arXiv:2304.04139v3 [math.AP] 5 Oct 2024

广义能量临界 Hartree 方程的正泡解非退化性

李雪梅、刘晨曦、唐兴东和徐桂香

摘要。本文证明了广义能量临界 Hartree 方程（NLH）的正泡解的非退化性。

$$-\Delta u(x)-\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^p(y)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}y\,u^{p-1}(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^N$$

其中 $N\geqslant 3$、$0<\lambda<N$、$p=\dfrac{2N-\lambda}{N-2}$和 $\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)$ 是一个归一化常数，使得 $u(x)=\underline{\underline{N-2}}\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}$ 是方程（NLH）的一个泡解。它解决了 [27, 41] 中一个未解决的非退化性问题，并将 [15, 29, 34] 中的部分非退化性结果推广到完整范围 $0<\lambda<N$。关键观察是，利用立体投影 S，加权推前映射 S_* 是线性化算子的零空间与次数为一的球谐函数子空间 H_1^{N+1} 之间的一一映射。

1. 引言

本文研究 $\mathbb{R}^N$ 中的广义能量临界 Hartree 方程

$$-\Delta u(x)-\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^p(y)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}y\,u^{p-1}(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{NLH}$$

其中 u 是一个实值函数，$N\geqslant 3$、$0<\lambda<N$、$p=\dfrac{2N-\lambda}{N-2}$ 和归一化常数

$$\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)=\frac{N(N-2)}{\pi^{\frac{N}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(N-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-\lambda}{2}\right)}. \tag{1.1}$$

方程（NLH）在缩放变换下保持不变

$$u(x)\longmapsto u_\delta(x)=\delta^{\frac{N-2}{2}}u(\delta x),$$

该变换保持 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ 范数不变。这就是方程（NLH）被称为能量临界方程的原因。

方程（NLH）也被称为非线性 Choquard 方程或Choquard-Pekar 方程，具有若干物理学动机。在次临界情形 $N=3$，$p=2$ 和 $\lambda=1$中，方程（NLH）最早出现在 Fr¨ohlich和Pekar 的极化子模型背景下，该模型描述了单个电子与可极化介电连续介质之间的相互作用，见 [1, 22, 23, 46]。后来，Choquard

2010 数学学科分类。主要分类 35B09、47A74。次要分类 35P10、42B37。关键词和短语。泡解；Funk-Hecke 公式；Hartree 方程；非退化性；球谐函数；立体投影。

提出了方程（NLH），用于描述等离子体 Hartree-Fock理论的近似模型，随后在非线性椭圆方程领域引起了广泛关注，参见 [37, 40, 43]。方程（NLH）也作为一个模型问题，出现在研究具有非局部非线性的非线性薛定谔方程的驻定解时：

$$iu_t - \Delta u - \boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}y\,|u|^{p-2}u = 0, \quad p \geqslant 2. \tag{1.2}$$

从物理角度看，方程(1.2) 有效地描述了量子多体系统的平均场极限，参见例如 [25, 26, 33], 及其中的参考文献。

方程（NLH）正泡解的存在性和唯一性早已为人所知，参见例如 [15, 28, 31, 41, 42, 43] 及其中的参考文献。

方程（NLH）的泡解的存在性与 $\mathbb{R}^N$ 中的尖锐哈代-利特尔伍德-索博列夫不等式密切相关

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)|^p|f(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathrm{C}(N,\lambda)\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.3}$$

其中 $N \geqslant 3$、$0 < \lambda < N$ 和 $p = \dfrac{2N-\lambda}{N-2}$。事实上，通过使用 $\mathbb{R}^N$ 中的尖锐 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式和尖锐Sobolev不等式，在 [39]，中，Miao、Wu 和第四位作者首次证明，在经典能量临界情形 $p = 2$ 下，当且仅当₂时，(1.3) 中的尖锐常数 C (N, λ) 可取得。

$$f(x) = c\cdot\left(\delta^2 + |x-x_0|^2\right)^{-\frac{N-}{2}} \tag{1.4}$$

对于某些 $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\delta > 0$ 以及 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 属于 [41]。随后，Du、Yang 和 Gao 在 [15, 28] 中将这一结果推广到了广义能量临界情形。

尖锐 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式 (1.3) 的极值函数存在性，比不等式 (1.3) 成立这一事实更为微妙。重排不等式、共形变换和立体投影是证明 (1.3) 的极值函数存在性的有效方法，参见 [38, 39]。事实上，我们有

定理 1.1. *[20, 28, 41]*设 $N \geqslant 3$、$0 < \lambda < N$ 和 $p = \dfrac{2N-\lambda}{N-2}$。那么对于任意 f、$g \in \dot{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)|^p|g(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathrm{C}(N,\lambda)\|\nabla f\|_2\|\nabla g\|_2 \tag{1.5}$$

holds with sharp constant

$$\mathrm{C}(N,\lambda) = \left(\frac{\Gamma(N)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\lambda}{2}\right)}{\Gamma(N)\Gamma\left(N-\frac{\lambda}{2}\right)}(4\pi)^N\right)^{\frac{N-2}{2N-\lambda}}. \tag{1.6}$$

此外，(1.5) 中的等号成立，当且仅当

$$f(x) = c\cdot\left(\delta^2 + |x-x_0|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}, \quad and \quad g(x) = c'\cdot f(x),$$

其中 c、$c' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$、$\delta > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^N$。

关于方程（NLH）在 $L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ 中正解的刚性分类，Miao、Wu 和第四位作者首先利用 Kelvin 变换和移动平面法，在 [41] 中证明，在 $p = 2, \lambda = 4 < N$ 的情形下，方程（NLH）的任何非平凡常符号解都必须具有形式 (1.4)。随后，Du、Yang [15] 以及 Guo、Hu、Peng、Shuai [31] 分别将该结果推广到了更一般的情形。更准确地说，我们有

命题 1.2 ([15, 31, 41])**.** 假设 $N \geqslant 3$, $0 < \lambda < N$ 和 $p = \dfrac{2N-\lambda}{N-2}$。设 u 是方程 (NLH) 的一个非平凡常符号解，则存在 $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\delta > 0$ 和$x_0 \in \mathbb{R}^N$，使得 $u(x) = U_{c,\delta,x_0}(x)$，其中

$$U_{c,\delta,x_0}(x) = c \cdot \left(\delta^2 + |x - x_0|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}. \tag{1.7}$$

受 [18, 24, 52, 53]，中特征函数与基态非退化性结果的启发，在研究方程（NLH）的泡解时，自然会提出一个问题:

Are the positive solutions of (NLH) *non-degenerate?*

由于方程（NLH）在缩放和空间平移下保持不变，也就是说，任意解v 是方程（NLH）的解，当且仅当 $v_{\delta,x_0}(x) = \delta^{\frac{N-2}{2}} v(\delta x + x_0)$ 满足

$$-\triangle v_{\delta,x_0}(x) - \boldsymbol{\alpha}(N,\lambda) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v^p_{\delta,x_0}(y)}{|x-y|^\lambda} \mathrm{d}y\, v^{p-1}_{\delta,x_0}(x) = 0 \tag{NLH*}$$

对任意 $\delta > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 均成立。因此，为简单起见，只需考虑具有归一化参数 $c = 1$、$\delta = 1$ 和 $x_0 = 0$, 的解（1.7），即

$$u(x) := U_{1,1,0}(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}. \tag{1.8}$$

这就是我们在（NLH）和（NLH*）中选择归一化常数 $\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)$ 的原因。对（NLH*）分别关于 δ 和 x_0 求导，并在 $(\delta, x_0) = (1,0)$ 处取值，可知生成元

$$\varphi_j(x) := \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = (2-N)\, u(x)\, \frac{x_j}{1+|x|^2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{1.9}$$

and

$$\varphi_{N+1}(x) := \frac{N-2}{2} u(x) + x \cdot \nabla u(x) = \frac{N-2}{2} u(x)\, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}, \tag{1.10}$$

是 $N+1$ 个在无穷远处趋于零的线性无关有界解，满足以下线性化方程

$$-\triangle \varphi = \boldsymbol{\alpha}(N,\lambda) \left[p \left(\frac{1}{|\cdot|^\lambda} * u^{p-1}\varphi \right) u^{p-1} + (p-1) \left(\frac{1}{|\cdot|^\lambda} * u^p \right) u^{p-2}\varphi \right]. \tag{1.11}$$

定义 1.3。若方程 (NLH) 的解 u （由(1.8) 定义）满足以下条件，则称其为非退化解：线性化方程 (1.11) 的任何在无穷远处趋于零的有界解，都必须是由(1.9) 和(1.10)定义的函数 φ_1、$\cdots$ φ_N 和 φ_{N+1} 的线性组合。

现在陈述本文的主要结果。

定理 1.4. 设 $N \geqslant 3$, $\lambda \in (0, N)$ 且 $p = \dfrac{2N-\lambda}{N-2}$。则方程 (NLH) 的常号非平凡解 U_{c,δ,x_0} 是非退化的。

定理 1.4 的结果解决了 [27, 41], 中的一个未解决的非退化性问题，并将 [15, 29, 34, 41] 中的部分非退化性结果推广到完整范围 $\lambda \in (0, N)$。本文的论证与 [15, 29] 和 [32, 34, 56]中的论证不同。事实上，我们将 (1.11) 重写为 $\mathbb{R}^N$中的积分形式，并通过立体投影 S : $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{S}^N$得到其在球面 $\mathbb{S}^N$ 上的等价积分形式。关键的观察是，结合球谐函数分解以及 [4, 8, 51], 中的 Funk-Hecke 公式，与立体投影 S 相关的加权推前映射 S_* 是线性化算子的零空间与次数为一的球谐函数子空间 H_1^{N+1}之间的一一映射。使用立体投影和 Funk-Hecke 公式的这一思路受到 Frank 和 Lieb 在 [20, 21],中的启发

注1.5（关于具有局部《非线性》的非线性椭圆方程的正解的非退化性）。已有大量文献证明了非线性椭圆方程正解的非退化性。Weinstein [55] 和Oh [45] 利用球谐展开，得到了具有次临界《非线性》的非线性椭圆方程正解的非退化性

$$-\triangle u(x) + u(x) - u^p(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 1 < p < \frac{N+2}{N-2}.$$

Rey [48], Dolbeault 和 Jankowiak [14] 利用立体投影，证明了具有临界非线性的非线性椭圆方程的正泡解的非退化性。

$$-\triangle u(x) - u^{\frac{N+2}{N-2}}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.12}$$

关于球谐展开在其他具有局部非线性的非线性椭圆方程正解非退化性研究中的其他应用，请参阅 [2, 3, 5, 9, 10, 16, 17, 18,19, 30, 44, 47, 49, 52] 及其中的参考文献。

注 1.6 （非线性 Hartree 方程正解的非退化性）。设 $N \geqslant 3$、$0 < \lambda < N$ 和 $1 < p < \dfrac{2N-\lambda}{N-2}$。由于非线性 Hartree 方程具有非局部非线性，方程（NLH）的正解的非退化性

$$-\triangle u(x) + u(x) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p(y)}{|x-y|^\lambda} \mathrm{d}y\, u^{p-1}(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.13}$$

更为微妙 e 比具有局部非线性的非线性椭圆方程的正解..... .

Lenzmann 首先利用了牛顿势的多极展开，并获得了基态的非退化性，以

$$-\triangle u(x) + u(x) - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|} \mathrm{d}y\, u(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.14}$$

在 [32], 中另见 [54]。关于将牛顿势在$\mathbb{R}^N(3 \leqslant N \leqslant 5)$中的多极展开应用于研究 $\lambda = N-2$ 和 $p = 2$ 时方程 (1.13) 的正解的非退化性，我们

可参阅 [6]。后来，Xiang 运用扰动论证，证明了在 $\mathbb{R}^3$ 中的 $\lambda = 1$ 和 p 略大于 2 时，方程 (1.13) 的正解的非退化性；近期，Li 将这一扰动论证推广到 $\mathbb{R}^N$ 中的情形，其中 λ 接近 $N-2$ 且 p 略大于 2，从而证明了方程 (1.13) 的正解的非退化性。关于扰动论证的其他应用，请参阅 [15, 29]，其中 λ 接近 0 或 N。

最近，Li、Tang 和 Xu 利用球谐展开和牛顿势的多极展开，得到了能量临界 Hartree 方程中 $\mathbb{R}^6$ 泡解的非退化性。

$$-\triangle u(x) - \int_{\mathbb{R}^6} \frac{u^2(y)}{|x-y|^4} \mathrm{d}y\, u(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^6 \tag{1.15}$$

在 [34] 中。我们也可以参阅 [27]。

最近，作者利用 [13] 中的莫瑟迭代方法，获得了线性化方程（1.11）的能量解的 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 正则性，并证明了方程（NLH）的定号非平凡解$U_{c,\ \delta,\ x_0}$ 在能量空间 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$中的 [35] 是非退化的。同时，作者考察了方程（1.2）的径向阈值解的长时间动力学及其在 [35], 中的刚性分类，该分类取决于能量空间 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ 中泡解的非退化性以及线性化算子的谱。

注 1.7（正解非退化性在构造多泡解中的应用）。关于能量临界非线性 Hartree 方程泡解的存在性，近期已有深入研究，见 [15, 28, 29, 31, 41]。构造方程（NLH）的多泡解颇有意义。据我们所知，除了 [27] 外，关于（NLH）多泡解的结果寥寥无几。然而，对于（NLH）中的极限情形 $\lambda = 0$，即

$$-\triangle u(x) - u^{\frac{N+2}{N-2}}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.16}$$

多泡解已通过 Lyapunov-Schmidt 约化法在 [11, 12], 中构造，其中正解的非退化性起着关键作用。

最后，本文其余部分的组织如下。第 2 节介绍一些记号、关于立体投影的预备结果以及球谐函数的 Funk-Hecke 公式。第 3 节证明定理 1.4。

致谢。作者得到国家重点研发计划（编号：2020YFA0712900）和国家自然科学基金（编号：12371240，编号：12431008）的资助。

2. 记号与预备结果

我们在本节介绍一些记号。我们记 $\mathbf{h}x\mathbf{i} = \left(1+|x|^2\right)^{\frac{1}{2}},$，并用 $\mathbb{S}^N$ 表示 $\mathbb{R}^{N+1}$中的单位球面，即

$$\mathbb{S}^N = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \middle| \quad \sum_{j=1}^{N+1} \xi_j^2 = 1 \right\},$$

而 $g_{ij}\,(1\leqslant i,\,j\leqslant N+1)$ 表示 $\mathbb{S}^N$ 上由 $\mathbb{R}^{N+1}$ 诱导的度量。对于任意 $1\leqslant p<+\infty$，记 $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ 和 $L^p\left(\mathbb{S}^N\right)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{S}^n$ 上取实值的 p 次幂可积函数空间。此外，稍微滥用一下记号，我们在 $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ 和 $L^p\left(\mathbb{S}^N\right)$ 上赋予范数:

$$\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f\left(x\right)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\quad \text{for}\quad f\in L^p\left(\mathbb{R}^N\right),$$

and

$$\|F\|_p=\left(\int_{\mathbb{S}^N}|F\left(\xi\right)|^p\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}},\quad \text{for}\quad F\in L^p\left(\mathbb{S}^N\right),$$

其中，$\mathrm{d}\xi$ 是球面 $\mathbb{S}^N$上的标准体积元。

我们将立体投影 $\mathsf{S}\colon\,\mathbb{R}^N\mapsto\mathbb{S}^N\backslash\{(0,\,0,\,\cdots 0,\,-1)\}$记作

$$\mathcal{S}x=\left(\frac{2x}{1+|x|^2},\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right),$$

其逆映射 $\mathsf{S}^{-1}\colon\,\mathbb{S}^N\backslash\{(0,\,0,\,\cdots 0,\,-1)\}\mapsto\mathbb{R}^N$ 记作

$$\mathcal{S}^{-1}\left(\xi_1{}_{\frac{1}{2}}\xi_2,\cdots,\xi_{N+1}\right)=\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_{N+1}},\frac{\xi_2}{1+\xi_{N+1}},\cdots,\frac{\xi_N}{1+\xi_{N+1}}\right).$$

设 $\rho\left(x\right)=\left(\dfrac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$。由 [20, 39], 可得

$$g_{ij}=\rho^4\left(x\right)\delta_{ij},\;\;|\mathcal{S}x-\mathcal{S}y|=|x-y|\rho\left(x\right)\rho\left(y\right),\tag{2.1}$$

and

$$\mathrm{d}\xi=\rho^{2N}\left(x\right)\mathrm{d}x.\tag{2.2}$$

因此，对于任意 $F\in L^1\left(\mathbb{S}^N\right)$，有如下恒等式

$$\int_{\mathbb{S}^N}F\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^N}F\left(\mathcal{S}x\right)\rho^{2N}\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

为了建立 $\mathbb{R}^N$ 中的函数与球面 $\mathbb{S}^N$上的函数之间的联系，我们可以将 $\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{S}^N$ 中的函数与映射 $\mathsf{S}^{\pm}$复合。对于任意 $f\colon\,\mathbb{R}^N\mapsto\mathbb{R}$，我们将加权推前映射 $\mathsf{S}_*f\colon\,\mathbb{S}^N\backslash\{(0,\,0,\,\cdots 0,\,-1)\}\mapsto\mathbb{R}$ 记作

$$\mathcal{S}_*f(\xi)=\rho^{2-N}\left(\mathcal{S}^{-1}\xi\right)f\left(\mathcal{S}^{-1}\xi\right),\tag{2.3}$$

并且对任意 $F\colon\,\mathbb{S}^N\backslash\{(0,\,0,\,\cdots 0,\,-1)\}\mapsto\mathbb{R}$，我们将加权拉回映射 $\mathsf{S}^*F\colon\,\mathbb{R}^N\mapsto\mathbb{R}$ 记为

$$\mathcal{S}^*F(x)=\rho^{N-2}\left(x\right)F\left(\mathcal{S}x\right).\tag{2.4}$$

简单计算可得

命题 2.1。设 φ_j、$1\leqslant j\leqslant N+1$ 由(1.9) 和(1.10) 定义，且$\mathcal{S}_*$ 由(2.3)定义，则对于任意 $\xi\in\mathbb{S}^N$ 和 $1\leqslant j\leqslant N$，有

$$\mathcal{S}_*\varphi_j(\xi)=\frac{2-N}{2}\,2^{\frac{2-N}{2}}\xi_j,\;\;and\;\;\mathcal{S}_*\varphi_{N+1}(\xi)=\frac{N-2}{2}\,2^{\frac{2-N}{2}}\xi_{N+1}.\tag{2.5}$$

证明。 首先，对于 $j=1,\ 2,\ \cdots\ N$，由 (2.3) 可得

$$\mathcal{S}_{*}\varphi_{j}\left(\mathcal{S}x\right)=\rho^{2-N}\left(x\right)\varphi_{j}\left(x\right), \tag{2.6}$$

这与（1.9）和（1.10）一起意味着

$$\mathcal{S}_{*}\varphi_{j}\left(\mathcal{S}x\right)=\frac{2-N}{2}2^{\frac{2-N}{2}}\frac{2x_{j}}{1+\left|x\right|^{2}}=\frac{2-N}{2}2^{\frac{2-N}{2}}\left(\mathcal{S}x\right)_{j}=\frac{2-N}{2}2^{\frac{2-N}{2}}\xi_{j},$$

and

$$\mathcal{S}_{*}\varphi_{N+1}\left(\mathcal{S}x\right)=\frac{N-2}{2}2^{\frac{2-N}{2}}\frac{1-\left|x\right|^{2}}{1+\left|x\right|^{2}}=\frac{N-2}{2}2^{\frac{2-N}{2}}\left(\mathcal{S}x\right)_{N+1}=\frac{N-2}{2}2^{\frac{2-N}{2}}\xi_{N+1},$$

这意味着（2.5），并完成了证明。 □

现在我们介绍球谐函数，它们与球面 $\mathbb{S}^{N}$ 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱性质有关（见 [4, 8, 51]）。事实上，我们有以下正交分解:

$$L^{2}\left(\mathbb{S}^{N}\right)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_{k}^{N+1}, \tag{2.7}$$

其中， $\mathscr{H}_{k}^{N+1}$ $(k\geqslant 0)$ 表示实齐次调和多项式在 $\mathbb{S}^{N}$ 上的限制所构成的互相正交的子空间，该多项式的次数为 k，并且

$$\dim\mathscr{H}_{k}^{N+1}:=\begin{cases}1, & \text{if } k=0,\\ N+1, & \text{if } k=1,\\ \binom{k+N}{k}-\binom{k-2+N}{k-2}, & \text{if } k\geqslant 2.\end{cases}$$

我们将用 $\left\{Y_{k,j}\mid 1\leqslant j\leqslant\dim\mathscr{H}_{k}^{N+1}\right\}$ 表示 $\mathscr{H}_{k}^{N+1}$ 的标准正交基。特别地，我们有

$$Y_{1,j}\left(\xi\right)=\sqrt{\frac{\left(N+1\right)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{2\pi^{\frac{N}{2}}}}\xi_{j},\quad 1\leqslant j\leqslant N+1,$$

and

$$\mathscr{H}_{1}^{N+1}=\operatorname{span}\left\{\xi_{j}\mid 1\leqslant j\leqslant N+1\right\}, \tag{2.8}$$

该结论与命题 2.1一起表明，加权推进映射 S_{*} 是从子空间 $\mathsf{Span}\{\varphi_{j},1\leqslant j\leqslant N+1\}\subset L^{\infty}(\mathbb{R}^{N})$ 到子空间 $\mathscr{H}_{1}^{N+1}$ 的一一映射，因此加权拉回映射 S^{*} : $\mathscr{H}_{1}^{N+1}\to\mathsf{Span}\{\varphi_{j},1\leqslant j\leqslant N+1\}$ 也是如此。这是定理 1.4 证明中的关键观察。

我们回顾球谐函数的 Funk-Hecke 公式如下。

引理 2.2 ([4, 8])。令 $\lambda\in(0,N)$、整数 $k\geqslant 0$ 和 $\mu_{k}\left(\lambda\right)$ 由(2.10) 定义，则对于任意 $Y\in\mathscr{H}_{k}^{N+1}$，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^{N}}\frac{1}{\left|\xi-\eta\right|^{\lambda}}Y\left(\eta\right)\mathrm{d}\eta=\mu_{k}\left(\lambda\right)Y\left(\xi\right). \tag{2.9}$$

其中

$$\mu_k(\lambda)=2^{N-\lambda}\pi^{\frac{N}{2}}\frac{\Gamma\left(k+\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(k+N-\frac{\lambda}{2}\right)}. \tag{2.10}$$

特别地，简单计算可得

$$\mu_0(N-2)=\frac{8}{N}\cdot\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)},\qquad \mu_1(N-2)=\frac{N-2}{N+2}\cdot\mu_0(N-2), \tag{2.11}$$

$$\mu_0(\lambda)=2^{N-\lambda}\pi^{\frac{N}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{N-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(N-\frac{\lambda}{2}\right)},\qquad \mu_1(\lambda)=\frac{\lambda}{2N-\lambda}\cdot\mu_0(\lambda). \tag{2.12}$$

and

$$\mu_k(\lambda)>\mu_{k+1}(\lambda),\quad \text{for all}\quad k\geqslant 0, \tag{2.13}$$

作为 Funk-Hecke 公式的直接推论，我们有

引理2.3。令 $\lambda\in(0、\ N)$、整数 $k\geqslant 0$和 $\mu_k(\lambda)$由(2.10)定义，则对于任意 $Y\in\mathscr{H}_k^{N+1}$，有

$$\int_{\mathbb{S}^N}\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\xi-\eta|^{N-2}}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}Y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta=\mu_k(N-2)\,\mu_k(\lambda)\,Y(\xi), \tag{2.14}$$

$$\int_{\mathbb{S}^N}\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\xi-\eta|^{N-2}}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}Y(\eta)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\sigma=\mu_k(N-2)\,\mu_0(\lambda)\,Y(\xi). \tag{2.15}$$

证明。我们首先证明 (2.14)。事实上，根据引理 2.2，对于任意 $Y\in\mathscr{H}_k^{N+1}$，

$$\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}Y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=\mu_k(\lambda)\,Y(\eta). \tag{2.16}$$

再次由引理 2.2 得到 $\lambda=N-2$，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\xi-\eta|^{N-2}}\left(\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}Y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\eta=\mu_k(N-2)\,\mu_k(\lambda)\,Y(\xi),$$

结合 Fubini 定理，即可推出（2.14）。

接下来，我们证明（2.15）。根据引理 2.2以及 $1\in\mathscr{H}_0^{N+1}$这一事实，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}\mathrm{d}\sigma=\mu_0(\lambda). \tag{2.17}$$

再次应用引理 2.2并令 $\lambda=N-2$，可得，对于任意 $Y\in\mathscr{H}_k^{N+1}$，

$$\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\xi-\eta|^{N-2}}Y(\eta)\left(\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\eta=\mu_k(N-2)\,\mu_0(\lambda)\,Y(\xi),$$

这意味着（2.15）成立，从而完成证明。 □

3. 定理 1.4的证明

本节将证明定理 1.4，这是本文的主要结果。首先，我们给出一个积分估计，它将在接下来的衰减估计中用到。

引理 3.1. 设 $\lambda\in(0,N)$ 且 $\theta+\lambda>N$。则

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}}\frac{1}{\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\begin{cases}\langle x\rangle^{N-\lambda-\theta}, & \text{if}\quad \theta<N,\\ \langle x\rangle^{-\lambda}\left(1+\log\langle x\rangle\right), & \text{if}\quad \theta=N,\\ \langle x\rangle^{-\lambda}, & \text{if}\quad \theta>N.\end{cases}\tag{3.1}$$

证明。证明分为三种情形。

情形 1： $\boldsymbol{x=0}$。直接计算，并利用假设 $N>\lambda$ 和 $N<\theta+\lambda$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|y|^{\lambda}}\frac{1}{\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim 1.\tag{3.2}$$

情形 2： $\boldsymbol{x\in\mathrm{B}(0,1)\setminus\{0\}}$。一方面，对于 $y\in\mathrm{B}(x,2|x|)$，有 $\mathrm{h}y\mathrm{i}\approx 1$，结合 $|x|<1$ 和 $N>\lambda$ 可知，

$$\int_{\mathrm{B}(x,2|x|)}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\int_0^2 r^{N-\lambda-1}\mathrm{d}r\lesssim 1.\tag{3.3}$$

另一方面，对于 $y\in\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(x,2|x|)$，有 $|y|\approx|x-y|$；结合假设 $N<\lambda+\theta$，可知

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(x,2|x|)}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\int_{\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(0,2|x|)}\frac{1}{|y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\langle x\rangle^{N-\lambda-\theta}.\tag{3.4}$$

将 (3.3) 与 (3.4) 结合，得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim 1,\quad\text{for any}\quad x\in\mathrm{B}(0,1)\setminus\{0\}.\tag{3.5}$$

情形 3： $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(0,1)}$. 首先注意到，对于任意 $y\in\mathrm{B}\left(x,\frac{|x|}{2}\right)$，有 $\mathrm{h}y\mathrm{i}\approx\mathrm{h}x\mathrm{i}$。因此，

$$\int_{\mathrm{B}\left(x,\frac{|x|}{2}\right)}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\frac{1}{\langle x\rangle^{\theta}}\int_0^{\frac{|x|}{2}} r^{N-\lambda-1}\mathrm{d}r\lesssim\langle x\rangle^{N-\lambda-\theta},\tag{3.6}$$

其中我们使用了 $N>\lambda$这一假设。

其次，对于任意 $y\in\mathrm{B}(x,\ 2|x|)\setminus\mathrm{B}\left(x,\ \frac{|x|}{2}\right)$，我们有

$$|y|\leqslant 3|x|,\quad\text{and}\quad |x-y|\approx\langle x\rangle,$$

这意味着，

$$\int_{\mathrm{B}(x,2|x|)\setminus\mathrm{B}\left(x,\frac{|x|}{2}\right)}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\frac{1}{\langle x\rangle^{\lambda}}\int_0^{3|x|}\frac{r^{N-1}}{\langle r\rangle^{\theta}}\mathrm{d}r\lesssim\begin{cases}\langle x\rangle^{N-\lambda-\theta}, & \text{if } \theta<N,\\ \langle x\rangle^{-\lambda}\left(1+\log\langle x\rangle\right), & \text{if } \theta=N,\\ \langle x\rangle^{-\lambda}, & \text{if } \theta>N.\end{cases}\tag{3.7}$$

第三，对于任意 $y\in\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(x,\ 2|x|)$，我们有 $\mathrm{h}y\mathrm{i}\approx|y-x|$，这意味着，

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(x,2|x|)}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\int_{\mathbb{R}^N\setminus\mathrm{B}(x,2|x|)}\frac{1}{|x-y|^{\lambda+\theta}\,\mathrm{d}y}\lesssim|x|^{N-\lambda-\theta}\approx\langle x\rangle^{N-\lambda-\theta},\tag{3.8}$$

其中我们使用了假设 $N<\lambda+\theta$。

最后，利用 (3.6)、(3.7) 和 (3.8)，我们得到，对于任意 $x\in\mathbb{R}^N\setminus$ B (0,1),

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\begin{cases}\langle x\rangle^{N-\lambda-\theta}, & \text{if } \theta<N,\\ \langle x\rangle^{-\lambda}\left(1+\log\langle x\rangle\right), & \text{if } \theta=N,\\ \langle x\rangle^{-\lambda}, & \text{if } \theta>N.\end{cases}\tag{3.9}$$

结合 (3.2)、(3.5) 和 (3.9)，我们得到 (3.1)，从而完成证明。 □

接下来，我们记

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(\varphi)(x)&=p\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^{p-1}(y)\varphi(y)}{|x-y|^{\lambda}}\mathrm{d}y\,u^{p-1}(x)+(p-1)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^{p}(y)}{|x-y|^{\lambda}}\mathrm{d}y\,u^{p-2}(x)\varphi(x)\\&=:\mathfrak{N}_1(\varphi)(x)+\mathfrak{N}_2(\varphi)(x),\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 u 由 (1.8) 定义。

引理 3.2. 设 $\lambda\in(0,N)$，且 $\theta\in[0,N-2]$。若 φ 满足 $|\varphi(x)|\lesssim\ ^{1}\langle x\rangle^{\theta}$，则有

$$|\mathfrak{N}(\varphi)(x)|\lesssim\frac{1}{\langle x\rangle^{\theta+4}}.\tag{3.11}$$

证明。 首先，由引理 3.1，我们有

$$|\mathfrak{N}_1(\varphi)(x)|\lesssim\frac{1}{\langle x\rangle^{N+2-\lambda}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}}\frac{1}{\langle y\rangle^{N+2-\lambda}}\frac{1}{\langle y\rangle^{\theta}}\mathrm{d}y\lesssim\begin{cases}\dfrac{1}{\langle x\rangle^{N+2}}, & \text{if}\quad \theta+2>\lambda,\\ \dfrac{1+\log\langle x\rangle}{\langle x\rangle^{N+2}}, & \text{if}\quad \theta+2=\lambda,\\ \dfrac{1}{\langle x\rangle^{N+\theta+4-\lambda}}, & \text{if}\quad \theta+2<\lambda.\end{cases}\tag{3.12}$$

结合以下事实： $N+2\geqslant\theta+4$、 $N>\lambda$ 和 $1+\log\langle x\rangle\lesssim\langle x\rangle^{N-\lambda}\lesssim 1$，可得

$$|\mathfrak{N}_1(\varphi)(x)|\lesssim\frac{1}{\langle x\rangle^{\theta+4}}.\tag{3.13}$$

接下来，再次利用引理 3.1，可得

$$|\mathfrak{N}_2(\varphi)(x)|\lesssim\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}}\frac{1}{\langle y\rangle^{2N-\lambda}}\mathrm{d}y\frac{1}{\langle x\rangle^{4+\theta-\lambda}}\lesssim\frac{1}{\langle x\rangle^{\theta+4}}.\tag{3.14}$$

结合 (3.13) 和 (3.14)，即可得到结论。 □

由引理 3.2 以及 [7, 50], 中的经典黎斯势理论，我们可以将线性化方程 (1.11) 改写为积分形式。

引理 3.3。 设 $N\geqslant 3$, $\lambda\in(0,N)$。若 $\varphi\in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 满足 (1.11)，则有

$$\varphi(x)=\mathrm{G}(N)\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\mathfrak{N}(\varphi)(y)\,\mathrm{d}y,\tag{3.15}$$

其中 $\mathfrak{N}(\varphi)$ 由 (3.10) 给出，常数 $\mathrm{G}(N) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{2\ N-2}$ () $\pi^{\frac{N}{2}}$ · 此外，我们有以下改进的衰减估计

$$|\varphi(x)| \lesssim \frac{1}{\langle x\rangle^{N-2}}. \tag{3.16}$$

证明。(3.15)由引理 3.2 和 [7, 50] 中经典的黎斯势理论得出。因此，只需证明衰减估计 (3.16)。由 (3.15) 以及关于衰减率的自举论证即可得到。

由于 $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$，我们有 $|\varphi(x)| \lesssim 1$，结合引理 3.2 可知 $|\mathfrak{N}(\varphi)(x)| \lesssim 1\ \mathrm{h}x\mathrm{i}^{4}$ · 因此，根据引理 3.1，存在某个 $0 < \epsilon \ll 1$ 使得

$$|\varphi(x)| \lesssim \begin{cases} \dfrac{1}{\langle x\rangle^{N-2}}, & \text{if } N < 4, \\ \dfrac{1}{\langle x\rangle^{2(1-\epsilon)}}, & \text{if } N \geqslant 4. \end{cases}$$

这归结为提升 $N \geqslant 4$ 的情形。现在，我们通过归纳假设对某个 $1 \leqslant j \leqslant \left[\dfrac{N-2}{2}\right]$，其中 $1 \leqslant j \leqslant \left[\dfrac{N-2}{2}\right]$ 是 $\dfrac{N-2}{2}$ 的整数部分，即

$$|\varphi(x)| \lesssim \frac{1}{\langle x\rangle^{2(j-\epsilon)}}.$$

重复上述类似的论证，我们可以得到 $|\mathfrak{N}(\varphi)(x)| \lesssim \ ^{1}\ \mathrm{h}x\mathrm{i}^{2j+4-\epsilon}$ 和

$$|\varphi(x)| \lesssim \begin{cases} \dfrac{1}{\langle x\rangle^{N-2}}, & \text{if } N < 2j+4-\epsilon, \\ \dfrac{1}{\langle x\rangle^{2(j+1-\epsilon)}}, & \text{if } N \geqslant 2j+4-\epsilon. \end{cases}$$

通过对 $j = 1, \cdots \left[\dfrac{N-2}{2}\right]$ 的归纳论证，我们可以得到该结果。

□

注 3.4. 上述引理中的衰减估计是最优的，因为由 (1.10) 定义的零元 φ_{N+1} 满足 (3.16)。

现在我们将利用立体投影，将 $\mathbb{R}^N$ 上的积分方程 (3.15) 转换为球面 $\mathbb{S}^N$ 上的积分方程。记

$$\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N}\Phi(\xi) = p\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N,1}\Phi(\xi) + (p-1)\,\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N,2}\Phi(\xi), \tag{3.17}$$

其中 $\xi \in \mathbb{S}^N$ 和

$$\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N,1}\Phi(\xi) = 2^{-(p-1)(N-2)} \int_{\mathbb{S}^N}\int_{\mathbb{S}^N} \frac{1}{|\xi-\eta|^{N-2}} \frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}} \Phi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N,2}\Phi(\xi) = 2^{-(p-1)(N-2)} \int_{\mathbb{S}^N}\int_{\mathbb{S}^N} \frac{1}{|\xi-\eta|^{N-2}} \frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}} \Phi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\sigma. \tag{3.19}$$

引理3.5。设 $N\geqslant 3$，且 $\lambda\in(0,\ N)$。若 φ 满足 (3.15)，其中 $|\varphi(x)|\lesssim \frac{1}{\langle x\rangle^{N-2}}$，则 $\mathcal{S}_*\varphi\in L^2\left(\mathbb{S}^N\right)$ 满足

$$\mathcal{S}_*\varphi(\xi)=\mathrm{G}(N)\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N}\mathcal{S}_*\varphi(\xi). \tag{3.20}$$

证明。由 (2.2)、(2.3) 以及估计 $|\varphi(x)|\lesssim \frac{1}{\mathbf{h}x\mathbf{i}^{N-2}}$，可得

$$\int_{\mathbb{S}^N}\left|\mathcal{S}_*\varphi(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi(x)|^2\rho^4(x)\,\mathrm{d}x\lesssim\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{\langle x\rangle^{2N}}\mathrm{d}x<+\infty.$$

现在我们转而证明 (3.20)。首先，由 (3.10) 的定义、(1.8) 和 (2.1)，可得

$$\mathfrak{N}_1(\varphi)(x)=p\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^{N+2}(x)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\mathcal{S}y|^{\lambda}}\left[\rho^{2-N}(y)\varphi(y)\right]\rho^{2N}(y)\,\mathrm{d}y,$$

结合 (2.3)，可得

$$\mathfrak{N}_1(\varphi)(x)=p\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^{N+2}(x)\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\eta|^{\lambda}}\mathcal{S}_*\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{3.21}$$

由 (2.1) 和 (3.21)，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\mathfrak{N}_1(\varphi)(y)\,\mathrm{d}y\\=&p\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^{N-2}(x)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\mathcal{S}y|^{N-2}}\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}y-\sigma|^{\lambda}}\mathcal{S}_*\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\rho^{2N}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{3.22}$$

结合立体投影，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\mathfrak{N}_1(\varphi)(y)\,\mathrm{d}y\\&\qquad=p\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^{N-2}(x)\int_{\mathbb{S}^N}\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\eta|^{N-2}}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}\mathcal{S}_*\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \tag{3.23}$$

接下来，根据 (3.10) 的定义以及 (1.8) 和 (2.1)，可得

$$\mathfrak{N}_2(\varphi)(x)=(p-1)\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^4(x)\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\mathcal{S}y|^{\lambda}}\rho^{2N}(y)\,\mathrm{d}y,$$

结合立体投影可知

$$\mathfrak{N}_2(\varphi)(x)=(p-1)\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^4(x)\varphi(x)\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\eta|^{\lambda}}\mathrm{d}\eta. \tag{3.24}$$

由（2.1）和（3.24）可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\mathfrak{N}_2(\varphi)(y)\,\mathrm{d}y\\=&(p-1)\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^{N-2}(x)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\mathcal{S}y|^{N-2}}\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}y-\sigma|^{\lambda}}\mathrm{d}\sigma\,\rho^{2-N}(y)\varphi(y)\rho^{2N}(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3.25}$$

通过立体投影和 (2.3)，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\mathfrak{N}_2(\varphi)(y)\,\mathrm{d}y\\=&(p-1)\,2^{-(p-1)(N-2)}\rho^{N-2}(x)\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\mathcal{S}x-\eta|^{N-2}}\mathcal{S}_*\varphi(\eta)\int_{\mathbb{S}^N}\frac{1}{|\eta-\sigma|^{\lambda}}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}\tag{3.26}$$

将 (3.23) 和 (3.26) 代入 (3.15)，我们得到

$$\rho^{2-N}(x)\,\varphi(x)=\mathrm{G}(N)\,\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\,\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N}\mathcal{S}_*\varphi(\mathcal{S}x),$$

这结合事实 (2.3) 即可推出结论。 □

现在我们可以利用球面 [4, 8, 51] 上球谐函数的球谐分解和 Funk-Hecke 公式，对球面 $\mathbb{S}^N$ 上方程 (3.20) 的解进行分类。

命题 3.6。令 $N\geqslant 3$、 $\lambda\in(0、\ N)$，以及 $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N}$由(3.17)定义。若 $\Phi\in L^2\left(\mathbb{S}^N\right)\setminus\{0\}$ 满足

$$\Phi(\xi)=\mathrm{G}(N)\,\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\,\mathcal{T}_{\mathbb{S}^N}\Phi(\xi),\tag{3.27}$$

然后 $\Phi\in\mathscr{H}_1^{N+1}$。

证明。另一方面，根据 (2.7)，我们将 $\Phi\in L^2\left(\mathbb{S}^N\right)\setminus\{0\}$ 分解如下。

$$\Phi(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\dim\mathscr{H}_k^{N+1}}\Phi_{k,j}Y_{k,j}(\xi),\tag{3.28}$$

其中 $\Phi_{k,j}=\int_{\mathbb{S}^N}\Phi(\xi)Y_{k,j}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

结合（3.27）、（3.28）与引理 2.3，对于任意 $k\geqslant 0$ 和 $1\leqslant j\leqslant$ 维的 $\mathscr{H}_k^{N+1}$，

$$\Phi_{k,j}=\mathrm{G}(N)\,\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\,2^{-(p-1)(N-2)}\mu_k(N-2)\left[p\mu_k(\lambda)+(p-1)\,\mu_0(\lambda)\right]\Phi_{k,j},\tag{3.29}$$

另一方面，由(2.11)和(2.12)，直接计算可得，对于 $k=1$，

$$\mathrm{G}(N)\,\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\,2^{-(p-1)(N-2)}\mu_1(N-2)\left[p\mu_1(\lambda)+(p-1)\,\mu_0(\lambda)\right]=1,\tag{3.30}$$

这与 (2.13) 一起意味着，对于 $k=0$，有

$$\mathrm{G}(N)\,\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\,2^{-(p-1)(N-2)}\mu_0(N-2)\left[p\mu_0(\lambda)+(p-1)\,\mu_0(\lambda)\right]>1,\tag{3.31}$$

并且对于所有 $k\geqslant 2$ 满足

$$\mathrm{G}(N)\,\boldsymbol{\alpha}(N,\lambda)\,2^{-(p-1)(N-2)}\mu_k(N-2)\left[p\mu_k(\lambda)+(p-1)\,\mu_0(\lambda)\right]<1.\tag{3.32}$$

因此，将 (3.30)、(3.31) 和 (3.32) 代入 (3.29)，可得对任意 $k=0$ 和 $k\geqslant 2$，都有

$$\Phi_{k,j}=0,\quad \text{for}\quad 1\leqslant j\leqslant\dim\mathscr{H}_k^{N+1}.$$

因此，由（3.28）可得 $\Phi\in\mathscr{H}_1^{N+1}$。 □

定理 *1.4* 的证明。设 $\varphi\in L^{\infty}$（$\mathbb{R}^N$）满足（1.11）。

Firs最后，根据引理 3.3，函数 φ 满足（3.15）以及估计 $|\varphi(x)|\lesssim\mathrm{h}x\mathrm{i}^{-(N-2)}$.

其次，根据引理3.5，我们有 $\mathsf{S}_*\varphi \in L^2\left(\mathbb{S}^N\right)$ 满足（3.20）。由命题 3.6可得 $\mathsf{S}_*\varphi \in \mathscr{H}_1^{N+1}$，结合（2.8）可推出

$$\mathcal{S}_*\varphi \in \operatorname{span}\left\{\xi_j \,|\, 1 \leqslant j \leqslant N+1\right\}. \tag{3.33}$$

最后，根据命题 2.1，我们有

$$\varphi \in \operatorname{span}\left\{\varphi_j \,|\, 1 \leqslant j \leqslant N+1\right\}. \tag{3.34}$$

这就完成了定理 1.4 的证明。 □

参考文献

[1] A. Alexandrov 和 N. Mott。《极化子与双极化子》。世界科学出版社，1996年。[2] W. Ao、M. Musso 和 J. Wei。非线性薛定谔方程非径向变号解的非退化性。《法国数学会通报》，147(1):1-48，2019。[3] W. Ao、J. Wei 和 W. Yao。一个近临界椭圆问题变号径向解的唯一性与非退化性。《差分方程进展》，21(11/12):1049-1084，2016。[4] K. Atkinson 和 W. Han。《球面调和函数与单位球面上的逼近：入门》。Springer，柏林、海德堡，2012。[5] T. Bartsch、T. Weth 和 M. Willem。带余项的 Sobolev 不等式以及具有拓扑结构区域上的多调和算子临界方程。《变分法与偏微分方程》，18(3):253-268，2003。[6] G. Chen。任意维数 Hartree 方程基态的非退化性与多重半经典解。《数学成果》，76(1):34，2021。[7] W. Chen、C. Li 和 B. Ou。积分方程解的分类。《纯粹与应用数学通讯》，59(3):330-343，2006。[8] F. Dai 和 Y. Xu。《球面与球上的逼近理论和调和分析》。Springer，纽约，2013。[9] E. Dancer、F. Gladiali 和 M. Grossi。关于 Hardy–Sobolev 方程。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》，147(2):299-336，2017。[10] J. D´avila、M. del Pino 和 Y. Sire。非局部方程临界情形下泡的非退化性。《美国数学会会刊》，141(11):3865-3870，2013。[11] M. del Pino、M. Musso、F. Pacard 和 A. Pistoia。Yamabe 方程的大能量整体解。《微分方程杂志》，251(9):2568-2597，2011。[12] M. del Pino、M. Musso、F. Pacard 和 A. Pistoia。$\mathbb{S}^n$ 上的环面作用及共形不变方程的变号解。《比萨高等师范学校学报·科学类》，12(1):209-237，2013。[13] S. Dipierro、M. Medina 和 E. Valdinoci，整个 $\mathbb{R}^N$上的临界增长分数阶椭圆问题，讲义，第**15** 卷，Appunti。比萨高等师范学校，Edizioni della Normale，比萨，2017年。[14] J. Dolbeault 和 G. Jankowiak。Sobolev 不等式与 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式。《微分方程杂志》，257(6):1689-1720，2014。

[15] L. Du 和 M. Yang。临界非局部方程解的唯一性与非退化性。离散与连续动力系统, 39(10):5847-5866，2019年。[16] M. Fall 和 E. Valdinoci。$(-\Delta)^s u+u=u^p$在 $\mathbb{R}^N$ 中的正解的唯一性与非退化性，其中 s 接近于 1。《数学物理通讯》，329(1), 383-404，2014年。[17] R. Frank、S. Kim 和 A. Pistoia。临界 Lane–Emden 系统的非退化性。《美国数学会会刊》，149(1):265-278, 2021年。[18] R. Frank 和 E. Lenzmann。$(-\Delta)^s Q+Q-Q^{\alpha+1}=0$ 在 $\mathbb{R}$中的基态的唯一性与非退化性。《数学学报》，210(2), 261-318，2013年。[19] R. Frank、E. Lenzmann 和 L. Silvestre。分数阶拉普拉斯算子的径向解的唯一性。《纯粹与应用数学通讯》，69(6), 1671–1726，2016年。[20] R. Frank 和 E. Lieb。一个无需重排的 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式最佳常数证明。谱理论、函数空间与不等式，第55-67页。2012年。巴塞尔。[21] R. Frank 和 E. Lieb。海森堡群上若干不等式的最佳常数。《数学年刊》，176(1):349-381，2012年7月。[22] H. Fr¨ohlich。离子晶体中的电击穿理论。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，160(901):230-241，1937。[23] H. Fr¨ohlich。晶格场中的电子。《心理学进展》，3(11):325-361，1954。[24] J. Fr¨ohlich、B. Lars G. Jonsson 和 E. Lenzmann。玻色子星的有效动力学。《非线性》，20，第5期，1031–1075，2007。[25] J. Fr¨ohlich 和 E. Lenzmann。量子玻色气体的平均场极限与非线性 Hartree´方程。S´emin. Equ. D´eriv. Partielles, 2003—2004年。第 XIX 篇，26页。[26] J. Fr¨ohlich、T. Tsai 和 H.-T. Yau。非线性 Hartree 方程的点粒子（牛顿）极限。《数学物理通讯》，225(2):223-274，2002。[27] F. Gao、V. Moroz、M. Yang 和 S. Zhao。利用局部 Pohozaev 恒等式构造临界 Choquard 方程的无穷多个解。《变分法与偏微分方程》，61(6):222，2022年。[28] F. Gao 和 M. Yang。非线性 Choquard 方程的 Brezis–Nirenberg 型临界问题。《中国科学：数学》，61(7):1219-1242，2018年。[29] J. Giacomoni、Y. Wei 和 M. Yang。临界 Hartree 方程解的非退化性。《非线性分析》，199:111969，2020年。[30] F. Gladiali、M. Grossi 和 S. Neves。´enon 方程在 $\mathbb{R}^n$中的非径向解。《数学进展》，249:1-36, 2013年。[31] L. Guo、T. Hu、S. Peng 和 W. Shuai。涉及 Hardy–Littlewood–Sobolev 临界指数的 Choquard 方程解的存在性与唯一性。《变分法与偏微分方程》，58(4):128，2019 年。[32] E. Lenzmann。伪相对论 Hartree 方程基态的唯一性。《分析与偏微分方程》，2(1):1-27，2009年2月。[33] M. Lewin、P. Nam 和 N. Rougerie。一般平均场玻色系统的 Hartree 理论推导。《数学进展》，254:570-621，2014年。

[34] X. Li、X. Tang 和 G. Xu. $\mathbb{R}^6$中临界非线性 Hartree 方程正解的非退化性.《美国数学会会刊》, 150(12):5203-5216, 2022.[35] X. Li、C. Liu、X. Tang 和 G. Xu. 广义能量临界 Hartree 方程径向阈值解的动力学. arXiv:2310.14646, 2023.[36] Z. Li. Choquard 方程正解的先验估计、唯一性与非退化性. arXiv:2201.00368, 2022.[37] E. Lieb. Choquard 非线性方程极小解的存在性与唯一性. Stud. Appl. Math., 57(2):93-105, 1977.[38] E. Lieb. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式及相关不等式中的最佳常数.《数学年刊》, 118(2):349-374, 1983.[39] E. Lieb 和 M. Loss. 分析. 数学研究生丛书第14卷, 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年.[40] P. L. Lions. Choquard 方程及相关问题. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 4(6):1063-1072, 1980.[41] C. Miao、Y. Wu 和 G. Xu. 聚焦能量临界非线性 Hartree 方程的动力学. Forum Math., 27(1):373-447, 2015年.[42] C. Miao、G. Xu 和 L. Zhao. 径向情形下能量临界聚焦 Hartree 方程的整体适定性、散射与爆破解. Coll. Math., 114(2):213-236, 2009.[43] V. Moroz 和 J. van Schaftingen. Choquard 方程指南. J. Fixed Point Theory Appl., 19(1):773-813, 2017年.[44] M. Musso 和 J. Wei. 临界 Yamabe 问题节点解的非退化性.《数学物理通讯》, 340(3):1049-1107, 2015.[45] Y. Oh. 多阱势下非线性 Schr¨odinger 方程正多峰束缚态.《数学物理通讯》, 131(2):223-253, 1990.[46] S. Pekar. 晶体电子理论研究. 美国原子能委员会技术信息部，1963年.[47] A. Pistoia 和 G. Vaira. 临界 p–Laplace 方程中泡的非退化性. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 151(1):151-168, 2021.[48] O. Rey. 格林函数在涉及临界 Sobolev 指数的非线性椭圆方程中的作用. J. Funct. Anal., 89(1):1-52, 1990.[49] F. Robert. 非线性 Hardy–Sobolev 方程正解的非退化性. Adv. Nonlinear Anal., 6(2):237-242, 2017.[50] E. M. Stein. 奇异积分与函数的可微性. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年.[51] E. M. Stein 和 G. Weiss. 欧几里得空间上的傅里叶分析导论. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1971年.[52] T. Tao，非线性色散方程：局部与整体分析，CBMS. 106，华盛顿特区，美国数学会普罗维登斯分部, 2006年.[53] G. Teschl，量子力学中的数学方法及其在 Schr¨odinger 算子中的应用，第二版，GSM，第157卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014.

[54] J. Wei 和 M. Winter. Schr¨odinger–Newton 方程中的强相互作用峰. J. Math. Phys., 50(1):012905, 2009.[55] M. Weinstein. 非线性 Schr¨odinger 方程基态的调制稳定性. SIAM J. Math. Anal., 16(3):472-491, 1985.[56] C. Xiang. 三维 Choquard 方程基态的唯一性与非退化性. 《变分法与偏微分方程》, 55(6):134, 2016.

李雪梅
数学与复杂系统实验室，教育部，北京师范大学数学科学学院，中华人民共和国北京市，100875。电子邮箱地址：xuemei_li@mail.bnu.edu.cn

刘晨曦 教育部数学与复杂系统重点实验室，北京师范大学数学科学学院，中国北京市 100875。电子邮箱：liuchenxi@mail.bnu.edu.cn

唐兴东 南京信息工程大学数学与统计学院，中国南京，邮编 210044。电子邮箱：txd@nuist.edu.cn

徐桂香 数学与复杂系统实验室，教育部，北京师范大学数学科学学院，北京，100875，中华人民共和国。电子邮箱地址：guixiang@bnu.edu.cn