arXiv:2304.04182v1 [math.RT] 9 Apr 2023

广义克罗内克箭图初等模的向量

JIE LIU

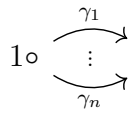
Abstract. 令 k 为代数闭域。广义或 n-Kronecker 箭图$K(n)$ 是具有两个顶点的箭图，这两个顶点分别称为源点和汇点，并且有从源点指向汇点的 n 条箭头。给定路径代数 $kK(n)$ = K$_n$ 的有限维模 M，我们考虑其维数向量 dim M =(dim$_k$ M_1, dim$_k$ M_2)。设 F ={(x,y) | $\frac{2}{n}x \le y \le x$}，并设$\overline{(x,y)}$ ∈F。我们构造 K$_n$ 的一个模 $X(x,y)$，并证明它是初等的。假设 dim $\underline{M}$ =(x,y)。我们证明:

(a) 若 M 是一个初等模，则 $x < 2n$；以及 (b) 当 $x+y=n+1$时，模 M 是初等的，当且仅当 M 具有 $X(x,y)$ 的形式。

1. INTRODUCTION

设 k 是一个代数闭域，rep$_k$(K(n)) 表示 $K(n)$ 的有限维表示范畴。我们用 σ : rep$_k$(K(n)) → rep$_k$($K(n)$) 表示 Bernstein-Gelfand-Ponomarev（BGP）反射函子。众所周知，$\sigma^2 = \tau$，其中 τ 是 rep$_k$($K(n)$) 的 Auslander-Reiten 平移（参见 [2]）。给定 $K(n)$ 的路径代数 K$_n$ ，我们用 mod K$_n$ 表示 K$_n$ 的有限维模范畴。由于范畴 rep$_k$($K(n)$) 与 mod K$_n$ 等价，我们通常交替使用“表示”和“模”这两个术语。设 M ∈rep$_k$($K(n)$) 不可分解。若对所有 $t \in \mathbb{Z}$ 都有 $\sigma^t M \neq$ (0)，则称 M 为正则。设 $M \in$ mod K$_n$ 为正则模。若不存在短正合列 (0) → $L \to M \to N \to$ (0)，其中 L、N ∈mod K$_n$ 均为非零正则模，则称模 M 为初等模。

广义克罗内克模的维数向量上存在一个二次型 $q(x,y) = x^2 + y^2 - nxy$。如果维数向量 (x,y) 满足 $q(x,y) < 0$，则称其为正则的。对于广义克罗内克箭图 $K(n)$， $n \ge 4$,



关于其初等模，我们所知甚少。令 R为正则维数向量的集合。通过滥用记号，我们在集合 R 上引入两个映射 σ, δ，其中 $\sigma(x,y)$ =$(nx-y,x)$，以及$\delta(x,y)$ =(y,x)，对于所有 (x,y) ∈R都成立。Claus MichaelRingel给出了初等模的描述（参见 [4]）。现在我们给出初等模的维数向量所满足的一个限制。由于Otto Kerner和Frank Lukas 证明了 K$_n$ 的初等模的维数向量只有有限个(σ)^2-轨道（参见 [3]），因此有可能对其维数向量进行分类。

致谢。作者谨此感谢 Rolf Farnsteiner、DanielBissinger、Hao Chang 和 Jan-Niclas Thiel 与作者讨论本文。

2. PRELIMINARIES

M =(M_1, M_2, ($M(\gamma_i)$)$_{1\le i\le n}$) 上的有限维表示由向量空间 $M_j, j \in$ {1, 2} 以及 k-线性映射 $M(\gamma_i)$ $_{1\le i\le n}$: $M_1 \to M_2$组成，满足 dim$_k$ M =dim$_k$ M_1 +dim$_k$ M_2 有限。两个 $K(n)$ 表示之间的态射 $f : M \to N$ 是一对

(f_1, f_2) k-线性映射 $f_j : M_1 \to M_2 (j \in \{1, 2\})$，且对于每个箭头 $\gamma_i : 1 \to 2$，都存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{M(\gamma_i)} & M_2 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ N_1 & \xrightarrow{N(\gamma_i)} & N_2. \end{array}$$

通常，我们用 $S(i)$ 表示简单表示，用 $P(i)$（分别用 $I(i)$）表示顶点 $i, i \in \{1,2\}$ 处的投射表示（分别表示内射表示）。

在 mod K_n 上有一个称为维数向量的函数

$$\underline{\dim}\colon \operatorname{mod} \mathcal{K}_n \to \mathbb{Z}^2, M \mapsto (\dim_k M_1, \dim_k M_2).$$

如果 $(0) \to L \to M \to N \to (0)$ 是 mod K_n 中的正合列，那么 $\underline{\dim}\, L + \underline{\dim}\, N = \underline{\dim}\, M$。我们用 $< -, - >$ 表示双线性型

$$< -, - >: \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 y_1 + x_2 y_2) - n x_1 y_2.$$

这个双线性型与 Grothendieck 群 $K_0(K_n) \cong \mathbb{Z}^2$ 上的 Euler-Ringel 型一致。因此，我们将相应的二次型记为

$$q : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, x \mapsto < x, x >.$$

定义。若维数向量 (x, y) 满足 $q(x, y) < 0$，则称其为正则。 .

设 σ、σ^- 是 $K_0(K_n) = \mathbb{Z}^2$的 Bernstein-Gelfand-Ponomarev 反射（或 BGP 函子），由 $\sigma(x, y) = (nx - y, x)$ $\sigma^-(x, y) = (y, ny - x)$给出。此外，我们仍用 σ、σ^- 表示 mod K_n 的 BGP 函子（我们取 n-Kronecker 箭图的相反箭图仍为n-Kronecker 箭图）。设 $M \in$ mod K_n 是一个不可分解模。那么

(1) M 被称为先内射，若存在 $t \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\sigma^{-t} M = (0)$。(2) M 被称为先投射，若存在 $t \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\sigma^t M = (0)$。(3)如果一个模不包含作为先投射或先内射的不可分解直和项，则称其为正则。

若 $M \in$ mod K_n 是一个不同于 $S(2)$ 的不可分解模，则 $\underline{\dim}\, \sigma M = \sigma \underline{\dim}\, M$；类似地，若 M 不可分解且不同于 $S(1)$，则有 $\underline{\dim}\, \sigma^- M = \sigma^- \underline{\dim}\, M$。若模 M 是~~初等~~模，则对~~所有~~ $t \in \mathbb{Z}$ [1, VII，模 $\sigma^t M$ 也是初等模。推论 5.7(d)]。

定义。若存在一个初等（先投射或先内射）模 M，使得 $\underline{\dim}\, M = (x, y)$，则称维数向量 (x, y) 为初等（先投射或先内射）维数向量。 ——

现在考虑正则维数向量的集合 R。我们已经看到，σ 将 R 映射到 R。事实上，在 $K_0(K_n)$ 上还存在另一个变换 δ，定义为 $\delta(x, y) = (y, x)$，它也将 R 映射到 R。设 $M \in$ mod K_n。那么 $\delta(\underline{\dim}\, M) = \underline{\dim}\, M^*$，其中 M^* 是 M 的对偶表示，~~即~~ $M^* = (M_1^*, M_2^*, (M^*(\gamma_i))_{1 \le i \le n})$，$M_1^*$ 是 M_2 的 k-对偶，M_2^* 是 M_1 的 k-对偶，映射 $M^*(\gamma_i)$ 是 $M(\gamma_i)$ 的 k-对偶。我们置

$$\mathbf{F} = \{(x, y) \mid \tfrac{2}{n} x \le y \le x\}.$$

引理 2.1. [4,第 2 节：引理] 集合 F 是由 δ 和 σ 生成的群在集合 R 上作用的基本域。

引理2.2. [4, 引理3.1] 假设 $M \in$ 模K_n 是一个正则模，具有一个真非零子模 U，使得维数向量 $\underline{\dim}\, U$ 和 $\underline{\dim}\, M/U$ 都是正则的。那么 M 不是初~~等的~~。 ——

3. Dimension vectors of elementary modules

根据对偶性和引理 2.2，模 $M \in \mathrm{mod}\, K_n$ 是初等的，当且仅当其对偶M^*是初等的。也就是说，如果 $\dim M = (x,y)$，那么(x,y)是初等的，当且仅当(y,x)是初等的。因此，我们只需研究这两个维数向量中的一个。

引理 3.1。 [6, 引理 14。11] 设 $M \in \mathrm{mod}K_n$ 是一个初等模，其维数为 $\dim M = (x,y)$，且 $y \le x \le y+n-2$. 则 $x < n$.

设 V^i 表示域 k 上的 i 维向量空间，$i \in \mathbb{N}$。设 $L(V^j, V^i)$ 是由从 V^j 到 V^i 的所有 k-线性变换组成的线性空间。设 $l(r,j,i) = \dim_k L'$，其中 $L' \subseteq L(V^j, V^i)$ 是满足对所有 $0 \neq v \in L'$ 都有 $\mathrm{rk}\, v = r$ 的最大线性子空间。

定理 3.2。 [7, 定理] 设 $2 \le r \le j \le i$ 为整数。则

$$i - r + 1 \le l(r,j,i) \le i + j - 2r + 1.$$

我们定义二次函数 $f(w) := w^2 - nw + 1 = (w - \frac{n}{2})^2 - \frac{n^2}{4} + 1, w \in k, n \in \mathbb{N}$。由于 w^2的系数为正，对于所有 $a \le b \in \mathbb{R}$，我们有 $\max_{a \le w \le b} f(w) = \max\{f(a)\ f(b)\}$。

设 $(x,y) \in F$ $y \neq n-1$。我们有

$$\begin{aligned} q(x-1, y-(n-1)) &= (x-1)^2 + (y-(n-1))^2 - n(x-1)(y-(n-1)) \\ &= (y-(n-1))^2 \left(\left(\frac{x-1}{y-(n-1)}\right)^2 + 1 - n\frac{x-1}{y-(n-1)}\right) \\ &= (y-(n-1))^2 (t^2 + 1 - nt) \\ &= (y-(n-1))^2 f(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $t = \frac{x-1}{y-(n-1)}$。那么，当且仅当 $f(t) < 0$时， $q(x-1, y-(n-1)) < 0$。

令 Λ_n 为由 $K(n)$的箭头张成的空间。它是一个 n 维向量空间，基为 $\{\gamma_i \mid 1 \le i \le n\}$。令 $M \in$ 模 K_n。对于所有 $m \in M$，我们记 $\gamma_i.m = M(\gamma_i)(m)$。一般而言，我们总是假设 $n \ge 3$。

引理 3.3. 假设 $(x,y) \in F$ 且 $y \ge 2(n-1)$。那么 $(x-1, y-(n-1))$ 是一个正则维数向量。

证明。由于 $y \le x$ 和 $n \ge 3$，我们有 $y-(n-1) \le x-1$. 另一方面，不等式$y \ge 2(n-1)$ 和 $y \ge \frac{2}{n}x$蕴含 $y-(n-1) \ge \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}-1}(x-1)$。这是因为 $\frac{2}{n} > \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}-1}$，且这两条直线 $y_1 = \frac{2}{n}x$和 $y_2 = \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}-1}(x-1) + (n-1)$ 相交于点 $(n(n-1), 2(n-1))$。因此，我们有 $\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}-1}(x-1) \le y-(n-1) \le x-1$且 $y-(n-1) \in [1, \frac{n^{n-1}-1}{n^{n-1}}]$。令 $t = \frac{x-1}{y-(n-1)}$。由于 $f(1) \le f(\frac{n(n-1)-1}{n-1})$, 我们得到

$$\begin{aligned} f(t) = t^2 + 1 - nt \le \max_{1 \le t \le \frac{n(n-1)-1}{n-1}} f(t) &= f\left(\frac{n(n-1)-1}{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{n(n-1)-1}{n-1}\right)^2 + 1 - n\frac{n(n-1)-1}{n-1} \\ &= \left(n - \frac{1}{n-1}\right)^2 + 1 - n^2 + \frac{n}{n-1} \\ &= n^2 - 2 - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} + 1 - n^2 + 1 + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{2-n}{(n-1)^2} < 0. \end{aligned} \tag{2}$$

因此，$(x-1, y-(n-1))$ 是一个正则维数向量。 □

引理 3.4. 设 $M \in \mathrm{mod}K_n$ 是一个模，满足 dim $M = (x, y)$ 且 $n-1 \le y \le x+n-2$。那么 M 有一个维数向量为 $(1, n-1)$ 的子模 U。

证明。实际上，我们可以沿用 Ringel 的论证（参见 [4,引理3.2]）来证明。

□

引理3.5。 假设 $(x, y) \in \mathrm{F}$ 是一个基本维数向量。那么 $y < 2(n-1)$。

证明。由引理3.1，我们只需考虑以下情形： $x-y \ge n-1$。假设存在一个初等模 M，其维数为 $M = (y, x)$，使得 $y \ge 2(n-1)$ 且 $x-y \ge n-1$，$(x, y) \in \mathrm{F}$。那么我们有

$$\begin{cases} y \ge 2(n-1), \\ x-y \ge n-1, \\ y \ge \frac{2}{n}x. \end{cases} \tag{3}$$

这意味着

$$\begin{cases} y \ge 2(n-1), \\ y+n-1 \le x \le \frac{n}{2}y, \\ x \ge y+n-1 \ge 3(n-1). \end{cases} \tag{4}$$

它遵循 $y = y + (n-1) - (n-1) \le x - (n-1) \le \frac{n}{2}y - (n-1)$。此外，我们有

$$\frac{y}{y-1} \le \frac{x-(n-1)}{y-1} \le \frac{\frac{n}{2}y-(n-1)}{y-1}.$$

由于 $f(\frac{y}{y-1}) = -\frac{(n-2)y^2-(n-2)y-1}{(y-1)_2} < 0$ 且 $f(\frac{\frac{n}{2}y-(n-1)}{y-1}) = f(\frac{n}{2} - \frac{n-2}{2y-2}) = (\frac{n-2}{2y-2})^2 - \frac{n^2}{4} + 1 < 0$，维数向量 $(y-1, x-(n-1))$ 是正则的。现在我们考虑 $(y-2, x-x')$ $n+1 \le x' \le 2n-1$。注意， $y+n-1-x' \le x-x' \le \frac{n}{2}y-x'$ 且 $x'-(n-1) \le n$。然后

$$\frac{y+(n-1)-(2n-1)}{y-2} = \frac{y-n}{y-2} \le \frac{y+n-1-x'}{y-2} \le \frac{x-x'}{y-2} \le \frac{\frac{n}{2}y-x'}{y-2} \le \frac{\frac{n}{2}y-(n+1)}{y-2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{y-2}.$$

我们有 $\frac{y-n}{y-2} = 1 - \frac{n-2}{y-2} \ge 1 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{1}{2}$，且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{5-2n}{4} < 0, n \ge 3$。由于 $\frac{n}{2} - \frac{y-n}{y-2} \le \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$，我们有 $f(\frac{y-n}{y-2}) \le f(\frac{n}{2}) < 0$。另一方面， $f(\frac{n}{2} - \frac{1}{y-2}) = (\frac{1}{y-2})^2 - \frac{n^2}{4} + 1 < 0, y \ge 2(n-1)$。因此，$(y-2, x-x')$ 是正则的。

令 $U \subseteq M$ 为由任意元素 $0 \ne m \in M_1$ 生成的子模。则有 dim $U = (1, n)$。否则，假设 dim $U = (1, x_U)$ 且 $x_U \le n-1$。由于 M 不可分解，我们得到 $x_U \ge 1$，因为 $x_U = 0$ 表明 M 有 $S(1)$ 作为直和项，且 M 可分解。现在令 $U'' = U \oplus U'$，其中 U' 是维数向量为 $(0, n-1-x_U)$ 的半单模。可见 $U'' \subseteq M$ 是 M 的子模，且 dim $U'' = (1, n-1)$。由于 $(y-1, x-(n-1))$ 是正则的，且 dim U'' 是正则的，因此 M 不是初等的，这与引理 2.2 矛盾。

我们断言，对于任意两个非零且线性无关的元素 m_1、$m_2 \in M_1$，它们生成一个子模 $E \subseteq M$，其维数向量为 $(2, x_E)$，并且 $x_E \ge n+1$。否则，假设存在非线性元素 m_1、$m_2 \in M_1$，使得由 m_1、m_2 生成的子模 E 的维数向量为 $(2, x_{\tilde{E}})$，并且 $x_{\tilde{E}} \le n$。我们已经知道，对于任意维数为 ${}_kU_1 \ne 0$的子模 $U \subseteq M$，都有维数 ${}_kU_2 \ge n$。这意味着 $x_{\tilde{E}} = n$。现在，引理 3.4给出了一个维数向量为 $(1, n-1)$ 的子模 $E' \subseteq E \subseteq M$，矛盾。因此 $x_E > n$。我们已经看到，对于所有 $n+1 \le x' < 2n$，$(y-2, x-x')$ 都是正则的。于是 $x_E = 2n$。注意， m_1、m_2 是 M_1的随机元素。令$\{e_1, \cdots, e_y\}$ 为 M_1的一个基。令 U^i为由单个元素 e_i生成的子模，$i = 1, \cdots, y$，其中 $y \ge 2(n-1) \ge 4$。与子模 E 比较，我们有

$U^i \cap U^j = (0)$ 对任意 $i \neq j \in \{1, \cdots, y\}$。然后我们可以得到$x \geq ny > \frac{n}{2}y$，这与(4)矛盾。最后，我们可以看到，不存在这样的初等维数 (y, x)，使得$y \geq 2(n-1)$。因此 $y < 2(n-1)$。

□

引理3.6. 假设 $(x, y) \in \mathrm{F}$ 是一个基本维数向量。那么 $x < 2n$。

证明。由引理3.1可知，我们只需证明当 $x - y \geq n - 1$ 时，(x, y) 不是初等的，也就是说， $y \leq x - (n-1)$，其中 $x \geq 2n$。根据引理3.5，我们知道 $\frac{2}{n}x \leq y < 2(n-1)$。现在考虑维数向量 (y, x)。假设存在一个初等模M，其维数为 $M = (y, x)$，其中 $4 = \frac{2}{2n} \times 2n \leq y \leq x - (n-1)$ $x \geq 2n$。于是得到

$$\begin{cases} 2n \leq x \leq \frac{n}{2}y, \\ \frac{2}{n}x \leq y \leq x - (n-1), \\ y < 2(n-1). \end{cases} \tag{5}$$

于是 $2n \leq x < n(n-1)$，并且

$$\begin{cases} n + 1 \leq x - (n-1) < (n-1)^2, \\ \frac{2}{n}x - 1 \leq y - 1, \\ y < 2(n-1), \\ y \leq x - (n-1). \end{cases} \tag{6}$$

我们有

$$\frac{y}{y-1} \leq \frac{x-(n-1)}{y-1} = t \leq \frac{x-(n-1)}{\frac{2}{n}x-1} = \frac{n}{2}\left(\frac{x-(n-1)}{x-\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n-2}{2x-n}\right) < \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n-2}{2n(n-1)-n}\right) = \frac{n}{2} - \frac{n-2}{4n-6}.$$

注意， $f\left(\frac{y}{y-1}\right) = -\frac{(n-2)y^2 - (n-2)y - 1}{(y-1)_2} < 0, 4 \leq y < 2(n-1)$，且 $f\left(\frac{n}{2} - \frac{n-2}{4n-6}\right) = \left(\frac{n-2}{4n-6}\right)$ $^2 - \frac{n^2}{4} + 1 < 1 - \frac{n^2}{4} + 1 < 0, n \geq 4$。于是 $f(t) < 0, t \in [\frac{y}{y-1}, \frac{n}{2} - \frac{n-2}{4n-6})$。因此 $(y-1, x-(n-1))$ 是正则的。

设 $n + 1 \leq x' \leq 2n - 1 < x$。考虑 $(y-2, x-x')$。于是

$$\frac{1}{n-1} = 1 - \frac{n-2}{2n-(n+1)} \leq 1 - \frac{n-2}{x-(n+1)} = \frac{x-(2n-1)}{x-(n-1)-2} \leq \frac{x-(2n-1)}{y-2} \leq \frac{x-x'}{y-2} \leq \frac{x-(n+1)}{y-2} \leq \frac{x-(n+1)}{\frac{n}{2}x-2}.$$

此外， $\frac{x-(n+1)}{\frac{n}{2}x-2} = \frac{n}{2}\left(\frac{x-(n+1)}{x-n}\right) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{x-n}\right) \leq \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(n-2)$ $2n \leq x < n(n-1)$。另一方面， $f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{2-n}{(n-1)_2} < 0$ 以及 $f\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}(n-2)\right) = \left(\frac{1}{2}(n-2)\right)$ $^2 - \frac{n^2}{4} + 1 < 0, n \geq 4$。因此 $(y-2, x-x')$ 是正则的。

令 $U \subseteq M$为一个子模，且 $\dim U = (y_U, x_U)$。当 $y_U = 1$时，我们得到 $x_U = n$，因为 $(y-1, x-(n-1))$ 是正则的。否则，设 $x_U \leq n - 1$。我们写作 $W = U \oplus U''$，其中U'' 是一个半单模，且 $\dim U'' = (0, n-1-x_U)$。那么 $\dim W = (1, n-1)$ 是正则的，且 $\dim M/W = (y-1, x-(n-1))$ 是正则的。因此，根据引理 2.2， M不是初等模。设 $y_U = 2$。我们断言，对于任意两个非零线性无关的元素 $m_1, m_2 \in U_1$，它们生成一个子模 $U' \subseteq U$，满足 $\dim U' = (2, x_{U'})$，且 $x_{U'} \geq n+1$。否则，设存在元素 $m_1, m_2 \in U_1$，使得由 m_1, m_2 生成的子模 U 的维数向量为 $(2, x_{\tilde{U}})$，且 $x_{\tilde{U}} \leq n$。我们知道，对于任意维数为k $U_1 \neq 0$的子模 $U \subseteq M$，都有 $\dim_k U_2 \geq n$。因此 $x_{\tilde{U}} = n$。现在，引理 3.4 给出了一个维数向量为 $(1, n-1)$ 的子模 $U \subseteq U \subseteq M$，矛盾。我们已经看到，当 $n+1 \leq x_U < x$时，$(y-2, x-x_U)$ 是正则的。此外，当 $n + 1 \leq x_U < 2n$时，$(2, x_U)$ 是正则的。因此 $x_U = 2n$。这表明，任意两个非零线性无关的元素 m_1, $m_2 \in M_1$ 都生成一个子模 $U' \subseteq M$，满足 $\dim U' = (2, 2n)$。设 $\{e_1, \cdots, e_y\}$ 是 M_1 的一组基。令 U^i 为由单个元素 $e_i, i \in \{1, \cdots, y\}$ 生成的子模。那么 $U^i \cap U^j = (0)$。因此 $x \geq ny > \frac{n}{2}y$，这与 (5) 矛盾。因此，这样的初等模 M 不存在，从而得到 $x < 2n$。

设当 $x < 2n$时，我们可以找到一个初等模 M，满足 $\dim M = (y, x)$，其中 $(x, y) \in \mathrm{F}$。若令 U 为由两个非零线性无关的元素 $m_1, m_2 \in M_1$ 生成的 M 的子模，则根据上面的讨论，有 $\dim U = (2, x)$。

□

推论 3.7. 设 $(x, y) \in \mathrm{F}$， $n < x < 2n$。设 $M \in \mathrm{mod}\ \mathrm{K}_n$ 是一个维数向量为(y, x) 的模。那么，当且仅当以下两个条件成立时， M 是一个初等模。

(a)任意非零元素 $m_1 \in M_1$ 生成一个维数向量为$(1, n)$的子模 U'，即 $U' \cong P(1)$。（b）任意两个非零且线性无关的元素 m_1、 $m_2 \in M_1$ 生成一个U''维数向量为 $(2, x)$ 的子模。

证明。假设 M 是一个初等模。根据引理 3.6 的证明，我们得到 (a)、(b)。

假设 M_1 满足条件（a）、（b）。我们首先证明 M 是不可分解的。否则，假设 $M = M' \oplus M''$。由于 $n < x < 2n$，存在某个子模$X \in \{M', M''\}$，使得对于任意 $0 \neq m \in X_1$，它生成一个维数向量为 $(1, x_U)$ 且具有 $x_U < n$ 的子模 U，这与（a）矛盾。由于（x, y） $\in \mathrm{F}$ 且 $\dim M = (y, x)$，$y \geq \frac{2}{n}x > 2$，模 M 是正则的。最后，根据 [4,附录1. 命题]， M 是初等的。

□

引理 3.8. 假设 $(x, y) \in \mathrm{F}$ 是一个基本维数向量，其中 $n < x < 2n$。那么 $y^2 - y + 2x \leq 4n + 2$。

证明. 假设 M 是一个初等模，且 $\dim M = (y, x) 2 = \frac{2}{n} \times n < y \leq x$。令$I = \{m_1, \cdots, m_y\}$ 为 M_1 的一组基，并令 $I' = \{m'_1, \cdots, m'_x\}$ 为 M_2 的一组基。令$m_i, m_j \in I, i \neq j$。对于每个 $\gamma_i \in \Lambda_n$，存在一些 $a^j_{is} \in k$ 使得

$$\gamma_i.m_j = (a^j_{i1}, \cdots, a^j_{ix}),$$

$1 \leq i \leq n, 1 \leq s \leq x, j \in \{1, \cdots, y\}$。我们定义一个矩阵:

$$A_{(i,j)} := \begin{bmatrix} \gamma_1.m_i \\ \vdots \\ \gamma_n.m_i \\ \gamma_1.m_j \\ \vdots \\ \gamma_n.m_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^i_{11} & \cdots & a^i_{1x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^i_{n1} & \cdots & a^i_{nx} \\ a^j_{11} & \cdots & a^j_{1x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^j_{n1} & \cdots & a^j_{nx} \end{bmatrix}.$$

根据推论 3.7，这表明矩阵 $A_{(i,j)}$ 的秩与两个元素 m_i、 m_j 的选取无关。因此，$\mathrm{rk}\ A_{(i,j)} \equiv x$。另一方面，矩阵 $A_{(i,j)}$ 也可视为从向量空间 V^x 到向量空间 V^{2n} 的线性变换。由于集合 $\{(m_i, m_j) \mid m_i, m_j \in I, i \neq j\}$ 的基数为 $\binom{y}{2} = {}^{y}_{(y-1)\,2}$，由所有此类矩阵 $\{A_{(i,j)} \mid m_i \neq m_j \in I\}$ 生成的线性空间 W 的维数为 ${}^{y}_{(y-1)\ 2}$。否则，假设 $\dim_k W < {}^{y}_{(y-1)\,2}$。那么存在某些 $b_{i,j} \in k \setminus \{0\}$，使得 $\sum_{i,j} b_{i,j} A_{(i,j)} = 0$。也就是说，

$$\sum_{i,j} b_{i,j} A_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \gamma_1.(\sum b_{i,j} m_i) \\ \vdots \\ \gamma_n.(\sum b_{i,j} m_i) \\ \gamma_1.(\sum b_{i,j} m_j) \\ \vdots \\ \gamma_n.(\sum b_{i,j} m_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

那么我们可以找到一个元素$0 \neq m = \sum b_{i,j}m_i$ 使得 $\gamma_i.m = 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n$均成立，这与推论 3.7(a) 矛盾。

最后，我们有 $2n-x+1 \leq l(x,x,2n) \leq 2n+x-2x+1 = 2n-x+1$，也就是说，$l(x,x,2n) = 2n+1-x$。根据定理 3.2，我们知道 $y_{(y-1)_2} \leq 2n+1-x$，这意味着 $y^2-y+2x \leq 4n+2$。□

引理3.9。设 $M \in$模 K_n 具有维数向量 (x,y) $x \geq 1$。假设任意非零元素 $m \in M_1$ 生成一个维数向量为 $(1,y)$ 的子模 U。则 M 是不可分解的，并且 $y \leq n$。

证明。当 $x = 1$ 时，结论成立。现在设 $x > 1$。假设 M 是可分解的。我们写作 $M = M' \oplus M''$。设 $\dim M' = (x', y')$。任意 $0 \neq m' \in M'_1$ 都生成一个维数向量为 $(1,y)$ 的子模 U'。我们有 $y' = y$。因此 $x' < x$，且 $\dim M'' = (x-x', 0)$。这是不可能的，因为元素 $0 \neq m'' \in M''_1$ 也生成一个维数向量为 $(1,y)$ 的子模 U''。由于 $\dim_k \Lambda_n = n$，我们有 $y \leq n$。□

引理 3.10. 设 $M \in \mathrm{mod}\ \mathrm{K}_n$ 是一个模，其维数向量 $\dim M = (x,y) \in \mathrm{F}$，且 $x \leq n-1$.。设 $0 \neq m \in M_1$ 是任意元素。那么，当且仅当由 m 生成的子模 U 的维数向量为 $(1,y)$ 时，M 是初等的。

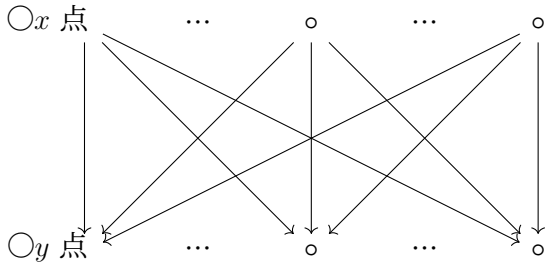
证明。假设对任意 $0 \neq m \in M_1$，都有 $\dim U = (1,y)$。那么，根据引理 3.5]，U 是一个正则模。由引理3.9 和 $1 \leq y \leq x \leq n-1$，模 M 是正则不可分解模。设 U' 是 M 的一个真子模，且 $\dim U' = (x',y')$。那么 $x' \geq 1$。注意，$x' = 0$ 表明 M 是可分解的。因此 $y' = y$，且 $\dim U'$ 是正则的。此外，$\dim M/U' = (x-x', 0)$ 是先内射的。因此，根据 [4, 附录1. 命题]，M 是初等的。

反之，设 M 是一个初等模。假设存在某个 $0 \neq m \in M_1$生成一个子模 U，其维数为 $U = (1,y')$，且 $1 \leq y' < y$.。注意，$y' = 0$表示 U 同构于单模 $S(1)$，且 M 是可分解的。那么 U 是正则的。现在考虑因子模 M/U及其维数向量 $(x-1, y-y')$。我们有

$$\begin{aligned} q(x-1, y-y') &= (x-1)^2 + (y-y')^2 - n(x-1)(y-y') \\ &= (x-1)\big[(x-1) - n(y-y')\big] + (y-y')^2 < 0. \end{aligned} \tag{7}$$

由于当 $y \leq x \leq n-1$时，$x-1 \geq y-y'$ 和 $n(y-y') - (x-1) > y-y'$，维数向量 $(x-1, y-y')$ 是正则的，这与引理 2.2 矛盾。□

设 $(x,y) \in \mathrm{F}$，其中 $x < n$。假设 $M \in$模 K_n是一个维数向量为 (x,y) 的初等模。引理 3.10 告诉我们，M 可以看作箭图



其中，上排的每个点都有 y 个箭头。对于初等模 M，我们只需在每个点放置一维向量空间 k。稍后我们将给出精确的构造。

令 $M \in \mathrm{mod}\mathrm{K}_n$ 为一个模。我们引入一个箭头 γ_{n+1}，并对每个$m \in M$定义 $\gamma_{n+1}.m := 0$。令 $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \oplus k\gamma_{n+1}$，其中 $k\gamma_{n+1}$ 是由箭头 γ_{n+1} 生成的一维向量空间。因此，我们以这种方式得到一个嵌入 $\iota : \mathrm{mod}\ \mathrm{K}_n \to \mathrm{mod}\ \mathrm{K}_{n+1}$。然后 M 可以

可视为 mod K_{n+1} 的一个对象。下文中，当我们说$M \in \text{mod } K_n \subseteq \text{mod } K_{n+1}$时，总是指 $\gamma_{n+1}.M = 0$。

令F为K_n的基本域，并令$(x,y) \in F$，且 $x < n$。我们有 $\frac{2}{n}x \le y \le x$。因此 $\frac{2}{n+1}x < \frac{2}{n}x \le y \le x$。那么 (x,y) 位于 K_{n+1} 的基本域中。

推论3.11. 设$(x,y) \in F$，具有 $x < n$。假设(x,y)对 K_n是初等的。那么 (x,y) 对 K_{n+1} 是初等的。

证明。令 $M \in \text{mod } K_n$ 为一个维数向量为 (x,y) 的初等模。则 M通过嵌入 ι是 mod K_{n+1} 的一个模。我们要证明 M 对于 K_{n+1} 也为初等模。令 U 为 mod K_{n+1} 中 M 的一个子模。根据引理 3.10，任意 $0 \neq m_1 \in M_1$生成 mod K_n 中一个维数向量为 $(1,y)$ 的子模，这对于 K_{n+1} 也成立。于是，对于 K_{n+1}，$\dim U = (x_U, y)$，其中 $x_U \ge 1$。那么 M/U是维数向量为 $(x - x_U, 0)$ 的先内射模。因此，由引理 3.10 可知，M对于 K_{n+1} 也为初等模。

□

设$(x,y) \in F$，且满足 $x < n$。设 $M \in \text{mod } K_n$是一个初等模，其 $\dim M = (x,y)$。设 A是一个 k上的矩阵。我们用 A^t表示其转置。设 $\{m_1, \cdots, m_x\}$是M_1的一组基。我们定义 $A_i := \begin{bmatrix} \gamma_1.m_i & \cdots & \gamma_n.m_i \end{bmatrix}^t, \gamma_i \in \Lambda_n$。引理 3.10 告诉我们 $\text{rk } A_i = y$。我们定义 $V_M := \langle A_i \mid 1 \le i \le x \rangle$，也就是说，线性空间 V_M 由所有这样的 A_i 在 k上张成。于是我们有：

引理3.12.设$(x,y) \in F$，且 $x < n$。假设 $M \in \text{mod} K_n$是一个初等模，其维数为$\dim M = (x,y)$。那么 $\dim_k V_M = x$。

证明。假设$\dim_k V_M < x$。那么存在某些 $b_i \in k \setminus \{0\}$ 使得 $\sum_{i=1}^{x} b_i A_i = 0$。这意味着

$$\sum_{i=1}^{x} b_i A_i = \begin{bmatrix} \gamma_1.(\sum_{i=1}^{x} b_i m_i) \\ \vdots \\ \gamma_x.(\sum_{i=1}^{x} b_i m_i) \\ \vdots \\ \gamma_n.(\sum_{i=1}^{x} b_i m_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因此，我们可以找到一个元素 $0 \neq m' = \sum_{i=1}^{x} b_i m_i \in M_1$，使得对于所有 $j \in \Lambda_n$ 都有 $\gamma_j.m' = 0$。根据引理 3.10，这种情况不可能发生。

□

引理 3.13. 假设 $(x,y) \in F$ 是一个基本维数向量，且满足 $x < n$。那么$x + y \le n + 1$。

证明。假设 $M \in \text{mod} K_n$ 是一个初等模，且 $\dim M = (x,y)$。现在考虑线性空间 V_M。注意到，A_i 可以看作从向量空间 V^y 到向量空间 V^n 的线性变换，并且 $\text{rk } A_i \equiv y$, $A_i \in V_M$。另一方面，根据定理 3.2，$n - y + 1 \le l(y,y,n) \le n + y - 2y + 1 = n - y + 1$。因此 $\dim_k V_M = x \le n - y + 1$，即，$x + y \le n + 1$。

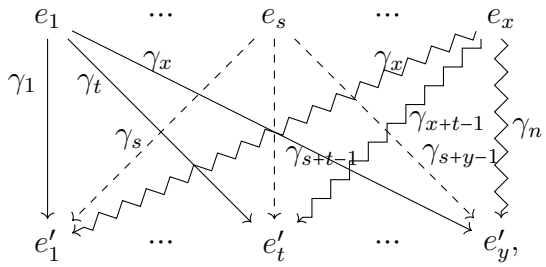
□

4. Construction of elementary modules

令 $(x,y) \in F$，满足 $x + y = n + 1$。我们构造一个模 $X = X(x,y) = (X_1, X_2, X(\gamma_i)_{1 \le i \le n})$，其上的 K_n：令$\{e_1, \cdots, e_x\}$ 为 X_1的标准基，即在每个 e_i 中，第 i 个坐标为 1，其他坐标均为 0。令$\{e'_1, \cdots, e'_y\}$为 X_2 的标准基。我们使用 $[s;\ a_1、a_2、\cdots、a_y]$来表示在 $X(x,y)$中将 e_s 映射到 e'_i 的箭头 γ_{a_i}，并称其为 e_s的箭基，其中 $1 \le s \le x$、$1 \le i \le y$、$1 \le a_i \le n$、$\gamma_{a_i} \in \Lambda_n$。对于 e_1，我们定义其箭基为 $[1;\ 1、2、\cdots、y]$。对于第二个 e_2，

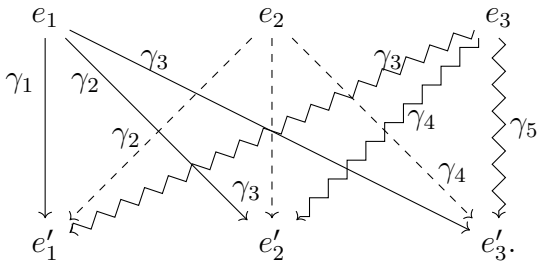
我们从 2 开始到 $y+1$，也就是说， e_2 的箭基为 $[2;\ 2、3、\cdots、\ y+1]$。对于 e_3，我们重复这一过程，从 3 开始到 $y+2$。我们继续这样做。最后，我们可以得到 X（x、y）的箭基：$[1;\ 1、2、\cdots、\ y]$、$[2;\ 2、3、\cdots、\ y+1]$、$\cdots$、$[s;\ s、\ s+1、\cdots、\ y+s-1]$、$\cdots$、$[x;\ x、\ x+1、\cdots、\ n]$、$1 \le s \le x.$，也就是说，

$X(x,y)$ =



设 $e'_j = 0$ 当 $j \notin \{1\cdots, y\}$。那么 $\gamma_i.e_j = e'_{i-j+1}$、 $i \in \Lambda_n$、 $j \in \{1, \cdots, x\}$。现在我们给出一个例。

例。设 $X(3,3) \in$ 模K_5。那么我们可以得到其箭基： $[1;\ 1,2,3], [2;\ 2,3,4], [3;\ 3,4,5]$。 $X(3,3)$ 的结构如下



Then $X(3,3) = k^3 \overset{\overset{X(\gamma_1)}{\curvearrowright}}{\underset{\underset{X(\gamma_5)}{\curvearrowright}}{\vdots}} k^3$, where $X(\gamma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(\gamma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(\gamma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$X(\gamma_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X(\gamma_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

引理 4.1. 模块 $X(x,y)$ 是初等的。

证明。令 $0 \neq m = (a_1, \cdots, a_x) \in X_1$。那么我们可以得到一个矩阵

$$A_m = \begin{bmatrix} \gamma_1.m \\ \vdots \\ \gamma_x.m \\ \vdots \\ \gamma_n.m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_y & a_{y-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_{y+1} & a_y & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_x & a_{x-1} & \cdots & a_{x-y+2} & a_{x-y+1} \\ 0 & a_x & \cdots & a_{x-y+3} & a_{x-y+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_x & a_{x-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_x \end{bmatrix}.$$

由于 A_m 是一个 $n \times y$ 矩阵，因此 $\operatorname{rk} A_m \leq y$。令 $j = \min\{i \mid a_i \neq 0, 1 \leq i \leq x\}$。我们得到一个 $y \times y$ 矩阵 $A_j = \begin{bmatrix} a_{j+1} & a_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j+y-1} & a_{j+y-2} & \cdots & a_j \end{bmatrix}$。于是 $\operatorname{rk} A_j = y$。此外，我们有一个分拆

$$A_m = \begin{bmatrix} A_j \\ A_0 \end{bmatrix},$$

其中 $A_0 = \begin{bmatrix} a_{j+y} & a_{j+y-1} & \cdots & a_{j+1} \\ a_{j+y+1} & a_{j+1} & \cdots & a_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_x \end{bmatrix}$。那么 $\operatorname{rk} A_m \geq y$ 由 [8, 8给出。2]。因此，我们得到

$$\operatorname{rk} A_m \equiv y。$$

根据引理 3.10， $X(x, y)$ 是初等的。

□

定理 4.2。设 $(x, y) \in \mathsf{F}$ 且满足 $x + y = n + 1$。那么，模 $M \in \mathrm{mod}K_n$ 中维数向量为 (x, y) 的模是初等的，当且仅当 M 具有 $X(x, y)$ 的形式。

证明。根据引理 4.1，我们已经知道 $X(x, y)$ 是初等的。现在设 $M \in \mathrm{mod}K_n$ 是一个维数向量为 (x, y) 的初等模。根据引理 3.12，我们得到 $\dim_k V_M = x$。根据定理 3.2，我们有

$$n - y + 1 \leq l(y, y, n) \leq n + y - 2y + 1 = n + 1 - y.$$

也就是说， $x = n + 1 - y \leq l(y, y, n) = n + 1 - y$，这意味着 $x = l(y, y, n)$。根据引理 4.1，模 $X(x, y)$ 也可以给出一个线性空间 V_X satisfying $\dim_k V_X = x$ and $\operatorname{rk} v = y$ for all $0 \neq v \in V_X$。于是我们有 $V_M \cong V_X$。假设 $\{A_1, \cdots, A_x\}$ 和 $\{B_1, \cdots, B_x\}$ 分别是线性空间 V_X 和 V_M 的两组基。那么存在一个可逆矩阵 T，使得

$$(B_1, \cdots, B_x)^t = (A_1, \cdots, A_x)T, \tag{8}$$

现在我们重构一个新模 $X' = X'(x, y)$，使得线性空间 $V_{X'}$ 的基 $\{A'_1, \cdots, A'_x\}$ 满足 $(A'_1, \cdots, A'_x)^t = (A_1, \cdots, A_x)T$。根据引理 3.10， $X'(x, y)$ 是初等的。然后我们可以看到， $X'(x, y) \cong M$。

□

注记。遗憾的是，当 $n < x < 2n$ 时，我们无法为维数向量 $(x, y) \in \mathsf{F}$ 给出类似的结果。构造具有这样的维数向量的初等模仍然是一个问题。

References

[1] I. Assem、D.Simson和 A. Skowro´nski，《结合代数表示论基础》I：表示论技巧，伦敦数学会学生教材，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[2] PeterGabriel，表示论I：Auslander-Reiten序列与有限表示代数，《数学讲义》，第831卷，施普林格，1980年。[3] Otto Kerner和 Lukas Frank，初等模，《数学杂志》223（1996年），421–434。[4]ClausMichael Ringel，初等3–克罗内克表示（2016年），https://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/opus/elementary.pdf。[5] Claus Michael Ringel，K-种与双模的表示，《代数杂志》41（1976年），第2期。[6] DanielBissinger，正则树的表示与广义克罗-内克箭图的AR-分支的不变量（2018年），https://macau.uni-kiel.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dissertation_derivate

[7] R Westwick，《固定秩矩阵空间》，《线性与多重线性代数》20（1987年），第2期，171–174页。

_00007

广义Kronecker箭图初等模的向量 xi[8] George Matsaglia 和 George P. H. Styan, 《矩阵秩的等式与不等式》, 《线性与多重线性代数》2（1974）, 第3期, 269-292。
SUSTech International Center For Mathematics, Southern University of Science and Technology, shenzhen 518055, China电子邮箱：hbecun@foxmail.com