批处理老虎机的渐近展开*

Yechan Park[1] 和 Nakahiro Yoshida[2,3,4]

[1]东京大学，经济学部 †[2]东京大学，数理科学研究科 ‡[3]日本科学技术振兴机构 CREST[4]统计数理研究所

arXiv:2304.04170v1 [stat.ME] 9 Apr 2023

2023年4月11日

摘要 在赌博机算法中，随机且随时间变化的自适应实验设计，使得传统极限定理难以应用于处理效应的离策略评估。此外，由于劣势臂的样本量较小、信息不足，基于中心极限定理的正态近似并不理想。为解决这一问题，我们引入一种反向渐近展开方法，并基于部分混合证明该方法的有效性。部分混合最初是为随机环境中跳扩散过程的泛函分布展开而提出的。本文将该理论推广至赌博机算法中随机函数的反向传播。除了分析验证外，模拟研究也支持这一新方法。我们提出的框架具有一般性，适用于具有自适应设计的非线性参数化可微统计模型。

关键词和短语 渐近展开、批处理老虎机、部分混合、因果推断。

1 引言

老虎机算法是一种典型的自适应实验设计。它摆脱了经典的确定性设计，使我们能够处理时变的随机设计，这类设计正受到临床试验、广告、在线教育和政策等多个领域的关注。

*本研究部分得到了日本科学技术振兴机构 CREST JPMJCR2115、日本学术振兴会科学研究费助成事业（科学研究）以及统计数理研究所合作研究计划的支持。

†东京大学经济学部：日本东京文京区本乡7-3-1，邮编113-0033。电子邮件：yechanparkjp@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

‡东京大学数理科学研究科：日本东京目黑区驹场3-8-1，邮编153- 8914。电子邮件：nakahiro@ms.u-tokyo.ac.jp

在众多其他问题中做出决策。本文探讨批处理老虎机算法的推断，尤其采用渐近理论方法。

我们将对由 n_s 个个体组成的人群进行建模，阶段 $s \in \mathsf{S} = \{1, ..., S\}$。阶段 s 的第 i_s 个个体对应于集合 $\mathbb{J}^n = \{(s, i_s);\ i_s \in \mathbb{I}_s^n,\ s \in \mathsf{S}\}$ 中的一个元素 $j = (s, i_s)$，其中 $\mathbb{I}_s^n = \{1, ..., n_s\}$ 和数值 $(n_s)_{s\in\mathbb{S}}$ 取决于 $n \in \mathsf{N}$；N 是驱动我们所发展的渐近理论的参数。阶段 $s \in \mathsf{S}$ 的子群记作 $\mathbb{J}_s^n = \{(s, i_s);\ i_s \in \mathbb{I}_s^n\}$。令 $s(j) = s$，其中 $j \in \mathbb{J}_s^n$。给定一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$，个体 $j \in \mathbb{J}_s^n$ 的动作（处理）表示为一个 $\overline{k}_s$ 维随机列向量 $A_j = (A_{j,k_s})_{k_s\in\mathcal{K}_s}$，$\mathcal{K}_s = \{1, ..., \overline{k}_s\}$，其每个分量 A_{j,k_s} 取值于 $\{1, 0\}$ 和 $\sum_{k_s\in\mathcal{K}_s} A_{j,k_s} = 1$。在批处理老虎机的研究中，动作 A_j 的奖励（效应）记为 R_j，并假设其可写为

$$R_j \quad = \quad A_j^\star \beta_{s(j)} + \dot{\epsilon}_j \quad (j \in \mathbb{J}^n) \tag{1.1}$$

其中，β_s 是一个$\overline{k}_s$维确定性列向量，表示动作的影响；$\dot{\epsilon}_j$ 是误差的一个随机变量。星号 $\star$ 表示矩阵转置。

在赌博机算法的分析中，实验设计会随时间随机变化，这给经典推断理论在实际应用中的使用带来了问题。此时，使用临时估计量很容易陷入误区。正如 Hadad 等人 [8] 通过一个简单例子所指出的那样，一个看似自然的处理效应估计量可能会由于权重的随机性而导致有偏估计。本文将讨论的批处理老虎机中也存在这一问题。对于批处理老虎机模型（1.1），Zhang 等人 [41] 证明，使用普通最小二乘估计量（OLS）等标准估计量时，渐近正态性可能失效。在该模型中，由于条件信息量的发散，每个阶段都会出现条件渐近正态性；然而，将这些正态性结合起来的标准估计量会得到一个难以直接处理的正态混合分布。Zhang 等人 [41] 提出了按批次进行学生化的统计量（批处理普通最小二乘法，BOLS），并通过证明其渐近正态性解决了这一问题。

中心极限定理凭借不变性原理，为渐近分析提供了一种通用方法，即变量的渐近方差决定了近似结果。另一方面，众所周知，正态近似的精度并非总是令人满意，尤其是在小样本情况下。无论实验设计如何，小样本都是临床试验中的常见问题；但即使可以假定样本量适中，在多阶段批处理老虎机中，分配到不同试验组的情况不均衡，也可能导致某些试验组的观测值很少。在临床试验中，跨越生死谷时，p 值 0.04 和 0.06 之间的差异十分关键。本文采用渐近展开法，尝试对检验统计量的分布进行更精确的近似。渐近展开是对不变性原理的一种自然高阶扩展，因为它使用了数据的前几个累积量，而这些累积量可以通过数据以非参数方式估计。在应用中，稳健性至关重要。与鞍点近似和蒙特卡洛方法等强烈依赖模型的方法相比，Edgeworth 展开不需要误差项分布的精确信息，这是一大优势。第 7 节中的数值示例展示了噪声分布对检验统计量分布的影响有多大，以及渐近展开在多大程度上改善了近似效果。

在渐近展开理论中，针对不同的依赖关系，人们已经发展出各种方法：Bhattacharya 和 Rao 针对独立观测值， [3], G¨otze 和 Hipp[6, 7] 以及 Kusuoka 和 Yoshida [12] 针对混合过程，Mykland [15, 16] 和 Yoshida[33, 34, 38] 也针对鞅。即使处理效应在给定它们的条件下是相互独立的，分配仍取决于历史，因此，确定渐近展开的特征变成了随机的。这样，最终的极限分布通常会变成条件高斯分布的复杂混合。Yoshida [35]提出了一种基于部分混合的渐近展开方案，并将其应用于部分混合 ϵ-Markov 过程的加性泛函分布的高阶近似，例如随机环境中的跳扩散过程。由于当前阶段的结果决定了批处理老虎机下一阶段的环境，因此每个阶段都具有部分混合的结构。在本文中，基于这一表述，我们引入渐近展开公式，并评估误差的反向传播。由于 Zhang 等人 [41], 使用了鞅中心极限定理，因此可以应用上述鞅展开。然而，就我们所考虑模型的性质而言，部分混合方法更加自然且更有效，因为它无需指定相关鞅的高阶结构即可给出任意阶的展开。像 Zhang 等人的批处理普通最小二乘法那样复杂的随机加权 [41] 可以得到估计量的渐近正态性。然而，正如他们所展示的其他估计量的渐近非正态性，批处理老虎机包含所谓非遍历统计量的结构（参见 Basawa 和 Scott [1]）：由前一层结果引起的随机设计会在当前层产生正态分布的随机混合。现代极限定理的典型例子，源于有限时间范围内利用高频数据对随机过程波动率进行的推断。在那里，沿时间轴出现无限多个阶段，每个阶段都在无穷小时间区间内产生一个中心极限定理；将这些结果汇集起来，便形成正态分布的随机混合。从概念上讲，这类极限定理与本文的极限定理方向相同。近年来，渐近展开理论得到了发展和应用：Yoshida [37, 39][1], Podolskij 和 Yoshida [21], Podolskij 等人 [19, 20], Nualart 和 Yoshida [18],Yamagishi 和 Yoshida [32]。

在具体开始构建理论之前，我们希望先将我们的工作置于关于自适应收集数据的统计推断的一般文献背景之中。我们这里的方法属于使用渐近近似的估计方法。在离策略评估的经典文献中，通常使用的直接方法（DM）采用基于回归的估计量，根据历史数据预测结果；这种方法常常会导致有偏结果，例如 Villar等人 [30], Nie等人 [17], 以及Shin等人[27, 28]的研究所示。作为一种无偏估计量，逆概率加权（IPW）估计量根据分配给特定臂的概率，对每个臂进行逆概率加权，因此是无偏的（参见 Horvitz [9]），但往往会导致较高的方差，从而无法满足渐近正态性。前述两种方法的结合是Vander Laan和Lendle [29], 提出的增广逆概率加权（AIPW）估计量；该估计量除了IPW项之外，还增加了一项，即基于DM 的预测误差的逆加权项。它既是无偏的，相较于 IPW估计量还降低了方差。当分配概率由估计得到时，AIPW 的对应估计量被称为双重稳健（DR）估计量（Robins 等人 [24], Dudik 等人

[1][37]由 arXiv:1210.3680v3 更新

等人 [5])

尽管该方法较逆概率加权估计量有所改进，但对于强调积极学习以尽量降低遗憾的赌博机算法，劣势臂的分配概率会迅速下降，AIPW 估计量的方差仍然过高（Hadad et al. [8]）。鉴于这些困难，近年来有研究尝试采用更能稳定方差的权重，例如 Luedtke 和 Van der Laan [14, 13] 提出的逆标准差加权平均。最近，Hadad et al. [8] 和 Zhan et al. [40] 扩展了他们的工作，提出了逆方差加权估计量，以最小化估计量的方差。另有一种略有不同的自适应加权方案，采用了高维统计中常见的去偏技术。Deshpande et al. [4] 利用臂估计值之间的序列相关性构造自适应权重，提出了 W 去相关估计量，并给出了渐近正态性保证；Khamaru et al. [11] 最近进一步收紧了界。

构建置信区间的另一种方法，是利用集中不等式来构造高概率置信区间，这类方法通常基于鞅结构（Ramdas 等人 [22]），既包括混合鞅等经典结果（Robbins [23]），也包括 Howard 等人 [10] 和 Waudby-Smith 与 Ramdas[31] 等在以往研究基础上提出的近期扩展。尽管这些方法通常能够提供任意时刻有效性——即将 I 类错误控制在用户指定的水平——并且无需对分配过程作出假设即可用于随机停止时间，但它们要求对奖励的潜在结果作出假设，例如假设其具有特定支撑集或方差存在上界，而且可能较为保守。以往的模拟结果表明，基于正态近似的方法虽然理论保证较弱，但在平衡 I 类错误率和检验效能方面表现相对出色，而这两者对于实际假设检验都至关重要（Zhang 等人 [41]）。不过，鉴于各类方法所依据的假设各不相同，因而能提供不同的保证，我们认为它们与基于渐近近似的方法大多是互补的。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，除了具体模型 (1.1) 外，我们还在更一般的设定下重新表述问题，并考虑一个用于计算目标期望的向后递推公式。我们的表述具有一般性，适用于采用自适应设计的非线性参数化可微统计模型。为实现该公式，我们在第 3 节中引入一种反向近似方案，并评估近似序列中误差的反向传播。第 3.1 节通过公式 (3.1) 定义所提出的反向方案，其中涉及一个一般的符号测度 $\Psi_{s,\,\mathrm{p},\,\mathbf{w}_s^n}^n$。之后各节致力于推导条件渐近展开$\Psi_{s,\,\mathrm{p},\,\mathbf{w}_s^n}^n$并估计误差。为适应自适应设计，第 4 节重构了部分混合条件下的渐近展开理论。本文的主要分析结果见第 5 节和第6节。第 5 节将反向近似方案 (3.1) 与第 4 节的渐近展开相结合，并将其应用于一个序贯部分混合过程。第6节针对分层条件独立同分布序列的线性与非线性统计量，更具体地给出了渐近展开公式。尤其是，第 6.2 节给出了非线性泛函的展开公式，并将其应用于第 6.3 节，以处理误差项方差未知时奖励模型 (1.1) 的批处理普通最小二乘法估计量。第 8 节汇总了第 4 节结果的证明。

2 赌博机算法模型与一个反向递推公式

2.1 赌博机算法模型

设 $\mathbf{A}_s^n$ 是取值于可测空间 $\mathfrak{A}_s^n$ 的 $s \in \mathbf{S}$ 随机元素。设 $\boldsymbol{\epsilon}_s^n = (\epsilon_j;\ j \in \mathbf{J}_s^n)$ 对于 $s \in \mathbf{S}$ 成立，其中 ϵ_j 是一个 $\mathbf{r}_s$ 维随机向量。对于 $j \in \mathbf{J}_s^n$，设 W_j^n 是一个关于 $\sigma[\mathbf{A}_{s(j)}^n]$ 可测的 $\mathbf{d}_s \times \mathbf{r}_s$ 随机矩阵。记 $\mathbf{W}_s^n = (W_j^n)_{j \in \mathbb{J}_s^n}$。除奖励模型 (1.1) 外，更一般地，我们考虑一个加权和

$$\mathbb{Z}_s^n \ = \ \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} W_j^n \epsilon_j. \tag{2.1}$$

例如，对于第6.2节中的模型 (1.1)，$\epsilon_j = (\dot{\epsilon}_j, \dot{\epsilon}_j^2 - \sigma_{s(j)}^2)^\star$；不过，除非另有说明，本文此后既不假设 (1.1)，也不使用 R_j。此外，变量 $\mathbf{A}_s^n$ 是抽象的，不再像模型 (1.1) 中那样表示状态 s 下描述分配的变量 $(A_j;\ j \in \mathbf{J}_s^n)$。见注 2.1。设 $\mathcal{L}_s$ 为 $s \in \mathbf{S}$ 上的一个可测空间。对于每个 $(n, s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{S}$，我们考虑一个 $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$- 可测随机映射 $L_s^n \colon \Omega \to \mathcal{L}_s$。我们用 $\underline{L}_s^n = (L_1^n, ..., L_s^n)$ 表示 $(L_s)_{s \in \mathbb{S}}$。这种加下划线的运算 $\cdot_{\underline{s}}$ 也适用于其他向量。在批处理老虎机中，策略（$\mathbf{A}_s^n$的分布）由截至阶段 $s-1$的信息决定，例如阶段 $s-1$各动作的平均效果。变量 $\underline{L}_{s-1}^n$ 和 $\underline{Z}_{s-1}^n$ 将用于制定阶段 s选择处理的准则，如下所示。对每个 $s \in \mathbf{T}$，从可测集 $\mathfrak{C}_s$ 中选取一个标记为 c_s 的分布，遵循定义在 $\mathfrak{C}_s$上的概率分布 $q\big((\underline{L}_{s-1}^n, \mathbf{Z}_{s-1}^n) dc_s\big)$。这种表述很自然，因为在统计决策理论中，通常会考虑随机化决策规则。注意，$q(\cdot, \cdot)$ 取决于 s。我们假设 $\#\mathfrak{C}_1 = 1$，且$q(\emptyset, dc_1)$ 是单点集 $c_1 \in \mathfrak{C}_1$上的狄拉克测度。在第6.2节中，我们将处理与 $\mathbf{Z}_s^n$相关联的某些基本随机变量的线性组合，并将 $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$-可测随机权重纳入变量 L_s^n；见 (6.14)。因此，L_s^n或许包含两个部分，发挥两种作用：定义分配机制并整合基本统计量。

历史由 σ-域 $\mathcal{H}_s^n = \sigma[\mathbf{A}_{s'}^n, \boldsymbol{\epsilon}_{s'}\ s' \le s]$ 记录，其中 $s \in \{0\} \cup \mathbf{S}$ 的平凡 σ-域为 $\mathcal{H}_0^n$。一个常用假设是 $\boldsymbol{\epsilon}_s^n$ 与 $\mathcal{H}_{s-1}^n \vee \sigma[\mathbf{A}_s^n]$ 相互独立，即

$$\boldsymbol{\epsilon}_s^n \perp\!\!\!\perp \big(\mathcal{H}_{s-1}^n \vee \sigma[\mathbf{A}_s^n]\big) \quad (s \in \mathbb{S}). \tag{2.2}$$

条件（2.2）是标准假设，但在本文中我们可以放宽这一条件。令

$$\mathcal{G}_s^n = \sigma\big[L_{s'}^n, \mathbb{Z}_{s'}^n;\ s' \le s\big]$$

对于 $s \in \mathbf{S}$，以及 $\mathcal{G}_0^n$ 平凡的 σ-域。我们不采用（2.2），而是假设条件 $\quad \mathrm{n}$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s^n \perp\!\!\!\perp \big(\mathcal{G}_{s-1}^n \vee \sigma[\mathbf{A}_s^n]\big) \quad (s \in \mathbb{S}) \tag{2.3}$$

除非另有说明。条件期望 $E[\,\cdot\,|\mathcal{G}_{s-1}^n]$ 记作 $E_{s-1}[\,\cdot\,]$，而条件期望 $E\big[\ \cdot\ |\mathcal{G}_{s-1}^n \vee \sigma[\mathbf{A}_s^n]\big]$ 记作 $E_{s-1, \mathbf{A}_s^n}[\,\cdot\,]$。

对于 $\mathbf{w}_s^n = (w_j^n)_{j \in \mathbb{J}_s^n} \in \mathbf{R}^{\mathbf{d}_s \mathbf{r}_s n_s}$，令

$$P_s^n(\mathbf{w}_s^n, dz_s) \ = \ P^{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} w_j^n \epsilon_j}(dz_s), \tag{2.4}$$

$\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n} w_j^n \epsilon_j$的分布。换言之， $P_s^n(\mathbf{W}_s^n, dz_s)$是$\mathbf{Z}_s^n$ 给定 $\mathbf{W}_s^n$ 的正则条件概率，这是由于 (2.3)。

我们假设

$$P^{\mathbf{A}_s^n}\big(da_s|\mathcal{G}_{s-1}^n\big) \;=\; \int_{\mathfrak{C}_s} q\big((\underline{L}_{s-1}^n, \underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n), dc_s\big)\eta_{c_s}(da_s) \tag{2.5}$$

对于某些概率分布 $\eta_{c_s}(c_s \in \mathfrak{C}_s)$，它们是 $\mathbf{A}_s^n$ 给定 $\mathcal{G}_{s-1}^n$的正则条件分布 $P^{\mathbf{A}_s^n}\big(da_s|\mathcal{G}_{s-1}^n\big)$；我们隐含地假设 $\mathfrak{A}_s^n$ 是标准的。由于 L_s^n 和 $\mathbf{W}_s^n$ 是 $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$-可测的，假设 (2.5) 给出了 $(L_s^n, \mathbf{W}_s^n)$ 的正则条件分布的表示，如下所示

$$P^{(L_s^n, \mathbf{W}_s^n)}(dl_s, d\mathbf{w}_s^n|\mathcal{G}_{s-1}^n) \;=\; \int_{\mathfrak{C}_s} q\big((\underline{L}_{s-1}^n, \underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n), dc_s\big)\nu_{c_s}^n(dl_s, d\mathbf{w}_s^n) \tag{2.6}$$

对于概率分布 $\nu_{c_s}^n = \eta_{c_s}^{(L_s^n, \mathbf{W}_s^n)}$，由 η_{c_s} 通过 $(L_s^n, \mathbf{W}_s^n)$ 诱导的测度。

设 $\mathcal{L} = \Pi_{s\in\mathbb{S}}\mathcal{L}_s$ 和 $\mathsf{d} = \sum_{s\in\mathbb{S}}\mathsf{d}_s$。考虑一个 m_s 维随机变量。

$$\mathbb{Y}_s^n \;=\; Y_s^n(L_s^n, \mathbb{Z}_s^n) \tag{2.7}$$

对于可测映射 Y_s^n: $\mathcal{L}_s \times \mathbb{R}^{\mathsf{d}_s} \to \mathbb{R}^{\mathsf{m}_s}$。得益于（2.7）中泛函 $\mathbf{Y}_s^n$ 的一般性，我们的方案适用于具有自适应设计的非线性参数化可微统计模型。第6.2节的方程（6.12）给出了函数Y_s^n的一个例子，即所谓的 Bhattacharya-Ghosh映射，该映射曾被 Bhattacharya和 Ghosh [2] 用于验证各种统计量的形式埃奇沃思展开。给定一个可测函数

$$f : \mathcal{L}\times\mathbb{R}^{\mathsf{m}} \to \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

$\mathsf{m} = \sum_{s\in\mathbb{S}}\mathsf{m}_s$，本文旨在计算期望值

$$\overline{\mathbf{E}}_n \;=\; E\big[f\big(\underline{L}_S^n, \underline{\mathbb{Y}}_S^n\big)\big], \tag{2.9}$$

假设 $f\big(\underline{L}_S^n,\ \mathbf{Y}_S^n\big)$ 可积。

注 2.1。在本节的抽象设定中，变量 $\mathbf{A}_s^n$ 的作用仅仅是通过由它生成的 σ-域来指定其他定量变量的可测性。因此，可以在不引入变量 $\mathbf{A}_s^n$ 的情况下，针对 $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$ 使用抽象的 σ-域 $\mathcal{D}_s^n$。这一点很重要，因为据此，我们的模型已经能够纳入时变协变量以及变量的历史信息。变量 $\mathbf{A}_s^n$ 能够表示比这些分配更多的信息。

一个例子是具有 $\mathfrak{C}_s = \{c_s^{(1)}, c_s^{(2)}\}$ 的 ϵ-贪心算法，其测度 q 满足

$$q\big((\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})\ dc_s\big) \;=\; 1_{\{\mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})\geq 0\}}\delta_{c_s^{(1)}}(dc_s) + 1_{\{\mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})<0\}}\delta_{c_s^{(2)}}(dc_s) \tag{2.10}$$

对于某个函数 $\mathtt{h}_{s-1}$。多臂老虎机也可以类似地处理。另一方面，汤普森采样被实现为

$$\begin{aligned} q\big((\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1}), dc_s\big) \;=\; & 1_{\{\mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})\leq a_{s-1}^{(1)}\}}\delta_{c_s^{(1)}}(dc_s) + 1_{\{\mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})> a_{s-1}^{(2)}\}}\delta_{c_s^{(2)}}(dc_s) \\ & + 1_{\{a_{s-1}^{(1)} < \mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})\leq a_{s-1}^{(2)}\}}\delta_{C_s(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})}(dc_s) \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中， $a_{s-1}^{(1)}$、 $a_{s-1}^{(2)}$ 为某些常数， C_s 为一个取值于 $\mathfrak{C}_s$的函数，其自变量为（$\underline{l}_{s-1}$、 $\underline{z}_{s-1}$）。显然，(2.11)的右端可以写成$\delta_{C_s'(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1})}(dc_s)$，其中 C_s' 为一个取值于 $\mathfrak{C}_s$的函数，其自变量为（$\underline{l}_{s-1}$、 $\underline{z}_{s-1}$），定义为

$$C_s'(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) \;=\; \begin{cases} c_s^{(1)} & (\mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) \le a_1) \\ C_s(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) & (a_{s-1}^{(1)} < \mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) \le a_{s-1}^{(2)}) \\ c_s^{(2)} & (\mathtt{h}_{s-1}(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) > a_s^{(2)}). \end{cases}$$

2.2 一个向后递推公式

我们提出一种向后递推方案来计算 (2.9)。基本思路是对可测函数 g 使用向后移位算子 $\mathbf{B}_{s-1}^n$：$\prod_{s'=1}^s \mathcal{L}_{s'} \times \prod_{s'=1}^s \mathbf{R}^{\mathsf{d}_{s'}}$，其中 $s \in \mathbf{S}$ 且 $n \in \mathbf{N}$，定义如下：

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}_{s-1}^n g)(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) \\ =\;& E\Big[\int_{\mathfrak{C}_s}\int_{\mathcal{L}_s\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s r_s n_s}} g\big(\underline{l}_{s-1}, l_s, \underline{z}_{s-1}, \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n} w_j^n \epsilon_j\big) 1_{\{l_s\in\Lambda_s^n\}} \nu_{c_s}^n(dl_s, d\mathbf{w}_s^n) \\ & \qquad\qquad \times q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}), dc_s\big)\Big] \\ =\;& \int_{\mathfrak{C}_s}\int_{\mathcal{L}_s\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s r_s n_s}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}} g\big(\underline{l}_{s-1}, l_s, \underline{z}_{s-1}, z_s\big) P_s^n(\mathbf{w}_s^n, dz_s) 1_{\{l_s\in\Lambda_s^n\}} \nu_{c_s}^n(dl_s, d\mathbf{w}_s^n) \\ & \qquad\qquad \times q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}), dc_s\big) \qquad (2.12) \end{aligned}$$

若积分存在，其中 Λ_s^n 是 $\mathcal{L}_s$ 中的一个可测集。算子 $\mathbf{B}_{s-1}^n$ 将关于 $(\underline{l}_s, \underline{z}_s)$ 的函数映射为关于 $(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})$ 的函数。

我们有以下简单公式。

引理 2.2。假设 (2.3) 成立。设 $s \in \mathbf{S}$ 且 $n \in \mathbf{N}$。设 g：$\prod_{s'=1}^s \mathcal{L}_{s'} \times \prod_{s'=1}^s \mathbf{R}^{\mathsf{d}_{s'}} \to \mathbf{R}$ 是一个可测函数。那么

$$E_{s-1}\Big[g\big(\underline{L}_s^n, \underline{\mathbb{Z}}_s^n\big) \prod_{s'=1}^s 1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\Big] \;=\; (\mathbf{B}_{s-1}^n g)(\underline{L}_{s-1}^n, \underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n) \prod_{s'=1}^{s-1} 1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}} \quad a.s., \qquad (2.13)$$

假设 $g\big(\underline{L}_s^n,\ \mathbf{Z}_s^n\big)\prod_{s'=1}^s 1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}$ 可积。特别地，(2.13) 右端的随机变量可积。这里乘积 $\prod_{s'=1}^0$ 为 1。

证明。假设 g 有界。那么我们有

$$\begin{aligned}
& E_{s-1}\Big[g\big(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n\big)1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}\Big] \\
= \;& E_{s-1}\Big[E_{s-1,\mathbf{A}_s^n}\Big[g\big(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}W_j^n\epsilon_j\big)\Big]1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}\Big] \\
= \;& E_{s-1}\Big[E\Big[g\big(\underline{l}_s,\underline{z}_{s-1},\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}w_j^n\epsilon_j\big)\Big]\Big|_{\substack{\underline{z}_{s-1}=\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\\ \mathbf{w}_s^n=\mathbf{W}_s^n\\ \underline{l}_s=\underline{L}_s^n}}1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}\Big] \quad (\because (2.3)) \\
= \;& \int E\Big[g\big(\underline{l}_{s-1},l_s,\underline{z}_{s-1},\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}w_j^n\epsilon_j\big)\Big]1_{\{l_s\in\Lambda_s^n\}} \\
& \qquad\qquad \times\nu_{c_s}^n(dl_s,d\mathbf{w}_s^n)q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}),dc_s\big)\Big|_{\substack{\underline{z}_{s-1}^n=\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\\ \underline{l}_{s-1}=\underline{L}_{s-1}^n}} \\
= \;& (\mathbf{B}_{s-1}^n g)(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1})\big|_{\substack{\underline{z}_{s-1}^n=\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\\ \underline{l}_{s-1}=\underline{L}_{s-1}^n}} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

由 (2.6) 可知。因此我们得到 (2.13)。对于一般的 g，我们可以假设 g 非负。对于 $K>0$，用 $g\wedge K$ 替代 g 时，等式 (2.13) 仍然成立。当 $K\uparrow\infty$ 时，$g\wedge K$ 对应的 (2.13) 左端收敛到 g 对应的左端，几乎处处成立（且在 L^1 中成立）。$\mathrm{B}_{s-1}^n(g\wedge K)$ 对应的 (2.13) 右端收敛到 $\mathrm{B}_{s-1}^n g$ 对应的右端；这是由 $\mathrm{B}_{s-1}^n(g\wedge K)\to\mathrm{B}_{s-1}^n g$ 的逐点收敛得到的。 □

我们将在每个阶段 s，通过截断 $\overline{1}_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}$ 和可测集 Λ_s^n 对 $\mathrm{E}n$ 进行修改，其中 $\mathcal{L}_s$。令

$$\mathbf{E}_n \;=\; E\Big[f\big(\underline{L}_S^n,\underline{\mathbb{Y}}_S^n\big)\prod_{s=1}^S 1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}\Big]. \qquad (2.15)$$

Λ_s^n 的选择很重要，因为它将决定 $\mathrm{E}n$ 对 $\mathrm{E}n$ 的近似精度。由于只假设 L_s^n 是 $\sigma[\mathrm{A}_s^n]$-可测的，示性函数 $1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}$ 可以根据指派选择一个良好事件；更一般地，如果 $\sigma[\mathrm{A}_s^n]$ 包含协变量的信息，也可以根据协变量选择。

Let

$$f_S^n(\underline{l}_S,\underline{z}_S) \;=\; f\big(\underline{l}_S,(Y_s^n(l_s,z_s))_{s\le S}\big), \qquad (2.16)$$

并在可积性条件下，定义函数 f_{s-1}^n 为 $f_{s-1}^n(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1})=\mathrm{B}_{s-1}^n f_s^n$，即，

$$\begin{aligned}
& f_{s-1}^n(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) \\
= \;& \int_{\mathfrak{C}_s}\int_{\mathcal{L}_s\times\mathbb{R}^{\mathrm{d}_s r_s n_s}\times\mathbb{R}^{\mathrm{d}_s}} f_s^n\big(\underline{l}_{s-1},l_s,\underline{z}_{s-1},z_s\big)P_s^n(\mathbf{w}_s^n,dz_s)1_{\{l_s\in\Lambda_s^n\}}\nu_{c_s}^n(dl_s,d\mathbf{w}_s^n) \\
& \qquad\qquad \times q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}),dc_s\big)
\end{aligned} \qquad (2.17)$$

对于 $s \in \mathbb{S}$。特别地，函数 f_0^n 是一个常数，其值为

$$f_0^n = \int f_1^n\big(l_1, z_1\big) P_1^n(\mathbf{w}_1^n, dz_1) 1_{\{l_1 \in \Lambda_1^n\}} \nu_{c_1}^n(dl_1, d\mathbf{w}_1^n). \tag{2.18}$$

引理 2.2 给出了对 (2.9) 中 $\mathbb{E}_n$ 的反向近似。

定理 2.3. 假设 $f\big(\underline{L}_S^n, \mathbb{Z}_S^n\big)$ 可积。则

(a) $\mathbb{E}_n = f_0^n$，其中 f_0^n 由 (2.18) 给出，而 $s \in \mathbb{S}$ 对应的函数 f_s^n 由 (2.16) 和 (2.17) 递归给出。

(b) $\mathbb{E}_n = E\big[f\big(\underline{L}_S^n, \mathbb{Y}_S^n\big)\big] = \mathbb{E}_n + \rho_n$，其中

$$|\rho_n| \leq E\left[\big|f\big(\underline{L}_S^n, \underline{\mathbb{Z}}_S^n\big)\big| \sum_{s \in \mathbb{S}} 1_{\{L_s^n \notin \Lambda_s^n\}}\right].$$

3 反向近似方案与误差的反向传播

3.1 反向近似

定理 2.3 给出了期望值 $E\big[f\big(\underline{L}_S^n, \mathbb{Y}_S^n\big)\big]$ 的近似，并采用了关于 $\mathbb{E}_n$ 的反向公式。如果我们完全知道分布 $P_s^n(\mathbb{w}_s^n, dz_s)$ ($s \in \mathbb{S}$)，则可通过公式 (2.16)-(2.18) 归纳计算 $\mathbb{E}_n$ 的值。然而，这些分布很少有闭式，因此我们需要用依赖于 $\mathbb{w}_s^n$ 的符号测度 $\Psi_{s,\ \mathbb{p},\ \mathbb{w}_s^n}^n$ 来近似 $P_s^n(\mathbb{w}_s^n, dz_s)$，其中测度定义在 $\mathbb{R}^{\mathbb{d}_s}$ 上。在这种情况下，渐近展开法很有前景。事实上，对于批处理老虎机，在第 5 节中，我们将应用部分混合条件下的展开方案（Yoshida[35]），推导 $\mathbb{E}_n$ 的渐近展开。记号 $\Psi_{s,\ \mathbb{p},\ \mathbb{w}_s^n}^n$ 预先取定了决定渐近展开阶数的指标 $\mathbb{p}$。在进行这一推导之前，我们将在第 3 节中为我们的方法建立一个框架。

回顾公式（2.17）：

$$\begin{aligned} & f_{s-1}^n(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1}) \\ = & \int_{\mathfrak{C}_s} \int_{\mathcal{L}_s \times \mathbb{R}^{\mathbb{d}_s \mathbb{r}_s n_s} \times \mathbb{R}^{\mathbb{d}_s}} f_s^n\big(\underline{l}_{s-1}, l_s, \underline{z}_{s-1}, z_s\big) P_s^n(\mathbf{w}_s^n, dz_s) 1_{\{l_s \in \Lambda_s^n\}} \nu_{c_s}^n(dl_s, d\mathbf{w}_s^n) \\ & \qquad \times q\big((\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1}), dc_s\big) \end{aligned}$$

对于 $s \in \mathbb{S}$。我们将 $\widehat{f}_s^n(\underline{l}_s, \underline{z}_s)$ 定义为 $\widehat{f}_S^n = f_S^n$，其中 f_S^n 满足 (2.16)，并且

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{s-1}^n(\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1}) = & \int_{\mathfrak{C}_s} \int_{\mathcal{L}_s \times \mathbb{R}^{\mathbb{d}_s \mathbb{r}_s n_s} \times \mathbb{R}^{\mathbb{d}_s}} \widehat{f}_s^n\big(\underline{l}_{s-1}, l_s, \underline{z}_{s-1}, z_s\big) \Psi_{s,\mathbb{p},\mathbb{w}_s^n}^n(dz_s) 1_{\{l_s \in \Lambda_s^n\}} \nu_{c_s}^n(dl_s, d\mathbf{w}_s^n) \\ & \qquad \times q\big((\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1}), dc_s\big) \end{aligned} \tag{3.1}$$

对于 $s \in \mathbb{S}$，若积分 (3.1) 存在。

我们将使用条件渐近展开作为 $\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s}$ 并估计误差。在第 4节重建部分混合下的渐近展开理论以适应自适应设计之后，本工作将在第 5节和第6节展开。我们将把反向近似方案 (3.1) 与第4 节的渐近展开相结合，并在第5节将这一结果应用于序贯部分混合过程。第6节讨论分层条件独立同分布序列的线性与非线性统计量。

3.2 误差的反向传播

为了在阶段s验证公式 (3.1)，被积函数必须满足某些可积性条件。此外，我们还需要限制函数类 f，因为渐近展开的误差界取决于函数f的测度论连续模。对函数 f 使用这种测度论连续模，在通常的渐近展开理论中是不可避免且标准的。关于如何为独立变量构建渐近展开理论，读者可参阅 Bhattacharya 和 Rao [3] 。

设 $r_0 = r_0(\underline{z}_0) = 1$ 且 $r_s(\underline{z}_s)$ 是一个可测函数，使得对于每个 $s \in \mathsf{S}$，所有 $\underline{z}_s$均有 $0 < r_s(\underline{z}_s) \le 1$ 。 $r_s(\underline{z}_s)$ 的两个例子是常数 1 和函数 $\prod_{s'=1}^{s}(1+|z_{s'}|)^{-\gamma}$。然而，我们处理一般函数 $r_s(\underline{z}_s)$。定义 $\widehat{g}^n_s = (\widehat{g}_f)^n_s$ 为

$$\widehat{g}^n_s(\underline{l}_s, \underline{z}_s) = (\widehat{g}_f)^n_s(\underline{l}_s, \underline{z}_s) = \Pi^s_{s'=1} 1_{\{l_{s'} \in \Lambda^n_{s'}\}} r_{s-1}(\underline{z}_{s-1}) \widehat{f}^n_s(\underline{l}_{s-1}, l_s, \underline{z}_{s-1}, z_s).$$

特别是，$\widehat{g}^n_S(\underline{l}_S, \underline{z}_S) = \Pi^S_{s'=1} 1_{\{l_{s'} \in \Lambda^n_{s'}\}} r_{S-1}(\underline{z}_{S-1}) f^n_s(\underline{l}_S, \underline{z}_S)$。设

$$R^n_{s-1} = r_{s-1}(\underline{\mathbb{Z}}^n_{s-1})^{-1} \prod_{s'=1}^{s-1} 1_{\{L^n_{s'} \in \Lambda^n_{s'}\}}$$

对于 $s \in \mathsf{S}$。特别是，$R^n_0 = 1$。

暂且假设

$$E\left[\left| f^n_S(\underline{L}^n_S, \underline{\mathbb{Z}}^n_S) \right| \prod_{s=1}^{S} 1_{\{L^n_s \in \Lambda^n_s\}} \right] < \infty \tag{3.2}$$

and

$$E\left[|\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}^n_s}| \left[\left| \widehat{f}^n_s(\underline{L}^n_{s-1}, L^n_s, \underline{\mathbb{Z}}^n_{s-1}, \cdot) \right| \right] \prod_{s'=1}^{s} 1_{\{L^n_{s'} \in \Lambda^n_{s'}\}} \right] < \infty \qquad (s \in \mathbb{S}), \tag{3.3}$$

其中$|\Psi^n_{s,\ \mathsf{p},\ \mathbf{w}^n_s}|$ 是 $\Psi^n_{s,\ \mathsf{p},\ \mathbf{w}^n_s}$的变差。条件 (3.3) 等价于

$$E\left[R^n_{s-1} |\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}^n_s}| \left[\left| (\widehat{g}_f)^n_s(\underline{L}^n_{s-1}, L^n_s, \underline{\mathbb{Z}}^n_{s-1}, \cdot) \right| \right] \right] < \infty \qquad (s \in \mathbb{S}). \tag{3.4}$$

经反向验证，在条件 (3.3) 下，$\widehat{f}^n_{s-1}(\underline{L}^n_{s-1},\ \mathsf{Z}^n_{s-1})$ 在事件$\{\prod_{s'=1}^{s-1} 1_{\{L^n_{s'} \in \Lambda^n_{s'}\}} = 1\}$上几乎处处有定义。此外，正如引理 2.2中已知的，$f^n_{s-1}(\underline{L}^n_{s-1},\ \mathsf{Z}^n_{s-1})$ 在事件 $\{\prod_{s'=1}^{s-1} 1_{\{L^n_{s'} \in \Lambda^n_{s'}\}} = 1\}$上也几乎处处有定义。

Let

$$\mathbb{D}_s^n(f) \;=\; \Big|E\Big[\widehat{f}_s^n\big(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n\big)\prod_{s'=1}^{s}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\Big]-E\Big[\widehat{f}_{s-1}^n\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)\prod_{s'=1}^{s-1}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\Big]\Big|. \tag{3.5}$$

于是有

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_s^n(f) \;&=\; \Big|E\Big[r_{s-1}\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)^{-1}E_{s-1}\Big[r_{s-1}\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)\widehat{f}_s^n\big(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n\big)\prod_{s'=1}^{s}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\Big]\Big]\\
&\quad -E\Big[\widehat{f}_{s-1}^n\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)\prod_{s'=1}^{s-1}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\Big]\Big|\\
&=\; \Big|E\Big[r_{s-1}\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)^{-1}\prod_{s'=1}^{s-1}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\\
&\qquad\times\Big\{\big(\mathbf{B}_{s-1}^n(\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{\cdot\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}\widehat{f}_s^n)\big)\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)\\
&\qquad\quad-\big(\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{\cdot\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}\widehat{f}_{s-1}^n\big)\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)\Big\}\Big]\Big|\end{aligned}$$

由引理 2.2 的式 (2.13) 可知。因此,

$$\mathbb{D}_s^n(f) \;=\; \Big|E\Big[R_{s-1}^n\triangle_s^n(f)\Big]\Big|$$

for

$$\triangle_s^n(f) \;=\; \big(\mathbf{B}_{s-1}^n(\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{\cdot\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}\widehat{f}_s^n)\big)\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)-\big(\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{\cdot\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}\widehat{f}_{s-1}^n\big)\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big).$$

显然,

$$\mathbb{D}_s^n(f)\;\le\;\big\|R_{s-1}^n\triangle_s^n(f)\big\|_1\;\le\;(n_s)^\epsilon\big\|\triangle_s^n(f)\big\|_1+V_{s-1}^{\epsilon,n}(f)\qquad(s\in\mathbb{S})$$

对于任意正数 ϵ, 其中

$$V_{s-1}^{\epsilon,n}(f) \;=\; \big\|1_{\{R_{s-1}^n>(n_s)^\epsilon\}}R_{s-1}^n\triangle_{s-1}^n(f)\big\|_1. \tag{3.6}$$

我们有

$$\begin{aligned}\triangle_s^n(f) \;&=\; \big(\mathbf{B}_{s-1}^n(\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{\cdot\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}\widehat{f}_s^n)\big)\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)-\big(\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{\cdot\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}\widehat{f}_{s-1}^n\big)\big(\underline{L}_{s-1}^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n\big)\\
&=\;\int_{\mathfrak{C}_s}\int_{\mathcal{L}_s\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s\mathsf{r}_s n_s}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}}\Pi_{s'=1}^{s}1_{\{l_{s'}\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}(\underline{z}_{s-1})\widehat{f}_s^n\big(\underline{l}_{s-1},l_s,\underline{z}_{s-1},z_s\big)P_s^n(\mathbf{w}_s^n,dz_s)\\
&\qquad\qquad\times\nu_{c_s}^n(dl_s,d\mathbf{w}_s^n)q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}),dc_s\big)\Big|_{\underline{l}_{s-1}=\underline{L}_{s-1}^n,\underline{z}_{s-1}=\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n}\\
&\quad-\int_{\mathfrak{C}_s}\int_{\mathcal{L}_s\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s\mathsf{r}_s n_s}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}}\Pi_{s'=1}^{s}1_{\{l_{s'}\in\Lambda_{s'}^n\}}r_{s-1}(\underline{z}_{s-1})\widehat{f}_s^n\big(\underline{l}_{s-1},l_s,\underline{z}_{s-1},z_s\big)\Psi_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}^n(dz_s)\\
&\qquad\qquad\times\nu_{c_s}^n(dl_s,d\mathbf{w}_s^n)q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}),dc_s\big)\Big|_{\underline{l}_{s-1}=\underline{L}_{s-1}^n,\underline{z}_{s-1}=\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n}\\
&=\; E_{s-1}\big[\widehat{g}_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)\big]-E_{s-1}\big[\Psi_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}^n\big[\widehat{g}_s^n(\underline{L}_{s-1}^n,L_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\big]\big].\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\left\|\triangle_s^n(f)\right\|_1 &= E\left[\left|E_{s-1}\left[\widehat{g}_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)-\Psi_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}^n\left[\widehat{g}_s^n(\underline{L}_{s-1}^n,L_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\right]\right]\right|\right]\\ &= E\left[\left|E_{s-1}\left[E_{s-1,\mathbf{A}_s^n}\left\{\widehat{g}_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)-\Psi_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}^n\left[\widehat{g}_s^n(\underline{L}_{s-1}^n,L_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\right]\right\}\right]\right|\right]\\ &\leq \Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big),\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big) = \left\|E_{s-1,\mathbf{A}_s^n}\left[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)\right]-\Psi_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}^n\left[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\right]\right\|_1. \tag{3.7}$$

因此，

$$\mathbb{D}_s^n(f) \leq \begin{cases}\Delta_1^n((\widehat{g}_f)_1^n) & (s=1)\\ (n_s)^\epsilon\Delta_s^n((\widehat{g}_f)_s^n)+V_{s-1}^{\epsilon,n}(f) & (s\geq 2)\end{cases} \tag{3.8}$$

以这种方式，对于

$$f_0^n = \mathbf{E}_n = E\left[f_S^n\big(\underline{L}_S^n,\underline{\mathbb{Z}}_S^n\big)\prod_{s=1}^S 1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}\right] = E\left[\widehat{f}_S^n\big(\underline{L}_S^n,\underline{\mathbb{Z}}_S^n\big)\prod_{s=1}^S 1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}\right],$$

我们得到以下结果。

^命题 3.1。假设 (2.3)、(3.2) 和 (3.3)。则 f_0^n 和 f_0^n 均有定义，且

$$\begin{aligned}\left|f_0^n-\widehat{f}_0^n\right| &\leq \sum_{s=2}^S(n_s)^\epsilon\Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big)+\sum_{s=2}^S V_{s-1}^{\epsilon,n}(f)+\Delta_1^n\big((\widehat{g}_f)_1^n\big)\\ &\leq \sum_{s=1}^S(n_s)^\epsilon\Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big)+\sum_{s=2}^S V_{s-1}^{\epsilon,n}(f).\end{aligned} \tag{3.9}$$

在第5节中，我们将把命题 3.1给出的近似误差的反向估计与条件型爱德华兹展开结合起来。(3.9)中的因子 $\Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big)$ 将证明是可忽略的，而较小的 ϵ 并不重要。由 (3.6) 定义的项 $V^{\epsilon,n}_{s-1}(f)$，如果R_{s-1}^n 的矩以及$\triangle_{s-1}^n(f)$的有界性可用，也同样是可控的，而这很常见。正如在渐近展开理论的通常语境中一样，我们将处理关于 z_s至多具有多项式增长的函数$\frown f_s^n(\underline{L}_s^n$, $\mathsf{Z}_{s-1}^n, z_s)$。然而，由于它们是随机函数，因此需要谨慎处理。

对于 $(M,\gamma)\in\mathbb{R}_+^2$，用 $\mathcal{E}_s(M,\gamma)$ 表示可测函数 $\mathsf{f}:\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}\to\mathbb{R}$ 的集合，这些函数满足 at

$$\big|\mathsf{f}(z_s)\big| \leq M(1+|z_s|)^\gamma \qquad \big(z_s\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}\big).$$

给定$\mathbf{M}=(M_s)_{s\in\mathbb{S}}\in\mathbb{R}_+^S$，用 $\mathcal{D}(\mathbf{M}\ \gamma)$ 表示一族可测函数 f: $\mathcal{L}\times\mathbb{R}^{\mathsf{m}}\to\mathbb{R}$，满足以下条件：

$$(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot) \subset \mathcal{E}_s(M_s,\gamma) \qquad a.s. \tag{3.10}$$

$\widehat{}$对于每个 $s \in \mathbb{S}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。于是，对于 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{M}, \gamma)$，函数 $f^n_{s-1}(\underline{L}^n_{s-1}, \mathbb{Z}^n_{s-1})$ 可以归纳地良好定义，如果

$$E\big[R^n_{s-1}\,|\Psi^n_{s,\mathfrak{p},\mathbf{W}^n_s}|[1+|z_s|^\gamma]\,\Pi^s_{s'=1}1_{\{L^n_{s'}\in\Lambda^n_{s'}\}}\big] \;<\; \infty \qquad (s\in\mathbb{S}). \tag{3.11}$$

见（3.4）。

定理 3.2. 假设条件 (2.3)、(3.2) 和 (3.11) 均得到满足。那么 $f^{n\,\widehat{}}_0$ 和 f^n_0 均有良好定义，并且对于所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{M}, \gamma)$，$\mathbb{M} = (M_s)_{s\in\mathbb{S}}$，(3.9) 成立。

$r_s(\underline{z}_s)$ 的一个自然选择可能是 $\prod^s_{s'=1}(1+|z_{s'}|)^{-\gamma}$，而我们暂时保留一个通用的 $r_s(\underline{z}_s)$。例如，如果 $\gamma = 0$ 由适当选择的 $\underline{L}^n_s$ 和 Λ^n_s构成，并且 $\mathcal{D}(\mathbb{M}, \gamma)$ 由一致有界函数组成，则条件 (3.11) 得到满足。稍后将通过加入确保函数具有测度论连续性的条件来限制类 $\mathcal{D}(\mathbb{M}, \gamma)$。除了控制函数的大小之外，这种限制在渐近展开理论中也是必要且标准的。在格点情形中，具有连续函数的普通埃奇沃思展开无法对分布函数给出任何更高阶的近似，这一事实说明了这一要求的必要性。

3.3 ϵ-贪婪算法的改进反向方案

对于类似于 (2.10)的 ϵ-Greedy 算法，关于 $q\big((\underline{l}_{s-1}, \underline{z}_{s-1})dc_s\big)$ 的积分在公式 (3.1) 中变为求和 $\sum_{c_s\in\mathfrak{C}_s}$，因此，该公式的递推给出了一个$(S-1)$-$\widehat{}$元组和 $\sum_{c_2\in\mathfrak{C}_2}\cdots\sum_{c_S\in\mathfrak{C}_S}$。所以，可以使用一个 函数 $f^{n,\ c\,\widehat{}}_s$进行反向传播，该函数的定义类似于 (2.10)，但沿着固定的场景 $c = (c_s)_{s\in\mathbb{S}}$ 进行。然后，$\sum_{c_2\in\mathfrak{C}_2}\cdots\sum_{c_S\in\mathfrak{C}_S} f^{n,\ c\,\widehat{}}_s$ 给出 f^n_0。

4 部分混合与渐近展开

定理 3.2 给出了用 $\Psi^n_{s,\mathfrak{p},\mathbf{w}^n_s}(dz_s)$ 近似 $P^n_s(\mathbf{w}^n_s, dz_s)$ 所产生误差的估计 (3.9)。借助部分混合下的渐近展开理论，可以评估这一误差界。我们首先将该理论推广，以纳入第 5 节中出现的序贯条件化。

4.1 部分混合过程的渐近展开

本节回顾 Yoshida [35] 提出的部分混合过程的渐近展开方案。尽管论文采用了更一般的理论形式，我们仍将以简化形式介绍该方案。此外，本节还针对本文的用途，对原始设定作了推广。为方便读者查阅论文，我们基本沿用 Yoshida [35] 中的记号。例如，此处用符号“$\mathcal{C}$”表示部分混合的条件 σ-域。

在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上，我们考虑一族子 σ-域 $(\mathcal{B}_I)^{I\subset\mathbb{R}_+}$，使得$\mathcal{B}_I \subset \mathcal{B}_J$ 对 $I \subset J \subset \mathbb{R}_+$ 均成立。设子 σ-域 $\mathcal{C}$ 属于 $\mathcal{F}$，且 $\mathcal{C}$-可测随机数$\alpha(s,t|\mathcal{C})$ $(s,t \in \mathbb{R}_+, s \le t)$ 满足

$$1 \ \ge\ \alpha(s,t|\mathcal{C}) \ \ge\ \sup\left\{\left|P_{\mathcal{C}}[B_1 \cap B_2] - P_{\mathcal{C}}[B_1]P_{\mathcal{C}}[B_2]\right|;\ B_1 \in \mathcal{B}_{[0,s]} \vee \mathcal{C}, B_2 \in \mathcal{B}_{[t,\infty)} \vee \mathcal{C}\right\}.$$

此处， $P_{\mathcal{C}}$ 表示给定 $\mathcal{C}$的条件概率。随机场 $\alpha(s,t|\mathcal{C})$称为 $\mathcal{C}$-条件 α-混合系数。我们假设 $\mathcal{C}$-可测的随机数$\alpha(h|\mathcal{C})$（$h \in\mathbb{R}_+$）满足

$$1 \ \ge\ \alpha(h|\mathcal{C}) \ \ge\ \sup\left\{\alpha(t,t+h'|\mathcal{C});\ h' \ge h, t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

对于 $h \in\mathbb{R}_+$。

我们将考虑一个d 维过程 $Z = (Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$，使得 Z_0 是 $\mathcal{B}_{[0]} \vee \mathcal{C}$-可测的，并且对于每个 $s,t \in \mathbb{R}_+$, $s \le t$， $Z_t^s := Z_t - Z_s$ 是 $\mathcal{B}_{[s,t]} \vee \mathcal{C}$-可测的。 Z在 $I \subset\mathbb{R}_+$上的增量记为 Z_I，即 $Z_I = Z_{\sup I} - Z_{\inf I}$。

给定正整数 $\mathsf{p} \ge 3$，分布 $T^{-1/2}Z_T$ 的第 $(\mathsf{p}-2)$ 个渐近展开公式由 $\mathcal{C}$-条件公式 $\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}$给出。公式 $\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}$ 是一个 $\mathcal{C}$-可测随机符号测度，具体如下。 $\mathcal{C}$-条件累积量函数 $\chi_{T,r,\mathcal{C}}(u)$ 关于 $T^{-1/2}Z_T$ 定义为

$$\chi_{T,r,\mathcal{C}}(u) \ \ =\ \ \left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^r \log E_{\mathcal{C}}\left[\exp\left(\mathtt{i}\epsilon u \cdot T^{-1/2}Z_T\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{4.1}$$

对于 $u \in \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$，其中 $E_{\mathcal{C}}$ 表示给定 $\mathcal{C}$的条件期望。接下来， $\mathcal{C}$-可测的随机函数 $P_{T,r,\mathcal{C}}(u)$ 的 $u \in \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 由形式展开定义

$$\exp\left(\sum_{r=2}^{\infty}\epsilon^{r-2}(r!)^{-1}\chi_{T,r,\mathcal{C}}(u)\right) \ \ =\ \ \exp\left(2^{-1}\chi_{T,2,\mathcal{C}}(u)\right)\sum_{r=0}^{\infty}\epsilon^r T^{-r/2}P_{T,r,\mathcal{C}}\left(u;\chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\right), \tag{4.2}$$

$P_{T,\ 0,\ \mathcal{C}}\left(u;\ \chi_{T,\ \cdot,\ \mathcal{C}}\right) = 1$，以及函数 $\widehat{\Psi}_{T,\ \mathsf{p},\ \mathcal{C}}(u)$ 的 $u \in \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 定义为部分和

$$\widehat{\Psi}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}(u) \ \ =\ \ \exp\left(2^{-1}\chi_{T,2,\mathcal{C}}(u)\right)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2}T^{-r/2}P_{T,r,\mathcal{C}}\left(u;\chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\right). \tag{4.3}$$

最后，随机符号测度 $\Psi_{T,\ \mathsf{p},\ \mathcal{C}}$ 定义为 $\Psi_{T,\ \mathsf{p},\ \mathcal{C}}$ 的傅里叶反演:

$$\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}} \ \ =\ \ \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\Psi}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\right]. \tag{4.4}$$

如果二次型 $\mathsf{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T][u^{\otimes 2}] = \chi_{T,2,\mathcal{C}}(u)$ 退化，我们令 $\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}$表示 0 处的狄拉克$\delta$测度。[应当指出，在定理 4.1 的证明中，由傅里叶反演 (4.4) 定义的符号测度 $\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}$ 仅用于事件 $\{s_T I_{\mathsf{d}} \le \mathsf{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] \le u_T I_{\mathsf{d}}\}$ 上。因此，这项附带条件并非论述中的必要条件。]

引入一个 $\mathcal{C}$-可测截断泛函 $\Phi_T :\ \Omega \to \{0,1\}$。公式的误差通过

$$\Delta_T^{\Phi}(\mathsf{f}) \ \ =\ \ \left\|\Phi_T\left(E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{f}\left(T^{-1/2}Z_T\right)\right] - \Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}]\right)\right\|_1 \tag{4.5}$$

对于$\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$上的一个 $\mathcal{C}$-可测随机场 f。在处理 (4.5) 时，我们考虑以下条件：

$$\limsup_{T\to\infty} \left\| \Phi_T |\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}| [1+|\cdot|^{\mathsf{p}_0}] \right\|_q \;<\; \infty \tag{4.6}$$

对于某个 $q>1$，其中 $\mathsf{p}_0 = 2\lfloor \mathsf{p}/2 \rfloor$。

在 (4.5) 中，我们考虑定义在 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的 $\mathcal{C}$-可测随机场 f，从而推广 Yoshida[35] 中的结果。这一扩展对于将其应用于本文研究的批处理老虎机是必要的。定义随机场 f 的截断连续模 $\omega_2^{\Phi}(\mathsf{f};\,\epsilon,\nu)$ 如下

$$\omega_2^{\Phi}(\mathsf{f};\epsilon,\nu) \;=\; \left\{ E\left[\Phi_T \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \omega_{\mathsf{f}}(x;\epsilon)^2 \nu(dx) \right] \right\}^{1/2}, \tag{4.7}$$

其中，$\omega_{\mathsf{f}}(x;\,\epsilon)$ 是一个 $\mathcal{C}\times\mathsf{B}_{\mathsf{d}}$-可测随机变量，满足 $\omega_{\mathsf{f}}(x;\,\epsilon) \ge \sup\left\{ |\mathsf{f}(x+h)-\mathsf{f}(x)|;\; |h|\le\epsilon \right\}$，且 $\mathsf{B}_{\mathsf{d}} = \mathsf{B}[\mathbb{R}^{\mathsf{d}}]$ 是 d 维 Borel σ- 代数。当 ν 绝对连续时，我们将 $\omega_2^{\Phi}(\mathsf{f};\,\epsilon,\nu)$ 简记为 $\omega_2^{\Phi}(\mathsf{f};\,\epsilon, d\nu/dx)$。

记 $\check{\mathcal{E}}(M,\gamma)$ 为满足以下条件的函数 $\mathsf{f}:\Omega\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\to\mathbb{R}$ 的集合：这些函数是 $\mathcal{C}\times\mathsf{B}_{\mathsf{d}}$-可测的，并且满足

$$|\mathsf{f}(\omega,x)| \;\le\; M\big(1+|x|\big)^{\gamma} \quad (x\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}}) \quad a.s.$$

我们将使用以下条件。

[P1] 存在正常数 a，使得对所有 $h>0$ 都有 $\|\alpha(h|\mathcal{C})\|_1 \le a^{-1}\exp(-ah)$。

[P2] 存在正数 h_0，使得对每个 $L\in\mathbb{N}$,

$$E\left[\left(E_{\mathcal{C}}[|Z_0|^{\mathsf{p}+1}]\right)^L\right] + \sup_{\substack{t,h:t\in\mathbb{R}_+\\ 0\le h\le h_0}} E\left[\left(E_{\mathcal{C}}\left[|Z_{t+h}^t|^{\mathsf{p}+1}\right]\right)^L\right] \;<\; \infty$$

并且对所有 $t\in\mathbb{R}_+$, $E_{\mathcal{C}}[Z_t]=0$ a.s.。

为了证明渐近展开中的误差界，我们需要所涉泛函的分布具有一定的正则性。在独立变量的经典情形下，所谓的 Cramér 条件可用于验证和的特征函数的傅里叶反演。由于变量相互独立，特征函数可分解为各个增量的特征函数之积，而 Cramér 条件则保证每个因子的衰减。对于混合过程，如果马尔可夫性质成立，则借助每个增量的条件特征函数，可以实现类似的分解，而 Cramér 条件被其条件版本所取代。对于随机分析中的泛函，泛函增量的 Malliavin 协方差矩阵的局部非退化性发挥了这一作用（[35]）。事实上，在 [35] 中，研究人员借助支撑定理，将 Wiener-Poisson 空间上的 Malliavin 演算应用于带跳随机微分方程。

约简区间的概念是必要的。对于一组区间 $(I_\ell)_{\ell\in\{1,\dots,n'(T)\},\,T>0}$如果满足以下条件，则称其为与 $\mathcal{C}$和 $\big(\widehat{\mathcal{C}}(\ell)\big)_{\ell\in\{1,\dots,n'(T)\},\,T>0}$相关的（稠密）约简区间。

(i) $\mathcal{C}(\ell)$ ($\ell \in \{1, ..., n'(T)\}$, $T > 0$) 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-域，且 $\mathcal{C}(\ell) \supset \mathcal{C}_\circ$

(ii) $I_\ell = [u_\ell, v_\ell]$ 满足 $v_\ell \leq u_{\ell+1}$，对于 $\ell \in \{1, ..., n'(T) - 1\}$，$0 < \inf_{T,\ \ell} \left(v_\ell - u_\ell\right) \leq \sup_{T,\ \ell} \left(v_\ell - u_\ell\right) < \infty$，且 $\liminf_{T\to\infty} \left(n'(T)/T\right) > 0_\circ$

(iii) 对于任意子序列 $\ell_1, ..., \ell_{n''(T)}$，其取自 $1, ..., n'(T)$；任意有界的 $\mathcal{B}_{[0,T]\setminus\cup_{\ell\in\{\ell_1,...,\ell_{n''(T)}\}} I_\ell} \vee \mathcal{C}$-可测随机变量 A，以及任意有界的 $\mathcal{B}_{I_{\ell''}} \vee \mathcal{C}$-可测随机变量 $\mathsf{A}_{\ell''}$, $\ell'' \in \{\ell_1, ..., \ell_{n''(T)}\}$，均有

$$E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{A}\mathsf{A}_{\ell_1} \cdots \mathsf{A}_{\ell_{n''(T)}}\right] \ = \ E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{A} E_{\widehat{\mathcal{C}}(\ell_1)}[\mathsf{A}_{\ell_1}] \cdots E_{\widehat{\mathcal{C}}(\ell_{n''(T)})}[\mathsf{A}_{\ell_{n''(T)}}]\right]. \tag{4.8}$$

在上述条件中，I_ℓ 和 $\mathcal{C}(\ell)$ 可能依赖于 T。条件 (4.8) 是一种条件型的马尔可夫性质。例如，如果系统的底层过程是马尔可夫过程，那么我们可以取 σ-域 $\mathcal{C}(\ell)$，它由 I_ℓ边界处的过程信息构成。

对于当前情形，以下条件以一种较为抽象的方式扩展了经典的 Cramér 条件。

[P3] 对于每个 $L > 0$，存在截断泛函 $\psi_j : (\Omega\ \mathcal{F}) \to ([0, 1], \mathsf{B}([0, 1]))$，并且存在正数常数 η_1、η_2、η_3 和 B，使得 $\eta_1 + \eta_2 < 1$、$\eta_3 < 1$ 并且

$$P\left[\sum_j P_{\mathcal{C}}\left[\widetilde{\Phi}(j) \leq 1 - \eta_2\right] > \eta_3 n'(T)\right] \ = \ o(T^{-L})$$

作为 $T \to \infty$，其中

$$\widetilde{\Phi}(j) \ = \ E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}\left[\psi_j\right] \cdot 1_{\left\{\sup_{u:|u|\geq B} \left|E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}\left[\psi_j \exp(\mathtt{i}u\cdot Z_{I(j)})\right]\right| < \eta_1\right\}}.$$

条件 $[P3]$ 是注15 中 Yoshida [35], 第609页提到的条件 $[A3^\natural]$。

以下结果是 Yoshida [35], p.565 中定理 1 的推广。为优先考虑简洁性，我们将讨论条件指数混合情形，尽管也可以处理上述论文中讨论的混合速度较慢的情形。记 $I^\varrho = \{t \in \mathbb{R}_+;\ \mathrm{dist}(t, I) \leq \varrho\}_\circ$

定理 4.1. 设 $\left(I(j)\right)_{j=1,...,n'(T)}$ 为稠密约化区间，且 $\left(\widehat{\mathcal{C}}(j)\right)_{j=1,...,n'(T)_\circ}$ 假设存在正常数 ϱ，使得 $\mathcal{C}(j) \subset \mathcal{B}_{I(j)^\varrho} \vee \mathcal{C}_\circ$ 假设条件 (4.6)、$[P1]$、$[P2]$ 和 $[P3]$ 均成立。设 $K, M \in (0, \infty)$，并设 s_T, u_T 为任意正数序列，且对于某个正常数 c''，$\liminf_{T\to\infty} u_T/T^{c''} > 0_\circ$ 那么存在正数常数 c'、M^*、θ 和 δ^*，使得

$$\begin{aligned}\Delta_T^{\Phi}(\mathsf{f}) \ \leq \ & M^*\left\{\left(P\left[Var_{\mathcal{C}}\left[T^{-1/2} Z_T\right] < s_T I_{\mathsf{d}},\ \Phi_T = 1\right]\right)^\theta \right. \\ & \left. + u_T^{\gamma(1)} s_T^{-\gamma(2)} \omega_2^{\Phi}\left(\mathsf{f}; T^{-K}, \phi(x; 0, u_T I_{\mathsf{d}})\right)\right\} \\ & + \overline{o}(T^{-(\mathsf{p}-2+\delta^*)/2})\end{aligned} \tag{4.9}$$

当 $T \to \infty$ 时，对 $\mathsf{f} \in \check{\mathcal{E}}(M, \mathsf{p}_0)$ 一致成立；若 T 充分大时 $s_T \geq T^{-c'}$，其中 $\gamma(1) = \big(3(\mathsf{p}-2)+\mathsf{d}\big)/2$，且 $\gamma(2) = 3(\mathsf{p}-2)\mathsf{d}+\mathsf{d}/2$；$\overline{o}(...)$ 表示对 $\mathsf{f} \in \check{\mathcal{E}}(M, \mathsf{p}_0)$ 一致为 $o(...)$ 阶的项。

注4.2. 将定理 4.1 应用于一类不太差的 f，例如一致$\omega_2^{\Phi}\big(\mathsf{f};\, T^{-K}, \phi(x;\, 0, u_T I_{\mathsf{d}})\big) = O(T^{-\epsilon K})$（其中某个正数为 ϵ），为了使 (4.9) 右端的误差界达到 $o(T^{-(\mathsf{p}-2+\delta^*)/2})$ 的量级，我们可以取一个数 K as$\epsilon K > \gamma(1)c'' + 1 + (\mathsf{p}-2+1)/2$, $u_T = T^{c''}$，并取 $s_T = T^{-c'_*}$为某个正常数 $c'_* < c'$，使得 $c'_*\gamma(2) < 1$，并期望 (4.9) 右端的项 $(P[....])^{\theta}$ 尽可能小。此类 f 很常见，在统计假设检验中也完全不具限制性，因为由检验的临界域边界处 f 的不连续点所确定的集合，通常是一个测度上很薄的简单集合。

为证明定理 4.1，我们遵循 Yoshida [35] 的证明，但需要进行一些技术性修改，如第8.1节所述。

I除了（4.5）之外，也可以使用其他近似误差度量。令

$$\Delta_T'^{\Phi}(\mathsf{f}) \;=\; \Big\| E_{\mathcal{C}}\big[\mathsf{f}\big(T^{-1/2}Z_T\big)\big] - \Phi_T \Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}] \Big\|_1$$

and

$$\Delta_T(\mathsf{f}) \;=\; \Big\| E_{\mathcal{C}}\big[\mathsf{f}\big(T^{-1/2}Z_T\big)\big] - \Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}] \Big\|_1 .$$

考虑以下两个条件。对于每个 $L > 0$,

$$P\big[\Phi_T = 0\big] \;=\; O(T^{-L}) \qquad (T \to \infty). \tag{4.10}$$

对于某个 $q > 1$,

$$\limsup_{T\to\infty} \big\| |\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}|[1 + |\cdot|^{\mathsf{p}_0}] \big\|_q \;<\; \infty. \tag{4.11}$$

命题4.3. (i) 假设（4.10）以及定理 4.1 中相同的条件均成立。若将 $\Delta_T^{\Phi}(\mathsf{f})$ 替换为 $\Delta_T'^{\Phi}(\mathsf{f})$，则不等式（4.9）成立。

(ii) 假设（4.10）、（4.11）以及定理 4.1 中除（4.6）以外的相同条件均成立。若将 $\Delta_T(\mathsf{f})$ 替换为 $\Delta_T'^{\Phi}(\mathsf{f})$，则不等式（4.9）成立。

命题4.3 (i)验证了用带有稳定子 Φ_T 的 $E\big[\Phi_T \Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}]\big]$ 对 $E\big[f\big(T^{-1/2}Z_T\big)\big]$ 的近似。

4.2 变换变量的展开

后文所讨论应用中的展开变量，被定义为另一个满足渐近展开条件的加性泛函的变换。设 G_T 是一个 $\mathsf{d} \times \mathsf{d}$ $\mathcal{C}$-可测随机矩阵，$T \in \mathbb{R}_+$。令

$$Z_T^* \;=\; T^{-1/2} G_T Z_T. \tag{4.12}$$

假设当 $\Phi_T = 1$ 时， G_T 可逆，并且

$$\sup_{T\in\mathbb{R}_+,\omega\in\Omega}\left(\Phi_T|G_T| + \Phi_T|G_T^{-1}|\right) \;<\; \infty. \tag{4.13}$$

在批处理老虎机的背景下， G_T 是分配的一个泛函（例如参见.....），而通过裁剪自然满足 (6.15)) (4.13) 中 G_T 的稳定性。

我们将使用一个关于 $\mathcal{C}$可测的随机符号测度$\Psi^*_{T,\ \mathsf{p},\ c}$ 来近似 Z_T^*的分布。其定义方式与 (4.1) 至 (4.4) 中的过程类似，并与之平行。更准确地说，令

$$\chi^*_{T,r,\mathcal{C}}(v) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^r \log E_{\mathcal{C}}\left[\exp\left(\mathtt{i}\epsilon v\cdot Z_T^*\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{4.14}$$

对于 $v\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$。那么， $v\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的函数$\widehat{\Psi}^*_{T,\ \mathsf{p},\ c}(v)$定义为以下求和

$$\widehat{\Psi}^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}(v) \;=\; \exp\left(2^{-1}\chi^*_{T,2,\mathcal{C}}(v)\right)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2} T^{-r/2}P_{T,r,\mathcal{C}}\left(v;\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\right), \tag{4.15}$$

$\widehat{\ }$，随机符号测度$\Psi^*_{T,\ \mathsf{p},\ c}$ 定义为$\Psi^*_{T,\ \mathsf{p},\ c}$ 的傅里叶反演：

$$\Psi^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}} \;=\; \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\Psi}^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\right]. \tag{4.16}$$

与 (4.5) 不同，通过$\Psi^*_{T,\ \mathsf{p},\ c}$ 对 Z_T^* 进行近似的近似误差用下式度量

$$\Delta_T^{\Phi*}(\mathsf{f}) \;=\; \left\|\Phi_T\left(E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{f}\left(Z_T^*\right)\right] - \Psi^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}]\right)\right\|_1. \tag{4.17}$$

定理 4.4. 假设与定理 4.1 相同的条件以及 (4.13) 均成立。那么存在正数常数 c'、 M^{**}、 θ 和 δ^* ，使得

$$\begin{aligned}\Delta_T^{\Phi*}(\mathsf{f}) \;\le\; M^{**}\Bigg\{&\left(P\left[Var_{\mathcal{C}}\left[T^{-1/2}Z_T\right] < s_T I_{\mathsf{d}},\ \Phi_T = 1\right]\right)^{\theta}\\ &+u_T^{\gamma(1)}s_T^{-\gamma(2)}\omega_2^{\Phi}\left(\mathsf{f};T^{-K},\phi(x;0,u_TI_{\mathsf{d}})\right)\Bigg\}\\ &+\overline{o}(T^{-(\mathsf{p}-2+\delta^*)/2})\end{aligned} \tag{4.18}$$

关于 $\mathsf{f}\in\check{}\mathcal{E}(M,\mathsf{p}_0)$ 一致地，当 $T\to\infty$ 时，若 $s_T\ge T^{-c'}$ 对较大的 T 成立。

注释4.5。定理4.4 的证明见第 8.2 节。在那里，我们将定理 4.1的误差界 (4.9) 应用于 $T^{-1/2}Z_T$，并将其转换为 Z_T^*。因此，如果对于给定的$(G_T)_{T\in\mathbf{T}}$，(4.12) 和 (4.13) 对 $T\in\mathbf{T}$ 成立，则估计 (4.18) 沿着$\mathbb{R}_+$的一个子序列 T有效。假设变量 Φ_T 针对 $T\in\mathbb{R}_+$ 给定，是因为它们涉及对 $T^{-1/2}Z_T$的渐近展开的验证，而这是一条极限定理，并且假设被加项具有某种一致性。

备注4.6。我们并未在定理 4.1 中假设 Φ_T 接近 1。这是因为定理 4.1 采用 $\Delta_T^{\Phi}(\mathsf{f})$ 作为误差的度量，而我们无需付出 $1-\Phi_T$ 来分离 Φ_T。因此，除了约束条件 (4.6) 外，我们可以相当自由地选择泛函 Φ_T。这意味着，对于任意的 T，我们都可以将 $\Phi_T=0$ 集合为某个值。

注4.7。定理4.1和定理 4.4是针对连续参数 T陈述的。通过将过程$(V_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$简单地嵌入连续时间过程$(V_{\lfloor T\rfloor})_{T\in\mathbb{R}+}$，我们可以将这些定理应用于离散时间过程。也可以在不改变证明的情况下，重新陈述适用于离散时间的定理。

注4.8。与命题4.3类似，近似误差的度量方式可以略有不同。例如，若以

$$\Delta_T'^{\Phi*}(\mathsf{f}) \;=\; \Big\| E_{\mathcal{C}}\big[\mathsf{f}\big(Z_T^*\big)\big] - \Phi_T \Psi^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}] \Big\|_1$$

代替 $\Delta_T^{\Phi*}(\mathsf{f})$，则在定理 4.4和(4.10)的假设下，不等式(4.18)成立，条件是

$$\limsup_{T\to\infty} \|G_T\|_q < \infty \tag{4.19}$$

对某个 $q>\mathsf{p}_0$成立。对于 $Z_T^*\in L^{\mathsf{p}_0}$，我们需要(4.19)。此外，若还满足

$$\limsup_{T\to\infty} \big\| \Psi^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[1+|\cdot|^{\mathsf{p}_0}] \big\|_q < \infty \tag{4.20}$$

对某个 $q>1$成立，则可得到不等式(4.18)，其中

$$\Delta_T^*(\mathsf{f}) \;=\; \Big\| E_{\mathcal{C}}\big[\mathsf{f}\big(Z_T^*\big)\big] - \Psi^*_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}] \Big\|_1$$

代替 $\Delta_T^{\Phi*}(\mathsf{f})$。条件 (4.20) 关系到 $\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[Z_T^*]$ 的全局非退化性，因此也关系到G_T 的全局非退化性。

5 应用于老虎机算法的向后近似方案的渐近展开

5.1 顺序部分混合过程

我们回到第2.1节中的赌博机算法模型。在部分混合性质下，渐近展开方案将给出后向近似公式的误差界，该性质在第 4 节中得到了推广。

假设所有随机变量都定义在某个共同的概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上。为了正确应用迄今为止所准备的理论，我们首先如下所示重建一个环境。

(1)S $=\{1,...,S\}$, n_s ($s\in$S) 是依赖于 $n\in$N的正整数，使得 $\inf_{s\in\mathbb{S}}\liminf(n_s/n)>0$。

(2) $\mathbb{J}^\infty=$S $\times$N、$\mathbb{J}_s^\infty=\{j=(s,i);\ \ i\in$N$\}$，以及 $\mathbb{J}_s^n=\{j=(s,i)\in\mathbb{J}_s^\infty;\ \ i\le n_s\}$。

(3) $c=(c_s)_{s\in\mathbb{S}}$, $c_s\in\mathfrak{C}_s$。 $\mathfrak{C}=\prod_{s\in\mathbb{S}}\mathfrak{C}_s$ 每个 $\mathfrak{C}_s$ 都是一个可测集。

(4) $(A_j)_{j=(s,i)\in\mathbb{J}^\infty}$ 是一个双重指标随机向量族。 A_j 是 $\overline{k}_{s(j)}$维的，其中 $s(j)=s$，对于 $j=(s,i)$。$\mathbf{A}_s^n=(A_j)_{j\in\mathbb{J}_s^n}$和 $\mathbf{A}_s^\infty=(A_j)_{j\in\mathbb{J}^\infty,\,s(j)=s}$。

(5) $(\epsilon_j)_{j=(s,i)\in\mathbb{J}^\infty}$ 是一个双重指标随机向量族。当$s(j)=s$时， ϵ_j 是 $\mathbf{r}_s$维的。

(6) 给定一个可测空间 $\mathcal{L}_s$，其对应于 $s\in$S， L_s^n 是一个取值于 $\mathcal{L}_s$的随机映射，并且关于 $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$可测。

(7) 对于 $j\in\mathbb{J}_s^n$， H_j^s是一个 $\mathbf{d}_s\times\mathbf{r}_s$ $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$-可测的随机矩阵。

(8) $Z_T^s=\sum_{i=1}^T H_{(s,i)}^s\epsilon_{(s,i)}$ 对于 $T\in$N。特别地， $Z_0^s=0$。

(9) $G_{n_s}^s$ 是一个 $\mathbf{d}_s\times\mathbf{d}_s$ $\sigma[\mathbf{A}_s^n]$-可测的随机矩阵，对于 $(n,s)\in$N $\times$S。

(10) $W_j^n=n_s^{-1/2}G_{n_s}^sH_j^s$对于 $n\in$N 以及 $j\in\mathbb{J}_s^n$。 (11) $\mathbf{Z}_s^n=\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}W_j^n\epsilon_j=G_{n_s}^sn_s^{-1/2}Z_{n_s}^s$。 (12) $\mathcal{G}_s^\infty=\sigma\left[(L_{s'}^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\mathbf{Z}_{s'}^n)_{n\in\mathbb{N}};\ \ s'\le s\right]$ 对于 $s\in$S，且 $\mathcal{G}_0^\infty$是平凡的 σ-域。 (13) $\mathcal{C}^s=\mathcal{G}_{s-1}^\infty\vee\sigma[\mathbf{A}_s^\infty]$

(14) $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{J}_s^\infty}\perp\!\!\!\perp\mathcal{C}^s$ 对每个 $s\in$S。

(15) $\{\mathcal{B}_I^s\}_{I\subset\mathbb{Z}_+}$ 是 σ 的子域族，属于 $\mathcal{F}$，使得对于 $I_1\subset I_2\subset\mathbf{Z}_+$。

(16) $\epsilon_{s,i}$ 关于 $\mathcal{B}_{[i]}^s\vee\mathcal{C}^s$ 对 $s\in$S 和 $i\in$N 是可测的。

(17) $\alpha^s(h|\mathcal{C}^s):\Omega\to[0,1]$ 是一个 $\mathcal{C}^s$-可测函数，对于 $h\in\mathbf{R}_+$ 使得

$$\alpha^s(h|\mathcal{C}^s)\ \ge\ \sup_{\substack{h'\ge h\\ t\in\overline{\mathbb{Z}}_+}}\ \sup_{\substack{B_1\in\mathcal{B}_{[0,t]}^s\vee\mathcal{C}^s\\ B_2\in\mathcal{B}_{[t,\infty)}^s\vee\mathcal{C}^s}}\left|P_{\mathcal{C}^s}[B_1\cap B_2]-P_{\mathcal{C}^s}[B_1]P_{\mathcal{C}^s}[B_2]\right|\quad a.s.$$

(18) $\Phi_s^{n_s}=1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}$对于一个可测集 $\Lambda_s^n\subset\mathcal{L}_s$对于 $(n,s)\in$N $\times$S

条件（14）对应于条件 (2.3)。在此条件下，每个 $\mathcal{C}^s$ 条件累积量都是一个不依赖于 $\mathcal{C}^s$ 的常数。阶段 $s\in$S 中被加项的数量为 n_s，而 $(n_s)_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 $n\in$N 驱动的序列。虽然有些复杂，但我们需要在每个阶段引入更细的索引 $T\in\mathbf{Z}_+\subset\mathbf{R}_+$，才能正确应用第 4 节中的结果，最终将 $(n_s)_{n\in\mathbb{N}}$ 嵌入 N。分解式（8）和（11）的示例见（6.15）。我们作如下假设。

[B1] 存在一个正常数 a，使得

$$\left\|\alpha^s(h|\mathcal{C}^s)\right\|_1 \;\leq\; a^{-1}e^{-ah} \qquad (h>0,\; s\in\mathbb{S}).$$

[B2] 对于每个 $L>0$,

$$\max_{s\in\mathbb{S}}\sup_{j\in\mathbb{J}_s^\infty} E\left[\left|E_{\mathcal{C}^s}[|H_j^s\epsilon_j|^{\mathsf{p}+1}]\right|^L\right] \;<\; \infty$$

和 $E_{\mathcal{C}^s}[H_j^s\epsilon_j]=0$，对于 $j\in\mathbb{J}_s^\infty$，$s\in\mathbb{S}$。

对于 $s\in\mathbb{S}$，一组区间 $(I^s_{T,\ell})_{\ell\in\{1,\ldots,n'(T)\},\,T\in\mathbb{N}}$ 被称为与 $\mathcal{C}^s$ 和 $\left(\widehat{\mathcal{C}}^s_{T,\ell}\right)_{\ell\in\{1,\ldots,n'(T)\},\,T\in\mathbb{N}}$ 相关联的（稠密）约化区间，如果满足以下条件。

(i) $\widehat{\mathcal{C}}^s_{T,\ell}(\ell\in\{1,\ldots,n'_s(T)\},\,T\in\mathbb{N})$ 是子 σ 域，属于 $\mathcal{F}$，且 $\mathcal{C}^s_{T,\ell}\supset\mathcal{C}^s$.

(ii) $I^s_{T,\ell}=[u^s_{T,\ell},v^s_{T,\ell}]$ 满足 $v^s_{T,\ell}\leq u^s_{T,\ell+1}$ 对于 $\ell\in\{1,\ldots,n'_s(T)-1$，下确界$_{T,\ell}\left(v^s_{T,\ell}-u^s_{T,\ell}\right)\leq$ 上确界$_{T,\ell}\left(v^s_{T,\ell}-u^s_{T,\ell}\right)<\infty$，且下极限$_{T\to\infty}\left(n'_s(T)/T\right)>0$。

(iii) 对于任意子序列 $\ell_1,\ldots,\ell_{n''_s(T)}$（取自 $1,\ldots,n'_s(T)$），任意有界的 $\mathcal{B}_{[0,T]\setminus\cup_{\ell\in\{\ell_1,\ldots,\ell_{n''_s(T)}\}}I^s_{T,\ell}}\vee\mathcal{C}^s$-可测随机变量 A，以及任意有界的 $\mathcal{B}^s_{I^s_{T,\ell''}}\vee\mathcal{C}^s$-可测随机变量 $\mathsf{A}_{\ell''}$, $\ell''\in\{\ell_1,\ldots,\ell_{n''_s(T)}\}$, 都有

$$E_{\mathcal{C}^s}\left[\mathsf{A}\mathsf{A}_{\ell_1}\cdots\mathsf{A}_{\ell_{n''_s(T)}}\right] \;=\; E_{\mathcal{C}^s}\left[\mathsf{A}E_{\widehat{\mathcal{C}}^s_{T,\ell_1}}[\mathsf{A}_{\ell_1}]\cdots E_{\widehat{\mathcal{C}}^s_{T,\ell_{n''_s(T)}}}[\mathsf{A}_{\ell_{n''_s(T)}}]\right]. \tag{5.1}$$

我们考虑与经典 Cramér 条件相对应的以下条件。

[B3] 对于每个 $L>0$，都存在可测映射 $\psi^s_{T,\ell}:\Omega\to[0,1]$ $(s\in\mathsf{S},\;T\in\mathsf{N}$ 以及每个 $\ell\in\{1,\ldots,n'_s(T)\})$，并且存在正常数 η_1,η_2,η_3和 B，使得$\eta_1+\eta_2<1,\eta_3<1$ 并且

$$P\left[\sum_{\ell=1}^{n'_s(T)}P_{\mathcal{C}^s}\left[\widetilde{\Phi}^s_{T,\ell}\leq 1-\eta_2\right]>\eta_3 n'_s(T)\right] \;=\; O(T^{-L}) \tag{5.2}$$

作为 $T\to\infty$，其中

$$\widetilde{\Phi}^s_{T,\ell} \;=\; E_{\widehat{\mathcal{C}}^s_{T,\ell}}[\psi^s_{T,\ell}]\cdot 1_{\left\{\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}\\|u|\geq B}}\left|E_{\widehat{\mathcal{C}}^s_{T,\ell}}\left[\psi^s_{T,\ell}\exp\left\{\mathrm{i}u\cdot\left(Z^s_{v^s_{T,\ell}}-Z^s_{u^s_{T,\ell}}\right)\right\}\right]\right|<\eta_1\right\}}. \tag{5.3}$$

Yoshida [35]讨论了随机环境下随机微分方程的渐近展开。在那里，使用了一种集体的、条件型 Cramér条件，like[$B3$]is 用于确保目标变量的分布具有正则性。Malliavin演算 能够有效地验证随机环境中跳扩散过程的这一条件。另一方面，正如我们稍后将看到的，对于条件独立的实验，该条件会变得相当简单。

此外，我们还需要满足以下条件。

[B4] (i) 存在一个正常数 δ 使得

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[n_s^{-1/2}Z^s_{n_s}] > \delta I_{\mathsf{d}_s} \qquad a.s.\ \text{on}\ \{L^n_s \in \Lambda^n_s\}$$

对于 $(s,n) \in \mathbb{S} \times \mathbb{N}$。

(ii) 当 $\Phi^{n_s}_s = 1$ 时，$G^s_{n_s}$ 可逆，并且

$$\sup_{n\in\mathbb{N},s\in\mathbb{S},\omega\in\Omega} \left(\Phi^{n_s}_s|G^s_{n_s}| + \Phi^{n_s}_s|(G^s_{n_s})^{-1}|\right) \ < \ \infty.$$

条件 $[B4]$ (i) 是对 $n_s^{-1/2}Z^s_{n_s}$ 的全局（时间上）非退化性。此条件是必要的，因为它不能由 $Z^s_{n_s}$ 的被加项的非退化性和 L^p-有界性推出；可以考虑一个望远级数。在 $[B4]$ 中，我们仅对其子序列 $(n_s)_{n\in\mathbb{N}}$ 假设这些性质，而非对 $T \in \mathbb{N}$ 假设。这已经足够，因为渐近展开的误差界估计（即不等式的右端）仅沿着 $(n_s)_{n\in\mathbb{N}}$ 使用。另请参见定理 4.4 后的说明，以及定理 5.1 的证明。

考虑批处理老虎机时，在阶段 s，我们使用第 3 节中的 $\mathcal{C}^s$-可测随机符号测度 $\Psi^n_{s,\ \mathsf{p},\ \mathbf{w}^n_s}$。在本节的环境下，关于 $\mathbf{Z}^n_s$ 的渐近展开 $\Psi^*_{n_s,\ \mathsf{p}\,\mathcal{C}^s}$ 充当 $\Psi^n_{s,\ \mathsf{p},\ \mathbf{w}^n_s}$；回想一下，$\Psi^*_{T,\ \mathsf{p},\ \mathcal{C}}$ 是由 (4.16) 针对 (4.12) 的 Z^*_T 一般定义的。更准确地说，对于

$$\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u) \ = \ \left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^r \log E_{\mathcal{C}^s}\left[\exp\left(\mathtt{i}\epsilon u\cdot\mathbb{Z}^n_s\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{5.4}$$

对于 $u \in \mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}$，函数 $P_{n_s,r,\mathcal{C}^s}\left(u;\chi_{n_s,\cdot,\mathcal{C}^s}\right)$ 由形式展开确定

$$\exp\left(\sum_{r=2}^{\infty}\epsilon^{r-2}(r!)^{-1}\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u)\right) \ = \ \exp\left(2^{-1}\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}(u)\right)\sum_{r=0}^{\infty}\epsilon^r n_s^{-r/2}P_{n_s,r,\mathcal{C}^s}\left(u;\chi_{n_s,\cdot,\mathcal{C}^s}\right). \tag{5.5}$$

我们注意到，在条件（14）下，$\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u)$ 是 $\mathbf{W}^n_s = (W^n_j)_{j\in\mathbb{J}^n_s}$ 的函数。因此，对于每个 (n_s,r)，都存在一个关于 $\mathbf{w}^n_s$ 的可测函数 $\overline{P}_{n_s,r,\mathbf{w}^n_s}(u)$，使得

$$P_{n_s,r,\mathcal{C}^s}\left(u;\chi_{n_s,\cdot,\mathcal{C}^s}\right) \ = \ \overline{P}_{n_s,r,\mathbf{w}^n_s}(u)\big|_{\mathbf{w}^n_s=\mathbf{W}^n_s}.$$

定义 $\widehat{\Psi}^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s}$ 为

$$\widehat{\Psi}^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s}(u) \ = \ \exp\left(2^{-1}\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}(u)\right)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2} n_s^{-r/2}\overline{P}_{n_s,r,\mathbf{w}^n_s}(u), \tag{5.6}$$

其中 $\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}(u)$ 被解释为 $\mathbf{w}^n_s$ 的可测函数。随机符号测度 $\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s}$ 在 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}$ 上由 $\widehat{\Psi}^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s}$ 的傅里叶反演定义：

$$\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s} \ = \ \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\Psi}^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}^n_s}\right]. \tag{5.7}$$

换句话说，在事件 $\mathtt{E}$ 上，$\Psi^n_{s,\ \mathtt{p},\ \mathbf{w}^n_s}$ 是绝对连续的，$_{n_s,\ s} = \{\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}$ 是非退化的$\}$，其上的局部密度为

$$\frac{d\Psi^n_{s,\mathtt{p},\mathbf{w}^n_s}}{dz}(z) \;=\; \sum_{r=0}^{\mathtt{p}-2} n_s^{-r/2}\overline{P}_{n_s,r,\mathbf{w}^n_s}(-\mathtt{i}\partial_z)^{\circledast}\phi\big(z;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[\mathbb{Z}^n_s]\big) \tag{5.8}$$

对于 $z\in\mathbb{R}^{\mathtt{d}_s}$，其中 $\circledast$ 使 $\overline{P}_{n_s\text{的伴随算子}r,\ \mathbf{w}^n_s}(-\mathtt{i}\partial_z)$。指定 $\Psi^n_{s,\ \mathtt{p},\ \mathbf{w}^n_s}$ 在 $\mathtt{E}_{n_s\text{之外的}s}$ 并不重要，但我们可以设 $\Psi^n_{s,\ \mathtt{p},\ \mathbf{w}^n_s}=\delta_0$，即狄拉克测度。

$\Psi^n_{s,\mathtt{p},\mathbf{w}^n_s}$ 的局部密度表示由 (5.8) 给出。我们记

$$\lambda_{n_s,r,\mathcal{C}^s}[(\mathtt{i}u)^{\otimes r}] \;=\; n_s^{(r-2)/2}\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u) \qquad (u\in\mathbb{R}^{\mathtt{d}_s}).$$

为简化记号，以下将符号 $\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u)$ 滥用于表示其作为 $\mathbf{w}^n_s$ 的函数，例如 $P_{n_s,r,\mathcal{C}^s}\big(u;\ \chi_{n_s,\cdot,\mathcal{C}^s}\big)$ 用于 $\overline{P}_{n_s,r,\mathbf{w}^n_s}(u)$。该规则也适用于 $\lambda_{n_s,r,\mathcal{C}^s}$。于是，公式（5.8）给出了 $\Psi^n_{s,\mathtt{p},\mathbf{w}^n_s}$ 的局部密度表示:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi^n_{s,\mathtt{p},\mathbf{w}^n_s}}{dz}(z) \;=\; &\Big\{1+\frac{1}{6}n_s^{-1/2}\lambda_{n_s,3,\mathcal{C}^s}[(-\partial_z)^{\otimes 3}]\\ &\quad +n_s^{-1}\Big(\frac{1}{24}\lambda_{n_s,4,\mathcal{C}^s}[(-\partial_z)^{\otimes 4}]+\frac{1}{72}(\lambda_{n_s,3,\mathcal{C}^s}[(-\partial_z)^{\otimes 3}])^2\Big)+\cdots\Big\}\\ &\times\phi\big(z;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[\mathbb{Z}^n_s]\big).\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中张量由 $\mathtt{d}_s{}^r$ 个厄米多项式构成

$$h_r(z;\Sigma) \;=\; (-1)^r\phi(z;0,\Sigma)^{-1}\partial_z^r\phi(z;0,\Sigma),$$

我们可以将 (5.9) 改写为

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi^n_{s,\mathtt{p},\mathbf{w}^n_s}}{dz}(z) \;=\; &\Big\{1+\frac{1}{6}n_s^{-1/2}\lambda_{n_s,3,\mathcal{C}^s}\big[h_3(z;\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[\mathbb{Z}^n_s])\big]\\ &\quad +n_s^{-1}\Big(\frac{1}{24}\lambda_{n_s,4,\mathcal{C}^s}\big[h_4(z;\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[\mathbb{Z}^n_s])\big]+\frac{1}{72}(\lambda_{n_s,3,\mathcal{C}^s})^{\otimes 2}\big[h_6(z;\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[\mathbb{Z}^n_s])\big]\Big)\\ &\quad +\cdots\cdots\Big\}\phi\big(z;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[\mathbb{Z}^n_s]\big).\end{aligned} \tag{5.10}$$

我们再次指出，$\mathcal{C}^s$-条件累积量以及由此得到的右端都是 $\mathbf{w}^n_s$ 的可测函数。

$\widehat{\ }$为简化误差界，我们可以进一步将 $\mathcal{D}(\mathrm{M}\ \gamma)$ 限制到一个子类 $\mathcal{D}(M,\gamma)$。对于一个正数 c_0，令 $u_n=n^{c_0}$。对于某个正常数 ϵ_0，我们假设

$$\sup_{\mathsf{f}\in\widehat{\mathcal{D}}(M,\gamma)}\max_{s\in\mathbb{S}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\Xi^n_s((\widehat{g}_f)^n_s,r) \;=\; O(r^{\epsilon_0}) \qquad (r\downarrow 0), \tag{5.11}$$

其中

$$\Xi^n_s((\widehat{g}_f)^n_s,r) \;=\; \Big(E\Big[\Phi^{n_s}_s\int_{\mathbb{R}^{\mathtt{d}_s}}\omega^n_s((\widehat{g}_f)^n_s,z_s,r)^2\phi(z_s;0,u_nI_{\mathtt{d}_s})dz_s\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}$$

对于可测函数 $\omega_s^n((\widehat{g}_f)_s^n, z_s, r)$，使得

$$\omega_s^n((\widehat{g}_f)_s^n, z_s, r) \;\geq\; \sup_{h_s\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}:|h_s|\leq r} \left|(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n, \underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n, z_s+h_s) - (\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n, \underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n, z_s)\right|.$$

例如，如果函数 f 有界，且具有检验问题中临界域那样的"良好"不连续点，那么检验条件（5.11）就很简单。

根据上述考虑，我们得到以下结果，因为根据这些假设，误差界中出现的元素沿着 N 中的子序列 (n_s) 得到了很好的控制。

定理5.1.假设条件 $[B1]$-$[B4]$ 均已满足，且 (5.11)成立。令 $M_s > 0\widehat{\ }$ 对于 $s \in$S，且 $\gamma \in [0, \mathsf{p}_0]$。那么 f_0^n 和 f_0^n均有良好定义，并且对于某些常数 M^* 和 $\delta_1 > 0$，$\mathsf{E}_n = f_0^n$满足以下估计：

$$|f_0^n - \widehat{f}_0^n| \;\leq\; M^* n^{-(\mathsf{p}-2+\delta_1)/2} + \sum_{s=2}^{S} V_{s-1}^{\delta_1,n}(f) \tag{5.12}$$

对于所有 $f \in \mathcal{D}$（M γ），M $= (M_s)_{s\in\mathbb{S}}$。

我们可以去掉该项

$$\sum_{s=2}^{S} V_{s-1}^{\delta_1,n}(f) \;=\; \sum_{s=2}^{S} \left\|1_{\{R_{s-1}^n > (n_s)^{\delta_1}\}} R_{s-1}^n \triangle_{s-1}^n(f)\right\|_1$$

如果从表达式 $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \|(R_{s-1}^n)^q \triangle_{s-1}^n(f)\|_1 < \infty$ 对于$q = 1 + (\mathsf{p} - 2 + \delta_1)/(2\delta_1)$，则得到(5.17)的右端。然后我们得到

$$\sup_{f\in\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{M},\gamma)} |f_0^n - \widehat{f}_0^n| \;\leq\; M^\dagger n^{-(\mathsf{p}-2+\delta_1)/2} \tag{5.13}$$

其中某个常数为 $M^\dagger$。 □

定理 5.1 的证明。对于 $\mathcal{C}^s$，当 $\mathcal{C}$ 时，我们在每个阶段 s 反复对由完整序列 $\left(Z_T^s\right)_{T\in\mathbb{N}}$（或嵌入到 $T \in$R+ 中的序列）构造出的 (11) 的序列 $\left(\mathsf{Z}^n_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 应用定理 4.4。我们将泛函 Φ_s^T 定义为

$$\Phi_s^T \;=\; \begin{cases} \Phi_s^T & (T \in (n_s)_{n\in\mathbb{N}}) \\ 0 & (T \notin (n_s)_{n\in\mathbb{N}}). \end{cases} \tag{5.14}$$

回顾一下，根据 (18)，有 $\Phi_s^{n_s}$=$1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}$。那么

$$\limsup_{T\in\mathbb{N},T\to\infty} \left\|\Phi_s^T |\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}^s}|[1+|\cdot|^{\mathsf{p}_0}]\right\|_q \;<\; \infty \qquad (s \in \mathbb{S}) \tag{5.15}$$

对于任意 $q > 1$，根据 Φ_s^T 的定义以及条件 $[B4]$ (i)和 (ii)，借助于$(T^{-1/2} Z_T^s)_{T\in\mathbb{N}}$的 $L^{\infty-}$-有界的 $\mathcal{C}^s$-条件累积量直到p 阶（ [35] 的第 597–598 页）。然后，(5.15)验证了序列 $(T^{-1/2} Z_T^s)_{T\in\mathbb{N}}$ 满足 (4.13)。我们将给出定理

4.4 使用 $[B4]$验证$\mathbf{Z}_s^n$(沿着 n_s) 的渐近展开，随后通过 f_s^n 反向传播$\widehat{}$这些展开。

集合 $r_s = \prod_{s'=1}^{s}(1+|z_{s'}|)^{-\mathsf{p}_0}$。在 $[B4]$(i) 下，$\mathrm{Var}_{\mathcal{C}^s}[n_s^{-1/2}Z_{n_s}^s] > \delta I_{\mathsf{d}_s}$ 几乎处处在 $\{L_s^n \in \Lambda_s^n\}$ 上。该$\mathcal{C}^s$-条件累积量的 $n_s^{-1/2}Z_{n_s}^s$ 属于 $L^{\infty-}$，在 $[B1]$ 和 $[B2]$下，正如 Yoshida $[35]$,第597-598页所证明的。因此，$1_{\{L_s^n\in\Lambda_s^n\}}|\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathcal{C}^s}|[(1+|z_s|)^\gamma] \in L^{\infty-}$。此外，

$$\begin{aligned} & E\big[(R_{s-1}^n)^{1+\eta}\,\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\big] \\ = \;& E\big[(R_{s-2}^n)^{1+\eta}E_{\mathcal{C}^{s-1}}[(1+|\mathbb{Z}_{s-1}^n|)^{\mathsf{p}_0(1+\eta)}]\big] \\ \le \;& E\big[(R_{s-2}^n)^{(1+\eta)^2}\,\Pi_{s'=1}^{s-2}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\big]^{1/(1+\eta)} \\ & \times E\Big[1_{\{L_{s-1}^n\in\Lambda_{s-1}^n\}}\big(E_{\mathcal{C}^{s-1}}[(1+|\mathbb{Z}_{s-1}^n|)^{\mathsf{p}_0(1+\eta)}]\big)^{(1+\eta)/\eta}\Big]^{\eta/(1+\eta)}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

由于 $[B4]$ (ii) 所给出的 $G_{n_s}^s$ 有界，若取充分小的正数 η，则 (5.16) 右端的第二个因子对每个 n 都是有限的，这是因为 $[B2]$ 。右端的第一个因子与左端的期望具有相同的形式。因此，对于充分小的 η，我们可以通过归纳法证明 $E\big[(R_{s-1}^n)^{1+\eta}\,\Pi_{s'=1}^{s-1}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\big] < \infty$。因此，

$$E\big[R_{s-1}^n\,|\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}|[1+|z_s|^\gamma]\,\Pi_{s'=1}^{s}1_{\{L_{s'}^n\in\Lambda_{s'}^n\}}\big] \;<\; \infty$$

对于 $\gamma \in [0,\mathsf{p}_0],$，它确保在当前情况下，对每个 n，条件 (3.11) 都成立。因此，函数 $\widehat{\sim f_{s-1}^n}(\underline{L}_{s-1}^n, \mathbf{Z}_{s-1}^n)$ 可通过归纳良好定义。类似地，由于 $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M}\ \gamma) \subset \mathcal{D}(\mathbf{M}\ \gamma)$，可使用 $s = S$ 的条件 (3.10) 来验证 (3.2)。特别地，每个 f_s^n 都存在，且由 $P_{(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)}$-几乎必然确定。

由于 (13)、(12) 和 (4) 满足条件 (2.3)，由定理 3.2 可得，

$$\big|f_0^n - \widehat{f}_0^n\big| \;\le\; \sum_{s=1}^{S}(n_s)^{\delta_1}\Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big) + \sum_{s=2}^{S}V_{s-1}^{\delta_1,n}(f) \tag{5.17}$$

$\widehat{}$对于 $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M}\ \gamma)$，对于任意常数 $\delta_1 > 0$。

我们应用定理 4 4 δ $s_T = s_n$ $|E_{s-1\,\mathbf{A}_s^n}[\cdot]| = |E_{s-1\,\mathbf{A}_s^n}[E_{s-1,\mathbf{A}_s^\infty}[\cdot]]| \le$。对于，取。由于，$E_{s-1\,\mathbf{A}_s^n}[|E_{s-1,\mathbf{A}_s^\infty}[\cdot]|]$ $\widehat{g}_f\ {}^n_s\ \underline{L}_s^n\ \underline{z}_s) = \Phi_s^{n_s}\ \widehat{g}_f\ {}^n_s\ \underline{L}_s^n\ \underline{z}_s)$ 18 , , , 并且 ( ) (, ( ) (, 根据 ( ), 我们得到

$$\begin{aligned} \Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big) &= \Big\|E_{s-1,\mathbf{A}_s^n}\big[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)\big] - \Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}\big[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\big]\Big\|_1 \\ &\le \Big\|E_{s-1,\mathbf{A}_s^\infty}\big[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)\big] - \Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}\big[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\big]\Big\|_1 \\ &= \Big\|\Phi_s^{n_s}\Big(E_{s-1,\mathbf{A}_s^\infty}\big[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_s^n)\big] - \Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{W}_s^n}\big[(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\big]\Big)\Big\|_1 \\ &= \Delta_{n_s}^{\Phi*}\big((\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\big), \end{aligned}$$

其中，$\Delta_{n_s}^{\Phi*}$对应于 $\mathbf{Z}_s^n = n_s^{-1/2}G_{n_s}^s Z_{n_s}^s$，代替了(4.12)中的 $Z_T^* = T^{-1/2}G_T Z_T$。由于性质 (3.10)，随机函数$(\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\mathbf{Z}_{s-1}^n,\cdot)$ 在 $\mathcal{E}_s(M_s,\gamma)$中满足估计

定理 4.4 的 (4.18)，因此

$$\sup_{\mathsf{f}\in\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{M},\gamma)} \Delta_{n_s}^{\Phi*}\big((\widehat{g}_f)_s^n(\underline{L}_s^n,\underline{\mathbb{Z}}_{s-1}^n,\cdot)\big) \;\leq\; M^{**}\Bigg(P\Big[\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}\big[n_s^{-1/2}Z_{n_s}^s\big]<\delta I_{\mathsf{d}_s},\ \Phi_s^{n_s}=1\Big]\Bigg)^{\theta} + M^{**}n_s^{c''\gamma(1)}\delta^{-\gamma(2)}\sup_{f\in\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{M},\gamma)}\Xi_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n,n_s^{-K}\big)\Bigg\} + o(n_s^{-(\mathsf{p}-2+3\delta_1)/2}) \tag{5.18}$$

对于某个正常数 δ_1。根据 (5.11)，我们可以使得

$$n^{c''\gamma(1)}\sup_{f\in\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{M},\gamma)}\Xi_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n,n_s^{-K}\big) \;=\; O(n^{-(\mathsf{p}-2+3\delta_1)/2})$$

通过选择足够大的 K。(5.18) 右端的第一项由于 $[B4]$(i) 而消失。因此我们得到

$$\sup_{f\in\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{M},\gamma)}\Delta_s^n\big((\widehat{g}_f)_s^n\big) \;=\; O\big(n^{-(\mathsf{p}-2+3\delta_1)/2}\big). \tag{5.19}$$

现在，(5.17) 给出 (5.12)。 □

^定理 5.1 和 (5.13) 表明可以使用 f_0^n 来近似 E_n。综合目前所得结果，对于 (2.7) 中的泛函 $\mathsf{Y}_s^n = Y_s^n(L_s^n,\mathsf{Z}_s^n)$，我们可以基于定理 2.3，使用 (2.15) 中的期望 E_n 来近似 (2.9) 处的期望 $\mathsf{E}_n = E\big[f\big(\underline{L}_S^n,\mathsf{Y}_S^n\big)\big]$。^如定理 5.1 所示，期望 $\mathsf{E}_n = f_0^n$可由 f_0^n近似，其中 f_0^n由 (3.1) 中的反向方案定义：

$$\widehat{f}_{s-1}^n(\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}) \;=\; \int \widehat{f}_s^n\big(\underline{l}_s,\underline{z}_s\big)\Psi_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}^n(dz_s)1_{\{l_s\in\Lambda_s^n\}}\nu_{c_s}^n(dl_s,d\mathbf{w}_s^n)q\big((\underline{l}_{s-1},\underline{z}_{s-1}),dc_s\big) \tag{5.20}$$

对于 $s\in\mathsf{S}$，其中 $\Psi_{n_s,\ p,\ \mathcal{C}^s}$ 是沿着 (5.4)-(5.7) 为 Z_s^n构造的随机符号测度，具有表示 (5.10)。

注 5.2. 正如注 2.1 中已经提到的，变量 A_s^∞ 没有特殊作用，它仅用于通过 σ-场 $\sigma[\mathsf{A}_s^\infty]$ 指定可测性。如果存在协变量，我们可以将其纳入 A_s^∞。因此，我们在此采用的设定相当一般。

^我们已经通过反向方案 f_0^n验证了对序贯部分混合过程中的 E 的近似。此方法适用于每个阶段的依赖系统。另一方面，如果它们具有条件独立性，即完全混合，则条件可以得到相当程度的简化，如下所示。

5.2 序贯独立实验

我们考虑第 5.1 节中由 (1)-(14) 和 (18) 指定的环境。此外，假设序列 $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{J}_s^\infty}$ 相互独立且满足

$$\sup_{j\in\mathbb{J}^\infty}E[|\epsilon_j|^{\mathsf{p}+1}]<\infty \text{ and } E[\epsilon_j]\;=\;0 \qquad (j\in\mathbb{J}^\infty). \tag{5.21}$$

条件 $[B2]$可改述为

[B2′] 对于每个 $L > 0$,

$$\max_{s\in\mathbb{S}} \sup_{j\in\mathbb{J}_s^\infty} E\big[|H_j^s|^L\big] \;<\; \infty.$$

我们将 $[B3]$ 替换为条件概率下的Cramér条件：[B3′] 存在常数 B_0、$\varepsilon > 0$ 和 $\eta < 1$ 使得

$$\max_{s\in\mathbb{S}} \sup_{u\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}_s}:|u|\geq B_0} \sup_{j\in\mathbb{J}_s^\infty} \big|E[\exp(\mathtt{i}u\cdot\epsilon_j)]\big| \;<\; 1, \tag{5.22}$$

and

$$\max_{s\in\mathbb{S}} P\left[\sum_{i=1}^{T} 1_{\left\{\lambda_{min}\left((H^s_{(s,i)})^\star H^s_{(s,i)}\right)<\varepsilon\right\}} > \eta\, T\right] \;=\; O(T^{-L}) \qquad (T\to\infty) \tag{5.23}$$

对于每个 $L > 0$，其中 λ_{min} 表示一个对称矩阵的最小特征值。

现在我们应用定理 5.1 来得到

定理5.3. 设$\mathbf{M} = (M_s)_{s\in\mathbb{S}} \in (0,\infty)^S$ 且 $\gamma \in [0, \mathrm{p}_0]$。假设$(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{J}_s^\infty}$是满足(5.21)的独立序列，并且 条件 $[B2']$、$[B3']$、$[B4]$ 和 (5.11) 均满足。那么，估计 (5.12)对所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M}\ \gamma)$ 均成立，其中 $\delta_1 > 0$ 和M^*为某些常数。

证明。我们验证定理 5.1 的条件。条件 $[B1]$ 得到满足，因为序列 $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{J}_s^\infty}$ 在 (14) 下是 $\mathcal{C}^s$-条件独立的。条件 $[B2]$ 在 $[B2']$ 和 (5.21) 下得到满足。取 $\mathcal{B}_I^s$ 使得 $\mathcal{B}^s_{[i]} = \sigma[\epsilon_{(s,i)}]$。选择 $u^s_{T,\ell}$ 和 $v^s_{T,\ell}$，使其在 $[B3]$ 中分别为 $u^s_{T,\ell} = \ell - 1$ 和 $v^s_{T,\ell} = \ell$。区间 $I^s_{T,\ell} = [\ell - 1, \ell]$ 构成与 $\mathcal{C}^s_{T,\ell} = \mathcal{C}^s$ 相关联的稠密约化区间。$\psi^s_{T,\ell}$ 的一种选择是

$$\psi^s_{T,\ell} \;=\; 1_{\left\{\lambda_{min}\left((H^s_j)^\star H^s_j\right)\geq\varepsilon\right\}}, \qquad j = (s,\ell).$$

由(5.22)可知，函数$\Phi^s_{T,\ell}$ 在 $[B3]$的(5.3)中现在

$$\widetilde{\Phi}^s_{T,\ell} \;=\; 1_{\left\{\lambda_{min}\left((H^s_j)^\star H^s_j\right)\geq\varepsilon\right\}}$$

如果适当地选择了 B 和 η_1，则条件(5.2)化为(5.23)。因此，$[B3']$ 蕴含 $[B3]$。我们应用定理 5.1 得到该结果。 □

如果存在正常数 δ' 使得

$$\mathrm{Var}[\epsilon_j] > \delta' I_{\mathsf{d}_r} \qquad a.s. \quad (j\in\mathbb{J}_s^\infty)$$

对于每个 $s \in \mathbb{S}$，随后 $[B4]$ (i) 等价于以下条件：存在一个正常数 δ使得

$$n_s^{-1}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n} H_j^s (H_j^s)^\star \geq \delta I_{\mathsf{d}_s} \qquad a.s.\ \text{on}\ \{L_s^n \in \Lambda_s^n\}$$

对于 $(s,c,n) \in \mathbb{S}\times\mathfrak{C}\times\mathbb{N}$.

6 分层条件独立同分布序列的线性和非线性统计量

我们考虑第5.2 节中的设置。除了第 5.1节的条件（14）（最初以（2.3）的形式给出）之外，我们还假设，给定 $\mathcal{G}_{s-1}^{\infty}$，序列 $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{J}_s^{\infty}}$是一个（$\mathcal{C}^s$-条件）独立同分布序列。变量 $(A_j)_{j\in\mathbb{J}_s^n}$ 描述了阶段 s 中的分配，如（1.1）之前所写。一个$(A_j)_{j\in\mathbb{J}_s^{\infty}}$的例子是一个 $\mathcal{G}_{s-1}^{\infty}$-条件独立同分布序列，其中 $\mathcal{L}\{A_j|\mathcal{G}_{s-1}^{\infty}\} = $ 多项分布$(1,\pi_s)$，对于$j\in\mathbb{J}_s^n$，其中 $\pi_s\in\{p=(p_k)\in(0,1)^{\overline{k}_s};\ \sum_{k\in\mathcal{K}_s}p_k=1\}$。然而，一般而言，$(A_j)_{j\in\mathbb{J}_s^{\infty}}$的任何分布都适用。甚至 $\mathcal{G}_{s-1}^{\infty}$与 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{J}_s^{\infty}}$ 之间的条件独立性也不是必需的。因此，例如，可以处理一种分配机制，使每个臂至少保留固定数量的观测值。假设

$$E[|\epsilon_j|^{\mathsf{p}+1}]=\beta_{s,\mathsf{p}+1},\ E[\epsilon_j]=0 \text{ and } \mathrm{Var}[\epsilon_j]=\Sigma_s \qquad (j\in\mathbb{J}_s^{\infty}), \tag{6.1}$$

其中，对于每个 $s\in\mathsf{S}$，$\beta_{s,\ \mathsf{p}+1}$ 是有限常数，Σ_s 是正定矩阵。这些条件矩之所以保持不变，是因为 $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{J}_s^{\infty}}$ 与 $\mathcal{C}^s$ 独立（第 5.1 节的条件（14））。特别地，ϵ_j 的 $\mathcal{C}^s$ 条件累积量直到 $\mathsf{p}+1$ 阶，都是与 $\mathcal{C}^s$ 无关的常数。本节将把第 5 节中验证的后向展开方案应用于具有分配变量 A_j 的批处理老虎机。我们将在第 6.1 节和第 6.2 节分别推导基础噪声序列的线性泛函和非线性泛函的渐近展开公式，最后在第6.3节推导 Zhang 等人的批处理普通最小二乘法 [41]。由于用 σ_s^2 的估计量替代 σ_s^2，所得变量在随机展开的一阶修正项中包含 Z_s^n 的非线性变换。正如第6.3.2节所述，传统的 Bhattacharya-Ghosh 映射方法给出了非线性泛函的密度展开。另一方面，在批处理老虎机的应用中，无需进行该变换，也可以数值计算期望值，而这正是应用的最终目标。第6.3.3节将讨论一种重要性抽样方法。

6.1 线性泛函的渐近展开

在第6.1节中，每个 ϵ_j 是一维的。令 $N_s^n=\left(N_{s,k_s}^n\right)_{k_s\in\mathcal{K}_s}$满足 $N_{s,k_s}^n=\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,k_s}$对于 $k_s\in\mathcal{K}_s$、$s\in\mathsf{S}$。假设

$$W_j^n=w_{n,s}(N_s^n/n_s)A_j, \tag{6.2}$$

其中 $w_{n,s}:[0,1]^{\overline{k}_s}\to\mathbb{R}^{\overline{k}_s}\otimes\mathbb{R}^{\overline{k}_s}$，$\overline{k}_t\times\overline{k}_s$-矩阵的集合，是一个可测映射，而函数 $w_{n,s}$ 由下式给出

$$w_{n,s}(x_1,...,x_{\overline{k}_s}) = \mathrm{diag}\big(g_1(x_1)x_1^{-1/2}{n_s}^{-1/2},...,g_{\overline{k}_s}(x_{\overline{k}_s})x_{\overline{k}_s}^{-1/2}{n_s}^{-1/2}\big) \tag{6.3}$$

对于某些正的可测函数 $g_1,...,g_{\overline{k}_s}$。此外，我们假设每个 $w_{n,s}(N_s^n/n_s)$ 都定义良好（即，$N_{s,k_s}^n>0$几乎处处成立），并且在 $L_s^n\in\Lambda_s^n$ 时可逆。

我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_s^n &= \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n} W_j^n \epsilon_j \\ &= \left(g_1(N_{s,1}^n/n_s)(N_{s,1}^n)^{-1/2} \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n} A_{j,1}\epsilon_j, ..., g_{\overline{k}_s}(N_{s,\overline{k}_s}^n/n_s)(N_{s,\overline{k}_s}^n)^{-1/2} \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n} A_{j,\overline{k}_s}\epsilon_j \right)^\star .\end{aligned}$$

根据 $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{J}_s^n}$的条件独立性,

$$\begin{aligned}E_{\mathcal{C}^s}\big[\exp(\mathtt{i}\eta u\cdot\mathbb{Z}_s^n)\big] &= E_{\mathcal{C}^s}\left[\exp\left(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}\eta u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,k}\epsilon_j\right)\right] \\ &= \prod_{j\in\mathbb{J}_s^n} E_{\mathcal{C}^s}\left[\exp\left(\eta\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\epsilon_j\right)\right]\end{aligned}$$

对于 $u=(u_k)_{k=1,...,\overline{k}_s}\in\mathbb{R}^{\overline{k}_s}$ ($\mathrm{d}_s=\overline{k}_s$) 和 $\eta\in\mathbb{R}$, 因此

$$\begin{aligned}\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u) &= (\partial_\eta)_0^r \log E\big[\exp(\mathtt{i}\eta u\cdot\mathbb{Z}_s^{n_s})\big] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}\mathtt{i}^r\kappa_{r,\mathcal{C}^s}\left(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\epsilon_j\right) \\ &\qquad\qquad (\kappa_{r,\mathcal{C}^s}:\ \text{the } r\text{-th } \mathcal{C}^s\text{-conditional cumulant}) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}\mathtt{i}^r\left(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\right)^r\kappa_{r,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)}) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^r\big\{g_k(N_{s,k}^n/n_s)\big\}^r(N_{s,k}^n)^{-r/2}A_{j,k}\,\kappa_{r,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)}) \\ &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^r\big\{g_k(N_{s,k}^n/n_s)\big\}^r(N_{s,k}^n)^{-(r-2)/2}\,\kappa_{r,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)}) \\ &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}n_s^{-(r-2)/2}\lambda_{n_s,r,\mathcal{C}^s,k}(\mathtt{i}u_k)^r,\end{aligned}$$

其中系数

$$\lambda_{n_s,r,\mathcal{C}^s,k} = \big\{g_k(N_{s,k}^n/n_s)\big\}^r(N_{s,k}^n/n_s)^{-(r-2)/2}\,\kappa_{r,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)})$$

是随机的。请注意，由于 $(A_{j,k})_{k\in\mathcal{K}_s}$ 之间的正交性，$\mathbb{Z}_s^{n_s}$ 的条件方差是一个对角矩阵。

例如，如果函数 g_{k_s} 恒等于 1，如 Zhang 等人提出的批处理普通最小二乘法中的情况 [41], ，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}(u) &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^2\kappa_{2,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)}) \\ \chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u) &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^r(N_{s,k}^n)^{-(r-2)/2}\,\kappa_{r,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)}) \quad (r\geq 3),\end{aligned}$$

特别是,

$$\lambda_{n_s,2,\mathcal{C}^s,k} \;=\; \kappa_{2,\mathcal{C}^s}(\epsilon_{(s,1)}) =: \sigma_s^2.$$

对于一般函数 g_k，公式(5.10) 表明，函数 $d\Psi^n_{s,\mathbf{p},\mathbf{w}^n_s}/dz(z)$ (z =(z_1, ..., $z_{\overline{k}_s}$)) 是

$$\prod_{k\in\mathcal{K}_s}\phi(z_k;\sigma_s^2)\times\prod_{k\in\mathcal{K}_s}\Big\{1+\frac{1}{6}n_s^{-1/2}\lambda_{n_s,3,\mathcal{C}^s,k}h_3(z_k;\sigma_s^2) \\ +n_s^{-1}\bigg(\frac{1}{24}\lambda_{n_s,4,\mathcal{C}^s,k}h_4(z_k;\sigma_s^2)+\frac{1}{72}\lambda^2_{nn_s,3,\mathcal{C}^s,k}h_6(z_k;\sigma_s^2)\bigg)+\cdots\Big\}, \tag{6.4}$$

求和取到 $n_s^{-(p-2)/2}$ 阶。

6.2 非标准化估计量的渐近展开

在本节中，我们假设 W_j^n 具有以下形式

$$W_j^n \;=\; \begin{pmatrix} w_{n,s}(N_s^n/n_s)n_s^{-1/2}A_j & \mathbf{0} \\ 0 & n_s^{-1/2}\end{pmatrix} \qquad (j\in\mathbb{J}_s^n) \tag{6.5}$$

其中，$w_{n,s}:[0,1]^{\overline{k}_s}\to\mathbf{R}^{\overline{k}_s}\otimes\mathbf{R}^{\overline{k}_s}$，即$\overline{k}_s\times\overline{k}_s$-矩阵的集合，是一个可测映射，而函数 $w_{n,s}$由(6.3) 给出。与之前一样，$N_s^n=\left(N^n_{s,k_s}\right)_{k_s\in\mathcal{K}_s}$，其中 $N^n_{s,k_s}=\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,k_s}$对于$k_s\in\mathcal{K}_s$, $s\in\mathbf{S}$。我们假设每个 $w_{n,s}(N_s^n/n_s)$ 在 $L_s^n\in\Lambda_s^n$ 时均可逆。我们考虑由以下集合定义的误差项 ϵ_j。

$$\epsilon_j \;=\; \begin{pmatrix}\dot{\epsilon}_j \\ \dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2\end{pmatrix}$$

当 $j\in\mathbb{J}_s^\infty$ 时，其中 $\dot{\epsilon}_j$ 是一个与 $\mathcal{C}^s$ 独立的一维随机变量，并满足 $E[\dot{\epsilon}_j]=0$ 和 $\mathbf{Var}[\dot{\epsilon}_j]=\sigma_s^2$, 其中 $[\dot{\epsilon}_j]=\sigma_s^2$ 是正常数。然后

$$\mathbb{Z}_s^n \;=\; \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}W_j^n\epsilon_j \;=\; \left((\dot{\mathbb{Z}}_s^n)^\star,\ddot{\mathbb{Z}}_s^n\right)^\star \tag{6.6}$$

for

$$\dot{\mathbb{Z}}_s^n \;=\; \left(g_1(N^n_{s,1}/n_s)(N^n_{s,1})^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,1}\dot{\epsilon}_j,...,g_{\overline{k}_s}(N^n_{s,\overline{k}_s}/n_s)(N^n_{s,\overline{k}_s})^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,\overline{k}_s}\dot{\epsilon}_j\right)^\star \tag{6.7}$$

and

$$\ddot{\mathbb{Z}}_s^n \;=\; n_s^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2). \tag{6.8}$$

根据 $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{J}_s^n}$ 的条件独立性,

$$\begin{aligned}
& E_{\mathcal{C}^s}\big[\exp(\mathtt{i}\eta u\cdot\mathbb{Z}_s^n)\big] \\
= \;& E_{\mathcal{C}^s}\bigg[\exp\bigg(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}\mathtt{i}\eta u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,k}\dot\epsilon_j+\mathtt{i}\eta u_0 n_s^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}(\dot\epsilon_j^2-\sigma_s^2)\bigg)\bigg] \\
= \;& \prod_{j\in\mathbb{J}_s^n}E_{\mathcal{C}^s}\bigg[\exp\bigg(\mathtt{i}\eta\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}A_{j,k}\dot\epsilon_j+\mathtt{i}\eta u_0 n_s^{-1/2}(\dot\epsilon_j^2-\sigma_s^2)\bigg)\bigg]
\end{aligned}$$

对于 $u=\big((u_k)_{k\in\mathcal{K}_s},\ u_0\big)\in\mathbb{R}^{\overline{k}_s+1}$ 和 $\eta\in\mathbb{R}$, 因此

$$\begin{aligned}
\chi_{n_s,r,\mathcal{C}^s}(u) &= (\partial_\eta)_0^r\log E_{\mathcal{C}^s}\big[\exp(\mathtt{i}\eta u\cdot\mathbb{Z}_s^n)\big] \\
&= \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}\mathtt{i}^r\kappa_{\mathcal{C}^s,r}\bigg(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\dot\epsilon_j+u_0 n_s^{-1/2}(\dot\epsilon_j^2-\sigma_s^2)\bigg) \\
&\qquad\qquad (\kappa_{\mathcal{C}^s,r}:\ \text{the } r\text{-th } \mathcal{C}^s\text{-conditional cumulant})
\end{aligned}$$

特殊情况是

$$\begin{aligned}
& \kappa_{\mathcal{C}^s,2}\bigg(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\dot\epsilon_j+u_0 n_s^{-1/2}(\dot\epsilon_j^2-\sigma_s^2)\bigg) \\
= \;& E_{\mathcal{C}^s}\bigg[\bigg(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\dot\epsilon_j+u_0 n_s^{-1/2}(\dot\epsilon_j^2-\sigma_s^2)\bigg)^2\bigg] \\
= \;& \sum_{k\in\mathcal{K}_t}u_k^2 g_k(N_{s,k}^n/n_s)^2(N_{s,k}^n)^{-1}A_{j,k}\sigma_s^2\quad(\kappa[\dot\epsilon]=:\sigma_s^2) \\
& +2\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k u_0 g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}n_s^{-1/2}E[\dot\epsilon_1^3] \\
& +u_0^2 n_s^{-1}\big(E[\dot\epsilon_1^4]-\sigma_s^4\big)
\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
& \kappa_{\mathcal{C}^s,3}\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j + u_0 n_s^{-1/2}\sum_{j\in\mathbb{J}^n_s}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big) \\
= \;& E_{\mathcal{C}^s}\Big[\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j + u_0 n_s^{-1/2}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big)^3\Big] \\
= \;& E_{\mathcal{C}^s}\Big[\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j\Big)^3\Big] \\
& +3E_{\mathcal{C}^s}\Big[\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j\Big)^2 u_0 n_s^{-1/2}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big] \\
& +3E_{\mathcal{C}^s}\Big[\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j\Big)\Big(u_0 n_s^{-1/2}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big)^2\Big] \\
& +E_{\mathcal{C}^s}\Big[\Big(u_0 n_s^{-1/2}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big)^3\Big] \\
= \;& \sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k^3 g_k(N^n_{s,k}/n_s)^3(N^n_{s,k})^{-3/2}A_{j,k}E[\dot{\epsilon}_j{}^3] \\
& +3\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k^2 u_0 g_k(N^n_{s,k}/n_s)^2(N^n_{s,k})^{-1}n_s^{-1/2}A_{j,k}\big(E\big[\dot{\epsilon}_j{}^4\big]-\sigma_s^4\big) \\
& +3\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k u_0^2 g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}n_s^{-1}\big(E\big[\dot{\epsilon}_j{}^5\big]-2\sigma_s^2E\big[\dot{\epsilon}_j{}^3\big]\big) \\
& +u_0^3 n_s^{-3/2}\big(E\big[\dot{\epsilon}_j{}^6\big]-3\sigma_s^2E\big[\dot{\epsilon}_j{}^4\big]+2\sigma_s^6\big).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}(u) &= \sum_{j\in\mathbb{J}^n_s}\mathtt{i}^2\kappa_{\mathcal{C}^s,2}\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s} u_k g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j + u_0 n_s^{-1/2}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^2 g_k(N^n_{s,k}/n_s)^2\sigma_s^2 \\
&\quad +2\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)(\mathtt{i}u_0)g_k(N^n_{s,k}/n_s)(N^n_{s,k})^{1/2}n_s^{-1/2}E[\dot{\epsilon}_1^3] \\
&\quad +(\mathtt{i}u_0)^2\big(E[\dot{\epsilon}_1^4]-\sigma_s^4\big) \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}\chi_{n_s,3,\mathcal{C}^s}(u) &= \sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}\mathtt{i}^3\kappa_{\mathcal{C}^s,3}\Big(\sum_{k\in\mathcal{K}_s}u_k g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{-1/2}A_{j,k}\dot{\epsilon}_j+u_0 n_s^{-1/2}(\dot{\epsilon}_j^2-\sigma_s^2)\Big)\\ &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^3 g_k(N_{s,k}^n/n_s)^3(N_{s,k}^n)^{-1/2}E\big[\dot{\epsilon}_1{}^3\big]\\ &\quad+3\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^2(\mathtt{i}u_0)g_k(N_{s,k}^n/n_s)^2 n_s^{-1/2}\big(E\big[\dot{\epsilon}_1{}^4\big]-\sigma_s^4\big)\\ &\quad+3\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)(\mathtt{i}u_0)^2 g_k(N_{s,k}^n/n_s)(N_{s,k}^n)^{1/2}n_s^{-1}\big(E\big[\dot{\epsilon}_1{}^5\big]-2\sigma_s^2E\big[\dot{\epsilon}_1{}^3\big]\big)\\ &\quad+(\mathtt{i}u_0)^3 n_s^{-1/2}\big(E\big[\dot{\epsilon}_1{}^6\big]-3\sigma_s^2E\big[\dot{\epsilon}_1{}^4\big]+2\sigma_s^6\big).\end{aligned}\tag{6.10}$$

考虑归一化变量

$$\mathfrak{T}_s^n = \frac{\dot{\mathbb{Z}}_s^n}{\widehat{\sigma}_s}$$

对于 $s\in\mathbb{S}$，其中re $\widehat{\sigma}_s^2$ 是一个 $\mathcal{G}_s^n$-可测统计量。假设 $\widehat{\sigma}_s^2$ 具有随机展 n

$$\widehat{\sigma}_s^2 = n_s^{-1}\sum_{j\in\mathbb{J}_s^n}\dot{\epsilon}_j^2+R_{n_s}^s\tag{6.11}$$

其中 $R_{n_s}^s=O_{L^p}(n_s^{-1})$。那么 $\mathfrak{T}_s^n$ 具有随机展开

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_s^n &= \sigma_s^{-1}\dot{\mathbb{Z}}_s^n-\frac{1}{2\sigma_s^3}\dot{\mathbb{Z}}_s^n\big(\widehat{\sigma}_s^2-\sigma_s^2\big)+\cdots\\ &= \sigma_s^{-1}\dot{\mathbb{Z}}_s^n-\frac{1}{2\sigma_s^3 n_s^{1/2}}\ddot{\mathbb{Z}}_s^n\dot{\mathbb{Z}}_s^n+\widetilde{R}_{n_s}^s,\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{R}_{n_s}^s = O_{L^\infty}(n_s^{-1})$。注意，$\ddot{\mathbb{Z}}_s^n$ 是一个标量随机变量，而 $\dot{\mathbb{Z}}_s^n$ 是 $\overline{k}_s$维的。

令

$$Y_s^n(z_s) = \sigma_s^{-1}\dot{z}_s-\frac{1}{2\sigma_s^3 n_s^{1/2}}\ddot{z}_s\dot{z}_s\tag{6.12}$$

对于 $z_s=(\dot{z}_s,\ddot{z}_s)$。映射 Y_s^n的取值为 $\mathbb{R}^{\overline{k}_s}$。那么

$$\mathfrak{T}_s^n = Y_s^n(\mathbb{Z}_s^n)+\widetilde{R}_{n_s}^s.\tag{6.13}$$

如果我们关注一个线性组合

$$\mathfrak{T}^n = \sum_{s\in\mathbb{S}}\dot{L}_s^n\mathfrak{T}_s^n\tag{6.14}$$

的 $\mathfrak{T}_s^n$，其系数矩阵为 L_s^n，其中每个矩阵都是 L_s^n各分量的函数，然后对期望 $E[g(\mathfrak{T}^n)]$ 的计算可归结为对 $E\big[f(\underline{L}_S^n,\underline{\mathfrak{T}}_S^n)\big]$ 的计算，对于

$$f(\underline{l}_S,\underline{y}_S) = g\Big(\sum_{s\in\mathbb{S}}\dot{l}_s,y_s\Big),$$

其中，$\dot{l}_s$的自变量是 $\dot{L}_s^n$，而 y_s的自变量是 $\mathfrak{T}_s^n$。此外，$E\big[f(\underline{L}_S^n, \underline{\mathfrak{T}}_S^n)\big]$ 可近似为 $E\big[f(\underline{L}_S^n, \mathrm{Y}_S^n)\big]$。于是，移位 $\widetilde{R}_{n_s}^s$ 造成的误差可纳入与 f 相关的测度论连续模中，适用于事件 $\{|\widetilde{R}_{n_s}^s| \le n^{-\xi}\}$，$\xi \in (1/2, 1)$，而事件$\{|\widetilde{R}_{n_s}^s| > n^{-\xi}\}$ 的贡献可以忽略。关于这一思路的解释，请参阅 Sakamoto 和 Yoshida [25]。因此，如果 f 在测度意义下足够规则，那么移除 $R_{n_s}^s$ 造成的误差可以忽略。考虑 $a \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}_s}$ 上的矩形 $\{\cdot \le a\}$ 的示性函数，就很容易理解这一点，因为对于 $h \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}_s}$，$\sup_n \big\|\Psi_{s,\mathrm{p},\mathrm{w}_s^n}^n 1_{[\{\cdot \le a+h\}]} - \Psi_{s,\mathrm{p},\mathrm{w}_s^n}^n 1_{[\{\cdot \le a\}]}\big\|_1 = O(|h|)$ as$h \to 0$。最后，可利用结合渐近展开法的反向方案 (5.20)，近似期望 $E\big[f(\underline{L}_S^n, \mathrm{Y}_S^n)\big]$。

6.3 奖励模型（1.1）：作为 (6.14) 中 $\mathfrak{T}^n$ 的检验统计量

6.3.1 表达 $\widehat{f}_0^n$

Zhang 等人 [41] 研究了一个批处理老虎机，其中动作 A_j 的奖励（效果）R_j 由（1.1）表示:

$$R_j \;=\; A_j^\star \beta_{s(j)} + \dot{\epsilon}_j \quad (j \in \mathbb{J}^n).$$

当多臂老虎机有两个试验组（即 $\overline{k}_s = 2$）时，他们提出使用检验统计量

$$\mathfrak{U}^n \;=\; S^{-1/2} \sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{(N_{s,1}^n N_{s,2}^n)^{1/2}}{n_s^{1/2} \widehat{\sigma}_s} \big(\widehat{\Delta}_s - a\big)$$

用于检验处理没有影响的原假设，即 H_0: $a = 0$，其中第 s 阶段的 $\widehat{}$批处理普通最小二乘法 Δ_s 定义为

$$\widehat{\Delta}_s \;=\; \frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} R_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1}} - \frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} R_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2}}.$$

$\dot{}$考虑泛函 $\mathfrak{T}_s^n = \mathrm{Z}_s^n / \widehat{\sigma}_s$ with

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{Z}}_s^n \;&=\; \Big((N_{s,1}^n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} \dot{\epsilon}_j, (N_{s,2}^n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} \dot{\epsilon}_j \Big)^\star \\ &=\; \begin{pmatrix} (N_{s,1}^n / n_s)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (N_{s,2}^n / n_s)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_s^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} \dot{\epsilon}_j \\ n_s^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} \dot{\epsilon}_j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$g_k(x) = 1$ 对于 $k \in \mathcal{K}_s = \{1, 2\}$，以及

$$\widehat{\sigma}_s^2 \;=\; \frac{1}{n_s - 1} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} \big(R_j - A_j^\star \widehat{\beta}_s\big)^2$$

with

$$\widehat{\beta}_s \;=\; \Big(\frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} R_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1}}, \frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} R_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2}}\Big)^\star.$$

在 $\widehat{\sigma}_s^2$ 的表示 (6.11) 中，估计 $\widehat{R}_{n_s}^s = O_{L^p}(n_s^{-1})$ 在适当的矩条件下成立。我们指出，

$$\begin{pmatrix} (N_{s,1}^n/n_s)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (N_{s,2}^n/n_s)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_s^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} \dot{\epsilon}_j \\ n_s^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} \dot{\epsilon}_j \\ n_s^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} (\dot{\epsilon}_j^2 - \sigma_s^2) \end{pmatrix} \;=:\; G_{n_s}^s \, n_s^{-1/2} Z_{n_s}^s \quad (6.15)$$

for

$$Z_{n_s}^s \;=\; \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} H_j^s \epsilon_j$$

with

$$H_j^s \;=\; \begin{pmatrix} A_{j,1} & 0 \\ A_{j,2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \epsilon_j \;=\; \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_j \\ \dot{\epsilon}_j^2 - \sigma_s^2 \end{pmatrix}.$$

在 H_0: $a = 0$ 下，我们有

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^n \;&:=\; \mathfrak{U}^n \\ &=\; S^{-1/2} \sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{(N_{s,1}^n N_{s,2}^n)^{1/2}}{n_s^{1/2} \widehat{\sigma}_s} \left(\frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} R_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1}} - \frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} R_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2}} \right) \\ &=\; S^{-1/2} \sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{(N_{s,1}^n N_{s,2}^n)^{1/2}}{n_s^{1/2} \widehat{\sigma}_s} \left(\frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} \dot{\epsilon}_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1}} - \frac{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} \dot{\epsilon}_j}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2}} \right) \\ &=\; S^{-1/2} \sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{(N_{s,1}^n N_{s,2}^n)^{1/2}}{n_s^{1/2} \widehat{\sigma}_s} \left(\frac{(N_{s,1}^n)^{1/2}}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1}} (N_{s,1}^n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,1} \dot{\epsilon}_j \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{(N_{s,22}^n)^{1/2}}{\sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2}} (N_{s,2}^n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{J}_s^n} A_{j,2} \dot{\epsilon}_j \right) \\ &=\; S^{-1/2} \sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{(N_{s,1}^n N_{s,2}^n)^{1/2}}{n_s^{1/2}} \big((N_{s,1}^n)^{-1/2}, \, -(N_{s,2}^n)^{-1/2} \big) \, \mathfrak{T}_s^n \\ &=\; \sum_{s \in \mathbb{S}} \dot{L}_s^n \mathfrak{T}_s^n \end{aligned}$$

for

$$\dot{L}_s^n \;=\; S^{-1/2} \big((N_{s,2}^n/n_s)^{1/2}, \, -(N_{s,1}^n/n_s)^{1/2} \big). \quad (6.16)$$

因此，我们可以将（6.14）中针对 $\mathfrak{T}^n$ 的渐近展开应用于 $\mathfrak{U}^n$，假设 $N_{s,\,k}^n/n_s$ 在概率的支持集上有下界。

假设盈彩票

$$E[\dot{\epsilon}_j] \;=\; 0, \quad E[\dot{\epsilon}_j^2] \;=\; \sigma_s^2, \quad E[\dot{\epsilon}_j^r] \;=\; \mu_{s,r} \quad (r = 3, ..., 6)$$

对于 $j \in \mathbb{J}_s^\infty$, 对于某些常数 σ_s^2 和 $\mu_{s,\ r}$。由 (6.9) 和 (6.10)，对于 $g_k(x) = 1$，我们得到。in

$$\begin{aligned}\chi_{n_s,2,\mathcal{C}^s}(u) &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^2\sigma_s^2 + 2\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)(\mathtt{i}u_0)(N_{s,k}^n)^{1/2}n_s^{-1/2}\mu_{s,3} \\ &\quad +(\mathtt{i}u_0)^2\big(\mu_{s,4}-\sigma_s^4\big) \end{aligned} \tag{6.17}$$

and

$$\begin{aligned}\chi_{n_s,3,\mathcal{C}^s}(u) &= \sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^3(N_{s,k}^n)^{-1/2}\mu_{s,3} \\ &\quad +3\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)^2(\mathtt{i}u_0)n_s^{-1/2}\big(\mu_{s,4}-\sigma_s^4\big) \\ &\quad +3\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(\mathtt{i}u_k)(\mathtt{i}u_0)^2(N_{s,k}^n)^{1/2}n_s^{-1}\big(\mu_{s,5}-2\sigma_s^2\mu_{s,3}\big) \\ &\quad +(\mathtt{i}u_0)^3n_s^{-1/2}\big(\mu_{s,6}-3\sigma_s^2\mu_{s,4}+2\sigma_s^6\big). \end{aligned} \tag{6.18}$$

对于随机矩阵

$$V_s^{n_s} = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & 0 & (N_{s,1}^n)^{1/2}n_s^{-1/2}\mu_{s,3} \\ 0 & \sigma_s^2 & (N_{s,2}^n)^{1/2}n_s^{-1/2}\mu_{s,3} \\ (N_{s,1}^n)^{1/2}n_s^{-1/2}\mu_{s,3} & (N_{s,2}^n)^{1/2}n_s^{-1/2}\mu_{s,3} & \mu_{s,4}-\sigma_s^4 \end{pmatrix},$$

厄米多项式 $H_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 定义为

$$\begin{aligned}H_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(z_1,z_2,z_0;V_s^{n_s}) &= \phi\big((z_1,z_2,z_0);0,V_s^{n_s}\big)^{-1} \\ &\quad \times(-\partial_{z_{\alpha_1}})(-\partial_{z_{\alpha_2}})(-\partial_{z_{\alpha_3}})\phi\big((z_1,z_2,z_0);0,V_s^{n_s}\big)\end{aligned}$$

对于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \{1,2,0\}^3$。

现在，由 (5.10) 得到 $\mathcal{L}\{\mathbb{Z}_s^n|\mathcal{C}^s\}$ 的一阶渐近展开公式:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{s,\mathbf{p},\mathbf{w}_s^n}^n}{dz}(z) &= \phi\big((z_1,z_2,z_0);0,V_s^{n_s}\big) \\ &\quad +\frac{1}{6}n_s^{-1/2}\phi\big((z_1,z_2,z_0);0,V_s^{n_s}\big) \\ &\quad \times\Big\{\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(N_{s,k}^n)^{-1/2}n_s^{1/2}\mu_{s,3}H_{k,k,k}(z_1,z_2,z_0;V_s^{n_s}) \\ &\qquad +3\sum_{k\in\mathcal{K}_s}\big(\mu_{s,4}-\sigma_s^4\big)H_{k,k,0}(z_1,z_2,z_0;V_s^{n_s}) \\ &\qquad +3\sum_{k\in\mathcal{K}_s}(N_{s,k}^n)^{1/2}n_s^{-1/2}\big(\mu_{s,5}-2\sigma_s^2\mu_{s,3}\big)H_{k,0,0}(z_1,z_2,z_0;V_s^{n_s}) \\ &\qquad +\big(\mu_{s,6}-3\sigma_s^2\mu_{s,4}+2\sigma_s^6\big)H_{0,0,0}(z_1,z_2,z_0;V_s^{n_s})\Big\}\end{aligned} \tag{6.19}$$

对于 $z = (z_1,\ z_2,\ z_0) \in \mathbb{R}^3$。

对于 L_s^n 式 (6.16)，我们来考虑概率

$$\begin{aligned} P\big[\mathfrak{T}^n \geq x\big] &= P\bigg[\sum_{s\in\mathbb{S}} \dot{L}_s^n \mathfrak{T}_s^n \geq x\bigg] \qquad (\because (6.14)) \\ &= P\bigg[\sum_{s\in\mathbb{S}} \dot{L}_s^n \big(Y_s^n(\mathbb{Z}_s^n) + \widetilde{R}_{n_s}^s\big) \geq x\bigg] \qquad (\because (6.13)) \\ &= P\bigg[\sum_{s\in\mathbb{S}} \dot{L}_s^n Y_s^n(\mathbb{Z}_s^n) \geq x\bigg] + \overline{O}(n^{-\xi}) \end{aligned}$$

其中，$\overline{O}(n^{-\xi})$ 表示一个关于 $x \in \mathrm{R}$ 一致为 $O(n^{-\xi})$ 阶的项。通过将随机位置偏移 $R_{n_s}^s$ 作为 $x \pm n^{-\xi}$ 纳入 x，并在渐近展开具有积分表示后经~还原，当 $P[|R_{n_s}^s| > n^{-\xi}] = O(n^{-\xi})$ 时，即可得到这一估计~。

在这种情况下，(2.8) 的 f 为

$$f\big(\underline{l}_S, \underline{y}_S\big) = 1_{\{\sum_{s\in\mathbb{S}} \dot{l}_s y_s \geq x\}} \qquad \big(\underline{l}_S = \big(l_s = (\dot{l}_s, \ddot{l}_s)\big)_{s\in\mathbb{S}},\ \underline{y}_S = (y_s)_{s\in\mathbb{S}}\big)$$

并令 $\underline{L}_S^n = \big((\dot{L}_s^n, \ddot{L}_s^n)\big)_{s\in\mathbb{S}}$，其中 $\dot{L}_s^n$ 由 (6.16) 给出，$\ddot{L}_s^n$ 稍后说明；此外，$\mathrm{Y}_S^n = \big(\mathrm{Y}_s^n\big)_{s\in\mathbb{S}}$，其中

$$\mathbb{Y}_s^n = Y_s^n(\mathbb{Z}_s^n)$$

对于 (6.12) 的函数 Y_s^n 和 (6.6) 中的 Z_s^n，并结合 (6.7)（针对 $g_k = 1$）和 (6.8)。

让我们以 $S = 2$ 为例说明逆向近似，尽管对于更大的 S，描述基本相同。我们集合

$$\widehat{f}_2^n(\underline{l}_2, \underline{z}_2) = 1_{\{\sum_{s=1}^2 \dot{l}_s Y_s^n(z_s) \geq x\}}.$$

由（5.20），

$$\begin{aligned} &\widehat{f}_1^n(\underline{l}_1, \underline{z}_1) \\ &= \int \widehat{f}_2^n\big(\underline{l}_2, \underline{z}_2\big) \Psi_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}^n(dz_2) 1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}} \nu_{c_2}^n(dl_2, d\mathbf{w}_2^n) q\big((\underline{l}_1, \underline{z}_1), dc_2\big) \\ &= \int 1_{\{\sum_{s=1}^2 \dot{l}_s Y_s^n(z_s) \geq x\}} \Psi_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}^n(dz_2) 1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}} \nu_{c_2}^n(dl_2, d\mathbf{w}_2^n) q\big((\underline{l}_1, \underline{z}_1), dc_2\big) \\ &= \int\int_{\substack{\dot{z}_2\in\mathbb{R}^2 \\ \ddot{z}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\sum_{s=1}^2 \dot{l}_s\left(\sigma_s^{-1}\dot{z}_s - \frac{1}{2\sigma_s^3 n_s^{1/2}}\ddot{z}_s\dot{z}_s\right) \geq x\right\}} \Psi_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}^n(d\dot{z}_2, d\ddot{z}_2) \\ &\qquad\qquad \times 1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}} \nu_{c_2}^n(dl_2, d\mathbf{w}_2^n) q\big((\underline{l}_1, \underline{z}_1), dc_2\big) \\ &= \int\int_{\substack{\dot{z}_2\in\mathbb{R}^2 \\ \ddot{z}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\dot{l}_2\left(\sigma_2^{-1}\dot{z}_2 - \frac{1}{2\sigma_2^3 n_2^{1/2}}\ddot{z}_2\dot{z}_2\right) \geq x - \dot{l}_1\left(\sigma_1^{-1}\dot{z}_1 - \frac{1}{2\sigma_1^3 n_1^{1/2}}\ddot{z}_1\dot{z}_1\right)\right\}} \Psi_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}^n(d\dot{z}_2, d\ddot{z}_2) \\ &\qquad\qquad \times 1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}} \nu_{c_2}^n(dl_2, d\mathbf{w}_2^n) q\big((\underline{l}_1, \underline{z}_1), dc_2\big). \end{aligned}$$

如果我们对密度进行变换，最后一个表达式便可用于阶段 2。我们的方案将此公式向后传播到

$$\begin{aligned}\widehat{f}_0^n &= \int \widehat{f}_1^n\big(\underline{l}_1,\underline{z}_1\big)\Psi^n_{1,\mathsf{p},\mathbf{w}_1^n}(dz_1)1_{\{l_1\in\Lambda_1^n\}}\nu^n_{c_1}(dl_1,d\mathbf{w}_1^n)\\ &= \int\int_{\substack{\dot z_1\in\mathbb{R}^2\\ \ddot z_1\in\mathbb{R}}}\int\int_{\substack{\dot z_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot z_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\sum_{s=1}^2 i_s\left(\sigma_s^{-1}\dot z_s-\frac{1}{2\sigma_s^3 n_s^{1/2}}\ddot z_s\dot z_s\right)\ge x\right\}}\Psi^n_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}(d\dot z_2,d\ddot z_2)\\ &\qquad\times 1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}}\nu^n_{c_2}(dl_2,d\mathbf{w}_2^n)q\big((\underline{l}_1,\underline{z}_1),dc_2\big)\\ &\qquad\times\Psi^n_{1,\mathsf{p},\mathbf{w}_1^n}(d\dot z_1,d\ddot z_1)1_{\{l_1\in\Lambda_1^n\}}\nu^n_{c_1}(dl_1,d\mathbf{w}_1^n).\end{aligned}\tag{6.20}$$

在 ϵ-贪心算法中，策略由统计量的符号决定

$$\Xi_1^n = (N_{1,1}^n)^{-1}\sum_{j\in\mathbb{J}_1^n}A_{j,1}R_j-(N_{1,2}^n)^{-1}\sum_{j\in\mathbb{J}_1^n}A_{j,2}R_j$$

在原假设 H_0: $a=0$ 下，

$$\begin{aligned}n_1^{1/2}\Xi_1^n &= n_1^{1/2}(N_{1,1}^n)^{-1}\sum_{j\in\mathbb{J}_1^n}A_{j,1}\dot\epsilon_j-n_1^{1/2}(N_{1,2}^n)^{-1}\sum_{j\in\mathbb{J}_1^n}A_{j,2}\dot\epsilon_j\\ &= \ddot L_1^n\cdot\dot{\mathbb{Z}}_1^n,\end{aligned}$$

其中

$$\ddot L_1^n = \big((N_{1,1}^n/n_1)^{-1/2},-(N_{1,2}^n/n_1)^{-1/2}\big).$$

令 $L_2^n=0$。因此， ϵ-贪心算法 (2.10) 在阶段 2 选择策略 $c_2\in\mathfrak{C}_2$ ，其中函数 $\mathtt{h}_1(\underline{l}_1,\underline{z}_1)=l_1\cdot\dot z_1$.

引入变换

$$y_s = \begin{pmatrix}\dot y_s\\ \ddot y_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_s^{-1}\dot z_s\\ \sigma_s^{-2}\ddot z_s\end{pmatrix}.\tag{6.21}$$

那么公式 (6.20) 可表示为

$$\begin{aligned}\widehat{f}_0^n &= \int\int\int_{\substack{\dot y_1\in\mathbb{R}^2\\ \ddot y_1\in\mathbb{R}}}\int_{\substack{\dot y_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot y_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\sum_{s=1}^2 i_s\left(\dot y_s-\frac{1}{2n_s^{1/2}}\ddot y_s\dot y_s\right)\ge x\right\}}\\ &\qquad\times\widetilde\Psi^n_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}(d\dot y_2,d\ddot y_2)1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}}\nu^n_{c_2}(dl_2,d\mathbf{w}_2^n)\\ &\qquad\times q\big((l_1,\sigma_1^{-1}y_1),dc_2\big)\widetilde\Psi^n_{1,\mathsf{p},\mathbf{w}_1^n}(d\dot y_1,d\ddot y_1)1_{\{l_1\in\Lambda_1^n\}}\nu^n_{c_1}(dl_1,d\mathbf{w}_1^n)\end{aligned}\tag{6.22}$$

其中 $\widetilde\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}(d\dot y_s,d\ddot y_s)$ 是由 $\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}(d\dot z_s,d\ddot z_s)$ 经式 (6.21) 变换得到的渐近展开。值得指出的是，关于 $\nu^n_{c_s}(dl_s,d\mathbf{w}_s^n)$ 的每个积分，都可以利用 $\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}(d\dot y_s,d\ddot y_s)$ 和 $\widetilde\Psi^n_{s,\mathsf{p},\mathbf{w}_s^n}(d\dot y_s,d\ddot y_s)$ 中出现的汇总统计量，简化为比关于 $(l_s,\mathbf{w}^{n_s})$ 的积分更简洁的积分。参见公式 (6.19)。

6.3.2 渐近展开的变换

We ^将讨论一种用于数值计算 f_0^n 的解析方法。根据式 (6.22),

$$\widehat{f}_0^n = \int\int\int_{\substack{\dot{y}_1\in\mathbb{R}^2\\ \ddot{y}_1\in\mathbb{R}}} \mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}}\nu_{c_2}^n(dl_2,d\mathbf{w}_2^n) \times q\big((l_1,\sigma_1^{-1}y_1),dc_2\big)\psi_1(\mathbf{w}_1^n,\dot{y}_1,\ddot{y}_1)d\dot{y}_1d\ddot{y}_1 1_{\{l_1\in\Lambda_1^n\}}\nu_{c_1}^n(dl_1,d\mathbf{w}_1^n), \quad (6.23)$$

其中

$$\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1) = \int_{\substack{\dot{y}_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot{y}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\sum_{s=1}^2 i_s\left(\dot{y}_s-\frac{1}{2n_s^{1/2}}\ddot{y}_s\dot{y}_s\right)\geq x\right\}}\psi_2(\mathbf{w}_2^n,\dot{y}_2,\ddot{y}_2)d\dot{y}_2d\ddot{y}_2$$

对于给定的 $\underline{l}_2$ 和 $\underline{\mathbf{w}}_2^n$，以及

$$\psi_1(\mathbf{w}_1^n,\dot{y}_1,\ddot{y}_1) = \frac{d\widetilde{\Psi}^n_{1,\mathsf{p},\mathbf{w}_1^n}}{dy_1}(\dot{y}_1,\ddot{y}_1),$$
$$\psi_2(\mathbf{w}_2^n,\dot{y}_2,\ddot{y}_2) = \frac{d\widetilde{\Psi}^n_{2,\mathsf{p},\mathbf{w}_2^n}}{dy_2}(\dot{y}_2,\ddot{y}_2)$$

对于 $\underline{l}_2$ 和 $\underline{\mathbf{w}}_2^n$。积分 $\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)$ 被改写为

$$\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1) = \int_{\substack{\dot{y}_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot{y}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{i_2\left(\dot{y}_2-\frac{1}{2n_2^{1/2}}\ddot{y}_2\dot{y}_2\right)\geq U_1(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)\right\}}\psi_2(\mathbf{w}_2^n,\dot{y}_2,\ddot{y}_2)d\dot{y}_2d\ddot{y}_2 \quad (6.24)$$

with

$$U_1(\dot{y}_1,\ddot{y}_1) = x - \dot{l}_1\big(\dot{y}_1-\frac{1}{2n_1^{1/2}}\ddot{y}_1\dot{y}_1\big).$$

我们通过以下方式进行变量替换。

$$\begin{pmatrix}\dot{w}\\ \ddot{w}\end{pmatrix} = F(\dot{y}_2,\ddot{y}_2) = \begin{pmatrix}\widetilde{l}_2\big(\dot{y}_2-\frac{1}{2n_2^{1/2}}\ddot{y}_2\dot{y}_2\big)\\ \ddot{y}_2\end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

其中我们选择

$$\widetilde{l}_2 = \begin{pmatrix}\dot{l}_2\\ \dot{l}_2^{\perp}\end{pmatrix} \qquad (2\times 2) \quad (6.26)$$

使得 $\widetilde{l}_2$ 变为非退化的。如果我们代入 (6.16) 中的一个 $\dot{L}_2$ 值，那么例如可以将 $\dot{l}_2^{\perp}$ 设为 $\big((N_{2,\ 1}^n/n_2)^{1/2}$、$(N_{2,\ 2}^n/n_2)^{1/2}\big)$ 的对应值。记作 $\dot{w}=(\dot{w}^{(1)},\dot{w}^{(2)})$。

将变量替换 (6.25) 应用于 (6.24)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1) &= \int_{\substack{\dot{y}_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot{y}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{i_2\left(\dot{y}_2-\frac{1}{2n_2^{1/2}}\ddot{y}_2\dot{y}_2\right)\geq U_1(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)\right\}}\psi_2(\mathbf{w}_2^n,\dot{y}_2,\ddot{y}_2)d\dot{y}_2d\ddot{y}_2 \qquad (6.27)\\ &= \int_{\substack{\dot{y}_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot{y}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\dot{w}^{(1)}\geq U_1(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)\right\}}\psi_2(\mathbf{w}_2^n,F^{-1}(\dot{w},\ddot{w}))\left|\det J_{F^{-1}}(\dot{w},\ddot{w})\right|d\dot{w}d\ddot{w}\\ &= \int_{\substack{\dot{y}_2\in\mathbb{R}^2\\ \ddot{y}_2\in\mathbb{R}}} 1_{\left\{\dot{w}^{(1)}\geq U_1(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)\right\}}\psi_2\left(\mathbf{w}_2^n,\tilde{l}_2^{-1}\dot{w}+2^{-1}n_2^{-1/2}\ddot{w}\tilde{l}_2^{-1}\dot{w},\ddot{w}\right)\\ &\qquad\qquad\times\left|\det\left((1+2^{-1}n_2^{-1/2}\ddot{w})\widetilde{l}_2^{-1}\right)\right|d\dot{w}d\ddot{w}+o(n_s^{-1/2-\delta})\\ &=: \widetilde{\mathcal{I}}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)+o(n_s^{-1/2-\delta}) \qquad (6.28)\end{aligned}$$

对于某个正常数 δ，有 $n_s\to\infty$。这里，$J_{F^{-1}}$是映射 F^{-1}的雅可比矩阵。从（6.27）到（6.28）的过渡很直观，因为映射 F^{-1} 在~整个空间上并未良好定义。不过，在（6.28）中用 $\mathcal{I}_2$（$\dot{y}_1$，$\ddot{y}_1$）近似 $\mathcal{I}_2$（$\dot{y}_1$，$\ddot{y}_1$）是有效的，且误差阶关于（$\dot{y}_1$，$\ddot{y}_1$）是一致的。更准确地说，首先将积分的定义域限制在 $\{$（$\dot{y}_2$，$\ddot{y}_2$）；此时，$|$（$\dot{y}_2$，$\ddot{y}_2$）$|<n_2^{1/4}\}$，映射 F便成为微分同胚，因此对于较大的 n_2，上述推导成立。截断区域上的积分贡献可以忽略不计。事实上，Bhattacharya 和 Ghosh~[2]，（参见 Sakamoto 和 Yoshida [25, 26]、、Yoshida [36]）采用了这种方法。（6.28）中的近似公式 $\mathcal{I}_2$（$\dot{y}_1$，$\ddot{y}_1$）还可以通过展开 ψ_2 和行列式，并忽略阶为 n_2^{-1}~或更小的项来进一步简化。值得注意的是，这样简化后的 $\mathcal{I}_2$（$\dot{y}_1$，$\ddot{y}_1$）是（$\dot{y}_1$，$\ddot{y}_1$）的光滑函数，且具有闭式。

为了计算式 (6.24) 中 $\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)$ 的积分，我们可以对~$(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)$ 应用类似于 (6.26) 的矩阵 l_1 线性变换。由于函数 $\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)$ 属于 $C_b^\infty(\mathbb{R}^3)$，因此对 $(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)$ 作幂级数近似应当效果良好。随后，$\mathcal{I}_2(\dot{y}_1,\ddot{y}_1)$ 的积分可以通过闭式近似计算得出。这种方法适用于 S 大于二的情况。

6.3.3 重要性抽样

Let

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\dot{y}_1,\ddot{y}_1,\dot{y}_2,\ddot{y}_2) &= \int 1_{\left\{\sum_{s=1}^2 i_s\left(\dot{y}_s-\frac{1}{2n_s^{1/2}}\ddot{y}_s\dot{y}_s\right)\geq x\right\}}\psi_2(\mathbf{w}_2^n,\dot{y}_2,\ddot{y}_2)1_{\{l_2\in\Lambda_2^n\}}\nu_{c_2}^n(dl_2,d\mathbf{w}_2^n)\\ &\qquad\times q\big((l_1,\sigma_1^{-1}y_1),dc_2\big)\psi_1(\mathbf{w}_1^n,\dot{y}_1,\ddot{y}_1)1_{\{l_1\in\Lambda_1^n\}}\nu_{c_1}^n(dl_1,d\mathbf{w}_1^n).\end{aligned}$$

^为了计算 f_0^n 的积分，我们采用重要性抽样。令 $x>0$。为 $s\in\mathbb{S}=\{1,2\}$ 准备常数 $a_s\in\mathbb{R}^2$。例如，

$$a_s = \Big(\sum_{s\in\mathbb{S}}|\dot{l}_s|^2\Big)^{-1}\begin{pmatrix}\dot{l}_s^{(1)}\\ \dot{l}_s^{(2)}\end{pmatrix},$$

其中 $l_s=($ $\dot{l}_s^{(1)},\dot{l}_s^{(2)})$。假设（$\xi_s^i$）$_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个三维独立同分布序列，满足

$$\xi_s^i = \begin{pmatrix}\dot{\xi}_s^i\\ \ddot{\xi}_s^i\end{pmatrix}\sim N_3\left(\mu_s,\,\Sigma_s\right),\qquad \mu_s = \begin{pmatrix}xa_s\\ 0\end{pmatrix},$$

对于 $s \in$S，并且 $(\xi_1^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(\xi_2^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 相互独立。矩阵 Σ_s 是一个正定矩阵，且大于 ψ_s主要部分的正态分布 N_3(0, V$_s$) 的协方差矩阵。例如，对于某个常数 $p > 1$， $\Sigma_s = p\,$V$_s$ 。我们用以下表达式近似 f_0^n

$$\mathcal{I}_N \;=\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathcal{J}(\dot{\xi}_1^i, \ddot{\xi}_1^i, \dot{\xi}_2^i, \ddot{\xi}_2^i)}{\phi(\dot{\xi}_2^i, \ddot{\xi}_2^i; \mu_2, \Sigma_2)\phi(\dot{\xi}_1^i, \ddot{\xi}_1^i; \mu_1, \Sigma_1)}$$

当 N 较大时。该计算的速度比对批量老虎机模型进行原始模拟快得多。

需要指出的是，我们基于渐近展开的方法是一种不变性原理，因为近似公式取决于前几个矩，而这些矩可以从数据中估计得到；而模拟方法则需要关于˜误差分布的完整信息。测度 $\Psi^n_{s,\mathbf{p},\mathbf{w}^n_s}(d\dot{y}_s, d\ddot{y}_s)$涉及 $\dot{\epsilon}_j$ 修正项中的矩。在实践中，我们用其估计值替代它们。由于 $\dot{\epsilon}_j$ 阶数大于四的矩出现在高于一阶渐近展开的项中，因此可以使用忽略含有这些矩的项的简化公式。

7 模拟研究

本节基于我们的渐近展开公式给出数值结果。我们在此重点关注两阶段自适应试验这一最简单的情形，它体现了我们理论中所考虑的渐近展开方案的本质。在临床试验中，这对应于第一阶段为探索性阶段、第二阶段采用验证性设计的情形。

我们首先给出基线结果。每个批次为 $s \in \{1, 2\}$分配 $n_s = 50$ 个体。噪声 $\dot{\epsilon}_j$ 服从标准化伽马分布 $\Gamma(k, \theta)$，其中 $k = 3$ 和 $\theta = 2$， $\Gamma(k, \theta)$的概率密度函数为 $f(x) = \Gamma(k)^{-1}\theta^{-k}x^{k-1}e^{-x/\theta}1_{\{x>0\}}$。第一阶段分配治疗的治疗分配概率均匀地设为(0.5, 0.5)，分别对应两个试验组；第二阶段采用带有0.2裁剪的 ϵ-贪心政策。对于我们所有的数值实验，为防止BOLS估计量的设计矩阵奇异，我们确保任一试验组获得零分配的概率为零，而将该概率转移为分配一个试验组。我们设置策略 c_s ，使得每个试验组的最小样本量不低于5。简而言之，我们对一个截断二项分配函-数进行了建模。为在渐近展开公式中进行数值积分，使用了第6.3.3节提出的重要性抽样。表2比较了通过不同方法得到的2.5、5、95、97.5百分位数。

表1：分位数比较：伽马分布

方法\概率	0.025	0.050	0.950	0.975
蒙特卡洛	-2.11	-1.78	1.59	1.90
渐近展开	-2.13	-1.81	1.58	1.89
正态近似	-1.96	-1.64	1.65	1.96

以居中的 Γ(3,2) 作为噪声分布，每批样本数为50，第一阶段均匀抽样，第二阶段 ε-贪心策略，裁剪值为 0.2

正如我们所看到的，由于 Γ(3,2)的偏度，2.5%和5% 百分位数的正态近似并不精确，而基于渐近展开的方法正在修正分布中明显的偏度。

接下来，考察当底层分布为正态分布时，我们的估计量表现如何，可能会颇有意义。根据理论，正态近似与渐近展开之间应该没有显著差异。事实上，当 $\dot{\epsilon}_j \sim N(0, 1)$ 时，表1证实了这一猜测：渐近展开和正态近似的表现几乎完全相同。

表2：分位数比较：正态分布

方法\概率	0.025	0.050	0.950	0.975
蒙特卡洛	-1.98	-1.66	1.66	1.95
渐近展开	-1.97	-1.65	1.65	1.98
正态近似	-1.96	-1.64	1.65	1.96

$N(0, 1)$ 作为噪声分布，每批样本数为 50，第一阶段均匀采样，第二阶段采用裁剪值为 0.15 的 ε-贪心策略

最后，对于 $\dot{\epsilon}_j$的分布，我们考虑了密度为 $0.7\phi(x;0, 1) + 0.3\phi(x;3, 4)$ 的正态混合分布，并将其标准化为均值 0、方差 1。表3总结了结果。

表3：分位数之间的比较：正态混合

方法\概率	0.025	0.050	0.950	0.975
蒙特卡洛	-2.31	-1.93	1.64	2.01
渐近展开	-2.10	-1.76	1.65	1.96
正态近似	-1.96	-1.64	1.65	1.96

噪声分布为标准化正态混合分布，每批 50 个样本，第一阶段分配概率为 =(0.2,0.8)，第二阶段均匀采样

正态近似下的名义第一类错误率在三者中最高，膨胀了 3.2 个百分点。出现这种情况时，噪声分布为正态混合分布；但或许更重要的是，第一阶段的分配并非均匀分布。尽管实际中采用这种策略的情况可能并不常见，但我们认为，这种令人担忧的第一类错误率膨胀不仅源于底层分布的偏度，也源于原假设下第一臂与第二臂之间分配概率的不对称（无边际差异的情形）。在无边际差异的情形下，两个臂完全相同；如果第一阶段采用对称分配，臂间差异估计（BOLS 统计量）的偏度很可能相互抵消，这是一种“对称化”现象。这或许意味着，当即将开展自适应试验且确实怀疑臂间差异很小时，建议采用均匀采样，因为这可能带来更高阶的近似。我们认为，从理论上验证这一假设是一个有趣的未来研究方向。

总而言之，尽管这只是数值验证的初步结果，但我们的方法似乎至少适用于样本量相对较小、且高阶累积量偏离正态分布的情形。

8 定理 4.1 和 4.4 的证明

8.1 定理4.1的证明概要

(I) 固定一些满足 $\delta < \widetilde{\delta}$ 的正数常数 δ 和 $\widetilde{\delta}$。我们考虑一个序列$(t_{T,j})_{j=1,\ldots,N_T}$，对于每个 $T \in \mathbb{R}_+$，使得 $0 = t_{T,0} < t_{T,1} < \cdots < t_{T,N_T} = T$ 和 $\delta < t_{T,j} - t_{T,j-1} < \widetilde{\delta}$ $(j = 1,\ldots, N_T - 1)$ 以及 $t_{T,N_T} - t_{T,N_T-1} < \delta$。令 $I_j = [t_{T,j-1}, t_{T,j}]$ $(j = 1, \ldots, N_T)$。根据定义，$Z_{\widetilde{I}_j} = Z_{t_{T,j}} - Z_{t_{T,j-1}}$ 对于 $j = 1, \ldots, N_T$。令 $Z_{\widetilde{I}_0} = Z_0$。

设 $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ 是一个可测函数，使得当 $|x| \le 1/2$ 时，$\varphi(x) = 1$；当$|x| \ge 1$时，$\varphi(x) = 0$。函数 φ_T定义为 $\varphi_T(x) = x\varphi(x/(2T^\beta))$，其中 $\beta \in (0, 1/2)$ 是一个常数；参见 Yoshida [35] 第585–586页。令 $Z'_T = \sum_{j=0}^{N_T} \varphi_T(Z_{\widetilde{I}_j})$（第601页），并且

$$e_T = T^{-1/2}\left\{E_{\mathcal{C}}[\varphi_T(Z_0)] + \sum_{j=1}^{N_T} E_{\mathcal{C}}\left[\varphi_T\left(Z_{\widetilde{I}_j}\right)\right]\right\}$$

如第596页所述。令 $\widetilde{Z}_{T,\ j} = \varphi_T(Z_{\widetilde{I}_j}) - E_{\mathcal{C}}\left[\varphi_T(Z_{\widetilde{I}_j})\right]$，其中 $j = 0$，1，...，N_T。此外，令 $\widetilde{Z}_T = \sum_{j=1}^{N_T} \widetilde{Z}_{T,\ j}$以及 $S_T^* = T^{-1/2}\widetilde{Z}_T$。设 $H_T(u, \mathcal{C}) = E_{\mathcal{C}}\left[e^{iu\cdot S_T^*}\right]$，其中 $u \in \mathbb{R}^d$。对于 $I = (j_1, \ldots, j_r) \in \{0, 1, \ldots, N_T\}^r$，记作 $Z_I = Z_{T,\ j_1} \otimes \cdots \otimes Z_{T,\ j_r}$。

$\mathcal{C}$条件特征函数记为 $H_T(E_{\mathcal{C}}[e^{\mathrm{i}u\cdot S_T^*}]$ $u \in$ ^{d} u u $=$ ，$\mathcal{C})$，其中 S_T^*表示 $H_T(\ ,\mathcal{C})$，适用于 R。证明使用复值共轭条件期望（CVCC） $E_{\mathcal{C}}[X](V)$，其定义为 $E_{\mathcal{C}}[X](V) = E_{\mathcal{C}}^0[X](V)/E_{\mathcal{C}}^0[1](V)$，当 $E_{\mathcal{C}}^0[1](V) \neq 0$时，其中$E_{\mathcal{C}}^0[X](V) = E_{\mathcal{C}}[Xe^{\mathrm{i}V}]$，适用于实随机变量 X 和 V，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。按照[35]第 565 页的定义，对于 $\mathbb{R}^d$上的博雷尔测度 ν，$\omega(\mathrm{f};\ \epsilon, \nu) = \int \omega_{\mathrm{f}}(x;\ \epsilon)d\nu$。

[35]中定理 1 的证明策略如下。

(1)针对 $E_{\mathcal{C}}[Z_I](u \cdot S_T^*)$ 的条件矩估计（引理 12，第609页）

(2) CVCC 协方差 Cov$\big[\widetilde{Z}_{I_1},\widetilde{Z}_{I_2}\big](u\cdot S_T^*)$ 的估计（引理 13，第 611 页）(3) CVCC 累积量 $\kappa_{\mathcal{C}}\big[S_T^*,...,S_T^*\big](u\cdot S_T^*)$ 的估计（引理 14，第 611 页； $\Leftarrow$引理 12+ 引理 13）；带有因子 $\theta_T(u,\omega)$ 的界。(4) 因子 $\theta_T(u,\omega)$ 的估计（引理 15，第 613 页）(5) CVCC 累积量 $\kappa_{\mathcal{C}}\big[S_T^*,...,S_T^*\big](u\cdot S_T^*)$ 的估计（引理 5，第 591 页；证明，第 $616\Leftarrow$引理 $14+$引理 15 页）(6) 条件累积量 $\kappa_{\mathcal{C}}[S_T^*,...,S_T^*]$ 和 $\kappa_{\mathcal{C}}[S_T,...,S_T]$ 之间的差距估计，适用于$S_T=T^{-1/2}Z_T$（引理 6，第 591 页；证明，第 616 页）$\widehat{\ }$(7) $H_T(u,\mathcal{C})$ 与 $\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}(u)$ 之间的差距估计（引理 7，第 591 页；证明，第 $617\Leftarrow$引理 $6+$引理 5 页） (8) 当 u 较大时， $\partial_u^l H_T(u,\mathcal{C})$ 的 L^p- 估计，满足第 592 页的条件“$[A1^\sharp]$”和第 591 页的条件“$[A3^\flat]$”（引理 10，第 594 页）(9) 如下文引理 8.1 的 (8.2) 式的估计，针对确定性 f，不含 Φ_T（引理 11，第 601 页；$\Leftarrow$ 引理 $5+$引理 6）(10) “$[A3]$” $\Rightarrow$ “$[A3^\flat]$”（引理 9，第 593 页；证明，第 605 页）(11) 类似于 (4.9) 的不等式，针对确定性 f，不含 Φ_T，满足第 587 页的条件“$[A1]$”和“$[A3^\flat]$”（引理 8，第 592 页，证明，第 596 页； $\Leftarrow$ 引理 $7+$ 引理 $10+$ 引理 11）(12) 类似于 (4.9) 的不等式，针对确定性 f，不含 Φ_T，满足第 563 页的条件“$[A1']$”和“$[A3^\flat]$”（命题 1，第 593 页； $\Leftarrow$ 引理 8）

（13）对于确定性 f，在第 564 页的“$[A1']$”和“$[A3]$”条件下，类似于（4.9）的不等式，不含 Φ_T（定理 1，第 565 页；证明见第 $593\Leftarrow$ 命题 $1+$ 引理 9）

我们仅概述定理 4.1 的证明思路，因为其证明与 [35], 中的定理 1 几乎相同，后者在 [35] 的第6节第585-621页中得到了证明。本文的条件 $[P1]$ 是“$[A1']$”，在当前情形下它意味着“$[A1^\sharp]$”。条件 $[P2]$ 只不过是 [35] 中的“$[A2]$”。上述步骤 1-8 照常进行。

另一方面，在步骤 9 中，有必要仔细处理 $\mathcal{C}$-可测函数 f。此外，为了便于本文中的应用，我们采用了条件 $[P3]$，即 [35]的注 15 中引入的条件“$[A3^\natural]$”。这需要对步骤 10 作一些修改。由于得到的不等式略有不同，我们将修正这些问题，并重新构建证明如下。

(II) 我们补充步骤 9。在 [35], 的第 599 页，截断泛函 ψ_T 被定义为该集合的示性函数。

$$\Omega_0(T)\cap\big\{s_T I_{\mathsf{d}}\le \mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\le u_T I_{\mathsf{d}}\big\},$$

其中，事件Ω_0({v2）在第 586 页中有说明。在 [35], 的引理 11（第601 页）的证明中，我们现在用以下内容代替不等式（34）（第 605 页）进行估计

$$\left\|\psi_T\Phi_T\left(E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{f}(T^{-1/2}Z'_T)\right]-\Psi_{T,p,\mathcal{C}}[\mathsf{f}]\right)\right\|_1$$

如下。根据将Sweeting平滑不等式应用于下面的 L^1-范数内的 $\mathcal{C}$-可测函数 f 以及条件概率测度 $P_{\mathcal{C}}^{T^{-1/2}Z'_T}$and $\Psi_{T,\ \mathsf{p},\ c}$，我们得到一个对应于 Yoshida [35] 中（34）的不等式:

$$\begin{aligned}
&\left\|\Phi_T\psi_T\left(E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{f}(T^{-1/2}Z'_T)\right]-\Psi_{T,p,\mathcal{C}}[\mathsf{f}]\right)\right\|_1\\
\leq\ & CM\Bigg\{\left\|\Phi_T\psi_T\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}h(|x|)\big|\mathcal{K}_{T^{-K_1}}*\big(P_{\mathcal{C}}^{T^{-1/2}Z'_T}-\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\big)\big|(dx)\right\|_1\\
&\quad+\left\|\big(E_{\mathcal{C}}^{T^{-1/2}Z'_T}+\Phi_T|\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}|\big)[h(|\cdot|)]\right\|_1\int_{x:|x|\geq aT^{\zeta}}h(|x|)\mathcal{K}(dx)\\
&\quad+\left\|\big(E_{\mathcal{C}}^{T^{-1/2}Z'_T}+\Phi_T|\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}|\big)[h(|\cdot|)]\right\|_1\delta(\alpha)^{\lfloor a^{-1/2}T^{\zeta}\rfloor}\Bigg\}\\
&+C'\left\|\psi_T\Phi_T\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\sup_{x:|x|\leq aT^{-(K+\zeta)}\lfloor(2a)^{-1}T^{\zeta}\rfloor}\omega_{\mathsf{f}}(x+y,2aT^{-K_1})\Psi^{+}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}(dy)\right\|_1.
\end{aligned}\tag{8.1}$$

这里 $\mathcal{K}$ 是定义在$\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的一个概率测度，其傅里叶变换具有紧支集，并且 $\mathcal{K}_\epsilon$ 由 $\mathcal{K}_\epsilon(A)=\mathcal{K}(\epsilon^{-1}A)$定义，其中 $A\in\mathsf{B}_{\mathsf{d}}$ 和 $\epsilon>0$。K_1 和 K 是满足 $K_1>K$的任意正数常数，并且 $\zeta=(K_1-K)/2$。一个正常数 $\alpha>1/2$ 和$\delta(\alpha)=\alpha^{-1}(1-\alpha)\in(0,1)$。$C$是一个依赖于p、d α 和 $C'=(2\alpha-1)^{-1}$的常数，而a 是一个正数。函数 $h(x)=1+x^{\mathsf{p}_0}$。对于(8.1)右端的 $\{...\}$ 中的前三项，与 Yoshida [35], 第605页中相同的估计同样成立，只是这里我们使用了通过 Φ_T 进行局部化的(4.6)。最后一项的估计为

$$\left\|\psi_T\Phi_T\omega\big(\mathsf{f};T^{-K},\Psi^{+}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\big)\right\|_1$$

对于较大的 T，其中 $\omega(\mathsf{f}\ \epsilon,\nu)=\int\omega_{\mathsf{f}}(x,\epsilon)\nu(dx)$ 对于 $\epsilon>0$ 和一个测度 ν。因此，我们得到了以下引理，它是 Yoshida [35], 第 601 页中引理 11 的对应结果。

引理 8.1. 假设条件 (4.6) 得到满足。那么，对于满足 $K_1>K>0$ 的给定常数 K_1 和 K，存在正常数 C_{d} 和 δ''，使得

$$\begin{aligned}
&\left\|\psi_T\Phi_T\left(E_{\mathcal{C}}\left[\mathsf{f}(T^{-1/2}Z_T)\right]-\Psi_{T,p,\mathcal{C}}[\mathsf{f}]\right)\right\|_1\\
\leq\ & C_{\mathsf{d}}M\sum_{\alpha:|\alpha|\leq\mathsf{d}+1+\mathsf{p}_0}\int\left\|\psi_T\partial_u^{\alpha}\left[\big(H_T(u,\mathcal{C})e^{\mathbf{i}u\cdot e_T}-\widehat{\Psi}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}(u)\big)\widehat{\mathcal{K}}(T^{-K_1}u)\right]\right\|_1du\\
&+C_{\mathsf{d}}\left\|\psi_T\Phi_T\omega\big(\mathsf{f};T^{-K},\Psi^{+}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\big)\right\|_1+\overline{o}_{\check{\mathcal{E}}(M,\mathsf{p}_0)}\big(T^{-(\mathsf{p}-2+\delta'')/2}\big)
\end{aligned}\tag{8.2}$$

对于 $T\to\infty$，也就是说，该不等式对 $\mathsf{f}\in\check{\mathcal{E}}(M,\gamma)$ 成立，其误差项的阶为$o\big(T^{-(\mathsf{p}-2+\delta'')/2}\big)$，且对 $\mathsf{f}\in\check{\mathcal{E}}(M,\mathsf{p}_0)$ 一致成立。

(III) 我们现在处于步骤 10。 [35] （第 593 页）的引理 9 表明，“$[A3]$”（第 564 页）意味着

$[A3^\flat]$ （ [35]第591页）。存在正常数 η_1、 η_2、 η_3、 B （$\eta_1+\eta_2<1$、 $\eta_3<1$），以及截断泛函 $\Psi_j\colon(\Omega\ \mathcal{F})\ \to\ \big([0,1],\mathbf{B}([0,1])\big)$，使得

(i) $\sup\limits_{u:|u|\geq B}\big|E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}\big[\Psi_j\exp(\mathtt{i}u\cdot Z_{I(j)})\big]\big|\leq\eta_1$ a.s. for every j.

（ii）对于这些泛函

$$p_j\big(\widehat{\mathcal{C}}(j)\big)\ :=\ E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}\big[(1-\Psi_j)+2\big(1-\varphi(T^{-\beta}Z_{I(j)})\big)\big],$$

成立

$$P\bigg[\#\big\{j;\ p_j\big(\widehat{\mathcal{C}}(j)\big)\geq\eta_2\big\}\geq\eta_3n'(T)\bigg]\ =\ o(T^{-M_1})$$

当 $T\to\infty$ 时。

这里 M_1 是一个正常数。

现在我们假设 $[P3]$。 $[P3]$ 中的参数 η_i （$i=2,3$）将分别记为 $\eta_i^\natural$ （$i=2,3$）。因此，我们有

$$P\bigg[\sum_j P_{\mathcal{C}}\big[\widetilde{\Phi}(j)\leq1-\eta_2^\natural\big]>\eta_3^\natural n'(T)\bigg]\ =\ o(T^{-L})\tag{8.3}$$

当 $T\to\infty$ 时。选取正常数 $\eta_i\,(i=2,3)$ 和 ϵ，使得 $\eta_2^\natural<\eta_2$ 和 $\eta_1+\eta_2<1$，并且 $\eta_3^\natural<\eta_3^\natural+\epsilon<\eta_3<1$。我们将遵循 [35] （第 593 页）中引理 9 的证明，该证明见 [35] 第 605–608 页。我们定义截断泛函 Ψ_j 为

$$\Psi_j\ =\ \psi_j1_{\left\{\sup_{u:|u|\geq B}\left|E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}\left[\Psi_j\exp(\mathtt{i}u\cdot Z_{I(j)})\right]\right|\leq\eta_1\right\}},$$

其中 ψ_j 在 $[P3]$ 中给出。于是， $[A3^\flat]$ 的 (i) 显然。按照 [35], 中引理 9 的证明步骤 (a)（第 605–606 页）和步骤 (c)（第 608 页）的做法，对于 $[A3^\flat]$ 的 (ii)，只需证明

$$P\big[\Omega_0(T)\cap\{W_2\leq\epsilon\}\big]\ =\ O(T^{-L})\tag{8.4}$$

当 $T\to\infty$ 时，对每个 $L>0$，其中 $W_2=n'(T)^{-1/2}\sum_j\big\{\eta_3-E_{\mathcal{C}}[\zeta_j]\big\}$ 对于 $\zeta_j=1_{\left\{\widehat{p}_j(\mathcal{C}(j))\geq\eta_2\right\}}$。

我们将步骤（b）（第 607–608 页）修改如下。条件期望 $E_{\mathcal{C}}[\zeta_j]$ 具有如下估计 $E_{\mathcal{C}}[\zeta_j]\leq\Phi_1(j)+\Phi_2(j)$，其中

$$\Phi_1(j)\ =\ P_{\mathcal{C}}\big[E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}[1-\Psi_j]\geq\eta_2^\natural\big]\ =\ P_{\mathcal{C}}\big[\widetilde{\Phi}(j)\leq1-\eta_2^\natural\big]$$

and

$$\Phi_2(j)\ =\ P_{\mathcal{C}}\bigg[E_{\widehat{\mathcal{C}}(j)}\big[2\big(1-\varphi(T^{-\beta}Z_{I(j)})\big)\big]\geq\eta_2-\eta_2^\natural\bigg].$$

与步骤（b）中一样， $\Phi_2(j) = cT^{-c'-1}$ 在 $\Omega_0(T)$ 上成立，其中包含一些正常数 c 和 c'，这得益于 $\Omega_0(T)$ 的选取。

现在我们有

$$\begin{aligned}
& P\left[\Omega_0(T) \cap \left\{ \sum_j E_{\mathcal{C}}[\zeta_j] > (\eta_3 - \epsilon)n'(T) \right\}\right] \\
\leq\ & P\left[\Omega_0(T) \cap \left\{ \sum_j \Phi_1(j) + \sum_j \Phi_2(j) > (\eta_3 - \epsilon)n'(T) \right\}\right] \\
\leq\ & P\left[\Omega_0(T) \cap \left\{ \sum_j P_{\mathcal{C}}\big[\widetilde{\Phi}(j) \leq 1 - \eta_2^\natural\big] + cT^{-c'} > (\eta_3 - \epsilon)n'(T) \right\}\right] \\
\leq\ & P\left[\Omega_0(T) \cap \left\{ \sum_j P_{\mathcal{C}}\big[\widetilde{\Phi}(j) \leq 1 - \eta_2^\natural\big] > \eta_3^\natural n'(T) \right\}\right] \\
& + P\left[\Omega_0(T) \cap \left\{ cT^{-c'} > (\eta_3 - \eta_3^\natural - \epsilon)n'(T) \right\}\right] \\
=\ & O(T^{-L}) \quad (T \to \infty)
\end{aligned}$$

对每个 $L > 0$，由（8.3）可知。因此，通过估计

$$P\big[\Omega_0(T) \cap \{W_2 \leq \epsilon\}\big] \ \leq\ P\left[\Omega_0(T) \cap \left\{ \sum_j E_{\mathcal{C}}[\zeta_j] \geq (\eta_3 - \epsilon)n'(T) \right\}\right] \ =\ O(T^{-L})$$

当 $T \to \infty$ 时。

（IV）定理 4.1 的证明。按照 Yoshida [35], ，我们将（8.2）右端的积分拆分为两个积分，分别在 $\{u$ 上；$|u| \geq l(T)\}$（步骤 8）以及 $\{u$ 上； $|u| \leq l(T)\}$（步骤 7）进行估计，其中 $l(T) = \lfloor T^{\epsilon_4} \rfloor$ 是在引理 2（第 587 页）中定义的，取充分小的正数 ϵ_4，以确保在 $[P1]$ 下有 $[A1]$ （第 587 页），即 $[A1']$ （第 563 页）。在步骤 11 中，所得估计在引理 8（第 592 页）中合并，从而在步骤 12 得到命题 1（第 593 页），并在步骤 13 得到定理 1 （第 565 页）；在当前情形下，这一结果改述为定理 4.1。

我们指出，在 [35], 第 599 页第 4 行（该处位于 [35],引理 8 的证明中），使用第 565 页的条件（1）将 ψ_T 从 $\Psi_{T,\ p,\ c}$ 中分离出来；它们位于 [35], 第 601 页引理 11 中不等式的左侧。在当前情形下，由于 $\Delta_T^{\Phi}(\mathrm{f})$ 的定义保留了因子 Φ_T，如式（4.5）所示，因此应用引理 8.2 时，我们可以通过付出.....将 ψ_T 从 $\Phi_T\Psi_{T,\ p,\ c}[\mathrm{f}]$ 中分离出来；这些项位于式（8.2）的左侧

$$\|(1 - \psi_T)\Phi_T\|_{q'} \big\|\Phi_T \Psi_{T,p,\mathcal{C}}[1 + |\cdot|^{\mathrm{p}_0}]\big\|_q \tag{8.5}$$

对于它，其中 $q' = q/(q-1)$。这里我们使用了 $\Phi_T^2 = \Phi_T$。我们需要用 (4.6) 来界定 (8.5) 右端的第二个因子。此外，

$$\begin{aligned}
\|(1 - \psi_T)\Phi_T\|_{q'} \ \leq\ & \big\|(1 - 1_{\Omega_0(T)})\Phi_T\big\|_{q'} + \big\|(1 - 1_{\{\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] \leq u_T I_{\mathsf{d}}\}})\Phi_T\big\|_{q'} \\
& + \big\|(1 - 1_{\{\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] \geq s_T I_{\mathsf{d}}\}})\Phi_T\big\|_{q'} \\
\leq\ & P\big[\Omega_0(T)^c\big]^{1/q'} + P\big[\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] > u_T I_{\mathsf{d}}\big]^{1/q'} \\
& + P\big[\{\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] < s_T I_{\mathsf{d}}\} \cap \{\Phi_T = 1\}\big]^{1/q'}.
\end{aligned}$$

对于某个 $P\big[\Omega_0(T)^c\big]^{1/q'} = O(T^{-(\mathsf{p}-2+\delta'')})$，我们有（ δ''（ [35], 第587页的引理 2），并且对于任意 $L>0$，还有$P\big[\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] > u_T I_{\mathsf{d}}\big] = O(T^{-L})$。

最后，在定理 4.1 的证明中，我们的情形有所不同之处在于对 (8.2) 右端第二项的估计；原文见 [35] 第 600 页。如其中所述，测度 Ψ_T^+ , $_{\mathsf{p}}c$ 可表示为

$$\phi\big(x;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)\bigg(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{\mathsf{d}}:|\mathbf{n}|\le 3(\mathsf{p}-2)} d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})x^{\mathbf{n}}\bigg)^+ \tag{8.6}$$

系数 $d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})$ 涉及 $T^{-1/2}Z_T$ 的次数至多为 p 的条件累积量，以及 $\big(\det \mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)^{-k}$($k=0$, 1, ..., 3(p -2))。因此

$$\big\|\psi_T|d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})|\big\|_2 \quad\lesssim\quad s_T^{-3(\mathsf{p}-2)\mathsf{d}} \tag{8.7}$$

因为除行列式外，其余因子都属于 $L^{\infty-}$。另一方面，

$$\begin{aligned}
&\Big\|\psi_T\Phi_T|d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})|\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})|x|^{|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)dx\Big\|_1\\
\le\;& \big\|\psi_T|d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})|\big\|_2\Big\|\psi_T\Phi_T\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})|x|^{|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)dx\Big\|_2\\
\le\;& u_T^{\mathsf{d}/2}s_T^{-\mathsf{d}/2}\big\|\psi_T|d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})|\big\|_2\Big\|\psi_T\Phi_T\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})|x|^{|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)dx\Big\|_2
\end{aligned} \tag{8.8}$$

因为

$$\phi\big(x;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big) \;\le\; (\det s_TI_{\mathsf{d}})^{-1/2}(\det u_TI_{\mathsf{d}})^{1/2}\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)$$

当 $\psi_T=1$ 时。此外，

$$\begin{aligned}
&\Big\|\psi_T\Phi_T\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})|x|^{|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)dx\Big\|_2\\
\le\;& \Big\|\psi_T\Phi_T\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})^2\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{2|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)dx\Big)^{1/2}\Big\|_2\\
\le\;& \Big\|\Phi_T\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})^2\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)dx\Big)^{1/2}\Big\|_2\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{2|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,u_TI_{\mathsf{d}}\big)dx\Big)^{1/2}\\
\lesssim\;& u_T^{|\mathbf{n}|/2}\omega_2^{\Phi}\big(\mathsf{f};T^{-K},N(0,u_TI_{\mathsf{d}})\big)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

由 (8.6)、(8.8) 和 (8.9)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big\|\psi_T\Phi_T\omega\big(\mathsf{f};T^{-K},\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}^+\big)\Big\|_1\\
\le\;& \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{\mathsf{d}}:|\mathbf{n}|\le 3(\mathsf{p}-2)}\Big\|\psi_T\Phi_T|d_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})|\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\omega_{\mathsf{f}}(x;T^{-K})|x|^{|\mathbf{n}|}\phi\big(x;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)dx\Big\|_1\\
\lesssim\;& u_T^{\gamma(1)}s_T^{-\gamma(2)}\omega_2^{\Phi}\big(\mathsf{f};T^{-K},N(0,u_TI_{\mathsf{d}})\big).
\end{aligned}$$

这就完成了定理 4.1 的证明概要。

8.2 定理 4.4 的证明

对于 $\mathsf{f} \in \mathcal{E}(M,\gamma)$, 令

$$\mathsf{f}^*(z) \;=\; \Phi_T \mathsf{f}(G_T z).$$

根据假设 (4.13), 对某个正常数 M', 有 $\mathsf{f}^* \in \check{\mathcal{E}}(M',\gamma)$。我们对 $\mathcal{C}$-可测随机函数 f^* 应用定理 4.1, 而不是对 f 应用。

由 (4.1) 和 (4.14),

$$\chi^*_{T,r,\mathcal{C}}(v) \;=\; \chi_{T,r,\mathcal{C}}(G_T{}^{\star} v). \tag{8.10}$$

根据P_T的定义$_{r,\ \mathcal{C}}$,

$$\exp\Big(\sum_{r=2}^{\infty} \epsilon^{r-2}(r!)^{-1}\chi^*_{T,r,\mathcal{C}}(v)\Big) \;=\; \exp\big(2^{-1}\chi^*_{T,2,\mathcal{C}}(v)\big)\sum_{r=0}^{\infty}\epsilon^r T^{-r/2} P_{T,r,\mathcal{C}}\big(v;\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big),$$

并且我们得到

$$\exp\Big(\sum_{r=2}^{\infty} \epsilon^{r-2}(r!)^{-1}\chi_{T,r,\mathcal{C}}(u)\Big) \;=\; \exp\big(2^{-1}\chi_{T,2,\mathcal{C}}(u)\big)\sum_{r=0}^{\infty}\epsilon^r T^{-r/2} P_{T,r,\mathcal{C}}\big((G^{\star}_T)^{-1}u;\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big), \tag{8.11}$$

根据 plu 将 $(G^{\star}_T)^{-1}u$ 代入 v, 并使用 (8.10)。比较 (4.2) 和 (8.11), 我们可知

$$P_{T,r,\mathcal{C}}\big(u;\chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big) \;=\; P_{T,r,\mathcal{C}}\big((G^{\star}_T)^{-1}u;\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big),$$

或者等价地,

$$P_{T,r,\mathcal{C}}\big(G^{\star}_T v;\chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big) \;=\; P_{T,r,\mathcal{C}}\big(v;\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big). \tag{8.12}$$

在该事件上

$$\begin{aligned} &\big\{\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T] \text{ is non-degenerate }\big\}\cap\{\Phi_T = 1\}\\ =\;&\big\{\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[Z^*_T] \text{ is non-degenerate }\big\}\cap\{\Phi_T = 1\}, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} \Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}^*] \;&=\; \int \Phi_T f(G_T z)\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\mathsf{f}(dz)\\ &=\; \int \Phi_T f(G_T z)\frac{d\mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{\Psi}_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}\big]}{dz}(z)dz\\ &=\; \int \Phi_T f(G_T z)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2} T^{-r/2}P_{T,r,\mathcal{C}}\big(-\mathtt{i}\partial_z;\chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big)\phi\big(z;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)dz\\ &=\; \int \Phi_T f(G_T z)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2} T^{-r/2}P_{T,r,\mathcal{C}}\big(G^{\star}_T(-\mathtt{i}\partial_y);\chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big)\phi\big(G_T^{-1}y;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[T^{-1/2}Z_T]\big)dz \end{aligned}$$

对于 $y = G_T z$，由于

$$\frac{\partial}{\partial z} \;=\; G_T^{\star}\frac{\partial}{\partial y}.$$

此外，

$$\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}^*] \;=\; \int \Phi_T f(G_T z)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2} T^{-r/2} P_{T,r,\mathcal{C}}\big((-\mathtt{i}\partial_y);\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big)\phi\big(y;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[Z_T^*]\big)|\det G_T|dz$$

对于 $y = G_T z$，如果使用 (8.12) 重写随机符号 $P_{T,r,\mathcal{C}}\big(G_T^{\star}(-\mathtt{i}\partial_y);\ \chi_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big)$。因此，

$$\begin{aligned}\Psi_{T,\mathsf{p},\mathcal{C}}[\mathsf{f}^*] \;&=\; \int \Phi_T f(y)\sum_{r=0}^{\mathsf{p}-2} T^{-r/2} P_{T,r,\mathcal{C}}\big((-\mathtt{i}\partial_y);\chi^*_{T,\cdot,\mathcal{C}}\big)\phi\big(y;0,\mathrm{Var}_{\mathcal{C}}[Z_T^*]\big)dy\\ &\qquad\qquad\qquad

参考文献

[1] Basawa, I.V., Scott, D.J.：非遍历模型的渐近最优推断，《统计学讲义》，第17卷。施普林格出版社，纽约（1983年）[2] Bhattacharya, R.N., Ghosh, J.K.：关于形式埃奇沃思展开的有效性。《统计年刊》6(2)，434–451（1978年）[3] Bhattacharya, R.N., Rao, R.R.：正态近似与渐近展开，第64卷。工业与应用数学学会（2010年）[4] Deshpande, Y., Mackey, L., Syrgkanis, V., Taddy, M.：自适应线性模型的精确推断。《机器学习研究论文集》（2018年）[5] Dud´ık, M., Langford, J., Li, L.：双重稳健策略评估与学习。arXiv预印本 arXiv:1103.4601（2011年）[6] G¨otze, F., Hipp, C.：弱依赖随机向量之和的渐近展开。概率论与相关领域杂志 64(2)，211–239（1983年）[7] G¨otze, F., Hipp, C.：时间序列中统计量的渐近分布。《统计年刊》22(4)，2062–2088（1994年）[8] Hadad, V., Hirshberg, D.A., Zhan, R., Wager, S., Athey, S.：自适应实验中政策评估的置信区间。《美国国家科学院院刊》（2021年）[9] Horvitz, D.G., Thompson, D.J.：有限总体不放回抽样的推广。《美国统计学会杂志》47(260)，663–685（1952年）[10]Howard, S.R., Ramdas, A., Mcauliffe, J., Sekhon, J.：时间一致的、非参数的、非渐近的置信序列。《统计年刊》（2021年）[11] Khamaru, K., Deshpande, Y., Mackey, L., Wainwright, M.J.：自适应线性回归中的近乎最优推断[12] Kusuoka, S., Yoshida, N.：Malliavin演算、几何混合与扩散泛函的展开。《概率论与相关领域》116(4)，457–484（2000年）[13] Luedtke, A.R., Laan, M.J.v.d.：单侧可微参数的参数率推断。《美国统计学会杂志》113(522)，780–788（2018年）[14] Luedtke, A.R., Van Der Laan, M.J.：可能不唯一的最优治疗策略下平均结果的统计推断。《统计年刊》44(2)，713（2016年）[15] Mykland, P.A.：依赖变量的渐近展开与自助法分布：鞅方法。《统计年刊》20(2)，623–654（1992年）[16] Mykland, P.A.：鞅的渐近展开。《概率年刊》21(2)，800–818（1993年）

[17] Nie, X., Tian, X., Taylor, J., Zou, J.：为什么自适应收集的数据存在负偏差，以及如何纠正。在：人工智能与统计国际会议，第 1261–1269 页。《机器学习研究论文集》（2018年）[18] Nualart, D., Yoshida, N.：Skorohod 积分的渐近展开。《电子概率期刊》24（2019年）[19] Podolskij, M., Veliyev, B., Yoshida, N.：预平均估计量的埃奇沃思展开。《随机过程及其应用》127(11)，3558–3595（2017年）[20] Podolskij, M., Veliyev, B., Yoshida, N.：连续扩散过程欧拉近似的埃奇沃思展开。arXiv 预印本 arXiv:1811.07832（2018年）[21] Podolskij, M., Yoshida, N.：连续扩散过程泛函的埃奇沃思展开。《应用概率年刊》26(6)，3415–3455（2016年）[22] Ramdas, A., Ruf, J., Larsson, M., Koolen, W.：可容许的任意时刻有效序贯推断必须依赖非负鞅。arXiv 预印本 arXiv:2009.03167（2020）[23] Robbins, H.：与重对数律相关的统计方法。《数理统计年刊》41(5)，1397–1409（1970）[24] Robins, J.M., Rotnitzky, A., Zhao, L.P.：当某些回归变量并非总是可观测时回归系数的估计。《美国统计学会杂志》89(427)，846–866（1994）[25] Sakamoto, Y., Yoshida, N.：具有混合性质的 ϵ-马尔可夫过程泛函的渐近展开公式。《统计数学年刊》56(3)，545–597（2004）[26] Sakamoto, Y., Yoshida, N.：扩散过程 M-估计量的三阶渐近展开。《统计数学年刊》61(3)，629–661（2009年）。DOI 10.1007/ s10463-008-0190-4。URL http://dx.doi.org/10.1007/s10463-008-0190-4[27] Shin, J., Ramdas, A., Rinaldo, A.：多臂老虎机中的样本均值是正偏还是负偏？《神经信息处理系统进展》第32卷（2019年）[28] Shin, J., Ramdas, A., Rinaldo, A.：多臂老虎机中的条件偏差与边际偏差。在：国际机器学习会议，第 8852–8861 页。《机器学习研究论文集》（2020年）[29] Van Der Laan, M.J., Lendle, S.D.：在线靶向学习（2014）[30] Villar, S.S., Bowden, J., Wason, J.：用于临床试验最优设计的多臂老虎机模型：优势与挑战。《统计科学：统计学会评论期刊》30(2)，199（2015）[31] Waudby-Smith, I., Ramdas, A.：通过下注估计有界随机变量的均值。arXiv 预印本 arXiv:2010.09686（2020）

[32] Yamagishi,H.,Yoshida,N.：与分数阶布朗运动相关的泛函的阶数估计及分数阶随机微分方程二次变差的渐近展开。arXiv预印本 arXiv:2206.00323（2022年）[33] Yoshida, N.：Malliavin演算与鞅的渐近展开。概率论及相关领域 109(3)，301–342（1997年）[34] Yoshida,N.：Malliavin演算与鞅展开。数学科学通报 125(6-7)，431–456（2001年）[35] Yoshida, N.：部分混合与埃奇沃思展开。概率论及相关领域 129(4)，559–624（2004年）[36] Yoshida, N.：Suritoukeigaku（日文），SugakunoKangaekata，第21卷。朝倉書店（2006年）[37]Yoshida, N.：混合正态极限中的鞅展开。随机过程及其应用 123(3)，887–933（2013年）。DOI10.1016/j.spa.2012.10.007。URL http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2012.10.007[38] Yoshida, N.：随机过程的渐近展开。载于：M. Denker、E. Waymire（编），Rabi N. Bhattacharya，第15–32页。Springer（2016年）[39]Yoshida, N.：带预见性权重的变差的渐近展开。arXiv:2101.00089（2020年）[40] Zhan, R., Hadad, V., Hirshberg,D.A.,Athey, S.：利用来自上下文老虎机的数据进行自适应加权的离策略评估。KDD（2021年）[41] Zhang,K.W.,Janson, L., Murphy, S.A.：批处理老虎机的推断。arXiv预印本 arXiv:2002.03217（2020年）