arXiv:2304.04178v1 [math.RA] 9 Apr 2023

Hom-Lie 代数上的嵌入张量

APURBA DAS AND ABDENACER MAKHLOUF

Abstract. 嵌入张量及相关的张量层级为构造超引力和高阶规范理论提供了有效工具。嵌入张量及相关结构也在数学文献中得到了广泛研究。另一方面，Hom-Lie代数是在研究Witt代数和Virasoro代数的 q-变形过程中引入的。在本文中，我们首先介绍相对于给定表示的Hom-Lie 代数上的嵌入张量。嵌入张量自然地诱导出一个Hom-Leibniz代数结构。我们构造了一个分次李代数，将嵌入张量刻画为其Maurer-Cartan 元。利用这一点，我们定义嵌入张量的上同调，并将其实现为诱导Hom-Leibniz代数在适当表示中取系数的上同调。由一个Hom-Lie 代数、一个表示和一个嵌入张量组成的三元组称为Hom-Lie-Leibniz 三元组。我们构造给定Hom-Lie-Leibniz 三元组的控制 L_∞-代数。接下来，我们定义Hom-Lie-Leibniz三元组的上同调，该上同调控制该结构的变形。最后，我们引入同伦嵌入张量、 $HLeib_\infty$-代数，并探讨它们之间的关系。

2020年数学主题分类：17B61, 17B40, 17A32, 17B70。

关键词：嵌入张量、Hom-Lie 代数、嵌入三元组、上同调、同伦嵌入张量、 $HLeib_\infty$-代数。

Contents

1. 引言 1
2. Hom-Lie 代数与 Hom-Leibniz 代数的背景知识 3
3. Hom-Lie 代数上的嵌入张量及其上同调 5
4. Hom-Lie-Leibniz 三元组 12
5. Hom-Lie-Leibniz 三元组的上同调与变形 16
6. 同伦嵌入张量与 $HLeib_\infty$-代数 20
参考文献 23

1. 引言

“嵌入张量”的概念及相关的张量层级，为构造超引力理论及进一步的高阶规范理论提供了有用工具。给定一个李代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ 和一个表示 (V, ρ)，若线性映射 $T\colon V \to \mathfrak{g}$ 满足以下恒等式，则称其为关于表示 (V, ρ) 的 $\mathfrak{g}$ 上的嵌入张量：

$$[T(u), T(v)] = T(\rho(Tu)v), \text{ for } u, v \in V. \tag{1}$$

由一个李代数、一个表示和一个嵌入张量组成的三元组称为李-Leibniz 三元组。关于嵌入张量、李-Leibniz三元组及相关张量层级的大量（物理学）文献，请参见[7,8,11–14,16,18,32] 及其中的参考文献。最近，这一主题引起了许多从事高阶结构研究的数学物理学家和数学家的关注 [18,22–24,35,36]。其中，Kotov和 Strobl首先注意到，物理学文献中由嵌入张量及其张量层级所产生的计算背后蕴含着数学本质 [18]。他们表明，嵌入张量自然地产生一个 Leibniz代数，而后者进一步产生一个 L_∞-代数结构。因此，嵌入张量与丰富的数学结构相关。在物理应用中，他们观察到，在构造相应的

规范理论。在 [35] Sheng、Tang 和 Zhu 为这一领域增添了一些数学色彩。具体而言，他们首先构造了嵌入张量和李-Leibniz 三元组的控制结构。作为应用，他们研究了嵌入张量和李-Leibniz 三元组的上同调、变形与同伦论。他们的思路类似于 Rota–Baxter 代数的上同调与变形理论 [10,25]。

另一方面，Hom-Lie 代数这一概念由 Hartwig、Larsson 和 Silvestrov 在研究 q-变形（也称量子变形）Witt 代数和 Virasoro 代数[15]时提出。Hom-Lie 代数是一个配备斜对称双线性括号的向量空间，其雅可比恒等式经由保持括号运算的线性同态（称为 Hom-雅可比恒等式）进行扭曲。我们常将配备线性同态的向量空间称为 Hom-向量空间。Hom-向量空间之间的态射，是指保持相应线性同态的向量空间之间的态射。由此，Hom-Lie 代数可视为配备斜对称双线性括号、且满足 Hom-雅可比恒等式的 Hom-向量空间（见定义 2.1）。当底层 Hom-向量空间的线性同态为恒等映射时，便得到通常的李代数。在过去十五年中，许多关于李代数的经典研究已推广到 Hom-Lie 代数。例如，[33] Sheng 研究了 Hom-Lie 代数的表示，另见 [6]。随后，Hom-Lie 代数的上同调与变形理论在 [1,2,29]中得到了深入研究。Sheng 和 Chen 提出并研究了 HL_∞-代数（也称强同伦 Hom-Lie 代数）这一概念，将其作为 Hom-Lie 代数的同伦版本 [34]。请注意，HL_∞-代数可视为 L_∞-代数的一种扭曲版本；后者由 Lada 和 Stasheff 提出 [20]（另见 [19]）。其他由线性同态扭曲的代数结构（例如结合代数、双代数、Leibniz 代数、前李代数）也在文献中得到广泛研究[1–3，9，21，26，28–30,34,39]。

本文的主要目标是将嵌入张量的数学研究拓展到 Hom-Lie 代数的背景下。更具体地说，我们首先定义相对于某个表示的 Hom-Lie 代数上的嵌入张量，并给出一些有趣的嵌入张量例子（其中有些即便在李代数情形下也是新的）。我们证明，Hom-Lie 代数与一个表示共同诱导出 Hom-Leibniz 代数结构（半半直积）。事实证明，嵌入张量的图是该半半直积的 Hom-Leibniz子代数。因此，我们证明嵌入张量 T 自然地诱导出一种 Hom-Leibniz 代数结构。接下来，给定一个 Hom-Lie 代数及其表示，我们构造一个新的分次李代数，并称之为“导出分次李代数”。这个分次李代数是 Balavoine 分次李括号（它将 Hom-Leibniz 代数刻画为 Maurer-Cartan 元素）与 Kosmann–Schwarzbach 导出括号共同作用的产物。我们证明，相对于某个表示的 Hom-Lie 代数上的嵌入张量，可以由相应导出分次李代数中的 Maurer-Cartan 元素刻画。由此，我们可以定义给定嵌入张量 T. 的上同调。我们证明，嵌入张量 T 的上同调可以实现为诱导 Hom-Leibniz 代数在适当表示的系数下的上同调。此外，嵌入张量 T 的上同调到诱导 Hom-Leibniz 代数在伴随表示的系数下的上同调之间存在一个同态。最后，嵌入张量 T 的第一上同调群刻画了 T 的无穷小变形的所有等价类组成的集合（保持底层的 Hom-Lie 代数及其表示不变）。

接下来的部分，我们主要研究由一个 Hom-Lie 代数、一个表示和一个嵌入张量构成的完整三元组。我们称这样的三元组为 Hom-Lie-Leibniz 三元组。我们构造了一个显式的L_∞-代数，其 Maurer-Cartan 元对应于 Hom-Lie-Leibniz 三元组。这里的 L_∞-代数是由 Balavoine 分次李括号和 Voronov 高阶导出括号作为副产物构造而成的。随后，我们研究 Hom-Lie-Leibniz 三元组（取伴随表示作为系数）的上同调。我们还定义了 Hom-Lie-Leibniz 三元组的表示，并引入了取任意表示作为

系数的上同调。我们证明，我们的上同调有助于分类 Hom-Lie-Leibniz 三元组的无穷小变形。

在本文的最后一部分，我们主要研究相对于某个表示的 HL_∞-代数上的同伦嵌入张量。给定一个 HL_∞-代数及其表示，我们首先构造一个新的L_∞-代数。这个 L_∞-代数是先前构造的导出分次李代数的同伦推广。因此，我们称这个 L_∞-代数为导出 L_∞-代数。同伦嵌入张量由这个导出 L_∞-代数的 Maurer-Cartan 元定义。我们先前已经观察到，嵌入张量（相对于某个表示的 Hom-Lie 代数上的嵌入张量）会诱导出 Hom-Leibniz 代数结构。为了在同伦背景下推广这一结果，我们首先引入 $HLeib_\infty$-代数（强同伦 Hom-Leibniz 代数）。最后，我们证明同伦嵌入张量会自然地诱导出一个 $HLeib_\infty$-代数结构。

本文安排如下。在第2节中，我们回顾 Hom-Lie 代数和 Hom-Leibniz 代数的一些必要背景。在第3节中，我们定义并研究嵌入张量的一些基本性质。同一节中，我们还研究嵌入张量的 Maurer-Cartan 刻画和上同调理论。第4 节讨论 Hom-Lie-Leibniz 三元组，并给出其 Maurer-Cartan 刻画。在第5节中，我们引入 Hom-Lie-Leibniz 三元组的上同调，并研究变形理论。最后，第 $HLeib_\infty$节介绍同伦嵌入张量的 - 代数6 ，并讨论它们之间的关系。

所有（分次）向量空间、线性映射和多重线性映射，以及未加装饰的张量积和楔积，均取自特征为 0 的域 k。

2. Some background on Hom-Lie algebras and Hom-Leibniz algebras

在本节中，我们回顾 Hom-Lie 代数和Hom-Leibniz 代数的一些基本定义。特别地，我们回顾分次李代数（Balavoine的分次李代数的一种推广），其Maurer-Cartan 元素与 Hom-Leibniz 代数相对应。这个分次李代数在我们的整个研究中发挥着至关重要的作用。我们的主要参考文献是 [2,3,15,27,31,33]。

2.1. 定义。Hom-Lie 代数是一个三元组 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$，由带有反对称双线性括号 $[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$、$(x,y)\mapsto[x,y]$ 的向量空间 $\mathfrak{g}$，以及满足下列条件的线性映射 $\alpha\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ （称为扭曲映射）组成。

$$\alpha([x,y]) = [\alpha(x),\alpha(y)], \tag{2}$$

$$[\alpha(x),[y,z]] + [\alpha(y),[z,x]] + [\alpha(z),[x,y]] = 0, \tag{3}$$

对于 x、y、$z\in\mathfrak{g}$。我们通常将上述 Hom-Lie 代数记作 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}$。

条件（2）称为“乘法性”，条件（3）称为“Hom-雅可比恒等式”。因此，根据定义 2.1 的 Hom-Lie 代数通常称为“乘法性的” [2,3]。两个Hom-Lie 代数之间的态射由保持括号并与扭曲映射可交换的线性映射给出。

2.2. 例子。设 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ 是一个李代数，且 $\alpha:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个李代数同态。那么 $\mathfrak{g}_\alpha^{\alpha\circ[\ ,\ ]} = (\mathfrak{g}, \alpha\circ[\ ,\ ], \alpha)$ 是一个 Hom-Lie 代数。事实上，对于任意 $n\geq 1$，$\mathfrak{g}_{\alpha^n}^{\alpha^n\circ[\ ,\ ]}$ 都是一个 Hom-Lie 代数。

2.3. 例子。设 $\mathfrak{g}$ 是由集合 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 张成的 4 维向量空间。我们定义一个双线性反对称括号 $[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 和一个线性映射 $\alpha\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，如下：

$$[e_1,e_2] = -ae_3,\ [e_1,e_3] = be_2,\ [e_1,e_4] = 0,\ [e_2,e_3] = 0,\ [e_2,e_4] = -ae_2,\ [e_3,e_4] = ae_3,$$

$$\alpha(e_1) = -e_1,\ \alpha(e_2) = e_2,\ \alpha(e_3) = -e_3 \ \text{ and } \ \alpha(e_4) = e_4,$$

其中 a、b 是任意标量。于是容易验证，$\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}$ 是一个 Hom-Lie 代数。

2.4. 示例。 设（A， μ， α）是一个 Hom-结合代数 [28]。也就是说， A 是一个配备了双线性映射 μ：$A \times A \to A$， （a， b） $\mapsto a \cdot b$ 以及线性映射 α： $A \to A$ 且满足

$$\alpha(a \cdot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b) \quad \text{and} \quad \alpha(a) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot \alpha(c), \ \text{for } a, b, c \in A.$$

在这种情况下， $A_\alpha^{[\,,\,]}$是一个Hom-Lie 代数，其中 $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$，对于 a、 $b \in A$。

2.5. 定义. 设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$是一个 Hom-Lie 代数。该 Hom-Lie 代数的一个表示是一个配备线性映射 ρ： $\mathfrak{g} \to$ 自同态空间(V) 和 β： $V \to V$ 的向量空间 V，且满足

$$\beta\big(\rho(x)(v)\big) = \rho(\alpha(x))(\beta(v)),$$
$$\rho(\alpha(x)) \circ \rho(y) - \rho(\alpha(y)) \circ \rho(x) = \rho([x, y]) \circ \beta,$$

对于 x、 $y \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in V$。我们将上述表示记为 V_β^ρ。

根据上述定义可知，任何 Hom-Lie代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$都可被视为其自身的一个表示，其中 $\rho : \mathfrak{g} \to$ 自同态空间$(\mathfrak{g})$由 $\rho(x)(y) = [x, y]$给出，对于 $x, y \in \mathfrak{g}$。这称为“伴随表示”。

2.6. 定义。Hom-Leibniz 代数是一个三元组 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}} = (\mathfrak{h}, \{\,,\,\}, \alpha)$，由一个向量空间 $\mathfrak{h}$、一个双线性括号 $\{\,,\,\} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ 和一个线性映射 $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ 组成，并满足

$$\alpha(\{x, y\}) = \{\alpha(x), \alpha(y)\} \quad \text{and} \quad \{\alpha(x), \{y, z\}\} = \{\{x, y\}, \alpha(z)\} + \{\alpha(y), \{x, z\}\}, \ \text{for } x, y, z \in \mathfrak{h}. \tag{4}$$

括号是反对称的 Hom-Leibniz 代数事实证明是Hom-Lie 代数。因此，Hom-Leibniz 代数可以被视为 Hom-Lie 代数的非反对称类似物。

2.7.示例。设 $(\mathfrak{h}, \{\,,\,\})$ 是一个 Leibniz代数，且 $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ 是一个Leibniz代数同态。那么 $\mathfrak{h}_\alpha^{\alpha \circ \{\,,\,\}} = (\mathfrak{h}, \alpha \circ \{\,,\,\}, \alpha)$ 是一个 Hom-Leibniz 代数。

2.8. 例.设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$是一个 Hom-Lie 代数，且 V_β^ρ 是它的表示。则 $(\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha \oplus \beta}^{\{\,,\,\}}$ 是一个 Hom-Leibniz 代数，其中

$$\{(x, u), (y, v)\} = ([x, y], \rho(x)v), \ \text{for } (x, u), (y, v) \in \mathfrak{g} \oplus V.$$

这称为半半直积。

设 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$为 Hom-Leibniz 代数。Hom-Leibniz 代数 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$的表示是一个向量空间 V，并配备两个双线性映射（分别称为左 $\mathfrak{h}$ 作用和右 $\mathfrak{h}$ 作用）

$$\rho^L : \mathfrak{h} \times V \to V, \ (x, v) \mapsto \rho^L(x, v) \quad \text{and} \quad \rho^R : V \times \mathfrak{h} \to V, \ (v, x) \mapsto \rho^R(v, x)$$

以及一个线性映射 β： $V \to V$，满足以下恒等式组：对于 x、 $y \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in V$ ，

$$\beta(\rho^L(x, v)) = \rho^L(\alpha(x), \beta(v)), \quad \beta(\rho^R(v, x)) = \rho^R(\beta(v), \alpha(x)), \tag{5}$$
$$\rho^L(\alpha(x), \rho^L(y, v)) = \rho^L(\{x, y\}, \beta(v)) + \rho^L(\alpha(y), \rho^L(x, v)), \tag{6}$$
$$\rho^L(\alpha(x), \rho^R(v, y)) = \rho^R(\rho^L(x, v), \alpha(y)) + \rho^R(\beta(v), \{x, y\}), \tag{7}$$
$$\rho^R(\beta(v), \{x, y\}) = \rho^R(\rho^R(v, x), \alpha(y)) + \rho^L(\alpha(x), \rho^R(v, y)), \tag{8}$$

对于 x、 $y \in \mathfrak{h}$ 和 $v \in V$。我们将上述表示记作 V^{ρ^L, ρ^R}。由此可知，任何 Hom-Leibniz代数 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$都可以实现为其自身的表示 $\mathfrak{h}^{\{\,,\,\}, \{\,,\,\}}$。我们称之为伴随表示。

设 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$是一个 Hom-Leibniz 代数， V^{ρ^L, ρ^R} 是它的一个表示。那么，系数取自 V^{ρ^L, ρ^R} 的 Hom-Leibniz 代数 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$的第 n 个上链群$C^n(\mathfrak{h}_\alpha, V_\beta)$ 为

$$C^n(\mathfrak{h}_\alpha, V_\beta) = \begin{cases} \{v \in V \mid \beta(v) = v\} & \text{if } n = 0, \\ \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_\alpha^{\otimes n}, V_\beta) = \{f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes n}, V) \mid \beta \circ f = f \circ \alpha^{\otimes n}\} & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

余边界映射 $\delta_{\mathrm{HLeib}}\colon C^n(\mathfrak{h}_\alpha, V_\beta) \to C^{n+1}(\mathfrak{h}_\alpha, V_\beta)$ 定义为

$$\begin{aligned}(\delta_{\mathrm{HLeib}} f)(x_1,\dots,x_{n+1}) = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\rho^L\big(\alpha^{n-1}(x_i), f(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1})\big)\\ &+\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^i f\big(\alpha(x_1),\dots,\widehat{x_i},\dots,\alpha(x_{j-1}),\{x_i,x_j\},\alpha(x_{j+1}),\dots,\alpha(x_{n+1})\big)\\ &+(-1)^{n-1}\rho^R\big(f(x_1,\dots,x_n),\alpha^{n-1}(x_{n+1})\big),\end{aligned} \tag{9}$$

对于 $f \in C^n(\mathfrak{h}_\alpha, V_\beta)$ 和 $x_i,\dots,x_{n+1} \in \mathfrak{h}$。复形 $\{C^\bullet(\mathfrak{h}_\alpha, V_\beta)\ \delta_{\mathrm{HLeib}}\}$ 的上同调群称为 Hom-Leibniz 代数 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$ 关于系数 $V^{\rho^L,\ \rho^R}_{\ \beta}$ 的 Loday-Pirashvili 上同调，记作 $H^\bullet_{\mathrm{HLeib}}(\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}, V^{\rho^L,\ \rho^R}_{\ \beta})$。

设 $\mathfrak{h}$ 是一个向量空间，$\alpha\colon \mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ 是一个线性映射。则分次向量空间

$$\oplus_{n=1}^{\infty} C^n(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha),\ \text{where } C^{n\ge1}(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_\alpha^{\otimes n},\mathfrak{h}_\alpha) = \{f\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes n},\mathfrak{h}) \mid \alpha\circ f = f\circ\alpha^{\otimes n}\}$$

带有一个次数为 -1 的括号（称为 Balavoine 括号 [5]），定义如下：

$$[P,Q]_B := P\diamond Q - (-1)^{(m-1)(n-1)} Q\diamond P,\ \text{where} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(P\diamond Q)(x_1,\dots,x_{m+n-1}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,n-1)}} &(-1)^{(i-1)(n-1)}(-1)^\sigma P\big(\alpha^{n-1}(x_{\sigma(1)}),\dots,\alpha^{n-1}(x_{\sigma(i-1)}),\\ &Q(x_{\sigma(i)},\dots,x_{\sigma(i+n-2)},x_{i+n-1}),\alpha^{n-1}(x_{i+n}),\dots,\alpha^{n-1}(x_{m+n-1})\big),\end{aligned} \tag{11}$$

对于 $P\in C^m(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha)$、$Q\in C^n(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha)$ 和 $x_1,\dots,x_{m+n-1}\in\mathfrak{h}$。Balavoine 括号使移位后的分次向量空间 $C^{\bullet+1}(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha) = \oplus_{n=0}^{\infty} C^{n+1}(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha)$ 成为一个分次李代数。以下结果说明了这个分次李代数的重要性。

2.9. 定理。设 $\mathfrak{h}$ 是一个向量空间，且 $\alpha:\ \mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ 是一个线性映射。那么，分次李代数 $(\oplus_{n=0}^{\infty} C^{n+1}(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha)\ [\,,\,]_B)$ 中的 Maurer-Cartan 元素与使 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$ 成为 Hom-Leibniz 代数的双线性括号 $\{\,,\,\}\colon \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ 之间存在一一对应关系。

设 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$ 是一个 Hom-Leibniz 代数。那么，括号 $\{\,,\,\}\colon\ \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ 定义了一个元素 $\pi\in C^2(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha)$，其表达式为

$$\pi(x,y) = \{x,y\},\ \text{for } x,y\in\mathfrak{h}.$$

容易看出，括号 $\{\,,\,\}$ 的 Hom-Leibniz 恒等式（（4）的第二个恒等式）$[\pi,\pi]_B = 0$等价于 π。换言之，$\oplus_{n=0}^{\infty} C^{n+1}(\mathfrak{h}_\alpha,\ \mathfrak{h}_\alpha)\ [\,,\,]_B$是分次李代数（9）中的一个 Maurer-Cartan 元。使用这些记号，Hom-Leibniz 代数$\mathfrak{h}_\alpha^{\{\,,\,\}}$在伴随表示中的系数所对应的余边界映射为

$$\delta_{\mathrm{HLeib}}(f) = (-1)^{n-1}[\pi,f]_B,\ \text{for } f\in C^{n\ge1}(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha).$$

3. Embedding tensors on Hom-Lie algebras and their cohomology

在本节中，我们介绍Hom-Lie 代数上的嵌入张量。首先，我们证明嵌入张量自然地导出一个Hom-Leibniz代数结构。接下来，我们构造刻画嵌入张量的导出分次李代数，并将嵌入张量视为其 Maurer-Cartan 元。最后，我们定义嵌入张量的上同调，并研究上同调的一些推论。

3.1. 定义。设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$是一个 Hom-Lie 代数，且 V_β^ρ 是其表示。若线性映射 $T\colon V\to\mathfrak{g}$ 被称为嵌入张量（在 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$上关于表示 V_β^ρ），则

$$\alpha\circ T = T\circ\beta\ \ \text{and}\ \ [T(u),T(v)] = T\big(\rho(Tu)v\big),\ \text{for } u,v\in V. \tag{12}$$

3.2. 示例。设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$是一个Hom-Lie 代数。那么恒等映射$\mathrm{id}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是关于伴随表示的 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$ 上的一个嵌入张量。

3.3. 例：设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$是一个 Hom-Lie 代数。若线性映射 $d:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，则称其为 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$的导子，若 $\alpha\circ d=d\circ\alpha$ 且 $d[x,y]=[dx,y]+[x,dy]$，对所有 x、$y\in\mathfrak{g}$. 均成立。若 d 是一个平方为零导子，则 d 是关于伴随表示的 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$上的嵌入张量。

3.4. 例：设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$是一个 Hom-Lie 代数。则很容易验证（$\underbrace{\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}}_{n\ 乘}$）$^{\rho}_{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}$ 是 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$的一个表示，其中

$$\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}),\ \rho(x)\big((x_1,\ldots,x_n)\big)=([x,x_1],\ldots,[x,x_n]),$$

对于 $x\in\mathfrak{g}$和 $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}.$，映射 T: $\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个嵌入张量，其中

$$T\big((x_1,\ldots,x_n)\big)=x_1+\cdots+x_n,\ \text{for}\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}.$$

3.5. 示例。沿用上一个示例中的记号，第 i 个投影映射

$$T_i:\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\ T_i\big((x_1,\ldots,x_n)\big)=x_i$$

是关于表示（$\underbrace{\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}}_{n\ 次}$的 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$嵌入张量。$)^{\rho}_{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}$.

3.6. 例子。设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$是一个 Hom-Lie 代数，且 V_β^ρ 是它的一个表示。设 $f:\ V\to\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathfrak{g}$-等变映射，即，f 是一个线性映射，满足

$$\alpha\circ f=f\circ\beta\ \ \text{and}\ \ f(\rho(x)v)=[x,f(v)],\ \text{for}\ x\in\mathfrak{g},v\in V.$$

Then 容易看出，f 是关于表示 V的 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$上的嵌入张量 $^{\rho^\beta}_{\circ}$

3.7. 例子。（Hom-Lie 代数的交叉模 [34]）Hom-Lie 代数的交叉模是一个四元组 $\big((\mathfrak{g}_1)_{\alpha_1}^{[\cdot,\cdot]_1},\ (\mathfrak{g}_2)_{\alpha_2}^{[\cdot,\cdot]_2},\ d,\ \rho\big)$，其中$(\mathfrak{g}_1)_{\alpha_1}^{[\cdot,\cdot]_1}$、$(\mathfrak{g}_2)_{\alpha_2}^{[\cdot,\cdot]_2}$是 Hom-Lie 代数，$d$: $\mathfrak{g}_2\to\mathfrak{g}_1$是 Hom-Lie 代数的态射，$\rho$: $\mathfrak{g}_1\to$自同态空间$(\mathfrak{g}_2)$是一个线性映射，它使$(\mathfrak{g}_2)_{\alpha_2}^{\rho}$成为 Hom-Lie 代数$(\mathfrak{g}_1)_{\alpha_1}^{[\cdot,\cdot]_1}$的一个表示，并且还满足

$$d(\rho(x)m)=[x,dm]_1\ \ \text{and}\ \ \rho(dm)n=[m,n]_2,\ \text{for}\ x\in\mathfrak{g}_1,m,n\in\mathfrak{g}_2.\tag{13}$$

由（13）的第一个条件可知，映射 d 是 Hom-Lie 代数（$\mathfrak{g}_1$）$_{\alpha_1}^{[\cdot,\cdot]_1}$关于表示（$\mathfrak{g}_2$）$_{\alpha_2}^{\rho}$上的嵌入张量。

在 [34] 中，作者引入了 Hom-Lie 2-代数，并证明“严格”Hom-Lie 2-代数对应于 Hom-Lie 代数的交叉模。因此，沿用前面的例子，可以从严格 Hom-Lie 2-代数构造嵌入张量。

3.8. 定义. 设 $T:\ V\to\mathfrak{g}$ 是相对于表示 V_β^ρ 的 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个嵌入张量。设 T' 是相对于表示 $(V')_{\beta'}^{\rho'}$的 Hom-Lie 代数 $(\mathfrak{g}')_{\alpha'}^{[\cdot,\cdot]'}$ 上的另一个嵌入张量。从 T到 T'的嵌入张量同态由一对 (φ,ψ) 给出，其中 $\varphi:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ 是一个 Hom-Lie 代数态射，$\psi:\ V\to V'$ 是满足以下条件的线性映射

$$\beta'\circ\psi=\psi\circ\beta,\quad \psi(\rho(x)v)=\rho'(\varphi(x))(\psi(v))\ \ \text{and}\ \ \varphi\circ T=T'\circ\psi,\ \text{for}\ x\in\mathfrak{g},v\in V.$$

在下面的结果中，我们通过嵌入张量的图来刻画嵌入张量。这一刻画可用于构造与嵌入张量相关联的诱导Hom-Leibniz代数。

3.9.命题。设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$是一个Hom-Lie 代数，$V_\beta^\rho$ 是它的一个表示。线性映射 $T:\ V\to\mathfrak{g}$ 是一个嵌入张量（在Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$上，关于表示 V_β^ρ），当且仅当其图

$$Gr(T)=\{(T(u),u)\mid u\in V\}\subset\mathfrak{g}\oplus V$$

$_i$是半半直积的 Hom-Leibniz子代数$(\mathfrak{g}\oplus V)^{\{\ ,\ \}}_{\alpha\oplus\beta}$ （参见例 2.8）。

证明。注意， $Gr(T)$是 $(\mathfrak{g}\oplus V)^{\{\ ,\ \}}_{\alpha\oplus\beta}$ 的 Hom-Leibniz子代数，当且仅当

$$(\alpha\oplus\beta)(Gr(T))\subset Gr(T)\ \text{ and }\ \{Gr(T),Gr(T)\}\subset Gr(T).$$

对于任意 $u\in V$，我们考虑元素 $(T(u)\ u)\in Gr(T)$。然后

$$(\alpha\oplus\beta)(T(u),u)=(\alpha T(u),\beta(u))\in Gr(T)\text{ if and only if }\alpha\circ T=T\circ\beta.$$

同样地，对于任意的 u、$v\in V$，我们有

$$\{(T(u),u),(T(v),v)\}=([T(u),T(v)],\rho(Tu)v).$$

这属于 $Gr(T)$当且仅当（12）的第二个恒等式成立。因此， $Gr(T)$是（$\mathfrak{g}\oplus V$）的Hom-Leibniz子代数 $^{\{\ ,\ \}}_{\alpha\oplus\beta}$ 当且仅当 T是一个嵌入张量。 □

由于 $Gr(T)$ 可以与空间 V 等同，我们从前面的命题得到以下推论。

3.10. 命题。设 $T:\ V\to\mathfrak{g}$ 是关于表示 V^ρ_β 的 Hom-Lie 代数上的一个嵌入张量。则 $V^{\{\ ,\ \}}_\beta$ 是一个Hom-Leibniz代数（称为诱导Hom-Leibniz代数），其中括号 $\{\ ,\ \}:\ V\times V\to V$ 定义为

$$\{u,v\}:=\rho(Tu)v,\ \textit{for } u,v\in V.$$

接下来，我们给出嵌入张量的另一种刻画。具体而言，给定一个 Hom-Lie 代数及其一个表示，我们构造一个分次李代数，使其 Maurer-Cartan 元对应于嵌入张量。借助这种刻画，我们还定义嵌入张量的上同调。最后，我们将嵌入张量的上同调实现为诱导Hom-Leibniz代数在一个适当表示中的 Loday-Pirashvili 上同调。

令 $\mathfrak{g}^{[\ ,\ ]}_\alpha$为一个 Hom-Lie代数， V^ρ_β 为它的表示。我们考虑直和向量空间 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}\oplus V$ 及其线性映射 $\alpha\oplus\beta:\ \mathfrak{g}\oplus V\to\mathfrak{g}\oplus V$。令

$$\big(\oplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}((\mathfrak{g}\oplus V)_{\alpha\oplus\beta},(\mathfrak{g}\oplus V)_{\alpha\oplus\beta}),[\ ,\ ]_B\big)$$

是带有 Balavoine 括号的分次李代数。由于半半直积 $(\mathfrak{g}\oplus V)^{\{\ ,\ \}}_{\alpha\oplus\beta}$ 是 Hom-Leibniz 代数，因此它产生了一个元素 $\pi\in C^2((\mathfrak{g}\oplus V)_{\alpha\oplus\beta},(\mathfrak{g}\oplus V)_{\alpha\oplus\beta}))$，该元素满足 $[\pi,\pi]_B=0$。具体而言，元素 π 由下式给出

$$\pi\big((x,u),(y,v)\big)=([x,y],\rho(x)v),\ \text{for }(x,u),(y,v)\in\mathfrak{g}\oplus V. \tag{14}$$

此外，很容易验证分次子空间

$$\oplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ \subset\ \oplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}((\mathfrak{g}\oplus V)_{\alpha\oplus\beta},(\mathfrak{g}\oplus V)_{\alpha\oplus\beta})$$

是一个阿贝尔李子代数。因此，移位的（按次数1移位）子空间 $\oplus_{n=1}^{\infty}C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 继承了一个分次李代数结构，其Kosmann–Schwarzbach 导出括号为[17]。在我们的情形中，括号由以下定理给出。

3.11.定理。设 $\mathfrak{g}^{[\ ,\ ]}_\alpha$是一个 Hom-Lie代数，且 V^ρ_β 是它的一个表示。那么带有括号 $C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)=\oplus_{n=1}^{\infty}C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 的分次向量空间

$$[\![P,Q]\!]=(-1)^{m-1}[[\pi,P]_B,Q]_B,\ \textit{for } P\in C^m(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha),Q\in C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha) \tag{15}$$

是一个分次李代数。（这称为导出分次李代数）。

括号（15）由公式明确给出

$$
\begin{aligned}
&[\![P,Q]\!](v_1,\dots,v_{m+n}) \qquad (16)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,n)}}(-1)^{(i-1)n+1}(-1)^{\sigma}P\big(\beta^n(v_{\sigma(1)}),\dots,\beta^n(v_{\sigma(i-1)}),\\
&\qquad\qquad\rho\big(Q(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+n-1)})(\beta^{n-1}(v_{i+n}))\big),\dots,\beta^n(v_{\sigma(m+n)})\big)\\
&-(-1)^{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,m)}}(-1)^{(i-1)m+1}(-1)^{\sigma}Q\big(\beta^m(v_{\sigma(1)}),\dots,\beta^m(v_{\sigma(i-1)}),\\
&\qquad\qquad\rho\big(P(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+m-1)})(\beta^{m-1}(v_{i+m}))\big),\dots,\beta^m(v_{\sigma(m+n)})\big)\\
&+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(m,n)}}(-1)^{mn+1}(-1)^{\sigma}\big[P\big(\beta^{n-1}(v_{\sigma(1)}),\dots,\beta^{n-1}(v_{\sigma(m)})\big),Q\big(\beta^{m-1}(v_{\sigma(m+1)}),\dots,\beta^{m-1}(v_{\sigma(m+n)})\big)\big],
\end{aligned}
$$

对于 $v_1,\dots,v_{m+n}\in V$。以下结果说明了上述分次李代数的重要性。

3.12. 定理。设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$为一个 Hom-Lie 代数， V_β^ρ 为它的一个表示。满足 $\alpha\circ T=T\circ\beta$ 的线性映射 $T\colon V\to\mathfrak{g}$是一个嵌入张量，当且仅当 $T\in C^1(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 是导出分次李代数 $(C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\,,\,]\!])$ 中的 Maurer-Cartan 元。

证明。 对于任意 $T\in C^1(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$，由（16）可得

$$[\![T,T]\!](u,v)=2\big([T(u),T(v)]-T(\rho(Tu)v)\big),\ \text{for } u,v\in V.$$

这表明 T是一个嵌入张量，当且仅当 $[\![T,T]\!]=0$。证明完毕。 □

设 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$为一个 Hom-Lie 代数， V_β^ρ 为一个表示，且 $T\colon V\to\mathfrak{g}$ 为一个嵌入张量。由前一定理可得 $[\![T,T]\!]=0$。因此， T诱导出一个 1 次微分

$$d_T:C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to C^{n+1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha),\ d_T=[\![T,-]\!],\ \text{for } n\geq 1.$$

我们定义 $C^0(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)=\{x\in\mathfrak{g}\mid\alpha(x)=x\}$ 以及一个映射（也用上述相同的记号表示）$d_T\colon C^0(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to C^1(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$，如下：

$$d_T(x)(v)=[x,Tv]-T(\rho(x)v),\ \text{for } x\in C^0(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha),v\in V.$$

于是容易验证，复合映射 $C^0(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\xrightarrow{d_T}C^1(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\xrightarrow{d_T}C^2(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 是零映射。换言之，我们得到一个上链复形 $\{C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ d_T\}$。相应的上同调记为 $H_T^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$，称为嵌入张量 T 的上同调。

设 $T\colon V\to\mathfrak{g}$ 是 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$上关于表示$V_\beta^\rho$的一个嵌入张量。命题 3.10 中已证明， $V_\beta^{\{\,,\,\}}$是一个 Hom-Leibniz 代数，其中 $\{u,v\}=\rho(Tu)v$，对 $u,\ v\in V$。我们定义两个双线性映射 $\overline{\rho}^L\colon V\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 和 $\overline{\rho}^R\colon\mathfrak{g}\times V\to\mathfrak{g}$ 如下：

$$\overline{\rho}^L(v,x)=[Tv,x]\ \text{ and }\ \overline{\rho}^R(x,v)=[x,Tv]-T(\rho(x)v),\ \text{for } v\in V,x\in\mathfrak{g}.$$

采用上述记号，我们有如下结论。

3.13. 命题。映射 $\overline{\rho}^L$、$\overline{\rho}^R$ 在向量空间 $\mathfrak{g}$ 上定义了Hom-Leibniz代数 $V_\beta^{\{\,,\,\}}$ 的一个表示，其线性映射为 $\alpha\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$。换言之， $\mathfrak{g}_{\overline{\rho}^L,\alpha}^{\ \ \overline{\rho}^R}$ 是诱导Hom-Leibniz代数 $V_\beta^{\{\,,\,\}}$ 的一个表示。

上述命题的证明可由直接计算得出。因此，我们省略细节。由该命题可知，可以考虑诱导 Hom-Leibniz代数 $V_\beta^{\{\,,\,\}}$ 关于表示 $\mathfrak{g}_{\overline{\rho}^L,\ \alpha}^{\ \ \overline{\rho}^R}$ 的 Loday-Pirashvili 上同调。更确切地说，我们考虑上链复形 $\{C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ \delta_{\mathrm{HLeib}}\}$，其中

$$C^0(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)=\{x\in\mathfrak{g}\mid\alpha(x)=x\},\quad C^{n\geq 1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)=\mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n},\mathfrak{g}_\alpha).$$

余边界映射 δ_{HLeib}： $C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to C^{n+1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 定义为

$$\begin{aligned}(\delta_{\mathrm{HLeib}}f)(v_1,\dots,v_{n+1})=&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\ [T(\beta^{n-1}(v_i)),f(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{n+1})]\\&+\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^i f\big(\beta(v_1),\dots,\widehat{v_i},\dots,\beta(v_{j-1}),\rho(Tv_i)v_j,\beta(v_{j+1}),\dots,\beta(v_{n+1})\big)\\&+(-1)^{n-1}\ \big([f(v_1,\dots,v_n),T(\beta^{n-1}(v_{n+1}))]-T\big(\rho(f(v_1,\dots,v_n))(\beta^{n-1}(v_{n+1}))\big)\big),\end{aligned}$$

对于 $f\in C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 和 $v_1,\ \dots,\ v_{n+1}\in V$。我们将相应的上同调群记为 $H^\bullet_{\mathrm{HLeib}}(V_\beta^{\{\ ,\ \}},\mathfrak{g}^{\overline{\rho}^L,\ \overline{\rho}^R}_{\alpha})$。

3.14. 命题。设 $T:\ V\to\mathfrak{g}$ 是关于表示 V_β^ρ 的Hom-Lie代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}$ 上的嵌入张量。则余边界映射 d_T 和 δ_{HLeib} 之间存在如下关系

$$d_T(f)=(-1)^{n-1}\ \delta_{\mathrm{HLeib}}(f),\ \textit{for}\ f\in C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha).$$

换句话说，我们有 $H^\bullet_T(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\cong H^\bullet_{\mathrm{HLeib}}(V_\beta^{\{\ ,\ \}},\mathfrak{g}^{\overline{\rho}^L,\ \overline{\rho}^R}_{\alpha})$。

证明。 对于任意 $f\in C^n(V_\beta,\ \mathfrak{g}_\alpha)$ 以及 $v_1,\ \dots,\ v_{n+1}\in V$，由（16）可得

$$\begin{aligned}&(d_T(f))(v_1,\dots,v_{n+1})\\&=[\![T,f]\!](v_1,\dots,v_{n+1})\\&=-T\big(\rho(f(v_1,\dots,v_n))(\beta^{n-1}(v_{n+1}))\big)\\&\quad-(-1)^n\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,1)}}(-1)^i(-1)^\sigma f\big(\beta(v_{\sigma(1)}),\dots,\beta(v_{\sigma(i-1)}),\rho(Tv_{\sigma(i)})v_{i+1},\dots,\beta(v_{n+1})\big)\\&\quad+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(1,n)}}(-1)^{n+1}(-1)^\sigma[T(\beta^{n-1}(v_{\sigma(1)})),f(v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(n+1)})]\\&=-T\big(\rho(f(v_1,\dots,v_n))(\beta^{n-1}(v_{n+1}))\big)\\&\quad-(-1)^n\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^i f\big(\beta(v_1),\dots,\widehat{v_i},\dots,\beta(v_{j-1}),\rho(Tv_i)v_j,\beta(v_{j+1}),\dots,\beta(v_{n+1})\big)\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(-1)^{i-1}[T(\beta^{n-1}(v_i)),f(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{n+1})]-[T(\beta^{n-1}(v_{n+1})),f(v_1,\dots,v_n)]\\&=(-1)^{n-1}(\delta_{\mathrm{HLeib}}(f))(v_1,\dots,v_{n+1}).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

由上述命题可知，嵌入张量 T 的上同调可以实现为诱导Hom-Leibniz代数 $V_\beta^{\{\ ,\ \}}$ 在表示 $\mathfrak{g}^{\overline{\rho}^L,\ \overline{\rho}^R}_{\alpha}$ 中的 Loday-Pirashvili 上同调。

接下来，我们将证明，从嵌入张量的上同调到诱导Hom-Leibniz代数在伴随表示中的上同调存在一个同态。设$\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}$为一个 Hom-Lie 代数， V_β^ρ 为它的一个表示。我们考虑以下两个分次李代数，即

(1) 导出分次李代数 $(C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\ ,\ ]\!])$，其 Maurer-Cartan 元素为嵌入张量，

(2) 带有 Balavoine 括号的分次李代数 $(C^{\bullet+1}(V_\beta,V_\beta)\ [\ ,\ ]_B)$，其 Maurer-Cartan 元素恰为 V_β上的 Hom-Leibniz 代数括号。

对于任意 $n\ge 1$，我们定义一个映射 $\Phi_n:\ C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to C^{n+1}(V_\beta,V_\beta)$，如下:

$$\Phi_n(f)(v_1,\dots,v_{n+1})=-\rho\big(f(v_1,\dots,v_n)\big)(\beta^{n-1}(v_{n+1})),\ \text{for}\ f\in C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ \text{and}\ u_1,\dots,v_{n+1}\in V.$$

采用上述记号，我们有如下结果。

3.15. 命题。映射集合 $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ 定义了一个从 $(C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\ ,\ ]\!])$ 到 $(C^{\bullet+1}(V_\beta,V_\beta)\ [\ ,\ ]_B)$ 的分次李代数同态。

证明。令 $P\in C^m(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$和 $Q\in C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 为 $C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$中的任意两个齐次元素。则对于任意 $v_1,\dots,v_{m+n+1}\in V$，有

$$
\begin{aligned}
&\Phi_m(P)\diamond\Phi_n(Q)\\
&=\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,n)}}(-1)^{(i-1)n}(-1)^{\sigma}\ \Phi_m(P)\Big(\beta^n v_{\sigma(1)},\dots,\beta^n v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\Phi_n(Q)\big(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+n-1)},v_{i+n}\big),\dots,\beta^n v_{m+n+1}\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,n)}}(-1)^{(i-1)n}(-1)^{\sigma}\ \rho\Big(P\big(\beta^n v_{\sigma(1)},\dots,\beta^n v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\qquad\rho\big(Q(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+n-1)})(\beta^{n-1}v_{i+n})\big),\dots,\beta^n v_{m+n}\big)\Big)(\beta^{m+n-1}v_{m+n+1})\\
&+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(m,n)}}(-1)^{mn+\sigma}\rho\big(P(\beta^n v_{\sigma(1)},\dots,\beta^n v_{\sigma(m)})\big)\rho\big(Q(\beta^{m-1}v_{\sigma(m+1)},\dots,\beta^{m-1}v_{\sigma(m+n)})\big)(\beta^{m+n-2}v_{m+n+1}).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
&\Phi_n(Q)\diamond\Phi_m(P)\\
&=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,m)}}(-1)^{(i-1)m}(-1)^{\sigma}\ \Phi_n(Q)\Big(\beta^m v_{\sigma(1)},\dots,\beta^m v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\Phi_m(P)\big(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+m-1)},v_{i+m}\big),\dots,\beta^m v_{m+n+1}\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,m)}}(-1)^{(i-1)m}(-1)^{\sigma}\ \rho\Big(Q\big(\beta^m v_{\sigma(1)},\dots,\beta^m v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\qquad\rho\big(P(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+m-1)})(\beta^{m-1}v_{i+m})\big),\dots,\beta^m v_{m+n}\big)\Big)(\beta^{m+n-1}v_{m+n+1})\\
&+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(n,m)}}(-1)^{mn+\sigma}\rho\big(Q(\beta^m v_{\sigma(1)},\dots,\beta^m v_{\sigma(n)})\big)\rho\big(P(\beta^{n-1}v_{\sigma(n+1)},\dots,\beta^{n-1}v_{\sigma(m+n)})\big)(\beta^{m+n-2}v_{m+n+1})\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,m)}}(-1)^{(i-1)m}(-1)^{\sigma}\ \rho\Big(Q\big(\beta^m v_{\sigma(1)},\dots,\beta^m v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\qquad\rho\big(P(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+m-1)})(\beta^{m-1}v_{i+m})\big),\dots,\beta^m v_{m+n}\big)\Big)(\beta^{m+n-1}v_{m+n+1})\\
&+\sum_{\tau\in\mathbb{S}_{(m,n)}}(-1)^{\tau}\rho\big(Q(\beta^m v_{\tau(m+1)},\dots,\beta^m v_{\tau(m+n)})\big)\rho\big(P(\beta^{n-1}v_{\tau(1)},\dots,\beta^{n-1}v_{\tau(m)})\big)(\beta^{m+n-2}v_{m+n+1}).
\end{aligned}
$$

这里，在最后一项中，我们观察到一个 shuffle $\sigma\in\mathbb{S}_{(n,m)}$ 对应于由下式给出的 shuffle $\tau\in\mathbb{S}_{(m,n)}$。

$$\tau(i)=\sigma(n+i)\text{ for }1\leq i\leq m\quad\text{ and }\quad\tau(i)=\sigma(i-m)\text{ for }m+1\leq i\leq m+n.$$

事实上，这一对应关系在集合 $\mathbb{S}_{(n,m)}$ 和 $\mathbb{S}_{(m,n)}$ 之间建立了一个双射。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&[\Phi_m(P),\Phi_n(Q)]_B(v_1,\dots,v_{m+n+1})\\
&=\big(\Phi_m(P)\diamond\Phi_n(Q)-(-1)^{mn}\Phi_n(Q)\diamond\Phi_m(P)\big)(v_1,\dots,v_{m+n+1})\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,n)}}(-1)^{(i-1)n}(-1)^{\sigma}\ \rho\Big(P\big(\beta^n v_{\sigma(1)},\dots,\beta^n v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\rho\big(Q(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+n-1)})(\beta^{n-1}v_{i+n})\big),\dots,\beta^n v_{m+n}\big)\Big)(\beta^{m+n-1}v_{m+n+1})\\
&-(-1)^{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,m)}}(-1)^{(i-1)m}(-1)^{\sigma}\ \rho\Big(Q\big(\beta^m v_{\sigma(1)},\dots,\beta^m v_{\sigma(i-1)},\\
&\qquad\qquad\rho\big(P(v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(i+m-1)})(\beta^{m-1}v_{i+m})\big),\dots,\beta^m v_{m+n}\big)\Big)(\beta^{m+n-1}v_{m+n+1})\\
&+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(m,n)}}(-1)^{mn+\sigma}\rho\big([P(\beta^{n-1}v_{\sigma(1)},\dots,\beta^{n-1}v_{\sigma(m)}),Q(\beta^{m-1}v_{\sigma(m+1)},\dots,\beta^{m-1}v_{\sigma(m+n)})]\big)(\beta^{m+n-1}v_{m+n+1})\\
&=\big(\Phi_{m+n}[\![P,Q]\!]\big)(v_1,\dots,v_{m+n+1}).
\end{aligned}
$$

这表明集合 $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ 定义了一个分次李代数同态。 □

由上述命题可得以下结果。

3.16. 定理。令 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$是一个 Hom-Lie 代数，且 V_β^ρ 是它的表示。令 $T\colon V\to\mathfrak{g}$ 是一个嵌入张量（关于表示 V_β^ρ 作用于 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$）。则集合 $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ 诱导出一个同态

$$\Phi_\bullet : H_T^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to H^{\bullet+1}_{\mathrm{HLeib}}(V_\beta^{\{\,,\,\}},V_\beta^{\{\,,\,\},\{\,,\,\}})$$

从嵌入张量 T 到诱导的Leibniz代数 $V_\beta^{\{\,,\,\}}$ 的 Loday-Pirashvili 上同调，其中系数取伴随表示。

证明。由于集合 $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ 定义了从 $(C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\,,\,]\!])$ 到 $(C^{\bullet+1}(V_\bullet,V_\beta)\ [\,,\,]_B)$ 的分次李代数同态，因此映射 Φ_1 将第一个分次李代数的 Maurer-Cartan 元映射为第二个分次李代数的 Maurer-Cartan 元。注意，上同调 $H_T^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 由第一个分次李代数的 Maurer-Cartan 元 T 诱导，而上同调$H^{\bullet+1}{}_{\mathrm{HLeib}}(V_\beta^{\{\,,\,\}},V^{\{\,,\,\}}_{,\beta}{}^{\{\,,\,\}})$（差一个符号）由第二个分次李代数的 Maurer-Cartan 元 $\Phi_1(T)=-\{\,,\,\}$ 诱导。证明完毕。□

注意，嵌入张量 T 的上链复形的微分 d_T 是分次李括号 $[\![\,,\,]\!]$的导子。为此，我们注意到

$$
\begin{aligned}
d_T([\![P,Q]\!])=[\![T,[\![P,Q]\!]]\!]&=[\![[\![T,P]\!],Q]\!]+(-1)^m[\![P,[\![T,Q]\!]]\!]\\
&=[\![d_T(P),Q]\!]+(-1)^m]\!]P,d_T(Q)]\!],
\end{aligned}
$$

对于 $P\in C^m(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 和 $Q\in C^n(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$。换言之，我们得到一个微分分次李代数。

3.17. 命题. 设 $T\colon V\to\mathfrak{g}$ 是 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$上关于表示 V_β^ρ 的一个嵌入张量。那么对于任意满足 $\alpha\circ T_1=T_1\circ\beta$ 的线性映射 $T_1\colon V\to\mathfrak{g}$，和 $T+T_1$ 是嵌入张量，当且仅当 $T_1\in C^1(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 是微分分次李代数 $(C^\bullet(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\,,\,]\!],d_T)$ 中的一个 Maurer-Cartan 元。

证明。注意，$T+T_1$ 是一个嵌入张量，当且仅当 $[\![T+T_1、\ T+T_1]\!]=0$。这当且仅当

$$[\![T,T]\!]+[\![T,T_1]\!]+[\![T_1,T]\!]+[\![T_1,T_1]\!]=0.$$

此条件进一步等价于 $d_T(T_1) + \frac{1}{2}[\![T_1, T_1]\!] = 0$，即 T_1 是一个 Maurer-Cartan 元，属于微分分次李代数 $(C^\bullet(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\ ,\ ]\!], d_T)$。证明。□

由上述命题可知，微分分次李代数 $(C^\bullet(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\ ,\ ]\!], d_T)$ 控制嵌入张量 T 的变形。因此，微分分次李代数 $(C^\bullet(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)\ [\![\ ,\ ]\!], d_T)$ 被称为 T 变形的控制结构。

3.18. 定义. 设 $T\colon V \to \mathfrak{g}$ 是一个嵌入张量（相对于表示 V_β^ρ，定义在 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$ 上）。T 的无穷小变形是形如 $T + \epsilon T_1$ 的嵌入张量，其中 ϵ 是满足 $\epsilon^2 = 0$ 的参数。

设 $T + \epsilon T_1$ 是 T的一个无穷小变形。由命题 3.17 可知， $T_1 \in C^1(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)$ 是 T的上同调复形中的一个 1- 余循环。因此， T_1 的上同调类在 $H_T^1(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)$ 中定义了一个元素。

设 $T + \epsilon T_1$ 和 $T + \epsilon T_1'$ 是 T 的两个无穷小变形。如果存在一个 α-不变元 $a \in \mathfrak{g}$（即 $\alpha(a) = a$），使得映射对$(\mathrm{id}_\mathfrak{g} + \epsilon[a, -], \mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a))$定义了从 $T + \epsilon T_1$ 到 $T + \epsilon T_1'$ 的嵌入张量同态，则称它们是等价的。换句话说，必须满足以下条件：

(i)线性映射 $(\mathrm{id}_\mathfrak{g} + \epsilon[a, -])$： $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是 Hom-Lie 代数态射，
(ii) 线性映射 $(\mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a))$: $V \to V$满足

$$(\mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a)) \circ \beta = \beta \circ (\mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a)), \tag{17}$$

$$(\mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a))\big(\rho(x)v\big) = \rho\big((\mathrm{id}_\mathfrak{g} + \epsilon[a, -])(x)\big)(\mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a))(v), \tag{18}$$

$$(\mathrm{id}_\mathfrak{g} + \epsilon[a, -]) \circ (T + \epsilon T_1)(v) = (T + \epsilon T_1') \circ (\mathrm{id}_V + \epsilon\rho(a))(v), \tag{19}$$

对所有 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in V$。容易看出，条件（19）可推出

$$T_1'(v) - T_1(v) = [a, T(v)] - T(\rho(a)v) = (\delta_T(a))(v).$$

这表明 T_1 和 T_2 是上同调的。因此，它们在 $H_T^1(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)$中的上同调类相同。

反之，任意一个1-余循环 T_1 都会产生无穷小变形 $T+\epsilon T_1$。此外，上同调的 1-余循环对应于等价的无穷小变形。作为上述讨论的总结，我们得到以下结果。

3.19. 定理。设 $T\colon\ V \to \mathfrak{g}$ 是一个嵌入张量。则 T 的所有无穷小变形的等价类集合与第一上同调群 $H_T^1(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)$ 之间存在一个双射。

4. Hom-Lie-Leibniz triples

在本节中，我们首先将 Hom-Lie-Leibniz 三元组视为嵌入张量的完整底层结构。我们证明，Hom-Leibniz 代数的范畴与 Hom-Lie-Leibniz 三元组的范畴密切相关。最后，我们构造一个 L_∞-代数（使用 Voronov 高阶导出括号），其 Maurer-Cartan 元素与 Hom-Lie-Leibniz 三元组相对应。

4.1. 定义。Hom-Lie-Leibniz 三元组是一个三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}, V_\beta^\rho, T)$，其中 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$是一个 Hom-Lie 代数，$V_\beta^\rho$ 是一个表示，且 $T\colon V \to \mathfrak{g}$ 是一个嵌入张量。

由上述定义可知，Hom-Lie-Leibniz 三元组完整地包含了嵌入三元组的全部信息（包括其底层结构）。设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}, V_\beta^\rho, T)$ 和 $((\mathfrak{g}')_{\alpha'}^{[\,,\,]'}, (V')_{\beta'}^{\rho'}, T')$ 是两个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。从 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}, V_\beta^\rho, T)$ 到 $((\mathfrak{g}')_{\alpha'}^{[\,,\,]'}, (V')_{\beta'}^{\rho'}, T')$ 的 Hom-Lie-Leibniz 三元组同态由从 T到 T'的嵌入张量同态给出（参见定义 3.8）。所有 Hom-Lie-Leibniz 三元组及其间的同态构成一个范畴，记作 HLLTriple。

4.2. 命题。(i) 设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。则 $V_\beta^{\{\cdot,\cdot\}}$ 是一个 Hom-Leibniz 代数，其中 $\{u,v\} := \rho(Tu)v$，对于 $u,v \in V$。

(ii) 设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 和 $((\mathfrak{g}')_{\alpha'}^{[\cdot,\cdot]'}, (V')_{\beta'}^{\rho'}, T')$ 是两个 Hom-Lie-Leibniz 三元组，且 (φ,ψ) 是它们之间的同态。那么，$\psi\colon V \to V'$ 是从 $V_\beta^{\{\cdot,\cdot\}}$ 到 $(V')_{\beta'}^{\{\cdot,\cdot\}'}$ 的诱导Hom-Leibniz代数之间的同态。

证明。部分(i) 由命题 3.10得出。对于部分 (ii)，我们注意到

$$\psi(\{u,v\}) = \psi\big(\rho(Tu)v\big) = \rho'\big(\varphi T(u)\big)(\psi(v)) = \rho'\big(T'\psi(u)\big)(\psi(v)) = \{\psi(u),\psi(v)\}'$$

对于 $u,v \in V$。这证明了该结果。 □

由上述命题可知，存在一个函子 $\mathcal{F}$: HLLTriple $\to$ HLeib，从 Hom-Lie-Leibniz 三元组范畴到 Hom-Leibniz 代数范畴。下面我们将构造一个反方向的函子。

设 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\cdot,\cdot\}}$是一个 Hom-Leibniz 代数。取 $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/I$，其中 I 是由元素 $\{x,y\}$生成的 Hom-Leibniz 代数的理想，x、$y \in \mathfrak{h}$。注意，线性映射 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ 诱导出一个映射（记号相同） $\alpha\colon \overline{\mathfrak{h}} \to \overline{\mathfrak{h}}$。我们定义一个双线性反对称括号 $[\,,\,]\colon \overline{\mathfrak{h}} \times \overline{\mathfrak{h}} \to \overline{\mathfrak{h}}$ 如下:

$$[\langle x\rangle, \langle y\rangle] := \langle\{x,y\}\rangle, \text{ for } \langle x\rangle, \langle y\rangle \in \overline{\mathfrak{h}}.$$

这里，$\langle x\rangle \in \overline{\mathfrak{h}}$ 表示元素 $x \in \mathfrak{h}$的等价类。可以证明，$(\overline{\mathfrak{h}})_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$是一个 Hom-Lie 代数。我们定义另一个映射 $\rho : \overline{\mathfrak{h}} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h})$，其定义为 $\rho(\langle x\rangle)(y) := \{x,y\}$，其中 $\langle x\rangle \in \overline{\mathfrak{h}}$ 和 $y \in \mathfrak{h}$。容易验证，映射 ρ 使 $\mathfrak{h}_\alpha^\rho$ 成为 Hom-Lie 代数 $(\overline{\mathfrak{h}})_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$的一个表示。采用这些记号，商映射 $q\colon \mathfrak{h} \to \overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/I$ 是关于表示 $\mathfrak{h}_\alpha^\rho$的 Hom-Lie 代数 $(\overline{\mathfrak{h}})_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$上的一个嵌入张量。换言之，$((\overline{\mathfrak{h}})_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, \mathfrak{h}_\alpha^\rho, q)$是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。此外，诱导Hom-Leibniz代数结构与给定结构一致。

设 $\mathfrak{h}_\alpha^{\{\cdot,\cdot\}}$和 $(\mathfrak{h}')_{\alpha'}^{\{\cdot,\cdot\}'}$ 是两个 Hom-Leibniz 代数，且 $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ 是 Hom-Leibniz 代数的同态。则经过直接计算可知，这对映射

$$(\overline{\psi}, \psi) : ((\overline{\mathfrak{h}})_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, \mathfrak{h}_\alpha^\rho, q) \rightsquigarrow ((\overline{\mathfrak{h}'})_{\alpha'}^{[\cdot,\cdot]'}, (\mathfrak{h}')_{\alpha'}^{\rho'}, q')$$

定义了 Hom-Lie-Leibniz 三元组的一个同态，其中映射 $\overline{\psi}\colon \overline{\mathfrak{h}} \to \overline{\mathfrak{h}'}$ 由 $\overline{\psi}(\langle x\rangle) = \langle\psi(x)\rangle$ 给出，适用于 $\langle x\rangle \in \overline{h}$。因此，我们得到一个函子 $\mathcal{G}$: HLeib $\to$ HLLTriple，它从 Hom-Leibniz 代数范畴映射到 Hom-Lie-Leibniz 三元组范畴。

接下来，我们给出 Hom-Lie-Leibniz 三元组的 Maurer-Cartan 刻画。我们首先需要 L_∞-代数的定义和 Voronov 构造。

4.3. 定义。L_∞-代数（强同伦李代数）是一对 $(L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i, \{l_k\}_{k\geq 1})$，由一个赋备有一族 $\{l_k : L^{\otimes k} \to L\}_{k\geq 1}$ 的分次向量空间 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 组成，其中这些分次线性映射的次数为 1，并满足以下一组恒等式:

- （分次对称性） $l_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) l_k(x_1, \ldots, x_k)$，对所有 $k \geq 1, \sigma \in \mathbb{S}_k$；
- （高阶雅可比恒等式），对于任意 $n \geq 1$ 和齐次元素 $x_1, \ldots, x_n \in L$，

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i,n-i)}} \varepsilon(\sigma)\ l_j\big(l_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) = 0.$$

这里的 $\varepsilon(\sigma)$ 是分次语境中出现的标准 Koszul 符号。

设 $(L, \{l_k\}_{k\geq 1})$ 是一个 L_∞-代数。若元素 $\theta \in L_0$ 是 L_∞-代数的 Maurer-Cartan 元，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} l_k(\underbrace{\theta, \ldots, \theta}_{k \text{ times}}) = 0. \tag{20}$$

注意，当无穷级数收敛时，恒等式 (20) 才有意义。若 θ 是 L_∞-代数 $(L, \{l_k\}_{k\geq 1})$ 的 Maurer-Cartan 元，则 $(L, \{l_k^\theta\}_{k\geq 1})$ 也是一个 L_∞-代数，其中

$$l_k^\theta(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, l_{n+k}(\underbrace{\theta, \ldots, \theta}_{n \text{ times}}, x_1, \ldots, x_k), \text{ for } k \geq 1 \text{ and } x_1, \ldots, x_k \in L.$$

据说，L_∞-代数 $(L, \{l_k^\theta\}_{k\geq 1})$ 是由 Maurer-Cartan 元θ 扭曲 $(L, \{l_k\}_{k\geq 1})$ 得到的。对于任意 $\theta' \in L_0$，元素 $\theta + \theta'$ 是 L_∞- 代数 $(L, \{l_k\}_{k\geq 1})$ 的 Maurer-Cartan 元，当且仅当 θ' 是扭曲的 L_∞- 代数 $(L, \{l_k^\theta\}_{k\geq 1})$ 的 Maurer-Cartan 元。

Voronov [38]给出了一种有用的 L_∞-代数构造。他的构造依赖于高阶导出括号的使用。我们首先回顾这一构造。

4.4. 定义。一个 V-数据是一个四元组 $(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}, P, \Delta)$，其中 $\mathfrak{l}$ 是一个分次李代数（其括号为$[\ ,\ ]$），$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{l}$ 是一个阿贝尔李子代数，$P\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ 是一个投影，满足 $\mathrm{im}(P) = \mathfrak{a}$ 且 $\ker(P) \subset \mathfrak{l}$ 是一个分次李代数，并且 $\Delta \in \ker(P)_1$ 满足 $[\Delta, \Delta] = 0$。

4.5. 定理. 设 $(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}, P, \Delta)$ 是一个 V-数据。那么，对于任意满足 $[\Delta, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$的分次李子代数 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{l}$，分次向量空间 $s^{-1}\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a}$ 继承一个 L_∞-代数结构，其运算 $\{l_k\}_{k\geq 1}$ 由下述规则给出：对于齐次元素 $x, y \in \mathfrak{q}$ 和 $a, a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}
l_1\big((s^{-1}x, a)\big) &= (-s^{-1}[\Delta, x], P(x + [\Delta, a])),\\
l_2\big((s^{-1}x, 0), (s^{-1}y, 0)\big) &= ((-1)^{|x|}s^{-1}[x, y], 0),\\
l_k\big((0, a_1), \ldots, (0, a_k)\big) &= (0, P[\cdots[[\Delta, a_1], a_2], \ldots, a_k]),\ \textit{for } k \geq 1,\\
l_k\big((s^{-1}x, 0), (0, a_1), \ldots, (0, a_{k-1})\big) &= (0, P[\cdots[[x, a_1], a_2], \ldots, a_{k-1}]),\ \textit{for } k \geq 2,
\end{aligned}$$

除上述输入的排列外，所有其他映射均为零。

接下来，我们将利用上述定理构造一个 L_∞-代数，其 Maurer-Cartan 元素恰好是 Hom-Lie-Leibniz 三元组。设 $\mathfrak{g}$ 和 V 是两个向量空间，并配备线性映射 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 和 $\beta\colon V \to V$（不一定具有任何其他结构）。我们考虑定义在直和向量空间上的线性映射 $\alpha \oplus \beta\colon \mathfrak{g} \oplus V \to \mathfrak{g} \oplus V$。令

$$\mathfrak{l} = \big(C^{\bullet+1}((\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha\oplus\beta}, (\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha\oplus\beta}) = \oplus_{n=0}^{\infty} C^{n+1}((\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha\oplus\beta}, (\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha\oplus\beta}), [\ ,\ ]_B\big)$$

为带有 Balavoine 括号的分次李代数。然后容易验证，分次子空间$\mathfrak{a} = \oplus_{n=0}^{\infty} C^{n+1}(V_\beta, \mathfrak{g}_\alpha)$ 是 $\mathfrak{l}$的阿贝尔李子代数。令 $P\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ 为投影到子空间$\mathfrak{a}$上的投影。于是四元组 $(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}, P, \Delta = 0)$ 是 V-数据。

对于每个 $n \geq 0$，我们定义

$$C^{n,1}(\mathfrak{g}_\alpha, V_\beta) = \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}_\alpha \otimes V_\beta, V_\beta) = \{f \in \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g} \otimes V, V) \mid f \circ (\wedge^n \alpha \otimes \beta) = \beta \circ f\}.$$

采用上述记号，我们有以下结论。

4.6. 命题。分次子空间

$$\mathfrak{q} = \oplus_{n=0}^{\infty}\big(\mathrm{Hom}(\wedge^{n+1}\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha) \oplus C^{n,1}(\mathfrak{g}_\alpha, V_\beta)\big) \subset \mathfrak{l} \tag{21}$$

是 $\mathfrak{l}$的分次李子代数。

称映射 $f \in C^{n+1}((\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha\oplus\beta}, (\mathfrak{g} \oplus V)_{\alpha\oplus\beta})$ 具有双次数 $n|0$，如果

$$f \in \mathrm{Hom}(\wedge^{n+1}\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha) \oplus \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}_\alpha \otimes V_\beta, V_\beta).$$

若 f 的双次数为 $n|0$ 且 g 的双次数为 $m|0$，则通过直接计算可验证 $[f, g]_B$的双次数为（$m + n$）$|0$（见 [35]）。这一观察给出了上述命题的证明。因此，作为定理4.5的推论，我们得到如下结果。

4.7. 定理。设 $\mathfrak{g}$、V 是两个配备线性映射 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 和 $\beta\colon V \to V$ 的向量空间。那么，在分次向量空间 $s^{-1}\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a}$ 上存在一个 L_∞-代数结构，其结构映射 $\{l_k\}_{k\geq 1}$ 如下给出

by

$$l_2((s^{-1}q,0),(s^{-1}q',0)) = ((-1)^{|q|}s^{-1}[q,q']_B,0),$$
$$l_k((s^{-1}q,0),(0,p_1),\dots,(0,p_{k-1})) = (0,P[\cdots[[q,p_1]_B,p_2]_B,\dots,p_{k-1}]_B),\ \textit{for } k\geq 2.$$

这里， q、 $q'\in\mathfrak{q}$ （我们将其视为元素 $s^{-1}q$、 $s^{-1}q'\in s^{-1}\mathfrak{q}$）以及 p_1、……、 $p_{k-1}\in\mathfrak{a}$ 是齐次元素。除上述输入的排列外，所有其他映射均为零。

注意，分次向量空间 $s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a}$ 由下式明确给出

$$s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a} = \oplus_{i=0}^{\infty}(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a})_i = \oplus_{i=0}^{\infty}\big(\mathrm{Hom}(\wedge^{i+2}\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus C^{i+1,1}(\mathfrak{g}_\alpha,V_\beta)\oplus C^{i+1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\big).$$

以下结果表明，上述 L_∞-代数以其 Maurer-Cartan 元刻画了 Hom-Lie-Leibniz 三元组。

4.8. 定理. 设 $\mathfrak{g},V$是两个向量空间，并分别配备线性映射 $\alpha\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 和 $\beta\colon V\to V$。假设存在如下线性映射

$$\mu\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha),\ \rho\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta,V_\beta)\ \ \textit{and}\ \ T\in\mathrm{Hom}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha).$$

那么，$(\mathfrak{g}_\alpha^\mu,V_\beta^\rho,T)$ 是 Hom-Lie-Leibniz 三元组，当且仅当元素 $\theta=(s^{-1}(\mu\boxplus\rho)\ T)\in(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a})_0$ 是 L_∞-代数 $(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a},\{l_k\}_{k\geq1})$ 中的 Maurer-Cartan 元。这里， $\mu\boxplus\rho\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus C^{1,1}(\mathfrak{g}_\alpha,V_\beta)$ 是由下式给出的元素

$$(\mu\boxplus\rho)\big((x,u),(y,v)\big) = (\mu(x,y),\rho(x,v)),\ \textit{for } (x,u),(y,v)\in\mathfrak{g}\oplus V.$$

证明。注意到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,l_k\big((s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T),\dots,(s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T)\big)\\
&=\frac{1}{2!}\,l_2\big((s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T),(s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T)\big)+\frac{1}{3!}\,l_3\big((s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T),(s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T),(s^{-1}(\mu\boxplus\rho),T)\big)\\
&=\big(-s^{-1}\frac{1}{2}[\mu\boxplus\rho,\mu\boxplus\rho]_B,\ \frac{1}{2}[[\mu\boxplus\rho,T]_B,T]_B\big).
\end{aligned}$$

这表明， $\theta=(s^{-1}(\mu\boxplus\rho)\ T)$ 是 L_∞-代数的 Maurer-Cartan 元，当且仅当

$$[\mu\boxplus\rho,\mu\boxplus\rho]_B=0\ \ \text{and}\ \ [[\mu\boxplus\rho,T]_B,T]_B=0.$$

条件 $[\mu\boxplus\rho,\mu\boxplus\rho]_B=0$ 等价于 $\mathfrak{g}_\alpha^\mu$ 是一个 Hom-Lie 代数，且 V_β^ρ 是它的一个表示。第二个条件 $[[\mu\boxplus\rho,T]_B,T]_B=0$ 等价于 T是 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^\mu$ 关于表示 V_β^ρ (参见定理 3.12)上的一个嵌入张量。结合上述两点，即得所需结果。□

在下一节中，我们将使用上述 Hom-Lie-Leibniz三元组的Maurer-Cartan 刻画来定义上同调。我们还将看到上同调的一个应用。

设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$、$V_\beta^\rho$、$T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。由前述定理可知， $\theta=(s^{-1}(\mu\boxplus\rho)\ T)$ 是 $(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a}$、$\{l_k\}_{k\geq1})$ 上的 L_∞-代数中的 Maurer-Cartan 元，其中 $\mu=[\,,\,]$。因此，可以构造由 Maurer-Cartan 元 $\theta=(s^{-1}(\mu\boxplus\rho)\ T)$ 扭曲的 L_∞-代数 $\big(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a}$、$\{l^{(s^{-1}(\mu\boxplus\rho)\ T)}_k\}_{k\geq1}\big)$。这个 L_∞-代数称为给定 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$、$V_\beta^\rho$、$T)$ 的控制代数。其依据由以下结果给出。

4.9. 定理。设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。那么对于任意线性映射

$$\mu'\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha),\ \rho'\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta,V_\beta)\ \ \textit{and}\ \ T'\in\mathrm{Hom}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha),$$

三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]+[\,,\,]'},V_\beta^{\rho+\rho'},T+T')$ 是 Hom-Lie-Leibniz 三元组，当且仅当 $\theta'=(s^{-1}(\mu'\boxplus\rho')\ T')$ 是控制 L_∞-代数 $\big(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a},\{l^{(s^{-1}(\mu\boxplus\rho)\ T)}_k\}_{k\geq1}\big)$ 的 Maurer-Cartan 元。

5. Cohomology and deformations of Hom-Lie-Leibniz triples

本节首先定义 Hom-Lie-Leibniz 三元组的上同调。对于给定的 Hom-Lie-Leibniz 三元组，我们证明存在一个连接各种上同调群的长正合列。最后，作为上同调的一项应用，我们研究 Hom-Lie-Leibniz 三元组的无穷小变形。

设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 是一对由 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$和表示 V_β^ρ 构成的对象。我们称这样的一对为 Hom-LieRep 对。因此，Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是配备嵌入张量 T的 Hom-LieRep 对 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$。这里我们首先构造与 Hom-LieRep 对相关的上同调理论。我们将看到，Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的上同调可以看作这一上同调与嵌入张量 T 的上同调（如第3节所定义）的副产品。

设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 是一个 Hom-LieRep 对。对于每个 $n \geq 0$，我们定义 n-上链空间 $C^n_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 如下：

$$C^0_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho) = 0 \quad \text{and} \quad C^{n\geq 1}_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho) = \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha) \oplus \mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha \otimes V_\beta, V_\beta).$$

换言之，$C^{n\geq 1}{}_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho) = \mathfrak{q}_{n-1}$（见（21））。我们定义映射 $\delta_{\mathrm{HLR}}\colon C^n_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho) \to C^{n+1}{}_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 如下：

$$\delta_{\mathrm{HLR}}((f_\mathfrak{g}, f_V)) = (-1)^{n-1}[\pi, f_\mathfrak{g} + f_V]_B, \text{ for } (f_\mathfrak{g}, f_V) \in C^n_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho), \tag{22}$$

其中 π 由（14）给出。映射 δ_{HLR} 的显式描述如下：

$$\delta_{\mathrm{HLR}}((f_\mathfrak{g}, f_V)) = (\delta(f_\mathfrak{g}), \delta^{f_\mathfrak{g}}(f_V)),$$

其中分量 $\delta(f_\mathfrak{g})$ 和 $\delta^{f_\mathfrak{g}}(f_V)$ 分别由下式给出：

$$\begin{aligned}(\delta f_\mathfrak{g})(x_1,\dots,x_{n+1}) = &\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}[\alpha^{n-1}(x_i), f_\mathfrak{g}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1})]\\ &+\sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j} f_\mathfrak{g}\big([x_i,x_j],\alpha(x_1),\dots,\widehat{\alpha(x_i)},\dots,\widehat{\alpha(x_j)},\dots,\alpha(x_{n+1})\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta^{f_\mathfrak{g}}(f_V))(x_1,\dots,x_n,v) = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\rho(\alpha^{n-1}(x_i))f_V(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n,v)\\ &+(-1)^{n-1}\rho(f_\mathfrak{g}(x_1,\dots,x_n))(\beta^{n-1}(v))\\ &+\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j} f_V\big([x_i,x_j],\dots,\widehat{\alpha(x_i)},\dots,\widehat{\alpha(x_j)},\dots,v\big)\\ &+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i} f_V(\alpha(x_1),\dots,\widehat{\alpha(x_i)},\dots,\alpha(x_n),\rho(x_i)v),\end{aligned}$$

对于 $x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in V$。由于 $[\pi,\pi]_B = 0$，可得 $(\delta_{\mathrm{HLR}})^2 = 0$。也就是说，$\{C^\bullet_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)\ \delta_{\mathrm{HLR}}\}$ 是一个上链复形。相应的上同调称为 Hom-LieRep 对 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 的上同调，记作 $H^\bullet_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$。

现在我们可以定义 Hom-Lie-Leibniz 三元组（$\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$、$V_\beta^\rho$、$T$）的上同调。我们将 n 阶上链群 $C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 定义为

$$C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T) = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0,\\ \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta,V_\beta) & \text{if } n=1,\\ C^n_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha,V_\beta)\oplus C^{n-1}_T(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha) & \text{if } n\geq 2\\ \quad = \mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta,V_\beta)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n-1},\mathfrak{g}_\alpha). & \end{cases}$$

注意，元素 $(f_\mathfrak{g}, f_V) \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta,V_\beta) = C^1_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 产生元素 $(s^{-1}(f_\mathfrak{g}+f_V), 0) \in (s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a})_{-1}$。这里我们假设 $\mathfrak{a}_{-1} = 0$。另一方面，对于 $n \geq 2$，空间

$C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 与 $(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a})_{n-2}$ 同构，通过

$$\mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta, V_\beta)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n-1},\mathfrak{g}_\alpha)\ni(f_\mathfrak{g},f_V,P)$$
$$\leftrightsquigarrow(s^{-1}(f_\mathfrak{g}+f_V),P)\in(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a})_{n-2}.$$

我们定义映射 $\delta_{\mathrm{HLLT}}\colon C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)\to C^{n+1}{}_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$，定义如下：

$$\delta_{\mathrm{HLLT}}((f_\mathfrak{g},f_V)) = -l_1^{(s^{-1}\pi,T)}(s^{-1}(f_\mathfrak{g}+f_V),0),\ \text{for } n=1,$$
$$\delta_{\mathrm{HLLT}}((f_\mathfrak{g},f_V,P)) = (-1)^{n-2}l_1^{(s^{-1}\pi,T)}(s^{-1}(f_\mathfrak{g}+f_V),P),\ \text{for } n\geq 2.$$

由于 $\big(s^{-1}\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{a},\{l^{(s^{-1}\pi,T)}{}_k\}_{k\geq1}\big)$ 是一个 L_∞-代数（即由 Maurer-Cartan 元 $\theta=(s^{-1}\pi,T)$ 扭曲得到的 L_∞-代数），因此 $(l^{(s^{-1}\pi,T)}{}_1)^2=0$。因此，$\{C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)\ \delta_{\mathrm{HLLT}}\}$ 是一个上链复形。相应的上同调称为 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的上同调，记作 $H^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$。

余边界映射 δ_{HLLT} 明确表示为

$$\delta_{\mathrm{HLLT}}((f_\mathfrak{g},f_V,P)) = (\delta(f_\mathfrak{g}),\delta^{f_\mathfrak{g}}(f_V),(-1)^n d_T(P)+\Omega_T(f_\mathfrak{g},f_V)),$$

对于 $(f_\mathfrak{g},f_V,P)\in\mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta,V_\beta)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n-1},\mathfrak{g}_\alpha)=C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$。这里 $\Omega_T\colon\mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta,V_\beta)\to C^n_T(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$ 是由下式给出的映射

$$\Omega_T(f_\mathfrak{g},f_V)(v_1,\dots,v_n)=(-1)^n\big(f_\mathfrak{g}(Tv_1,\dots,Tv_n)-Tf_V(Tv_1,\dots,Tv_{n-1},v_n)\big),\ \text{for } v_1,\dots,v_n\in V.$$

复形 $\{C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)\ \delta_{\mathrm{HLLT}}\}$ 的上同调称为 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的上同调，记作 $H^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$。

设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。由此可以考虑以下几种上同调：(i) 嵌入张量 T 的上同调，(ii) Hom-LieRep 对 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 的上同调，(iii) 整个 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的上同调。在下面的结果中，我们通过一个适当的长正合列将这些上同调群联系起来。

5.1. 定理。设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$是一个Hom-Lie-Leibniz 三元组。则存在一个连接各个上同调群的长正合列 con- necting

$$\cdots\to H^{n-1}_T(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to H^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)\to H^n_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)\to H^n_T(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\to\cdots.$$

证明。考虑上链复形

(i)嵌入张量 T 的复形 $\{C^\bullet_T(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\ d_T\}$，(ii) Hom-LieRep对 $(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)$ 的复形 $\{C^\bullet_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)\ \delta_{\mathrm{HLR}}\}$，(iii) Hom-Lie-Leibniz 三元组$(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的复形 $\{C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)\ \delta_{\mathrm{HLLT}}\}$。

于是存在一个上链复形的短正合列。

$$0\to C_T^{\bullet-1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)\xrightarrow{i} C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)\xrightarrow{p} C^\bullet_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)\to 0.$$
$$\|$$
$$C^\bullet_{\mathrm{HLR}}(\mathfrak{g}^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho)\oplus C_T^{\bullet-1}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)$$

由此，我们得到了所需的结果。 □

下文中，我们介绍 Hom-Lie-Leibniz三元组的表示。我们还将上述 Hom-Lie-Leibniz 三元组的上同调推广到存在任意表示的情形。

5.2. 定义。设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。$(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的一个表示由四元组 $(\mathfrak{h}^\varrho_\gamma, W^\vartheta_\eta, S, \Theta)$ 给出，该四元组由 Hom-Lie 代数 $\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}$ 的两个表示 $\mathfrak{h}^\varrho_\gamma$ 和 W^ϑ_η 组成，

一个线性映射 $S \in \mathrm{Hom}(W_\eta, \mathfrak{h}_\gamma)$ 以及一个映射 $\Theta\colon V \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, W)$（称为配对映射）构成，并满足

$$\begin{aligned}
\Theta(\beta(v))(\gamma(h)) &= \eta\big(\Theta(v)(h)\big),\\
\Theta(\rho(x)v)\circ\gamma &= \vartheta(\alpha(x))\circ\Theta(v) - \Theta(\beta(v))\circ\varrho(x),\\
\varrho(T(v))\circ S &= S\circ\vartheta(T(v)),\ \text{for } x\in\mathfrak{g}, v\in V \text{ and } h\in\mathfrak{h}.
\end{aligned}$$

设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。则它可视为一个表示 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T, \Theta_{\mathrm{ad}})$，其中配对映射 $\Theta_{\mathrm{ad}}\colon V \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ 定义为

$$\Theta_{\mathrm{ad}}(v)(x) = -\rho(x)v,\ \text{for } v\in V, x\in\mathfrak{g}.$$

这称为 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 的伴随表示。

通常的半直积构造与 Hom-Lie-Leibniz 三元组完全相容。更准确地说，有如下结果。

5.3. 命题。设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组，且 $(\mathfrak{h}_\gamma^\varrho, W_\eta^\vartheta, S, \Theta)$ 是它的一个表示。那么三元组 $\big((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})_{\alpha\oplus\gamma}^{[\cdot,\cdot]_\ltimes}, (V\oplus W)_{\beta\oplus\eta}^{\rho_\ltimes}, T\oplus S\big)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组，其中

$$\begin{aligned}
[(x,h),(y,k)]_\ltimes &:= ([x,y], \varrho(x)k - \varrho(y)h),\\
\rho_\ltimes((x,h))(v,w) &:= (\rho(x)v, \vartheta(x)w - \Theta(v)h),\\
(T\oplus S)((v,w)) &:= (Tv, Sw),
\end{aligned}$$

对于 (x,h)、$(y,k) \in \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ 和 $(v,w) \in V\oplus W$。这称为半直积。

证明。证明可由直接计算得出。 □

设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组，$(\mathfrak{h}_\gamma^\varrho, W_\eta^\vartheta, S, \Theta)$ 是它的一个表示。对于每个$n \geq 0$，我们定义 n-上链空间为

$$C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T; \mathfrak{h}_\gamma^\varrho, W_\eta^\vartheta, S) = \begin{cases} 0 \quad \text{if } n=0,\\ \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}_\gamma)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta, W_\eta) \quad \text{if } n=1,\\ \mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}_\gamma)\oplus\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta, W_\eta)\oplus\mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n-1}, \mathfrak{h}_\gamma) \text{ if } n\geq 2. \end{cases}$$

余边界映射 $\delta_{\mathrm{HLLT}}\colon C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T;\ \mathfrak{h}_\gamma^\varrho, W_\eta^\vartheta, S) \to C^{n+1}{}_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T;\ \mathfrak{h}_\gamma^\varrho, W_\eta^\vartheta, S)$ 定义为

$$\delta_{\mathrm{HLLT}}((f_\mathfrak{g}, f_V, P)) = \big(\delta(f_\mathfrak{g}), \delta^{f_\mathfrak{g}}(f_V), (-1)^n d_{T,S}(P) + \Omega_{T,S}(f_\mathfrak{g}, f_V)\big),$$

对于 $(f_\mathfrak{g}, f_V, P) \in C^n_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\cdot,\cdot]}, V_\beta^\rho, T;\ \mathfrak{h}_\gamma^\varrho, W_\eta^\vartheta, S)$。这里的映射

$$\begin{aligned}
&\delta : \mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}_\gamma) \to \mathrm{Hom}(\wedge^{n+1}\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}_\gamma),\\
&\delta^{f_\mathfrak{g}} : \mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta, W_\eta) \to \mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}_\alpha\otimes V_\beta, W_\eta),\\
&d_{T,S} : \mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n}, \mathfrak{h}_\gamma) \to \mathrm{Hom}(V_\beta^{\otimes n+1}, \mathfrak{h}_\gamma)
\end{aligned}$$

分别由以下给出

$$\begin{aligned}
(\delta(f_\mathfrak{g}))(x_1,\dots,x_{n+1}) = &\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\varrho(\alpha^{n-1}(x_i))f_\mathfrak{g}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1})\\
&+\sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}f_\mathfrak{g}\big([x_i,x_j],\alpha(x_1),\dots,\widehat{\alpha(x_i)},\dots,\widehat{\alpha(x_j)},\dots,\alpha(x_{n+1})\big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\delta^{f_{\mathfrak{g}}}(f_V))(x_1,\ldots,x_n,v) = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\vartheta(\alpha^{n-1}(x_i))f_V(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n,v)\\
&+(-1)^n\Theta(\beta^{n-1}(v))f_{\mathfrak{g}}(x_1,\ldots,x_n)\\
&+\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j}f_V\big([x_i,x_j],\ldots,\widehat{\alpha(x_i)},\ldots,\widehat{\alpha(x_j)},\ldots,v\big)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}f_V(\alpha(x_1),\ldots,\widehat{\alpha(x_i)},\ldots,\alpha(x_n),\rho(x_i)v),
\end{aligned}
$$

$$
d_{T,S}=[\![T+S,-]\!],
$$

对于 x_1、……、$x_{n+1}\in\mathfrak{g}$ 和 $v\in V$。最后，对于 v_1、……、$v_n\in V$，

$$
\big(\Omega_{T,S}(f_{\mathfrak{g}},f_V)\big)(v_1,\ldots,v_n)=(-1)^n\big(f_{\mathfrak{g}}(Tv_1,\ldots,Tv_n)-Sf_V(Tv_1,\ldots,Tv_{n-1},v_n)\big).
$$

5.4. 命题。采用上述记号，我们有 $(\delta_{\mathrm{HLLT}})^2=0$。

证明。由于$(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T)$是 Hom-Lie-Leibniz 三元组，且 $(\mathfrak{h}_\gamma^\varrho,W_\eta^\vartheta,S,\Theta)$ 是一个表示，半直积

$$
\big((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})_{\alpha\oplus\gamma}^{[\,,\,]_\ltimes},(V\oplus W)_{\beta\oplus\eta}^{\rho_\ltimes},T\oplus S\big)
$$

是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。因此，可以考虑上链复形

$$
\big\{C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}\big((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})_{\alpha\oplus\gamma}^{[\,,\,]_\ltimes},(V\oplus W)_{\beta\oplus\eta}^{\rho_\ltimes},T\oplus S\big),\delta_{\mathrm{HLLT}}\big\}
$$

上述半直积 Hom-Lie-Leibniz 三元组（系数取伴随表示）的。然后事实证明

$$
C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T;\mathfrak{h}_\gamma^\varrho,W_\eta^\vartheta,S)\subset C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}\big((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})_{\alpha\oplus\gamma}^{[\,,\,]_\ltimes},(V\oplus W)_{\beta\oplus\eta}^{\rho_\ltimes},T\oplus S\big)
$$

是一个子复形。因此我们得到了所需的结果。 □

复形 $\{C^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T;\ \mathfrak{h}_\gamma^\varrho,W_\eta^\vartheta,S)\ \delta_{\mathrm{HLLT}}\}$ 的上同调称为 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T)$ 在表示 $(\mathfrak{h}_\gamma^\varrho,W_\eta^\vartheta,S,\Theta)$ 中取系数时的上同调。我们将相应的上同调群记为 $H^\bullet_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T;\ \mathfrak{h}_\gamma^\varrho,W_\eta^\vartheta,S)$。

我们可以利用所定义的上同调（在表示中取系数）研究 Hom-Lie-Leibniz 三元组的阿贝尔扩张。下文中，我们考察 Hom-Lie-Leibniz 三元组的无穷小变形，并说明我们的上同调支配这类变形。未来，我们将研究上同调的其他一些应用。

5.1. Hom-Lie-Leibniz 三元组的变形。本小节中，我们研究Hom-Lie-Leibniz 三元组（$\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$、$V_\beta^\rho$、$T$）的无穷小变形。我们证明，此类无穷小变形的等价类由第二上同调群 $H^2_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]}$、$V_\beta^\rho$、$T)$ 分类。

5.5. 定义。Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T)$ 的无穷小变形是如下形式的 Hom-Lie-Leibniz 三元组。

$$
(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]+\epsilon[\,,\,]_1},V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1},T+\epsilon T_1),
$$

其中 ϵ 是满足 $\epsilon^2=0$的参数。

令 $\mathfrak{g}[[t]]$（分别地，$V[[t]]$）表示所有在 t 中系数取自 $\mathfrak{g}$（分别地，V）的形式幂级数所构成的空间。我们通过 t-线性，将线性映射 $\alpha\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 延拓为线性映射（记号仍为 α）$\mathfrak{g}[[t]]/(t^2)\to\mathfrak{g}[[t]]/(t^2)$。类似地，映射 $\beta:V\to V$ 可以延拓为线性映射（记号仍为 β）$V[[t]]/(t^2)\to V[[t]]/(t^2)$。于是，Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\,,\,]},V_\beta^\rho,T)$ 的无穷小变形可以看作一个三元组 $([\ ,\ ]_1,\rho_1,T_1)$，其中

$$
[\ ,\ ]_1\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha),\quad \rho_1:\mathfrak{g}_\alpha\to\mathrm{End}(V_\beta)\ \text{ and }\ T_1\in\mathrm{Hom}(V_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)
$$

这使 $\big((\mathfrak{g}[[t]]/(t^2))_\alpha^{[\ ,\ ]+t[\ ,\ ]_1}, (V[[t]]/(t^2))_\beta^{\rho+t\rho_1}, T+tT_1\big)$ 成为环 $\mathbf{k}[[t]]/(t^2)$ 上的 Hom-Lie-Leibniz 三元组。

因此，当且仅当以下条件成立时，$(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]+\epsilon[\ ,\ ]_1}, V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1}, T+\epsilon T_1)$ 是 Hom-Lie-Leibniz 三元组的无穷小变形：

$$[\alpha(x), [y,z]_1] + [\alpha(x),[y,z]]_1 + [\alpha(y),[z,x]_1] + [\alpha(y),[z,x]]_1 + [\alpha(z),[x,y]_1] + [\alpha(z),[x,y]]_1 = 0, \quad (23)$$

$$\rho(\alpha(x)) \circ \rho_1(y) + \rho_1(\alpha(x)) \circ \rho(y) - \rho(\alpha(y)) \circ \rho_1(x) - \rho_1(\alpha(y)) \circ \rho(x) = \rho_1([x,y]) \circ \beta + \rho([x,y]_1) \circ \beta, \quad (24)$$

$$[T(u), T_1(v)] + [T_1(u), T(v)] + [T(u), T(v)]_1 = T\big(\rho(T_1u)v\big) + T\big(\rho_1(Tu)v\big) + T_1\big(\rho(Tu)v\big), \quad (25)$$

对于 $x,y,z \in \mathfrak{g}$ 和 $u,v \in V$。因此，由 (23)-(25) 可知，$([\ ,\ ]_1, \rho_1, T_1)$ 在 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$ 的上链复形中定义了一个取值于伴随表示的 2-余循环。换言之，$[([\ ,\ ]_1, \rho_1, T_1)] \in H^2_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$】【。

5.6. 定义。两个无穷小变形

$$(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]+\epsilon[\ ,\ ]_1}, V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1}, T+\epsilon T_1) \ \text{ and } \ (\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]+\epsilon[\ ,\ ]_1'}, V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1'}, T+\epsilon T_1')$$

若存在满足以下条件的线性映射 $N \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha)$ 和 $S \in \mathrm{Hom}(V_\beta, V_\beta)$，则称它们等价：这对映射

$$\big(\mathrm{id}_\mathfrak{g} + \epsilon N, \mathrm{id}_V + \epsilon S\big)$$

定义了从 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]+\epsilon[\ ,\ ]_1}, V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1}, T+\epsilon T_1)$ 到 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]+\epsilon[\ ,\ ]_1'}, V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1'}, T+\epsilon T_1')$ 的同态).

由此可知，上述两个无穷小变形等价，当且仅当满足以下条件：

$$[\ ,\ ]_1 - [\ ,\ ]_1' = \delta(N), \quad \rho_1 - \rho_1' = \delta^N(S) \ \text{ and } \ T_1 - T_1' = T \circ S - N \circ T.$$

因此我们得到 $([\ ,\ ]_1, \rho_1, T_1) - ([\ ,\ ]_1', \rho_1', T_1') = \delta_{\mathrm{HLLT}}((N,S))$。换言之，2-余循环 $([\ ,\ ]_1, \rho_1, T_1)$ 和 $([\ ,\ ]_1', \rho_1', T_1')$ 在 $H^2_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$ 中对应于同一个元素。

另一方面，如果我们有一个 2-余循环 (μ_1, ρ_1, T_1)，则容易验证

$$(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]+\epsilon\mu_1}, V_\beta^{\rho+\epsilon\rho_1}, T+\epsilon T_1)$$

是 Hom-Lie-Leibniz 三元组 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$ 的无穷小变形。此外，上同调的 2-余循环对应于等价的无穷小变形。作为上述所有结果的推论，我们得到以下无穷小变形分类结果。

5.7. 定理。设 $(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$ 是一个 Hom-Lie-Leibniz 三元组。那么，$(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$ 的无穷小变形的等价类与第二上同调群 $H^2_{\mathrm{HLLT}}(\mathfrak{g}_\alpha^{[\ ,\ ]}, V_\beta^\rho, T)$ 之间存在一一对应关系。

6. Homotopy embedding tensors and $HLeib_\infty$-algebras

HL_∞代数（也称为强同伦 Hom-Lie 代数）的概念由 Sheng 和 Chen [34] 提出，作为 Hom-Lie 代数的同伦类比。本节中，我们定义相对于一个表示的 HL_∞代数上的同伦嵌入张量概念。接下来，我们引入 $HLeib_\infty$ 代数（强同伦 Hom-Leibniz 代数）的概念，并证明同伦嵌入张量会诱导出一个 $HLeib_\infty$ 代数结构。

6.1.定义。([34]) HL_∞-代数是一个三元组$(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$，由一个分次向量空间$\mathcal{G} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{G}_i$ 及一组 $\{l_k : \mathcal{G}^{\otimes k} \to \mathcal{G}\}_{k\geq 1}$ 阶为1 的分次对称线性映射和一个次数为 0 的线性映射 $\alpha :\ \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 组成，使得

- 每个 l_k 都是乘法的，即 $l_k\big(\alpha(x_1)\ldots,\alpha(x_k)\big) = \alpha(l_k(x_1,\ldots,x_k))$, 对所有 $k \geq 1$ 均成立,

- 高阶 Hom-Jacobi 恒等式成立，即对所有 $n \geq 1$ 和齐次元素 $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{G}$,

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)}} \varepsilon(\sigma)\ l_j\big(l_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}), \alpha^{i-1}(x_{\sigma(i+1)}), \ldots, \alpha^{i-1}(x_{\sigma(n)})\big) = 0.$$

注意，我们对 HL_∞-代数的定义与 [34]中给出的定义略有不同。然而，这两个概念通过一个次数平移相关。在定义 6.1中，如果取 α =恒等映射$_{\mathcal{G}}$ （恒等映射），便得到 L_∞-代数的定义（见定义 4.3）。

6.2.定义。设 $(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$是一个 HL_∞-代数。这个 HL_∞-代数的一个表示是一个三元组 $(\mathcal{V}, \{\rho_k\}_{k\geq 1}, \beta)$, 由一个分次向量空间 $\mathcal{V} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_i$ 以及一个集合 $\{\rho_k \colon \mathcal{G}^{\otimes k-1} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V}\}_{k\geq 1}$（其中包含次数为 1 的分次线性映射）和一个次数为 0 的线性映射 $\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 组成，并满足以下条件:

- 每个 ρ_k 对 $\mathcal{G}$ 的输入是分次对称的，即

$$\rho_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k-1)}, v) = \varepsilon(\sigma)\rho_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, v), \text{ for all } k \geq 1 \text{ and } \sigma \in \mathbb{S}_{k-1},$$

- 对每个 ρ_k，它都是乘法的，即 $\rho_k\big(\alpha(x_1) \ldots, \alpha(x_{k-1})\ \beta(v)\big) = \beta\big(\rho_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\big)$，对所有 $k \geq 1$ 均成立，- 对每个 $n \geq 1$ 以及齐次元素 $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathcal{G}$, $x_n \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j=n+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)} \\ \sigma(i)=n}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{j-1+(i+|x_{\sigma(1)}|+\cdots+|x_{\sigma(i)}|)(|x_{\sigma(i+1)}|+\cdots+|x_{\sigma(n)}|)} \\
&\qquad\qquad \rho_j\big(\alpha^{i-1}(x_{\sigma(i+1)}), \ldots, \alpha^{i-1}(x_{\sigma(n)}), \rho_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)})\big) \\
&+ \sum_{i+j=n+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)} \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma)\rho_j\big(l_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}), \alpha^{i-1}(x_{\sigma(i+1)}), \ldots, \beta^{i-1}(x_{\sigma(n)})\big) = 0.
\end{aligned}$$

注意，如果 $\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)}$ 是一个混洗，那么我们有 $\sigma(i) = n$ 或 $\sigma(n) = n$。因此

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)}} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)} \\ \sigma(i)=n}} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_{(i,n-i)} \\ \sigma(n)=n}}.$$

因此，利用 HL_∞-代数结构映射的分次对称性，可以很容易地证明，任何 HL_∞-代数（$\mathcal{G}$、$\{l_k\}_{k\geq 1}$、α）都是其自身的表示，其中 $\rho_k = l_k$ 对于 $k \geq 1$。这称为伴随表示。

现在我们将定义 $HLeib_\infty$-代数的概念。给定一个分次 Hom-向量空间，我们还构造一个分次李代数，其 Maurer-Cartan 元恰好对应于 $HLeib_\infty$-代数结构。这里的分次李括号是 Balavoine 括号在分次情形下的推广。

6.3. 定义。 $HLeib_\infty$-代数是一个三元组 $(\mathcal{H}, \{\pi_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$，由一个分次向量空间 $\mathcal{H} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_i$、一族 $\{\pi_k : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}\}_{k\geq 1}$ 的 1 次线性映射以及一个 0 次线性映射 $\alpha : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 组成，并满足以下条件:

- （乘法性） $\pi_k(\alpha(x_1) \ldots, \alpha(x_k)) = \alpha\big(\pi_k(x_1, \ldots, x_k)\big)$，对所有 $k \geq 1$ 均成立，
- （高阶 Hom-Leibniz恒等式）对所有 $n \geq 1$ 和齐次元素 x_1、……、$x_n \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k+l=n+1} \sum_{i=1}^{n-l+1} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{(i-1,l-1)}} &(-1)^{\gamma_i}\ \varepsilon(\sigma)\ \pi_k\big(\alpha^{l-1}(x_{\sigma(1)}), \ldots, \alpha^{l-1}(x_{\sigma(i-1)}), \\
&\pi_l(x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(i+l-2)}, x_{i+l-1}), \alpha^{l-1}(x_{i+l}), \ldots, \alpha^{l-1}(x_n)\big) = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\gamma_i = |x_{\sigma(1)}| + \cdots + |x_{\sigma(i-1)}|$.

Hom-Leibniz 代数（见定义 2.6）可视为一个集中在次数 $HLeib_\infty$的–1-代数。在 [39] 中，作者将 Hom-Leibniz 2-代数引入为 Hom-Leibniz 代数的范畴化。一个底层分次向量空间集中在两个次数上的 $HLeib_\infty$-代数可以实现为 Hom-Leibniz 2-代数。在上述定义中，若取 $\alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$，则可得到$Leib_\infty$-代数的概念[4,37]。

给定一个 HL_∞-代数及其表示，可以构造一个 $HLeib_\infty$-代数。更准确地说，我们有如下结果。

6.4. 命题。设 $(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$ 是一个 HL_∞-代数，$(\mathcal{V}, \{\rho_k\}_{k\geq 1}, \beta)$ 是它的一个表示。则三元组 $(\mathcal{G}\oplus\mathcal{V}, \{l_k \boxplus \rho_k\}_{k\geq 1}, \alpha\oplus\beta)$ 是一个 $HLeib_\infty$-代数，其中

$$(l_k \boxplus \rho_k)\big((x_1,v_1),\dots,(x_k,v_k)\big) = \big(l_k(x_1,\dots,x_k), \rho_k(x_1,\dots,x_{k-1},v_k)\big), \tag{26}$$

对于 $k\geq 1$ and $(x_1,v_1)\dots,(x_k,v_k)\in\mathcal{G}\oplus\mathcal{V}$。这称为半半直积。

证明可由直接计算得到。上述命题的逆命题同样成立。更确切地说，设 $\mathcal{G}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{G}_i$ 是一个分次向量空间，$\alpha:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 是一个次数为 0 的线性映射，并且$\{l_k: \mathcal{G}^{\otimes k}\to\mathcal{G}\}_{k\geq 1}$ 是一族次数为 1 的对称乘法线性映射。设 $\mathcal{V}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_i$ 是另一个分次向量空间，带有一个次数为 0 的线性映射 $\beta: \mathcal{V}\to\mathcal{V}$ 以及一族 $\{\rho_k: \mathcal{G}^{\otimes k-1}\otimes\mathcal{V}\to\mathcal{V}\}_{k\geq 1}$次数为 1 的（并且在 $\mathcal{L}$的输入上对称的）乘法线性映射。那么，当且仅当 $(\mathcal{G}\oplus\mathcal{V}, \{l_k\boxplus\rho_k\}_{k\geq 1}, \alpha\oplus\beta)$ 是一个 $HLeib_\infty$-代数时，$(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$ 是一个 HL_∞-代数且 $(\mathcal{V}, \{\rho_k\}_{k\geq 1}, \beta)$ 是一个表示。

设 $\mathcal{H}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_i$ 是一个分次向量空间，且 $\alpha: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是一个次数为0 的线性映射（不一定具有任何附加结构）。对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，令$\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ 表示从分次向量空间 $\overline{T}(\mathcal{H})$到分次向量空间 $\mathcal{H}$ 的所有次数为n 且保持乘法的线性映射所组成的空间。因此，$\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$中的一个元素 $\pi\in$ 可表示为一个和 $\pi=\sum_{k\geq 1}\pi_k$，其中对于$k\geq 1$，$\pi_k\in \mathrm{Hom}^n(\mathcal{H}_\alpha^{\otimes k}, \mathcal{H}_\alpha)$。考虑分次向量空间 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$。该分次向量空间带有如下定义的分次李括号。对于 $\pi=\sum_{k\geq 1}\pi_k\in\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ 和 $\varpi=\sum_{l\geq 1}\varpi_l\in\mathrm{Hom}^m(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$，我们定义 $\mathrm{Hom}^{n+m}(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ 中的一个元素 $[\pi,\varpi]_B\in$，其定义为

$$[\pi,\varpi]_B := \sum_{p\geq 1}\sum_{k+l=p+1}\big(\pi_k\diamond\varpi_l - (-1)^{mn}\varpi_l\diamond\pi_k\big), \tag{27}$$

其中

$$(\pi_k\diamond\varpi_l)(x_1,\dots,x_p) = \sum_{i=1}^{p-l+1}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i-1,l-1)}}(-1)^{|x_{\sigma(1)}|+\cdots+|x_{\sigma(i-1)}|}\varepsilon(\sigma)\pi_k\big(\alpha^{l-1}(x_{\sigma(1)}),\dots,\alpha^{l-1}(x_{\sigma(i-1)}),$$
$$\varpi_l(x_{\sigma(i)},\dots,x_{\sigma(i+l-2)},x_{i+l-1}),\dots,\alpha^{l-1}(x_p)\big).$$

注意，括号（27）是分次背景下 Balavoine 括号的推广。这个分次李代数将 $HLeib_\infty$-代数结构刻画为 Maurer-Cartan 元素。更确切地说，我们有如下结果。

6.5. 定理。设 $\mathcal{H}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_i$ 是一个分次向量空间，且 $\alpha: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是一个 0 次线性映射。那么 $HLeib_\infty$-代数结构在 $\mathcal{H}$ 上与分次李代数 $\big(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)\ [\ ,\ ]_B\big)$. 中的 Maurer-Cartan 元素之间存在一一对应关系。

证明。 注意，元素 $\pi=\sum_{k\geq 1}\pi_k\in\mathrm{Hom}^0(\overline{T}(\mathcal{H})_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ 对应于一族 $\{\pi_k: \mathcal{H}^{\otimes k}\to\mathcal{H}\}_{k\geq 1}$ 的 1 次乘法线性映射。由此，根据 (27)， $[\pi,\pi]_B=0$ 当且仅当 $(\mathcal{H}, \{\pi_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$ 是一个 $HLeib_\infty$-代数时成立。因此结论得证。 □

给定一个 Hom-Lie 代数及其表示，我们构造了一个分次李代数，其 Maurer-Cartan 元恰好是嵌入张量（见第 3节）。这里我们将在同伦背景下推广这一思想。设 $(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$ 是一个 HL_∞-代数，而 $(\mathcal{V}, \{\rho_k\}_{k\geq 1}, \beta)$ 是它的一个表示。考虑分次李代数

$$\mathfrak{l} = \big(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{G}\oplus\mathcal{V})_{\alpha\oplus\beta}, (\mathcal{G}\oplus\mathcal{V})_{\alpha\oplus\beta}), [\ ,\ ]_B\big).$$

那么容易验证， $\mathfrak{a}=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{V})_\beta, \mathcal{G}_\alpha)$ 是 $\mathfrak{l}$的分次李子代数。令 $P: \mathfrak{l}\to\mathfrak{a}$为到子空间 $\mathfrak{a}$ 上的投影。最后，我们定义一个元素 $\Delta\in l_1=\mathrm{Hom}^1(\overline{T}(\mathcal{G}\oplus\mathcal{V})_{\alpha\oplus\beta}, (\mathcal{G}\oplus\mathcal{V})_{\alpha\oplus\beta})$

by

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty}(l_k \boxplus \rho_k),$$

其中集合 $\{l_k \boxplus \rho_k\}_{k\geq 1}$ 在（26）中定义。于是，集合 $\{l_k \boxplus \rho_k\}_{k\geq 1}$ 定义了一个 $HLeib_\infty$-代数结构 $[\Delta, \Delta]_B = 0$。此外，四元组（$\mathfrak{l}$， $\mathfrak{a}$， P， Δ）是定义 4.4 意义下的 V-数据。根据定理 4.5，我们在分次向量空间 $\mathfrak{a}$ 上得到一个 L_∞-代数结构 $\{l_k\}_{k\geq 1}$。换言之， $\big(\mathfrak{a} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{V})^\beta, \mathcal{G}_\alpha)\ \{\widetilde{l_k}\}_{k\geq 1}\big)$ 是一个 L_∞-代数，其中

$$\widetilde{l_k}(a_1, \ldots, a_k) = P[\cdots[[\Delta, a_1]_B, a_2]_B, \ldots, a_k]_B, \text{ for } k \geq 1 \text{ and } a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{a}.$$

6.6. 定义. 设 $(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$ 是一个 HL_∞-代数，且 $(\mathcal{V}, \{\rho_k\}_{k\geq 1}, \beta)$ 是它的一个表示。关于该表示的 HL_∞-代数上的同伦嵌入张量，就是 L_∞-代数 $\big(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{V})^\beta, \mathcal{G}_\alpha)\ \{\widetilde{l_k}\}_{k\geq 1}\big)$. 的一个 Maurer-Cartan 元

Th因此，同伦嵌入张量由一个元素 $\Pi \in \mathrm{Hom}^0(\overline{T}(\mathcal{V})^\beta, \mathcal{G}_\alpha)$ 给出，该元素满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\widetilde{l_k}(\underbrace{\Pi, \ldots, \Pi}_{k \text{ times}}) = 0.$$

等价地， Π 必须满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}P[\cdots[[\Delta, \Pi]_B, \Pi]_B, \ldots, \Pi]_B = 0, \quad \text{i.e. } P(e^{[-,\Pi]_B}\Delta) = 0, \text{ where } \Delta = \sum_{k=1}^{\infty}(l_k \boxplus \rho_k).$$

6.7. 命题. 设 $(\mathcal{G}, \{l_k\}_{k\geq 1}, \alpha)$ 是一个 HL_∞-代数，且 $(\mathcal{V}, \{\rho_k\}_{k\geq 1}, \beta)$ 是它的一个表示。设 Π 是一个同伦嵌入张量。那么三元组 $(\mathcal{V}, \{\pi_k\}_{k\geq 1}, \beta)$ 是一个 $HLeib_\infty$-代数，其中

$$\pi_k(v_1, \ldots, v_k) = \big(e^{[-,\Pi]_B}\sum_{k=1}^{\infty}(l_k \boxplus \rho_k)\big)(v_1, \ldots, v_k), \ \textit{for } k \geq 1.$$

证明。由于 $[\Delta, \Delta]_B = 0$， 可得。

$$[e^{[-,\Pi]_B}\Delta\ , e^{[-,\Pi]_B}\Delta]_B = e^{[-,\Pi]_B}[\Delta, \Delta]_B = 0.$$

因此， $e^{[-,\Pi]_B}\Delta$ 是分次李代数中的一个 Maurer-Cartan 元。

$$\mathfrak{l} = \big(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(\overline{T}(\mathcal{G}\oplus\mathcal{V})_{\alpha\oplus\beta}, (\mathcal{G}\oplus\mathcal{V})_{\alpha\oplus\beta}), [\ ,\ ]_B\big).$$

因此，集合 $\{\pi_k\}_{k\geq 1}$ 在 $\mathcal{V}$ 上定义了一个 $HLeib_\infty$-代数结构，其中

$$\pi_k = \big(e^{[-,\Pi]_B}\Delta\big)|_{\mathcal{V}^{\otimes k}}, \text{ for } k \geq 1.$$

证明至此完成。 □

致谢。A.Das谨感谢印度理工学院克勒格布尔分校为其开展部分研究提供了优良的学术环境。A. Makhlouf 谨感谢IFCPAR/CEFIPRA（资助编号 6201-C 2019-0071）提供的支持。

数据可用性声明。数据共享不适用于本文，因为本研究未创建或分析任何新数据。

References

[1] A. Arfa、N. B. Fraj 和 A. Makhlouf，Hom-代数的态射、上同调与变形， *J. NonlinearMath. Phys.* 25(2018)，589–603。[2] F. Ammar、Z. Ejbehi 和 A.Makhlouf，Hom-代数的上同调与变形， *J. Lie Theory* 21 (2011)，813–836。[3] F. Ammar、Z. Ejbehi 和 A. Makhlouf，Hom-Leibniz 代数的上同调与普适变形，*arXiv*:1302.7302 (2013)。

[4] M. Ammar 和 N. Poncin，Loday 无穷范畴、 $2n$-元分次代数与同伦代数的余代数方法及茎微分，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 60 (2010)，355–387。[5] D. Balavoine，二次运算子上的代数的变形，载于：“《运算子：文艺复兴会议论文集》”，第 207–234 页。[6] S. Benayadi 和 A. Makhlouf，具有对称不变非退化双线性形式的 Hom-Lie 代数， *J. Geom.Phys.* 76(2013)，38–60[7] R. Bonezzi 和 O. Hohm，Leibniz 规范理论与无穷结构，*Comm. Math. Phys.* 377 (2020)，2027–2077。[8] R. Bonezzi 和 O. Hohm，对偶层级与微分分次李代数，arXiv:1910.10399。[9] A. Das，同伦意义下的 Hom-结合代数， *J. Algebra* 556 (2020)，836–878。[10] A. Das 和 S. K. Mishra，结合 Rota-Baxter 代数的 L_∞-变形与同伦 Rota-Baxter 算子， *J. Math. Phys.* 63(5) (2022)，051703。[11] B. de Wit、H. Samtleben 和 M. Trigiante，关于最大超引力的拉格朗日量与规范化， *NuclearPhys. B* 655 (2003)，第 1–2 期，93–126。[12] B. de Wit、H. Samtleben 和 M. Trigiante，最大 $D = 5$ 超引力， *Nucl. Phys. B* 716 (2005)，215–247。[13] B. de Wit 和 H. Samtleben，规范化最大超引力与非阿贝尔矢量-张量系统的层级，*Fortschr. Phys.* 53(2005)，442–449。[14] B. de Wit、H. Nicolai 和 H. Samtleben，规范化超引力、张量层级与 M-理论， *J. High EnergyPhys.* 02 (2008)，044，33 页。[15] J. T. Hartwig、D. Larsson 和 S. D. Silvestrov，使用 σ-导子的李代数变形， *J. Algebra* 295 (2006)，314–361。[16] O. Hohm 和 H. Samtleben，Leibniz-Chern-Simons 理论与例外场论的相， *Comm. Math. Phys.* 369(2019)，1055–1089。[17] Y. Kosmann-Schwarzbach，从泊松代数到 Gerstenhaber 代数，*Ann. Inst. Fourier Grenoble* 46 (5) (1996) 1243–1274。[18] A. Kotov 和 T. Strobl，嵌入张量、Leibniz-Loday 代数及其高阶规范理论， *Comm.Math. Phys.* 376(2020)，235–258。[19] T. Lada 和 M. Markl，强同伦李代数，*Comm. Algebra* 23 (6) (1995)，2147–2161。[20] T. Lada 和 J. Stasheff，面向物理学家的 sh 李代数简介，*Int. J. Theor. Phys.* 32 (1993)，1087–1104。[21] D. Larsson 和 S. Silvestrov，拟李代数， *Contemp. Math.* (2005)，第 241–248 页。[22] S. Lavau，张量层级与 Leibniz 代数， *J. Geom. Phys.* 144 (2019)，147–189。[23] S. Lavau 和 J. Palmkvist，无穷增强 Leibniz 代数， *Lett. Math. Phys.* 110 (2020)，3121–3152。[24] S. Lavau 和 J. Stasheff，Leibniz 代数的 L_∞-代数扩张，arXiv 预印本，arXiv:2003.07838。[25] A. Lazarev、Y. Sheng 和 R. Tang，相对 Rota-Baxter 李代数的变形与同伦论，*Comm. Math. Phys.* 383 (2021)，595–631。[26] S. Liu、L. Song 和 R. Tang，正则 Hom-pre-Lie 代数的表示与上同调， *J. Algebra Appl.*第 19 卷，第 08 期 (2020) 2050149。[27] J.-L. Loday 和 T. Pirashvili，Leibniz 代数的泛包络代数与（上）同调， *Math. Ann.*296 (1993)，139–158。[28] A. Makhlouf 和 S. Silvestrov，Hom-代数结构， *J. Gen. Lie Theory Appl.* 2(2)，51–64 (2008)[29] A. Makhlouf 和 S. Silvestrov，关于 Hom-结合代数与 Hom-Lie 代数的单参数形式变形的注记， *Forum Math.* 22，第 4 期 (2010)，715–739。[30] S. K. Mishra 和 A. Naolekar，Hom-Lie 代数上的 $\mathcal{O}$-算子， *J. Math. Phys.* 61 (12) (2020)，121701。[31] G. Mukherjee 和 R. Saha，Hom-Leibniz 代数的等变单参数形式变形， *Commun.Contemp. Math.* 第 24 卷，第 03 期 (2022) 2050082。[32] H. Nicolai 和 H. Samtleben，三维最大规范化超引力， *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001)，第 9 期，1686–1689。[33] Y. Sheng，Hom-Lie 代数的表示， *Algebr. Represent. Theor.* 15 (2012) 1081–1098。[34] Y. Sheng 和 D. Chen，Hom-Lie 2-代数， *J. Algebra* 376 (2013)，174–195。[35] Y. Sheng、R. Tang 和 C. Zhu，控制嵌入张量与李-Leibniz 三元组的 L_∞-代数、上同调与同伦， *Comm. Math. Phys.* 386 (2021)，269–304。[36] T. Strobl 和 F. Wagemann，增强 Leibniz 代数：结构定理与诱导李 2-代数， *Comm.Math. Phys.* 376(2020)，51–79。[37] K. Uchino，导出括号与 sh Leibniz 代数， *J. Pure Appl. Algebra* 215 (2011)，1102–1111。[38] Th. Voronov，高阶导出括号与同伦代数，*J. Pure Appl. Algebra* 202 (2005)，133–153。[39] C. Wang、Z. Wei 和 Q. Zhang，Hom-Leibniz 2-代数，*Asian European J. Math.* 第 15 卷，第 01 期 (2022)，2250015。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kharagpur 721302, West Bengal, India.
Email address: apurbadas348@gmail.com

University of Haute Alsace, IRIMAS - Département de Mathématiques, 18, rue des frères Lumière, F-680 93 Mulhouse, France
Email address: abdenacer.makhlouf@uha.fr