-$是$\wedge$-半格的单射同态。由于$G(X)$是$M(X)$的左分式群，很容易看出规范的群同态$G(X) \to G$的核是平凡的。

因此，我们知道$\mathrm{im}(f)$是属于G的$\wedge$-子半格，它在从G继承的偏序下是一个分配格。接下来只需证明$\mathrm{im}(f)$也是一个$\vee$-子半格。这可以最简单地如下完成：带有$g \leq_{\mathrm{op}} h \Leftrightarrow h \leq g$的右$\ell$-群$G^\sim = (G(X), \leq_{\mathrm{op}})$仍然是分配的且诺特的，因此$X(G^\sim) = X^{-1}$也具有带对偶性的离散$L$-代数$(X^{-1}, \rightsquigarrow)$结构。因此，我们必须证明，对于$x, y \in X(\mathcal{C}(G^-))$，满足$z^{-1} = (x^{-1} \vee y^{-1})x$的（唯一）元素$x \rightsquigarrow y := z \in G$仍在$X(\mathcal{C}(G^-))$中——这是因为这样一来，自然同态$f^\sim\colon G(X^{-1}, \rightsquigarrow)) \to (G, \leq_{\mathrm{op}})$将$x^{-1}$发送到其在$G$中的对应元素，并且是$(G(X), \leq_{\mathrm{op}})$作为$(G, \leq_{\mathrm{op}})$的$\wedge_{\mathrm{op}}$-子半格的嵌入，也就是说，是$(G, \leq)$的$\vee$-子半格。因此，设$x, y \in X(\mathcal{C}(G^-))$。我们可以假设$x, y \neq e$和$x \neq y$。利用引理 4.9 以及由$s$的共轭作用诱导出$[s^{-1}, e]$的格自同构这一事实（引理 3.1），我们得到$x^{-1}s^{-1}, y^{-1}s^{-1} \in \mathcal{C}(G^-)$，并且在$\mathcal{C}(G^-)$中有以下覆盖关系

$$x^{-1}s^{-1}, y^{-1}s^{-1} \succ_{\mathcal{C}(G^-)} s^{-1}.$$

由模性可知，这意味着$x^{-1}s^{-1} \vee y^{-1}s^{-1} \succ_{\mathcal{C}(G^-)} x^{-1}s^{-1}$；再次应用引理 4.9 可得$x^{-1}s^{-1}(x^{-1}s^{-1} \vee y^{-1}s^{-1})^{-1} \in X(\mathcal{C}(G^-))$。因此，

$$\begin{aligned} X(\mathcal{C}(G^-))^{-1} &\ni \left(x^{-1}s^{-1}(x^{-1}s^{-1} \vee y^{-1}s^{-1})^{-1}\right)^{-1} \\ &= (x^{-1}s^{-1} \vee y^{-1}s^{-1})sx \\ &= (x^{-1} \vee y^{-1})x \\ &= z^{-1} = (x \rightsquigarrow y)^{-1}. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定义 5.3。 分配骨架 是子群$\mathcal{D}(G) := \langle \mathcal{C}(G^-) \rangle_{\mathrm{gr}} \leq G$。

在分配右ℓ-群$G(X)$中，我们可以为每个$z \in X \setminus \{e\}$定义一个序列 冻结元素$z, D(z)z, D^2(z)D(z)z, \dots$（见 [CG14, 2.1]）

我们希望使用一种更为一般化的概念：

定义 5.4。对于元素$z \in \mathcal{C}(G^-)$和整数$n \geq 1$，我们将其n-次冻结幂 定义为

$$\Phi_n(z) := D^{n-1}(z)D^{n-2}(z) \dots D(z)z.$$

注意，对于所有$z \in \mathcal{C}(G^-)$，$\Phi_1(z) = z$。利用D保持中心元素的度（命题 4.12）这一事实，很容易看出$\deg(\Phi_n(z)) = n \cdot \deg(z)$。

我们很快将证明，冻结幂$\Phi_n(z) (z \in X(\mathcal{C}(G^-)))$共同构成$[s^{-n}, e]$中的一个对偶框架。在我们的证明策略中，我们将利用已知不可约元所在位置这一点：

引理 5.5。 设$n \geq 1$，且$g \in G^-$为交不可约元，满足$g \geq s^{-n}$。则存在唯一的元素$z \in X$（$\mathcal{C}$（G^-），使得$g \geq \Phi_n$（z）。

证明。设$g = g_k g_{k-1} \dots g_1$是右正规分解，它显然有$k \leq n$个因子（见定理 3.4）。根据命题 3.24，我们知道$\deg(g_i) = 1$ $(1 \leq i \leq k)$。因此，由于g_1是一个对偶原子，必定存在唯一的$z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，使得$g_1 \geq z$。固定这个$z$。

现在我们将用归纳法证明，对于所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $H_i := g_i g_{i-1} \dots g_1 \geq \Phi_i(z)$。因此，假设该结论已对某个 i 值成立。由模性，元素 $H_{i+1} \wedge \Phi_i(z) \prec \Phi_i(z)$。注意，$\lambda(H_{i+1}) = i+1$ 根据定理 3.4 可推出 $H_{i+1} \not\geq s^{-i}$。现在我们很容易看出

$$H_{i+1} \wedge \Phi_i(z) \geq s^{-1}\Phi_i(z) = \bigwedge_{\tilde{z} \in X(\mathcal{C}(G^-))} \tilde{z} \cdot \Phi_i(z),$$

并且，$H_{i+1} \wedge \Phi_i(z)$只能属于这些因子中的一个。另一方面，我们看到$\lambda(\tilde{z} \cdot \Phi_i(z)) = \lambda(\tilde{z}D^{i-1}(z) \dots D(z) z) = i+1$——但根据命题 4.11，这只有在 $\tilde{z} = D^i(z)$时才可能。因此，$H_{i+1} \geq \tilde{z}\Phi_i(z) \geq \Phi_{i+1}(z)$。

既然已经得到 $g \geq \Phi_k(z)$，那么现在也就清楚了：$g \geq \Phi_n(z)$。 □

现在我们可以证明如下结论：

命题 5.6。 设 $n \geq 1$，且 $\{z_1, \dots, z_k\} = X(\mathcal{C}(G^-))$，那么每个元素 $g \in [s^{-n}, e]$ 都可以表示为

$$g = \bigwedge_{i=1}^{k} (g \vee \Phi_n(z_i)).$$

特别地，$s^{-n} = \bigwedge_{i=1}^{k} \Phi_n(z_i)$。

证明。 由于 G 是诺特的，显然我们有一个有限表达式 $g = \bigwedge_{j=1}^{l} \iota_j$，其中每个 ι_j 都是交不可约的。根据引理 5.5，我们可以将此项改写为

$$g = \bigwedge_{i=1}^{k} \Big(\bigwedge \{\iota_j : \iota_j \geq \Phi_n(z_i)\} \Big) =: \bigwedge_{i=1}^{k} h_i.$$

由 $h_i \geq g \vee \Phi_n(z_i)$，我们现在推导出该命题的表述。 □

As $\deg(s^{-n}) = n \cdot \deg(s^{-1}) = \sum_{i=1}^{k} n \cdot \deg(z_i) = \sum_{i=1}^{k} \deg(\Phi_n(z_i))$, 我们可以推导 e:

命题 5.7。 元素 $\Phi_n(z_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ 构成 $[s^{-n}, e]$ 的对偶框架。更准确地说，$[s^{-n}, e]$ 是一个内部直积

$$[s^{-n}, e] = \prod_{i=1}^{k} \Phi_n(z_i)^{\uparrow}.$$

特别地，元素 $\Phi_n(z_i)$ 在 $[s^{-n}, e]$ 中是中心的。

证明。元素 $\Phi_n(z_i)$ $(1 \leq i \leq k)$显然是对偶张成的。如果它们不是对偶独立的，我们可以找到 A、$B \subseteq \{1, \dots, k\}$，使得 $A \cap B = \emptyset$，但是

$$\left(\bigwedge_{i \in A} \Phi_n(z_i) \right) \vee \left(\bigwedge_{i \in B} \Phi_n(z_i) \right) < e.$$

应用平行四边形恒等式（引理 3.15）将意味着

$$\deg \left(\bigwedge_{i \in A \cup B} \Phi_n(z_i) \right) < \sum_{i \in A \cup B} \deg(\Phi_n(z_i));$$

再次利用恒等元，这导致了

$$\begin{aligned}\deg(s^{-n}) &= \deg\left(\bigwedge_{i=1}^{k}\Phi_n(z_i)\right)\\ &\le \deg\left(\bigwedge_{i\in A\cup B}\Phi_n(z_i)\right)+\deg\left(\bigwedge_{i\in\{1,\dots,k\}\setminus(A\cup B)}\Phi_n(z_i)\right)\\ &< \sum_{i\in A\cup B}\deg(\Phi_n(z_i))+\sum_{i\in\{1,\dots,k\}\setminus(A\cup B)}\deg(\Phi_n(z_i))\\ &= \sum_{i=1}^{k}\deg(\Phi_n(z_i))=\deg(s^{-n}).\end{aligned}$$

这与以下事实相矛盾： $\Phi_n(z_i)$ $(1\le i\le k)$ 实际上对偶张成了区间 $[s^{-n},e]$。根据命题 5.6，每个 $g\in[s^{-n},e]$ 都具有如下分解

$$g=\bigwedge_{i=1}^{k}(g\vee\Phi_n(z_i))$$

令 $g_i := g\vee\Phi_n(z_i)$，由 $\Phi_n(z_i)$ 的对偶独立性可知，元素 $g_i\ge\Phi_n(z_i)$ 也对偶独立。因此，$\deg(g)=\sum_{i=1}^{k}\deg(g_i)$。在 g 的交表示中，元素 g_i $(1\le\le k)$ 构成了可能的最小选择，这意味着对于一个表示 $g=\bigwedge_{i=1}^{k}h_i$，其中所有 $h_i\ge\Phi_n(z_i)$，必然有 $h_i\ge g_i$。但此时 h_i $(1\le i\le k)$ 也必须对偶独立，这意味着 $\deg(g)=\sum_{i=1}^{k}\deg(h_i)$，而这只有在对所有 i 均有 $\deg(g_i)=\deg(h_i)$ resp. $g_i=h_i$ 时才可能成立。这表明交表示确实是唯一的，因此我们得到了一个内部内积。□

引理 5.8。设 $z\in\mathcal{C}(G^-)$ 和 $n\ge1$。若 $x\in X(G^-)$ 是一个对偶原子，且满足 $x\ge\Phi_n(z)$，那么 $x\ge z$ 即成立。

证明。注意， $\Phi_n(z)=D^{n-1}(z)D^{n-2}(z)\dots D(z)z$ 是根据命题 4.11得到的右正规表达式。这意味着 $\Phi_n(z)\vee s^{-1}=z$。对于 $x\in X(G^-)$，有 $x\ge s^{-1}$。因此，$x\ge\Phi_n(z)\vee s^{-1}=z$。□

命题 5.9。对于所有 $n\ge1$ 我们有 $X(\mathsf{Cent}([s^{-n},e]))=\{\Phi_n(z):\ z\in X(\mathcal{C}(G^-))\}$。

证明。令 $X(\mathcal{C}(G^-))=:\{z_1,\dots,z_k\}$，我们已经知道元素 $\Phi_n(z_i)$ $(1\le i\le k)$ 是中心的，并构成 $[s^{-n},e]$ 的对偶框架。我们必须证明这些因子中没有任何一个还能进一步分解。因此，设 $z=z_i$，其中 i 为某个指标。

假设存在某个非平凡子格的内部直积 $\Phi_n(z^{\uparrow})=L_1\times L_2$，$L_1,L_2\subseteq\Phi_n(z)^{\uparrow}$，那么我们就得到一个划分

$$X(G^-)\cap\Phi_n(z)^{\uparrow}=(X(G^-)\cap L_1)\uplus(X(G^-)\cap L_2)$$

其中右侧的两个划分部分都非空。但 $\bigwedge\left(X(G^-)\cap\Phi_n(z)^{\uparrow}\right)=s^{-1}\vee\Phi_n(z)^{\uparrow}=z$，因为每个对偶原子都位于 s^{-1}（推论 3.5）之上，而 $s^{-1}\vee\Phi_n(z)^{\uparrow}$ 必须是若干对偶原子的交。

因此，我们将得到一个非平凡的内部直积 $z^{\uparrow}=z_1^{\uparrow}\times z_2^{\uparrow}$，其因子为$z_i=\bigwedge(X(G^-)\cap L_i)$ $(i=1;2)$，这与如下事实矛盾：对于 $z\in X(\mathcal{C}(G^-))$，格$z^{\uparrow}$ 是直接不可约的。□

现在，我们通过将 半束 视为冻结元素的格对应物，进一步推进一步：

定义 5.10。设 $z\in\mathcal{C}(G^-)$，则与 z 相关联的半束 定义为

$$\beth^-(z):=\bigcup_{n\ge1}\Phi_n(z)^{\uparrow}.$$

现在我们正好可以证明以下定理：

定理 5.11。 存在一个格同构 $G^- \cong \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i)$，其中 $\{z_1, \dots, z_k\} := X(\mathcal{C}(G^-))$。此外，格 $\beth^-(z_i)$ 是直接不可分解的。

证明。 根据命题 2.13，我们需要证明每个元素 $g \in G^-$ 都能唯一地表示为 $\bigwedge_{i=1}^k g_i$，其中 $g_i \in \beth^-(z_i)$。

由于对所有充分大的整数 n， $g \in [s^{-n}, e]$ 成立，这立即由命题 5.6 得出。不可分解性结论的证明与命题 5.9 相同：考察 z_i 在 $\beth^-(z_i)$ 中乘积分解下的像。□

注意，按构造， $X(\mathcal{C}(G^-)) = \{z_1, \dots, z_k\} = X(\mathcal{D}(G)^-)$。因此，就分配骨架 $\mathcal{D}(G)$ 中的次数函数而言，我们有 $\deg^{\mathcal{D}(G)}(z_i) = 1$ $(1 \leq i \leq k)$。由于 $\mathcal{D}(G)$ 是 G 中一个右子-ℓ-群，且 $s \in \mathcal{D}(G)$，因子分解 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ (all $g_i \in \mathcal{C}(G^-)$) 在 $\mathcal{D}(G)$ 中为右正规的，当且仅当它在 G 中为右正规。

因此，因子分解 $\Phi_n(z_i) = D^{n-1}(z_i) \dots D(z_i) z_i$ 关于 $\mathcal{D}(G^-)$ 是 1-齐次的，由此可知（命题 3.24、推论 3.25），它们是 $\mathcal{D}(G^-)$ 中的对偶链，即位于 $\Phi_n(z_i)$ 之上的元素恰好是满足 ($k \leq n$) 的元素 $\Phi_k(z_i)$。这就证明了：

命题 5.12。对于所有 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，有：

$$\beth_G^-(z) \cap \mathcal{D}(G) = \{\Phi_n(z) : n \geq 0\} = \beth_{\mathcal{D}(G)}^-(z).$$

特别地， G^- 的半束分解诱导出 $\mathcal{D}(G)$的半束分解，其因子是冻结幂链。

现在我们希望证明， G^- 的半束分解具有足够的刚性，从而能够在右乘法下保持不变：

命题 5.13。 将 $g \in G^-$ 分解为 $g = \bigwedge_{i=1}^k h_i$，其中 $h_i \in \beth^-(z_i)$。则存在一个置换 π_g：$\{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$，使得对于所有 $1 \leq i \leq k$：

$$\beth^-(z_i) \cdot g = \left(\bigwedge_{j \neq i^{\pi_g}} h_j \right) \wedge (h_{i^{\pi_g}}^{\downarrow})_{\beth^-(z_{i^{\pi_g}})}$$

这里，下标 $\beth^-(z_i)$ 表示该区间是在因子 $\beth^-(z_i)$ 内形成的。

证明。 令 $g = \bigwedge_{i=1}^k h_i$ 具有 $h_i \in \beth^-(z_i)$。将 G^- 表示为半束的外积，我们得到以下格映射：

$$G^- \cong \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i) \underset{\sim}{\xrightarrow{x \mapsto xg}} \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i) g = \prod_{j=1}^k (h_j^{\downarrow})_{\beth^-(z_j)}.$$

由于每个 $\beth^-(z_i)$都是直接不可分解的，定理 5.11以及右侧的因子分解具有 k 个非平凡因子，因此根据不可分解因子分解唯一性定理 [Grä11、推论277.], 可知，这些因子可以通过一个置换来对应。但这正是该命题的表述。□

现在我们将 G^- 的半束分解扩展为一个束分解，其对象为 G。

令 $G^- = \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i)$ 为半束分解。根据右不变性，我们可以平移半束分解，从而对每个 $n \geq 1$ 得到一个内部分解 $s^{n\downarrow} = \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i) s^n$。

将 $e = \bigwedge_{i=1}^k x_i^{(n)}$ 写作 $x_i^{(n)} \in \beth^-(z_i) s^n$， G^- 在 $s^{n\downarrow}$ 的外部分解中的像可识别为该子集

$$\prod_{i=1}^k x_i^{(n)\downarrow} \subseteq \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i) s^n.$$

注意，右侧的分解显然是一个不可分解的因子分解，因为其k 部分显然同构于 G^-的半束。在左侧，我们有一个分解为 k 个非平凡子格的因子分解。因此，根据 [Grä11，推论277。], 左侧的因子-解必然（经过某个置换后）来自G^- 分解为半束的因子分解；因此，因子分解 $s^{n\downarrow} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-(z_i)s^n$ 诱导出因子分解$G^- \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-(z_i)$。更一般地，对于所有 $0 \leq m \leq n$，因子分解 $s^{n\downarrow} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-(z_i)s^n$ 诱导出因子分解$s^{m\downarrow} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-(z_i)s^m$ 。

根据$G = \bigcup_{n\geq 0} s^{n\downarrow}$，我们可以推断存在凸子格 $\mathfrak{I}(z_i) \subseteq G$，使得 $\mathfrak{I}(z_i) \cap G^- = \mathfrak{I}^-(z_i)$；根据命题 2.16 中所述的扩展，它们给出了一个同构$G \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}(z_i)$。

通过扩张过程构造的子格 $\mathfrak{I}(z_i)$ 是束 （与z_i相关）。

我们将这一观察表述为一个定理:
定理 5.14。存在一个格同构 $\psi\colon G \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}(z_i)$ 其中 $\{z_1, \ldots, z_k\} := X(\mathcal{C}(G^-))$。

由命题 5.12，我们得到诱导的内部分解

$$\mathcal{D}(G)^- = \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-_{\mathcal{D}(G)}(z_i) = \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-(z_i) \cap G^-.$$

这再次转向内部分解

$$\mathcal{D}(G)^- \cdot s^n = \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}^-_{\mathcal{D}(G)}(z_i) \cdot s^n = \prod_{i=1}^k \left(\mathfrak{I}^-(z_i) \cap G^-\right) \cdot s^n.$$

回想一下 $s^{-n} = \bigwedge_{i=1}^k \Phi_n(z_i)$，这表明 $e = \bigwedge_{i=1}^k \Phi_n(z_i)s^{-n}$，因此 $\varepsilon^{s^{n\downarrow}, \, i \quad G^-} = \Phi_n(z_i)s^{-n} \in \mathcal{D}(G)^-$。考察定义扩张的公式可知

$$\mathfrak{I}^-_{\mathcal{D}(G)}(z_i)^{\mathcal{D}(G)s^n} \subseteq \mathfrak{I}^-_G(z_i)^{Gs^n},$$

即，在 G 中将半束扩展为束，与 $\mathcal{D}(G)$ 中的扩展过程相容。由此证明:

命题 5.15。对于所有 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$,

$$\mathfrak{I}_G(z) \cap \mathcal{D}(G) = \mathfrak{I}_{\mathcal{D}(G)}(z)$$

并且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(G) & \xrightarrow[\sim]{\psi_{\mathcal{D}(G)}} & \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}_{\mathcal{D}(G)}(z_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow[\psi_G]{\sim} & \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}_G(z_i) \end{array}$$

这里，竖直箭头是包含映射，水平箭头是定理 *5.14* 中给出的映射 ψ 。

注意，对于所有 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，该图表只是交换的，因为 $\mathfrak{I}_{\mathcal{D}(G)}(z) \subseteq \mathfrak{I}_G(z)$，且同构 ψ_G 限制为 $\psi_{\mathcal{D}(G)}$，因为它们由完全相同的项给出。事实证明，束和半束一样具有刚性!

定理5.16. 设 $\rho_g : \quad G \to G; \quad h \mapsto hg$。对于所有 $g \in G^-$，存在一个置换 π_g : $\{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ 和格同构 $\alpha_i : \quad \mathfrak{I}(z_i) \to \mathfrak{I}(z_{i^{\pi_g}})$ 使得对于所有 $\underline{x} = (x_i)_{1\leq i\leq k} \in \prod_{i=1}^k \mathfrak{I}(z_i)$ 我们有

$$\left(\psi \circ \rho_g \circ \psi^{-1}\right)(\underline{x}) = (\alpha_{i^{\pi_g^{-1}}}(x_{i^{\pi_g^{-1}}}))_{1\leq i\leq k}$$

证明。显然， $\psi \circ \rho_g \circ \psi^{-1}$ 是格 $\prod_{i=1}^k \beth(z_i)$的自同构。因此，只需证明每个自同构 $\varphi\colon \prod_{i=1}^k \beth(z_i) \to \prod_{i=1}^k \beth(z_i)$ 都具有所需的形式。
首先注意， φ 将下集$\underline{x}^\downarrow = \prod_{i=1}^k x_i^\downarrow$ 同构地映射到下集 $\varphi(\underline{x}) =: \underline{y} = \prod_{i=1}^k y_i^\downarrow$。回想一下，所有下集作为格都同构于 $G^- \cong \prod_{i=1}^k \beth^-(z_i)$，因此这些分解已经是不可约分解，而 φ 因此只是在置换各个因子，也就是说，我们可以找到一个置换 $\pi\colon \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ 以及自同构 $\alpha_i\colon x_i^\downarrow \to y_{i^\pi}^\downarrow$ ，使得

$$\varphi(\underline{w}) = (\alpha_{i^{\pi^{-1}}}(w_{i^{\pi^{-1}}}))_{1\le i\le k} \tag{7}$$

对所有$\underline{w} \in \underline{x}^\downarrow$均成立。当遍历不同的下集 $\underline{x}^\downarrow$时，这些映射必须在下集的包含关系下彼此限制，而这只有在 π 与下集$\underline{x}^\downarrow$无关时才可能。因此，式（7）中的公式在整个定义域 $\prod_{i=1}^k \beth(z_i)$上均成立。□

我们在此指出，束 $\beth(z)$ 不一定是子群。然而，按照构造，它们是 G 的子格。不过，根据前面的结果，我们实际上可以得出一个寻找凸子群的简单方法：写下

$$G \cong \prod_{i=1}^k \beth(z_i) = \prod_{I\in\mathcal{I}} \left(\prod_{i\in I} \beth(z_i) \right)$$

其中， $\mathcal{I}$ 是在 G 中出现的束 $\beth(z_i)$ 的同构类集合；如果存在格同构 $\beth(z_i) \cong \beth(z_j)$，则 i、j 属于同一类 $I \in \mathcal{I}$。汇集同构的格因子后， G 分解为 同型分量 $G_I = \prod_{i\in I} \beth(z_i)$ 的乘积。由于刚性（定理 5.16），每个右乘法 $h \mapsto hg$ 在表示 $\prod_{i=1}^k \beth(z_i)$ 中都限制为同型因子 G_I 的自同构，这些因子表示为元组 $(x_i)_{1\le i\le k}$，其中对于 $i \notin I$ 有 $x_i = e$。因此，当 G 作用于格 $\prod_{i\notin I} \beth(z_i)$ 时，同型分量 G_I 稳定 $(e)_{i\notin I}$ ，也就是说，限制在不属于 I 的坐标上。

因此，同型分量对应于 G 的凸子群。请注意，这不一定是将 G 分解为凸子群的最细分解；不过，这是仅凭格结构所能得到的最细规范子群分解。

6. Lattice structure of the beams

我们以对束的格论研究结束分析。 .
设 L 是一个格；如果恒等元满足以下条件，我们称元素 $x \in L$ 为分配的。

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

对所有 y、$z \in L$ 均成立。
有了这一概念，我们可以从<style id='1'>主格的定义开始，该定义比 Inaba [Ina48] 给出的定义略为一般。
定义 6.1。令 L 为一个每个区间都具有有限长度的模格。则当任意区间 $[x,y]$ 要么是一个链，要么在将其视为自身的格时，除 x、y 外不包含任何分配元， L 被称为初等 。

利用透视关系这一概念，可以给出主性的一个简单判据：若 L 下有界，回顾一下，若存在 $z \in L$ ，使得$x \wedge z = y \wedge z = 0$ 且 $x \vee z = y \vee z$，则称两个元素 x、$y \in L$ 为透视。

命题 6.2。如果 L 是模的，并且每个区间的长度有限[3] ，那么 L 是主的，当且仅当在每个区间 $[x,y]$ $(x,y \in L)$ 中，任意两个原子都是透视的（相对于 $[x,y]$）。

[2]注意，在 Inaba 的原文中，这类元素称为中性。如今，中性性的定义采用另一个恒等式；事实证明，当 L 为模 |时，该恒等式等价于分配性（Grä11，第三章第二节）。].[3]在所引文章中，Inaba 假设所有格都具有有限长度，参见 [Ina48，第 48]页。由于主性是一种遗传性质，将这一概念推广到无界格并无妨碍。

证明。 [Ina48，定理 45] □

命题 节 6.3。对于每个 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，束 $\sqsupset(z)$ 是 G 的一个主子格 .

证明。根据命题 6.2，我们必须证明，对于区间 $[a,b] \subseteq \sqsupset(z)$，任意两个原子$x$, $y \in [a,b] \in G$都是透视的。我们可以假设 $x \neq y$；注意在这种情况下 $a = x \wedge y$。由 $c = x \vee y$，只需将范围限制在 $[a,c]$。利用右不变性平移到某个子格$[ac^{-1}, e] \cong [a,b]$，我们可以假设 $[ac^{-1}, e] \subseteq [\tilde{z}, e] \subseteq \sqsupset(\tilde{z})$——注意，我们刚才用到了束的刚性，即定理 5.16。由于 $[\tilde{z}, e]$ 是一个不可分解的模几何格，$[ac^{-1}, e]$ 也是如此。在这样的格中，该命题显然成立。□

现在我们研究对偶基底的存在性，这需要一些技术性论证：

引理 6.4. 设 L 上有界且为模的，并设 $\{a, y_1, \ldots, y_n\} \subseteq L$ 对偶独立。若 $b \in L$ 满足 $a \vee b = 1_L$，则集合 $\{(a \wedge y_i) \vee b : 1 \leq i \leq n\}$ 也对偶独立。

证明。设 $Y := \bigwedge_{i=1}^{n} y_i$。元素 $y_1, \ldots, y_n$ 在 $[Y, 1_L]$ 中对偶独立。我们还有菱形同构 $[Y, 1_L] = [Y, Y \vee a] \overset{\sim}{\to} [Y \wedge a, a]$，它由映射$y \mapsto y \wedge a$给出。它将 $[Y, 1_L]$ 中对偶独立的元素 y_i $(1 \leq i \leq n)$ 映射为 $[Y \wedge a, a]$ 中的元素$a \wedge y_i (1 \leq i \leq n)$，因此这些元素在 $[Y \wedge a, a]$ 中对偶独立。

对偶独立集中的某些元素即使被更大的元素替换，仍然保持对偶独立，因此元素 $(y_i \wedge a) \vee (a \wedge b)$ $(1 \leq i \leq n)$ 在$[a \wedge Y, a]$中仍然对偶独立。特别地，它们在 $[a \wedge b, a]$中也是对偶独立的。

我们有由 $x \mapsto x \vee b$给出的菱形同构 $[a \wedge b, a] \overset{\sim}{\to} [b, a \vee b] = [b, 1_L]$。对偶独立元素 $(y_i \wedge a) \vee (a \wedge b)$ $(1 \leq i \leq n)$ 的像可如下确定：

$$(y_i \wedge a) \vee (a \wedge b) \mapsto (y_i \wedge a) \vee (a \wedge b) \vee b = (y_i \wedge a) \vee b.$$

因此，元素 $(y_i \wedge a) \vee b$ 在 $[b, 1_L]$中对偶独立。特别地，它们在 L中也是对偶独立的。□

引理 6.5. 设 L 是一个上有界模格，且 $x_1, \ldots, x_n \in L$ 是对偶链。令 $X = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$，则 X上方至多有 n 个对偶独立的对偶原子。

证明。我们对 n 使用归纳法：对于 $n = 1$，这是显然的。现在令 $n > 1$，并假设该命题对于所有 $k < n$ 均已得到证明。

反设存在 $n+1$ 个位于 X 之上的对偶独立的对偶原子，记为 y_1、…、y_{n+1}。令 $X' = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$。

我们首先证明，在这种情况下可以找到 i、j，使得 $1 \leq i < j \leq n+1$，且 $(y_i \wedge y_j) \vee X' = 1_L$：显然，并非所有 y_i 都能位于 X' 之上，因为这将与归纳假设矛盾。因此，存在一个指标 l，使得 $1 \leq l \leq n+1$，且 $y_l \not\geq X'$。还存在另一个指标 m，使得 $1 \leq m \leq n+1$，且 $(y_l \wedge y_m) \vee X' = 1_L$。否则，对于所有 $m \neq l$，我们将有 $y'_m := (y_l \wedge y_m) \vee X' < 1_L$。还要注意，$y_l \not\geq X'$ 蕴含 $y'_m > y_l \wedge y_m$。由于模性蕴含 $\mathsf{len}([y_l \wedge y_m, 1_L]) = 2$，我们得到对于所有 $m \neq l$，覆盖关系 $y'_m \prec 1_L$。但是，根据引理 6.4，元素 y'_m $(m \neq l)$ 将构成 n 中的$[X', 1_L]$对偶原子的对偶独立集合。这将与归纳假设矛盾。因此，存在一个 $m \neq l$，使得 $(y_l \wedge y_m) \vee X' = 1_L$。通过适当编号，我们可以取所需的 $i < j$，使得 $\{i, j\} = \{k, l\}$，从而证明了该断言。

设 $Y := y_i \wedge y_j$，然后

$$[Y, 1_L] = [Y, Y \vee X'] \cong [Y \wedge X', X'] \subseteq [X, X'],$$

其中包含关系由 $Y \geq X$ 得出。但 $[X, X']$ 是一条链，这一点通过考察即可看出

$$[X, X'] = [X' \wedge x_n, X'] \cong [x_n, X' \vee x_n] \subseteq [x_n, 1_L].$$

因此，$[X, X']$ 至多只能有一个对偶原子——然而，这将与$[X, X']$ 包含一个同构于 $[Y, 1_L]$ 的上集这一事实相矛盾，而该上集至少有两个不同的对偶原子。□

引理 6.6。 设 L 是一个上有界的模格，并满足升链条件。设 $y_1, \dots y_n \in L$ 为对偶链。若 $e \succ x_i \geq y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ 是位于 y_i 之上的唯一对偶原子，则 y_1，……，y_n 对偶独立，当且仅当 x_1，……，x_n 对偶独立。

证明。如果在所述条件下，元素 $y_1, \dots, y_n$ 对偶独立，那么元素 $x_1, \dots, x_n$ 也对偶独立，因为将元素替换为可能更大的元素时，对偶独立性仍会保持。

现在假设 x_1、…、x_n 对偶独立。我们证明，对于任意满足 $j \notin I$ 的 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ 和 $1 \leq j \leq n$，都有 $Y := \left(\bigwedge_{i \in I} y_i\right) \vee y_j = 1_L$。根据 [Grä11, Theorem 360.],，这等价于对偶独立性。

如果有 $Y < 1_L$，那么特别地 $y_j \leq Y < 1_L$ 这将意味着 $Y \leq x_j$。由 $X := \bigwedge_{i \in I} y_i$，这将意味着在 X 之上至少有 $|I| + 1$ 个对偶独立的对偶原子，即元素 x_i （$i \in I$）和 x_j，从而与引理 6.5 矛盾。□

我们现在证明， G^- 中的交不可约元总是可以扩展为更大的交不可约元：

引理6.7. 令 $g \in G^-$ 为交不可约元。则存在一个交不可约元 $g' \in G^-$，使得 $g' \prec g$。

证明。 设 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 为右正规分解。根据命题 3.24，所有$\deg(g_i) = 1$ $(1 \leq i \leq k)$。由于 $s^{-1} = \bigwedge X(G^-)$且 $s^{-1} < s^{-1} g_k^{-1}$ ，存在一个元素 $g_{k+1} \prec e$ 使得$g_{k+1} \vee s^{-1} g_k^{-1} = e$。因此， $g_{k+1} g_k g_{k-1} \dots g_1$是一个右正规表达式，其中所有 $\deg(g_i) = 1(1 \leq i \leq k+1)$，从而表示一个元素 $g' \prec g$；根据再次应用命题 3.24，该元素是交不可约的。□

定理6.8。 设 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，则对每个 $n \geq 1$，格 $\Phi_n(z)^\uparrow$ 具有对偶基$y_1, \dots, y_d$，满足 $\deg(y_i) = n$ $(1 \leq i \leq d)$，其中 $d := \deg(z)$。

证明。 注意到$\deg(z)$ 也是 $[z, e]$ 作为几何格时的维数。根据命题 2.11，存在一个对偶基 $x_1, \dots, x_d$，其对应于 $[z, e]$。根据引理 6.7，对于所有 $1 \leq i \leq d$，我们都可以找到交不可约元 $y_i \leq x_i$ ，使得$\deg(y_i) = n$。显然，所有 $y_i \geq s^{-n}$。根据引理 5.5，我们可以得出 $y_i \geq \Phi_n(z)$。由于引理 6.6,元素 $y_1, \dots, y_d$是对偶独立的，正如 $x_1, \dots, x_d$一样。因此 e,

$$n \cdot d = \deg(\Phi_n(z)) \geq \deg\left(\bigwedge_{i=1}^{d} y_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \deg(y_i) = d \cdot n.$$

因此，该不等式实际上是等式，这意味着 $\bigwedge_{i=1}^{d} y_i = \Phi_n(z)$。因此，元素$y_1, \dots, y_d$构成 $\Phi_n(z)^\uparrow$ 的对偶基。□

下文所考虑的所有环均为含幺环。

设 R 为环， ${}_R M$ 为左 R-模。我们用 $L({}_R M)$ 表示所有 R-子模按包含关系排序所成的格。给定 A、$B \in R$，相应的格运算为 $A \vee B = A + B$ 和 $A \wedge B = A \cap B$。为了便于阅读，我们将格运算记为 $+$、$\cap$。众所周知，格 $L({}_R M)$ 是模 [4]。

由于我们大多数时候都在处理自由模，写作 $L(R, \delta) := L({}_R R^\delta)$ 会更方便。

我们主要考虑的两类环如下：

定义 6.9。 [JM69，定义 6。6]如果一个环 R 是完全主一元理想（简称cpu），则它是局部环，并且每个左理想或右理想 $I \leq R$ 都具有 $\mathfrak{m}^i$ 的形式，其中某个 i整数，且 $\mathfrak{m}$ 是 R的唯一极大理想。

cpu 环 R 的长度 定义为满足性质 $\mathfrak{m}^i = (0)$ 的最小整数 i 。元素 $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 称为 R的一致化元 。

[4]事实上，这个名称源自这样一个事实：模 格的原型正是以所描述的方式来自模。

定义 6.10。设 Q 为一个（可能是斜的）域。满射 $v\colon Q \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ 若满足以下三个公理，则称为离散赋值，其中 $x, y \in Q$:

$$v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$$
$$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$$
$$v(xy) = v(x) + v(y).$$

形如(Q, v)的一对对象，其中 Q 是一个斜域，且 v 是 Q 上的离散赋值，被称为一个离散赋值域（离散赋值域，简称）。
如果 (Q, v) 是一个离散赋值域，则子环 $R := \{x \in Q\colon v(x) \geq 0\}$ 被称为（非交换）离散赋值环 （简称 离散赋值环）。
离散赋值环的一个 一致化元 是任意元素 $\pi \in R$，满足 $v(\pi) = 1$。

谈到离散赋值域或离散赋值环时，我们不会明确提及赋值 v。如果我们只关注离散赋值环 R，偶尔也不会提及它所嵌入的离散赋值域 Q。

如同交换理论中一样，每个左理想或右理想 $I \leq R$ 实际上都是双边理想，并且对于某个整数 $k > 0$具有 $I = \pi^k R$ 的形式，其中 π 是任意的一致化元。更一般地，任何有限生成的左 R-子模 $M \leq {}_R Q$ 都具有 $M = \pi^k R$ 的形式，其中某个 $k \in \mathbb{Z}$。

此外 ，注意， $\mathfrak{m} = \pi R$ 是 R的唯一极大理想，因此 R 是一个局部环 g.
此外，我们还需要模中 R-格 的概念。谈到 R-格时，应始终清楚我们指的是模论意义上的概念，而不是格的序理论意义上的概念。

定义 6.11。设 ${}_R M$ 是环 R上的左 R-模。若子模 $A \in L({}_R M)$ 满足以下条件，则称其为 ${}_R M$中的 R-格:
1) A是有限生成的；2) A 是 ${}_R M$中的一个本质子模，也就是说，它与 ${}_R M$中的每个非零子模的交都非零。

${}_R M$ 中所有 R-格的集合记作 $\mathrm{Lat}({}_R M)$。若 $M = {}_R R^\delta$，我们也采用更方便的记法 $\mathrm{Lat}(R, \delta) := \mathrm{Lat}({}_R R^\delta)$。

容易看出，若 R 是诺特的，则作为 ${}_R M$ 中的 R-格这一性质在对子模取和与交时保持不变，因此在这种情况下，$\mathrm{Lat}({}_R M)$ 是 $L({}_R M)$ 的子格。若 R 是离散赋值环，其对应的离散赋值域为 Q，则下面的刻画非常有用:

引理 6.12. 设 R 是离散赋值环，其离散赋值域为 Q，$\pi \in R$ 是其一致化元，且 $\delta \geq 1$ 是某个整数。则:

i) 元素 $A \leq L(R, \delta)$ 是一个 R-格，当且仅当存在整数 n 使得$\pi^n R^\delta \subseteq A$。*ii)* 元素 $A \leq L({}_R Q^\delta)$ 是一个 R-格，当且仅当存在整数 n 使得$\pi^n R^\delta \subseteq A \subseteq \pi^{-n} R^\delta$。

证明。 将 ${}_R R^\delta$ 和 ${}_R Q^\delta$ 的标准基分别记为 $e_1, \ldots, e_\delta$。
设 $A \in L(R, \delta)$是一个 R-格。由于 A 在 R^δ 中是本质的，交集 $A \cap Re_i \neq 0 (1 \leq i \leq \delta)$；因此，对于某个 $n_i \geq 0$，有 $A \cap Re_i = \pi^{n_i} Re_i$。取 $n = \max\{n_i\colon 1 \leq i \leq \delta\}$，我们看到对于所有 $1 \leq i \leq \delta$，都有 $\pi^n Re_i \subseteq A$。因此， $\pi^n R^\delta \subseteq A$。另一方面，每个子模 $\pi^n R^\delta$ 显然在 ${}_R R^\delta$ 中是本质的；因此，包含某个 $\pi^n R^\delta$ 的任意子模 A 也同样是本质的。由于我们是在诺特环上的有限生成模中工作，有限生成性已经得到保证!
现在我们证明第二个陈述：元素 $A \in L({}_R Q^\delta)$ 的本质性等价于存在一个带有 $\pi^n R^\delta \subseteq A$ 的 $n \geq 0$；证明方法与上述相同。由于形如 $\pi^{-n} R^\delta$ 的子模是有限生成的，且 R 是诺特的，包含于某个此类子模中的每个 A 也都是有限生成的。另一方面，令 $A \in L({}_R Q^\delta)$ 由（有限多个）元素 $v_j = \sum_i q_{ji} e_i$ $(1 \leq j \leq m)$ 生成。于是存在一个 n

使所有系数为 $q_{ji} \in \pi^{-n}R$。特别是，所有 $v_j \in \pi^{-n}R^\delta$，因此 $A \subseteq \pi^{-n}R^\delta$。当然，这些界限 $\pi^{\pm n}R^\delta$ 事先并不保证相等；然而，通过选择足够大的值，显然可以找到一个 n，使两个界限都得到满足。□

设 R 是一个离散赋值环，$\pi \in R$ 是一致化元，则很容易看出，对于所有 $n \geq 1$，环 $R_n := R/\pi^n R$ 都是长度为 n 的 cpu环。

为了将模的态射转化为格的态射，我们还需要引入一些记号：设 R, S 是（含幺）环，${}_RM$，${}_SN$ 是左模。映射 $\varphi\colon M \to N$ 称为关于环同构 $\alpha : R \to S$ 的半线性 映射，若 φ 是阿贝尔群同态，且对于所有 $r \in R, m \in M$，都有 $\varphi(rm) = \alpha(r)\varphi(m)$。如果我们只关心 φ 的半线性性质，而不需要强调同构 α 本身，我们就简称其为半线性映射。

设 $\varphi\colon {}_RM \to {}_SN$ 是模之间的半线性映射。那么我们有规范映射

$$\varphi_* : L({}_RM) \to L({}_SN) \quad ; \quad A \mapsto \varphi(A)$$
$$\varphi^* : L({}_SN) \to L({}_RM) \quad ; \quad B \mapsto \varphi^{-1}(B).$$

很容易验证这些映射是良定义的。若无更多限制，我们只能说 φ_* 是 $\vee$-半格的单同态，而 φ^* 是 $\wedge$-半格的单同态。不过请注意，如果 φ 是单射（分别地，是满射），那么映射 φ_*（分别地，φ^*）确实是格同态。第一种情况下，L（${}_RM$）作为 L（${}_SN$）的一个下集嵌入；第二种情况下，L（${}_SN$）作为 L（${}_RM$）的一个上集嵌入。如果 φ 是双射——也就是说，是一个半线性同构 ——这表明 φ_*、φ^* 是互为逆映射的格同构。

我们指出，将这一概念扩展到以下情形颇有用处：给定一个满射 环同态 $\alpha : R \to S$，我们仍可按规则 $\varphi(rm) = \alpha(r)\varphi(m)$ 定义半线性映射。令 r 通过 $\alpha(r)$ 数乘作用于 N 上，我们可以将 ${}_SN$ 视为一个 R-模 ${}_RN$，其中 $L({}_RN) = L({}_SN)$。于是，α-半线性映射 ${}_RM \to {}_SN$ 实际上等同于 R-模 ${}_RM \to {}_RN$ 之间的标准同态（或者说，是一个恒等$_R$-半线性映射，如果你喜欢用华丽的说法）。

现在我们可以证明：

命题6.13。令 R 为一个非交换离散赋值环，且 $\pi \in R$ 为一个一致化元；此外，设 $R_n = R/\pi^n R$。

对于 $n \geq m$，令 $\varphi_{n,m} : R_n^\delta \to R_m^\delta$ 为 $\alpha_{n,m}$-半线性的典范投影，其中 $\alpha_{n,m} : R_n \to R_m$ 是典范投影。则格的直接系统 $(L(R_n, \delta))_{n\geq 1}$ 及同态 $\varphi_{n,m}^* : L(R_m, \delta) \to L(R_n, \delta)$ 具有极限：

$$\mathrm{Lat}(R, \delta) \cong \varinjlim L(R_n, \delta)$$

证明。设 $A \in L(R, \delta)$ 是一个格。根据引理6.12，存在一个 $n \geq 1$，满足 $\pi^n R^\delta \subseteq A$。令 $\varphi_n : R^\delta \to R_n^\delta$，其相对于典范投影 $\alpha_n : R \to R_n$ 是 α_n-半线性的，我们有 $A = \varphi_n^*(A + \pi^n R^\delta)$。因此，

$$\mathrm{Lat}(R, \delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n^* \left(L(R_n, \delta) \right),$$

现在很容易将其识别为 $\varinjlim L(R_n, \delta)$，因为所有 φ_n^* 都是嵌入到 $\mathrm{Lat}(R, \delta)$ 中的嵌入，并且与直接系统相容，具体而言，$\varphi_m^* = \varphi_n^* \varphi_{n,m}^*$。□

以下对离散赋值环的刻画将很有用：

引理 6.14。设 R 是一个（可能非交换的）局部环，其极大理想 $\mathfrak{m}$ 具有如下形式：$\mathfrak{m} = \pi R = R\pi$，其中 $\pi \in R$ 是某个非幂零元。若 $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{m}^n = (0)$，则 R 是一个离散赋值环。

证明。 [Gub11, 命题 4.] □

引理 6.15。 设$(R_k)_{k\geq 1}$ 是一个 *cpu* 环的逆系统，其中环 R_k 的长度为k，且环同态 $\varphi_{k,l}: R_k \to R_l$ 均为满射。那么 $R = \lim_{\leftarrow} R_k$ 是一个离散赋值环。

证明。将 R_k 的极大理想记为 $\mathfrak{m}_k$。显然，对于 $l \leq k$，理想 $\mathfrak{m}_k^l$ 是唯一的，使得 $R_k/\mathfrak{m}_k^l$ 的长度为 l。因此，$\ker(\varphi_{k,l}) = \mathfrak{m}_k^l$。

此外，$\varphi_{k\,l}^{-1}(\mathfrak{m}_l) = \mathfrak{m}_k$ 因为 $\mathfrak{m}_l$ 的原像必定是 R_k的（唯一）极大理想。由满射性可知，$\varphi_{k,l}(\mathfrak{m}_k) = \varphi_{k,l}(\varphi_{k\,l}^{-1}(\mathfrak{m}_l)) = \mathfrak{m}_l$。因此，理想 $(\mathfrak{m}_k)_{k\geq 1}$ 通过限制构成一个由满射连接的逆系统。

将逆极限中的元素表示为 R，即 $(x_k)_{k\geq 1}$，其中 $x_k \in R_k$ 和 $\varphi_{k,\,l}(x_k) = x_l$ $(k \geq l)$。我们定义理想

$$\mathfrak{m} = \{(x_k)_{k\geq 1} : x_k \in \mathfrak{m}_k\} \leq R.$$

每个元素$(x_k)_{k\geq 1} \in R \setminus \mathfrak{m}$ 都可逆，这可由如下论证说明：根据前面的论证，所有分量 $x_k \notin \mathfrak{m}_k$ 和 因而都是可逆的。由于每个 x_k 在 R_k中都是可逆的，元素$(x_k)_{k\geq 1}$ 在 R中是可逆的。因此， R 是局部的。

设 π_2 为 R_2的一致化元。然后，由连接映射的满射性，存在一个元素 $\pi = (\pi_k)_{k\geq 1} \in R$，其在指标 2处的分量为 π_2。由于 $\pi_2 \in \mathfrak{m}_2 \setminus \mathfrak{m}_2^2$，显然对于所有 $k \geq 2$，都有$\pi_k \in \mathfrak{m}_k \setminus \mathfrak{m}_k^2$。由于 R_k 的长度为 k，这意味着对于 $l < k$，有$\pi_k^l \neq 0$。特别地，对于所有 l， $\pi^l \neq 0$ 在 R 中成立，因此 π 不是幂零的。

由于每当 $n \geq k$ 时 $\mathfrak{m}_k^n = (0)$ 都成立，我们也看到 $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{m}^n = (0)$。

最后，设 $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \mathfrak{m}$。我们需要证明存在一个元素 $y = (y_k)_{k\geq 1} \in R$，使得 $\pi y = x$。对于每个 $k \geq 1$，选取 $r_k \in R_k$，使得 $\pi_k r_k = x_k$。由此可得，对任意 $k \geq 2$ (!)，都有

$$\pi_k r_k = x_k = \varphi_{k+1,k}(\pi_{k+1} r_{k+1}) = \pi_k \underbrace{\varphi_{k+1,k}(r_{k+1})}_{=:y_k}.$$

由此可得 $\pi_k(r_k - y_k) = 0$，因此 $r_k - y_k \in \mathfrak{m}_k^{k-1} = \ker(\varphi_{k,k-1})$，故 $\varphi_{k,k-1}(y_k) = \varphi_{k,k-1}(r_k) = y_{k-1}$。

由此可得 $(y_k)_{k\geq 1} \in R$，并且根据构造， $\pi y = x$。由对称性可知，存在一个满足 $x = y'\pi$ 的 $y' \in R$。

根据引理 6.14， R 是一个离散赋值环。 □

定理 6.16 (**Inaba**). 设 L 是一个有界主格，它具有一个基 $y_1, \ldots, y_\delta$，其中$\delta \geq 4$ 且 $\mathrm{len}([0, y_i]) = n_i$ 对于某些正整数 n_i $(1 \leq i \leq \delta)$成立。于是存在一个长度为 $n = \max\{n_i : 1 \leq i \leq \delta\}$ 的 *cpu* 环 R，其一致化元为 π，使得 $L \cong L(_R M)$，其中的模

$$M = \sum_{i=1}^{\delta} \pi^{n-n_i} R \subseteq R^\delta.$$

特别地，如果对于某个共同的整数 $n \geq 1$，$\mathrm{len}([0, y_i]) = n$ $(1 \leq i \leq \delta)$，那么对于一个长度为 n 的 *cpu-* 环 R，有 $L \cong L(R, \delta)$。

现在，Inaba 的定理告诉我们如下结论：

命题 6.17。 设 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$ 满足 $\delta_z := \deg(z) \geq 4$，那么对于每个 $n \geq 1$，存在一个长度为 n 的 *cpu-ring* $R_{z,n}$，使得存在格同态 $\Phi_n(z)^\uparrow \cong L(R_{z,n}, \delta_z)$。

证明。根据定理 6.8，格 $\Phi_n(z)^\uparrow$具有由对偶链 $y_1, \ldots y_{\delta_z}$ 组成的对偶基，其中$\deg(y_i) = n$ $(1 \leq i \leq \delta_z)$。根据引理2.10，存在一个基 $Y' = y_1', \ldots, y_{\delta_z}'$，它由链组成，满足 $\mathrm{len}([\Phi_n(z)\ y_i']) = \mathrm{len}([y_i, e]) = n$，对所有 i均成立。其余部分由 Inaba 的定理推出。 □

定义 6.18. 对于 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，整数 $\delta_z := \deg(z)$ 将称为半束 $\sqsupset^-(z)$ 或束 $\sqsupset(z)$ 的维数。

设 L 是一个格。对于满足升链条件的元素 $x \in L$，我们将 x 的根基定义为

$$\mathrm{Rad}_L(x) := \bigwedge \{y \in L : y \prec x\}$$

并且如果 $x^{\uparrow}$ 满足降链条件，我们将 x 的 底 定义为

$$\mathrm{Soc}_L(x) := \bigvee\{y \in L : y \succ x\}.$$

注记 6.19。 注意，模 ${}_RM$ 的底是M中所有单模的和；因此，模论中的底在 $L({}_RM)$ 中由元素 $\mathrm{Soc}_{L({}_RM)}(0)$ 表示；而模论中的根基定义为 M 的所有极大子模的交，因此在 M 中由元素 $\mathrm{Rad}_{L({}_RM)}(M)$ 表示。

下面的引理表明，带有强序单位的模诺特右 ℓ-群中的右正规和左正规分解，可视为 Garside 理论中模论底级数和根基级数的对应物。

引理 6.20。 对于 $g \in G^-$，设 $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$ 为右正规分解， $g = h_1 h_2 \dots h_k$ 为左正规分解。那么

$$\mathrm{Rad}_{[g,e]}(e) = g_1 \quad ; \quad \mathrm{Soc}_{G^-}(g) = h_2 \dots h_k.$$

证明。 由于 $g_1 \in [s^{-1}, e]$，后者根据 Rump 的定理（定理 3.22）是对偶原子化的，我们知道 $\mathrm{Rad}_{[g,e]}(e) \leq g_1$。 由于 $\mathrm{Rad}_{[g,e]}(e)$ 是对偶原子的交，根据推论 3.5，$\mathrm{Rad}_{[g,e]}(e) \geq s^{-1}$。由于 $\mathrm{Rad}_{[g,e]}(e) \geq g$ 显然成立，我们得出 $\mathrm{Rad}_{[g,e]}(e) \geq g \vee s^{-1} = g_1$。这证明了第一个断言。

由第一个陈述，我们可以 deduce：相对于对偶序，有

$$\mathrm{Rad}_{[g,e]_\lesssim}(e) = h_1,$$

其中， h_1 是左正规分解中的第一个因子。这只是用对偶序的术语重写第一个陈述。利用这一点，我们可以计算

$$\mathrm{Soc}_{G^-}(g) = \mathrm{Soc}_{[g,e]}(g) = \mathrm{Soc}_{[e,g^{-1}]}(e) \cdot g = \left(\mathrm{Rad}_{[g,e]_\lesssim}(e)\right)^{-1} g = h_1^{-1} g = h_2 \dots h_k.$$

□

由此很容易确定冻结幂的底和根：

引理 6.21。 设 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$ 以及 $n \geq 1$。则 $\mathrm{根}_{[\Phi_n(z)\, e]}(e) = z$ 以及 $\mathrm{底}_{G^-}(\Phi_n(z)) = \Phi_{n-1}(z)$。

证明。 我们首先注意到，存在右正规分解

$$\Phi_n(z) = D^{n-1}(z) D^{n-2}(z) \dots D(z) z.$$

因此，第一个陈述直接由引理 6.20 得出。
根据命题4.12，该右正规分解是 $\deg(z)$-齐次的，因此根据命题 3.21 的应用，它也是左正规的。因此，引理 6.20 意味着

$$\mathrm{Soc}_{G^-}(\Phi_n(z)) = D^{n-2}(z) \dots D(z) z = \Phi_{n-1}(z).$$

□

我们还需要一个关于引理中 Rad 和 Soc 行为的引理：

引理 6.22. 设 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$，则映射 $g \mapsto \mathrm{根}_{\beth(z)}(g)$ 和 $g \mapsto \mathrm{底}_{\beth(z)}(g)$ 是格 $\beth(z)$的互逆自同构。

证明。根据右不变性以及命题 3.23，我们知道$\mathrm{根}_G(g) = s^{-1} g$ 和$\mathrm{底}_G(g) = sg$ 对于所有 $g \in G$ 均成立；因此，根和底确实是 G 的互逆自同构。

在定理 5.14给出的同构 $\psi : G \to \prod_{i=1}^k \beth(z_i)$下，我们有等式$\psi(\mathrm{根}_G(g)) = (\mathrm{根}_{\beth(z_i)}(\psi_i(g)))_{1 \leq i \leq k}$ 和 $\psi(\mathrm{底}_G(g)) = (\mathrm{底}_{\beth(z_i)}(\psi_i(g)))_{1 \leq i \leq k}$。 因此，对于每个 $1 \leq i \leq k$，映射$\mathrm{底}_{\beth(z_i)}$ 是$\mathrm{根}_{\beth(z_i)}$ 是保序双射，并且二者互为逆映射，这意味着它们实际上是格 $\beth(z_i)$ 的自同构。□

此外，对于子模格中的底和根，我们还有以下简单结果：

引理 6.23。设 $_RM$ 是离散赋值环 R 上的左模，该环的一致化元为 π。设 $A \in L(_RM)$。则：

i）如果 $A^{\downarrow}$ 满足升链条件，则根$_{L(_RM)}(A) = \pi A$
ii）如果 $A^{\uparrow}$ 满足降链条件，则 底$_{L(_RM)}(A) = \pi^{-1}A = \{x \in M : \pi x \in A\}$。

证明。注意到，对于 $A, B \in L(_RM)$， $A \prec B$成立，当且仅当 $A/B \cong R/\pi R$作为 R-模，因此在这种情况下可推出 $\pi A \subseteq B$。
在第一种情况下，这表明 $\pi A \subseteq$ 根$_{L(_RM)}(A)$。另一方面， $A/\pi A$可视为定义在 $R/\pi R$ 上的左向量空间，因此是半单的。这表明根$_{L(_RM)}(A) \subseteq \pi A$，由此我们得出所需的等式。

在第二种情况下，我们可以类似地论证 $\pi \cdot$Soc$_{L(_RM)}(A) \subseteq A$，由此可知包含关系 Soc$_{L(_RM)}(A) \subseteq \pi^{-1}A$。另一方面，将 $\pi^{-1}A/A$ 视为左 $R/\pi R$-向量空间，我们再次可以得出结论：$\pi^{-1}A/A$ 是单模之和，这意味着 $\pi^{-1}A \subseteq$Soc$_{L(_RM)}(A)$；同样，这证明了两者相等。□

引理6.24。令 Q 为一个离散赋值域，其离散赋值环为 R，并令 $\delta \geq 1$。则映射 $x \mapsto$ 底(x) 和 $x \mapsto$根(x) 是Lat$(_RQ^{\delta})$ 的格自同构，且互为逆映射。
证明。 首先注意到，Lat$(_RQ^{\delta})$是 $L(_RQ^{\delta})$ 的一个凸子格。令 $A \in$Lat$(_RQ^{\delta})$。根据引理 6.23，根$_{L(_RQ^{\delta})}(A) = \pi A$，根据引理 6.12的陈述2，这再次是一个 R-格。这意味着，按照同样的论证，πA 是由元素 $\prec A$ 的交集构成的，而这些元素都是 R-格。由于该交集取自 $L(_RQ^{\delta})$的一个凸子格，相对于 Lat$(_RQ^{\delta})$的根不可能真包含于相对于 $L(_RQ^{\delta})$ 的根中。因此，根$_{\mathrm{Lat}(_RQ^{\delta})}(A) = \pi A$。

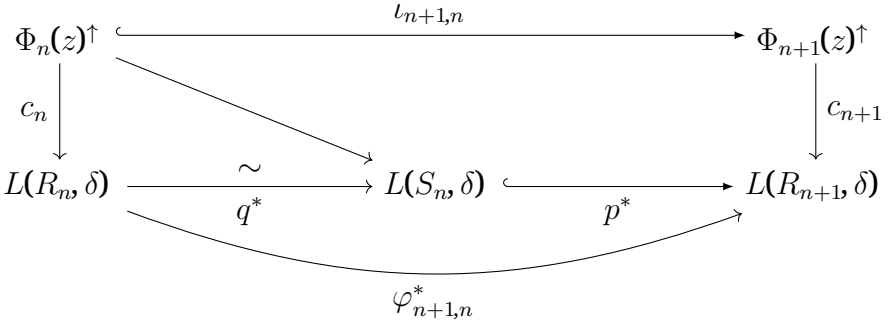
通过类似的推理，我们得到 Soc$_{\mathrm{Lat}(_RQ^{\delta})}(A) = \pi^{-1}A$。由于乘以 π 在 $_RQ^{\delta}$ 中可逆，我们看到 Rad 和 Soc 实际上互为逆运算。□

定理6.25。令 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$ 具有 $\delta_z := \deg(z) \geq 4$，则存在一个非交换离散赋值环$R_z$，使得存在一个格同构

$$\beth(z)^- \cong \mathrm{Lat}(R_z, \delta_z).$$

证明。由于我们只研究一个固定的 z，我们将 $R_z =: R$, $R_{z,n} =: R_n$, $\delta_z =: \delta$ 简写为。我们从分段坐标化 $c_n : \Phi_n(z)^{\uparrow} \xrightarrow{\sim} L(R_n, \delta)$ 开始，它们由命题 6.17 所保证。对于任意 $n \geq 1$，嵌入 $\iota_{n+1,n} : \Phi_n(z)^{\uparrow} \hookrightarrow \Phi_{n+1}(z)^{\uparrow}$ 对应于将 $L(R_n, \delta)$ 嵌入为 $L(R_{n+1}, \delta)$ 的上集。我们的第一步将是证明，这个嵌入实际上由一个半线性满射 $R_{n+1}^{\delta} \to R_n^{\delta}$ 所诱导。
我们首先确定一些底：由引理 6.21，底$_{G^-}(\Phi_{n+1}(z)) = \Phi_n(z)$。此外，底$_{L(R_{n+1},\delta)}(0) = \pi_{n+1}^n R_{n+1}^{\delta}$，由引理 6.23。
我们定义 $S_n := R_{n+1}/\pi_{n+1}^n R_{n+1}$。此外，令 p: $R_{n+1}^{\delta} \to S_n^{\delta}$ 为典范投影，它相对于投影 $\beta : R_{n+1} \to S_n$ 是 β- 半线性的。根据前面的讨论，p^* 将 $L(S_n, \delta)$ 识别为上集 Soc$_{L(R_{n+1},\delta)}(0)^{\uparrow} \subseteq L(R_{n+1}, \delta)$。

在 G^- 中，我们恰好处于相同情形：由于 As $\Phi_n(z)$是 $\Phi_{n+1}(z)$的底，存在一个同构 $f : \Phi_n(z)^{\uparrow} \xrightarrow{\sim} L(S_n, \delta)$，使其符合下面的交换图表：



因此，存在一个格同构 $L(R_n,\delta) \xrightarrow{\sim} L(S_n,\delta)$使其适合于此交换图表。根据 Camillo [Cam84, 推论 6.3)], 的一个结果，此同构具有 q^* 的形式，其中 $q : S_n^\delta \to R_n^\delta$ 是关于某个环同构$\gamma : R_n \to S_n$ 的 γ-半线性双射。

借助满同态 $\alpha_{n+1,n} = \gamma \circ \beta$，映射 $\varphi_{n+1,n} = q \circ p$ 显然是一个α-半线性满射，并且 $\varphi^*_{n+1,n}$ 使图表交换!

通过满射映射 $\alpha_{n+1,n}$，环 R_n 可以排列成一个 cpu 环的逆系统。由于 R_n 的长度为 n，由引理 6.15 可知，环 $R = \lim_{\leftarrow} R_n$ 是一个离散赋值环。通过典范投影 $R \to R_n$，每个 R_n^δ 实际上都可以视为一个 R-模。此外，

$$M := \lim_{\leftarrow} R_n^\delta = \left\{ (m_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n=1}^{\infty} R_n^\delta \,:\, \forall n \geq 1 : \varphi_{n+1,n}(m_{n+1}) = m_n \right\}$$

自然地是左 R-模，数乘为 $(r_n)_{n\geq 1} \cdot (m_n)_{n\geq 1} = (r_n m_n)_{n\geq 1}$。
现在我们证明 ${}_RM \cong {}_RR^\delta$ （这并非完全显然，因为不同 R_n^δ 之间的连接映射并不一定由系数约化给出）。显然存在元素x^1、.....、 $x^\delta \in R_1^\delta$，它们构成 R_1^δ 的一组基（长度为 1 的 cpu 环是一个域！）。现在我们选取m^1、.....、 $m^\delta \in M$，使得 $m_1^i = x^i\,(1 \leq i \leq \delta)$。我们的目标是证明 m^1、.....、 m^δ 构成 ${}_RM$ 的一组基。
固定一个整数 $n \geq 1$。显然，$\ker(\varphi_{n,1}) = \pi_n R_n^\delta = \mathrm{Rad}(R_n^\delta)$，因此 $\varphi_{n,1} : R_n^\delta \to R_1^\delta$给出了 R_n-模 $\overline{\varphi}_{n,1} : R_n^\delta/\mathrm{Rad}(R_n^\delta) \xrightarrow{\sim} R_1^\delta$的一个同构。这里，我们通过 $\alpha_{n,1} : R_n \to R_1$ 的标量限制，将 R_1^δ 视为一个R_n-模。由于元素 $\varphi_{n,1}(m_n^i) = m_1^i (1 \leq i \leq \delta)$ 生成 R_1^δ，根据中山引理，元素 m_n^i ($1 \leq i \leq \delta$) 生成 R_n^δ。模 R_n^δ 的合成长度为 $\delta \cdot n$，因此对于任意固定的 k， m_n^i $(1 \leq i \leq \delta)$ 必须构成 R_n^δ的一组基。
因此，给定任意元素 $m = (m_n)_{n\geq 1} \in M$，对于每个 $n \geq 1$ ，我们都能找到唯一的元素 $r_n^i \in R_n$ $(1 \leq i \leq \delta)$，使得 $m_n = \sum_{i=1}^\delta r_n^i m_n^i$。对于每一对整数 $k \geq l \geq 1$，于是有

$$\begin{aligned} & m_l = \varphi_{k,l} m_k \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^{\delta} r_l^i m_l^i = \varphi_{k,l}\left(\sum_{i=1}^{\delta} r_k^i m_k^i\right) = \sum_{i=1}^{\delta} \alpha_{k,l}(r_k^i)\varphi_{k,l}(m_k^i) = \sum_{i=1}^{\delta} \alpha_{k,l}(r_k^i) m_k^l. \end{aligned}$$

这证明了 $\alpha_{k,l}(r_k^i) = r_l^i$。因此，对于每个 $1 \leq i \leq \delta$，令 $r^i := (r_n^i)_{n\geq 1}$ ，即可定义 R 的一个元素。这些 $r^i \in R$ 是 R 中满足性质 $\sum_{i=1}^\delta r^i m^i = m$的唯一元素。由于这表明 M 中的每个元素都能唯一地表示为元素 m^1、.....、 m^δ 的一个 R-线性组合，因此我们有 ${}_RM \cong {}_RR^\delta$。

令 $\pi \in R$ 为一致化元。通过标量限制，我们可以对 $n \geq 1$ 作出如下识别：$L_n = L({}_RM_n)$，其中 $M_n := M/\pi^n M$。我们已经看到 ${}_RM \cong {}_RR^\delta$。因此，由命题 6.13，我们可以得出结论： $G^- \cong \lim_{\rightarrow} L_k \cong \mathrm{Lat}({}_RR^\delta)$。□
We 不仅能为半束赋予坐标。我们甚至能为整个束赋予坐标 !

定理6.26. 令 $z \in X(\mathcal{C}(G^-))$ 满足 $\delta_z := \deg(z) \geq 4$，则存在一个非交换离散赋值域$Q_z$ ，其离散赋值环为 R_z ，使得存在一个格同构

$$\beth(z) \cong \mathrm{Lat}({}_{R_z}Q_z^{\delta_z})$$

证明。 与前面的证明一样，我们省略 z 在 $R_z, Q_z, \ldots$。令 $c : \beth(z)^- \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lat}(R,\delta)$为定理6.25 中构造的格同构。我们断言，该格同构可以唯一地扩展为格同构 $\tilde{c} : \beth(z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lat}({}_RQ^\delta)$。唯一性显然：如果对某个 $g \in \beth(z)$ 定义了 $\tilde{c}(g)$，那么显然

$$\tilde{c}\left(\mathrm{Soc}_{\beth(z)}(g)\right) = \mathrm{Soc}_{\mathrm{Lat}({}_RQ^\delta)}\left(\tilde{c}(g)\right).$$

这个论证实质上包含了该扩张的构造：

设 $g \in \sqsupset(z)$。我们定义

$$\tilde{c}(g) := \mathrm{Soc}^{k}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)}\left(c\left(\mathrm{Rad}^{k}_{\sqsupset(z)}(g)\right)\right),$$

其中，$k \geq 0$ 是满足根$^{k}_{\sqsupset(z)}(g) \in \sqsupset^{-}(z)$的任意整数。这一定义确实是良定义的：令 $k_0 \geq 0$ 为满足根$^{k_0}_{\sqsupset(z)}(g) \in \sqsupset^{-}(z)$的最小者，我们将该定义中的任意可接受的 k 写作 $k = k_0 + l$。然后

$$\begin{aligned}
\mathrm{Soc}^{k}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)}(\mathrm{Rad}^{k}_{\sqsupset(z)}(g)) &= \left(\mathrm{Soc}^{k_0}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)} \circ \mathrm{Soc}^{l}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)}\right)\left(c\left(\left(\mathrm{Rad}^{l}_{\sqsupset(z)} \circ \mathrm{Rad}^{k_0}_{\sqsupset(z)}\right)(g)\right)\right) \\
&= \left(\mathrm{Soc}^{k_0}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)} \circ \mathrm{Soc}^{l}_{\mathrm{Lat}(R,\delta)}\right)\left(c\left(\left(\mathrm{Rad}^{l}_{\sqsupset(z)^-} \circ \mathrm{Rad}^{k_0}_{\sqsupset(z)}\right)(g)\right)\right) \\
&= \left(\mathrm{Soc}^{k_0}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)} \circ \mathrm{Soc}^{l}_{\mathrm{Lat}(R,\delta)} \circ \mathrm{Rad}^{l}_{\mathrm{Lat}(R,\delta)}\right)\left(c\left(\mathrm{Rad}^{k_0}_{\sqsupset(z)}(g)\right)\right) \\
&= \mathrm{Soc}^{k_0}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)}\left(c\left(\mathrm{Rad}^{k_0}_{\sqsupset(z)}(g)\right)\right).
\end{aligned}$$

注意，对于任意 $k \geq 0$，$\tilde{c}$ 限制到 $\mathrm{Soc}^k(e)^{\downarrow}$ 和 $\mathrm{Soc}^k(R^\delta)^{\downarrow}$ [5]，作为 $\mathrm{Soc}^k{}_{\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)} \circ c \circ$根$^{k}_{\sqsupset(z)}$的格同构的合成（引理6.22，引理 6.24）。因此，$\tilde{c}$ 是 $\sqsupset(z)$ 与 $\mathrm{Lat}(_RQ^\delta)$ 之间的同构。□

7. 总结

根据我们所证明的内容，每个具有强序单位的模诺特右 ℓ-群 G 都分解为格论乘积 $G = \prod_{i=1}^{k} \sqsupset(z_i)$，其中 $\{z_1, \ldots, z_k\} = X(\mathcal{C}(G^-))$（定理 5.14）。

我们已经证明，具有 $\delta_z = \mathrm{deg}(z) \geq 4$ 的束 $\sqsupset(z)$ 还可以进一步由形如 $\mathrm{Lat}(_{R_z}Q_z^{\delta_z})$ 的格来坐标化，其中 Q_z 是一个依赖于 z 的离散赋值域，其对应的离散赋值环为 R_z（定理 6.26）。

我们概述如何通过这些方法推导 G 的部分群论描述。关于 $\mathrm{Lat}(R, \delta_z)$、$\mathrm{Lat}(_RQ^{\delta_z})$ 的自同构群的更详细判定可见于 [Die21]。

令 π_z 为 R_z 的一致化元，并令 $R_{z,n} = R_z/\pi_z^n R_z$。则根据命题 6.17，$[\Phi_n(z)\ e] \cong L(R_{z,n}, \delta_z)$】【。

由于 $\Phi_n(z) =$ 根$^{n}_{\sqsupset(z)}(e)$，任何自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\sqsupset^{-}(z))$ 都限制为所有区间 $[\Phi_n(z)\ e] \cong L(R_{z,n}, \delta_z)$ 上的一系列自同构 $(\varphi_n)_{n\geq 1}$。根据Camillo的结果 [Cam84，推论 6.3.]，这些自同构来自一系列双射 $f_n : R_{z',n}^{\delta_z} \to R_{z',n}^{\delta_z}$，它们相对于某些环自同构 $\alpha_n \in \mathrm{Aut}(R_{z,n})$ 是 α_n-半线性的。

两个 α-半线性双射 $f_n, g_n : R_{z',n}^{\delta_z} \to R_{z',n}^{\delta_z}$ 诱导出 $\mathrm{Aut}(L(R_{z,n}, \delta_z))$ 中的同一元素，当且仅当存在一个单位元 $\gamma \in R_{z',n}^{\times}$，使得 $g_n = \gamma \cdot f_n$。这意味着

$$\mathrm{Aut}(L(R_{z,n}, \delta_z)) \cong (\mathrm{GL}(R_{z,n}, \delta_z) \rtimes \mathrm{Aut}(R_{z,n}))\,/R_{z,n}^{\times} =: \mathrm{P\Gamma L}(R_{z,n}, \delta_z).$$

其中 $\mathrm{GL}(R, \delta_z) = \mathrm{Aut}(_RR^{\delta_z})$，即秩为 δ_z 的自由 R-模的自同构群。取逆极限可证明，

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Lat}(R_z, \delta_z)) \cong (\mathrm{GL}(R_z, \delta_z) \rtimes \mathrm{Aut}(R_z))\,/R_z^{\times} =: \mathrm{P\Gamma L}(R_z, \delta_z).$$

现在，每个元素 $f \in \Gamma\mathrm{L}(R_z, \delta_z)$ 都可以唯一地延拓为 $_{R_z}Q_z^{\delta_z}$ 的半线性自同构。若 f: $_{R_z}R_z^{\delta_z} \to {}_{R_z}R_z^{\delta_z}$ 是 α-半线性的，则相应的延拓到$Q_z^{\delta_z}$ 由$\overline{f}(\pi^{-n} \cdot x) = \alpha(\pi)^{-n} \cdot f(x)$ 给出，其中 $n \geq 0$ 和 $x \in R_z^{\delta_z}$。此外我们注意到，将 $\mathrm{Lat}(R_z, \delta_z)$ 的自同构延拓到 $\mathrm{Lat}(_{R_z}Q_z^{\delta_z})$ 只有一种方式，因为（格论意义上的）底必须受到自同构的保持。

因此，我们得到一个嵌入

$$\mathrm{P\Gamma L}(R_z, \delta_z) \leq \mathrm{P\Gamma L}(_{R_z}Q_z^{\delta_z}) := \Gamma\mathrm{L}(_{R_z}Q_z^{\delta_z})/R_z^{\times}.$$

[5]注意，R^δ 是 $\mathrm{Lat}(R, \delta)$ 的最大元

这正是PΓL($_{R_z}Q_z^{\delta_z}$) 在 Lat($_{R_z}Q_z^{\delta_z}$)上的作用下，$R_z^{\delta_z}$ 的稳定子的嵌入。由于GL(Q_z, δ_z)在Lat($_{R_z}Q_z^{\delta_z}$) 上传递作用，Lat($_{R_z}Q_z^{\delta_z}$) 的每个自同构都由 ΓL(R_z, δ_z)中的一个元素与GL(Q_z, δ_z) 中的一个元素的复合诱导，这证明了 Aut(Lat($_{R_z}Q_z^{\delta_z}$)) $\cong$ PΓL($_{R_z}Q_z^{\delta_z}$)。

我们在第 5 节末尾已证明，如果 $G_I = \prod_{i\in I} \sqsupset(z_i)$ 是一个同型分量，那么 G_I 是 G 的一个子格，在 G_I 的元素右乘作用下整体保持不变，因此它本身是一个右 ℓ-群。根据束的刚性（定理 5.16），我们得出结论： G_I 可以识别为花环积 Sym(I) $\wr$Aut($\sqsupset(z_i)$) 的一个子群（$i \in I$ 任意），它是子群 Sym(I) $\wr$ Aut($\sqsupset(z_i)^-$) 的一个补元。

我们得出结论，束 $\sqsupset(z_i)$ 中度数为 ≥ 4 的同型分量 G_I 可与该子群的一个补元等同。

$$\mathrm{Sym}(I) \wr \mathrm{P\Gamma L}(R_I, \delta_z) \leq \mathrm{Sym}(I) \wr \mathrm{P\Gamma L}({}_{R_I}{Q_I}^{\delta_z}),$$

其中 Q_I 是一个具有离散赋值环 R_I 的离散赋值域，且该离散赋值环仅取决于分量 G_I。

作者不知道是否存在对维数为 3 的束 $\sqsupset(z_i)$ 的同型分量的良好描述，因为本文所用的坐标化方法在这种情况下不再适用。作者所知的所有例子实际上都可以坐标化，但我们似乎还远未弄清是否存在任何不可坐标化的 3 维束。这多少让人想起一个长期未解的几何问题：有限传递平面是否为 Desargues 平面；这或许能让人对这个问题的难度有所体会，也可能不能.....

致谢与资助

本文作者最近获得了亚历山大·洪堡基金会授予的费奥多尔·吕嫩奖学金，从而得以在代数与分析研究群布鲁塞尔自由大学友好且富有启发性的环境中开展研究。本研究部分由布鲁塞尔自由大学的项目 OZR3762 资助。

参考文献

[BS72] Egbert Brieskorn 和 Kyoji Saito。《Artin 群与 Coxeter 群》。Inventionesmathematicae，17：245–271，1972。[Cam84] V.P. Camillo。通过半线性同构诱导格映射。RockyMountain J.Math.，14(2)：475–486，1984 年 06 月。[CG14] Fabienne Chouraqui 和 Eddy Godelle。I 型群的有限商。Advancesin Mathematics，258：46–68，2014。[Cho10] Fabienne Chouraqui。Garside 群与 Yang–Baxter方程。Communicationsin Algebra，38：4441–4460，2010。[CMW04] Ruth Charney、John Meier和 Kim Whittlesey。Bestvina 的正规形复形与 Garside 群的同调。Geometriae Dedicata，105：171–188，2004。[Deh15] Patrick Dehornoy。Garside 理论基础，EMS Tracts in Mathematics 第 22卷。European Mathematical Society，2015。[Die19] Carsten Dietzel。拟酉矩阵群上的右不变格序。Journalof Algebra，524，2019 年 04 月。[Die21] Carsten Dietzel。Desargues 几何的右 ℓ-群。博士论文，Universität Stuttgart，2021。[DP99] Patrick Dehornoy 和 Luis Paris。Gaussian 群与 Garside 群：Artin 群的两种推广。Proceedings ofthe LondonMathematicalSociety，79：569–604，1999。[DR22] Carsten Dietzel和 Wolfgang Rump。von Neumann 代数的拟酉群。Bulletin ofthe London Mathematical Society，51，2022。[Gar69] Frank Arthur Garside。辫群及其他群。The Quarterly Journal of Mathematics，20(1)：235–254，1969 年 01月。[Grä11] George Grätzer。格论：基础。Birkhäuser Basel，2011。[Gub11] Nadiya Gubareni。赋值与离散赋值环。Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science，10(1)：61–70，2011。[Ina48] Eizi Inaba。论主格。Journal of Facultyof Science, Hokkaido University. SeriesI. Mathematics，11(2)：39–107，1948。

[JM69] BjarniJónsson 和 George S.Monk。初等阿格西格的表示。《太平洋数学杂志》，30(1)：95–139，1969。[KM96] V.M. Kopytov和 Y.M. Medvedev。右序群。西伯利亚代数与逻辑学校。Plenum 出版公司，1996。[Mae58] Fumitomo Maeda。连续几何，收录于第 95 卷数学科学基础。Springer-Verlag 柏林、哥廷根、海德堡，1958。[Pic01] Matthieu Picantin。薄高斯群的中心。代数杂志，245(1)：92–122，2001。[Rum08] Wolfgang Rump。L-代数、自相似性和l-群。代数杂志，320：2328–2348，2008。[Rum15] WolfgangRump。右 ℓ-群、几何的 Garside群以及量子杨-巴克斯特方程的解。代数杂志，439，2015。[Rum17] Wolfgang Rump。Garside群的分解与自相似L-代数。代数杂志，485：118–141，2017。[Rum20] Wolfgang Rump。具有对偶性的 L-代数与集合论杨-巴克斯特方程解的结构群。纯粹与应用代数杂志，224(8)：106314，2020。[Vai92] P.P.Vaidyanathanm。多速率系统与滤波器组。Prentice Hall 信号处理系列。Prentice Hall 公司，1992。

Carsten Dietzel，数学与数据科学系，自由大学布鲁塞尔，Pleinlaan 2，1050 Brussel，比利时电子邮件地址：Carsten.Dietzel@vub.be