arXiv:2304.04189v1 [math.FA] 9 Apr 2023

网的对角原理

Youssef Azouzi

代数、拓扑学、算术与阶研究实验室，数学系，突尼斯数学、物理与自然科学学院，突尼斯埃尔马纳尔大学，2092—埃尔马纳尔，突尼斯

摘要

在我们的工作中，我们为康托尔对角论证针对网的一个推广版本提供了构造性证明。这一结果将这一著名技巧扩展到序列之外，使其能够应用于更广泛的情境。这一结果在多个领域具有重要的潜在应用，我们在本文中展示了其中若干例子。其中一个应用是解决 Kandi´c、Marabeh 和 Troitsky 提出的一个此前未解决的问题。具体而言，我们证明，从巴拿赫空间到巴拿赫格的无界范数紧算子集合是闭的。

1 引言

本文的主要目的是给出对角过程的“网版本”。此前尚未有人注意到这一原理，它使得若干从序列推广到网的结果成为可能。值得强调的是，我们的证明是构造性的，并对所需的子网给出了具体描述。文中还介绍了若干应用，以展示这一方法的实际效用。具体而言，我们证明了从巴拿赫空间 X 到巴拿赫格 E 的无界范数序列紧算子集在范数下是闭的，从而对 Kandi´c、Marabeh 和 Troitsky [2]于 2017 年提出的一个开放问题给出了肯定回答。第二个应用涉及 [1] 中定义的序紧算子，并证明了这类算子也有类似结果。

对角过程如下：设我们从某个空间 X中的一个序列$x = (x_n)$开始。从中抽取一个子序列 $x^1 = \left(x_{\varphi_1(n)}\right)$，再从后者中抽取第二个子序列 $x^2 = \left(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}\right)$，依此类推。在第 k^{th} 步，我们得到一个序列 $\left(x_{\varphi_1 o \ldots . o \varphi_k(n)}\right)$，它是前一个序列的子序列。此时的关键是考虑“对角”序列 $y = \left(x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)}\right)$。它具有一项优良性质：舍弃其中若干个初始项后，就可以将其视为每个序列 x^k. 的子序列。具体而言，(y_n) 是所有序列 x^k、 $k = 1$、2、.....的一个共有最终子序列。因此，若每个序列 x^k 都具有某种性质 $(\mathcal{P}_k)$，且该性质在转为最终子序列时得以保留，那么 (y_n) 就满足所有这些性质。这个想法可以用恰当的方式表述如下：

定理 1 假设我们有某个空间 X 中的一个序列 (x_n)，以及一个性质序列 $(\mathcal{P}_k)$。我们假设以下条件成立

(i) 每个性质 $(\mathcal{P}_k)$ 在转至最终子序列后仍然成立。(ii) 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，以及 (x_n) 的每个子序列 (y_n)，都存在一个进一步的子序列 $\left(y_{\varphi(n)}\right)$，满足性质 $(\mathcal{P}_k)$。在这种情况下，初始序列 (x_n) 存在一个子序列满足所有性质 $(\mathcal{P}_k)$。

若 (y_n) 的一个尾部是 (x_n) 的子序列，则称 (y_n) 是 (x_n) 的一个最终子序列。

本文的主要目的是建立这一原理的“网版本”，并随后给出一些应用。

2 预备知识

令 X 为任意非空集。 X 中的一个网是一个映射 $x : A \longrightarrow X$，记作 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$，或简记为 (x_α)，其中 A 是一个有向集。后者意味着在 A 上存在一个二元关系 $\leq$，满足以下三个条件：

(i) 自反性： $\alpha \leq \alpha$ 对于每个 $\alpha \in A$.

(ii) 传递性： $\alpha \leq \beta$ 和 $\beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha \leq \gamma$.
(iii) 向上有向：对于每个 α、$\beta \in A$，存在 $\gamma \in A$，使得 $\alpha \leq \gamma$ 且 $\beta \leq \gamma$.

我们也写作 $\beta \geq \alpha$ 而不是 $\alpha \leq \beta$. 我们回顾一下，如果 X 是一个拓扑空间，并且$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 X 中的一个网，那么$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 收敛到 x，如果对于 x 的每个邻域 V，都存在 $\alpha_0 \in A$，使得对于每个 $\alpha \geq \alpha_0$.都有 $x_\alpha \in V$我们在本文中关注一些非拓扑收敛。设L 是一个向量格，如果存在另一个网 $(y_\beta)_{\beta \in B}$，使得 $y_\beta \downarrow 0$，并且对于每个 $\beta \in B$，存在 $\alpha_\beta \in A$，使得对于所有 $\alpha \geq \alpha_0$. 都有 $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$，则称网 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 序收敛到 x。如果对于每个 $u \in L^+$， L的正锥中的网 $|x_\alpha - x| \wedge u$ 序收敛到 0，则称网 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 无界序收敛到 x 。这种收敛很有趣，因为对于 L^p，它对序列而言与几乎处处收敛一致；而对于 ℓ^p，它与逐点收敛一致。另一种无界收敛是无界范数收敛，例如在 [2] 和 [3]中进行了研究。回顾一下，如果 X 是一个巴拿赫格，则称网(x_α) 范数无界收敛到 x，并记作 $x_\alpha \xrightarrow{\text{un}} x$，如果对于每个 $u \in X^+$.， $|x_\alpha - x| \wedge u$ 范数收敛到零。在 $L^p(\mu)$ 中，当且仅当 $f_n \longrightarrow f$ 依测度收敛时，有 $f_n \xrightarrow{\text{un}} f$。

我们还需要以下定义。

定义2 如果存在 β_0，使得$(y_\beta)_{\beta \geq \beta_0}$ 是 (x_α) 的子网，我们称 (y_β) 是 (x_α) 的最终子网（或最终是 (x_α) 的子网）。

3 网的对角过程

对角论证是一种强大的技术，通常用于证明：如果映射序列（记为 (f_n)）满足给定性质（$\mathcal{P}$）并收敛到映射 f，那么 f 也具有相同的性质。这一方法的一个典型应用是证明，在巴拿赫空间 X 上定义的紧算子集合是 $L(X)$ 的闭子空间； $L(X)$ 是从 X 到其自身的所有有界算子所构成的空间。

有趣的是，文献中常常指出，在某些情况下，针对序列的对角论证能够为问题的肯定解提供构造性证明。然而，当每个映射 f_n 都满足某种与网有关的性质（$*$）时，问题就更难解决了，因为目前还没有适用于网的等效对角过程。

为说明这一点，值得举出近期论文中的两个开放问题作为例子：一篇由 Kandi´c、¨ Marabeh 和 Troitsky 撰写 [2]，另一篇由 Aydın、Emelyanov、Erkur¸sun Ozcan 和 Marabeh 撰写 [1]。

一般而言，性质$(\mathcal{P}_k)$与收敛密切相关。因此，下面这个作为定理 1 的推论得出的情形，可能尤其值得关注。

定理3 设(E_k)是一个收敛空间的序列（如 *[6]* 中所述），且$\infty(x_n)$是乘积空间 $P = \prod E_k.$ 中的一个序列。我们假设，对于$_{k=1}(x_n)$的每个子序列（y_n）以及每个整数 k，存在一个子序列$\left(y_{\varphi(n)}\right)$，使得 $y_{\varphi(n)}(k)$在 $E_k.$ 中收敛。那么存在 (x_n) 的一个子序列（z_n），使得

$$z_n\,(k)\ \ converges\ in\ E_k\ \ for\ k = 1, 2, ...$$

注4应当注意，定理 1.(i)中的假设“最终子序列”不能替换为“子序列”。为说明这一点，考虑实数序列 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 并称一个序列满足性质 $(\mathcal{P}_k)$，如果 $|y_n| \leq \dfrac{1}{k^n}$对 $n = 1$，2，.... 显然，$(\mathcal{P}_k)$ 在取子序列时得以保持，并且 (x_n) 的每个子序列都有一个进一步的子序列满足 $(\mathcal{P}_k)$。然而，(x_n) 没有满足所有性质$(\mathcal{P}_k)$ 的子序列，因为这样的序列必为零序列，且 $x_n > 0$对所有 $n.$

在下一个简单示例中，我们通过考虑性质 $(\mathcal{P}_k)$ 不一定与收敛相关的情形来说明定理 1。

例 5 众所周知，度量空间是紧致的，当且仅当它是全有界且完备的。我们将证明，如果 X 是全有界且完备的，那么 X 是序列紧的，也就是说， X 中的每个序列都有一个聚点。为此，固定 X 中的一个序列 (x_n)，并对每个整数 k 考虑性质 $\mathcal{P}_k$：如果序列 (y_n) 有一个尾段包含在半径为 $\dfrac{1}{k}.$ 的球中，则称它具有性质 $\mathcal{P}_k$。由于 X 是全有界的，因此显然， X 中的每个序列都满足 $\mathcal{P}_k.$。由定理 1可知，(x_n) 有一个子序列 (z_n)，同时满足所有性质 $(\mathcal{P}_k)$。特别地，(z_n) 是一个柯西序列，因而收敛。因此，(x_n) 有一个所需的聚点。

本文的主要目标是将先前的结果推广到网。然而，将结果推广到网颇具挑战性，因为考虑新的子网时，指标集会发生变化。我们的研究主要结果可表述如下:

定理 6 设 (E_k) 是一列收敛空间，并令 $(x_\alpha)_{\alpha\in A_\infty}$ 是乘积空间 $P=\prod E_k.$ 中的一个网。我们假设，对于 (x_α) 的每个子网$_{k=1}(y_\beta)_{\beta\in B}$ 以及每个整数 k，都存在一个子网 $\left(y_{\varphi(\gamma)}\right)_{\gamma\in C}$，使得$y_{\varphi(\gamma)}(k)$ 在 $E_k.$ 中收敛。那么，(x_α) 存在一个子网 (z_θ)，使得

$$z_\theta\left(k\right)\ converges\ in\ E_k\ for\ k=1,2,....$$

我们的结果可以用以下更一般的形式表述。

定理 7 设 E 是一个非空集，$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 E 中的一个网，而 $(\mathcal{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一列在取最终子网时保持不变的性质。此外，假设对每个 k 以及 (x_α) 的每个子网 $(y_\beta)_{\beta\in B}$，都存在一个进一步的子网 $\left(y_{\varphi(\gamma)}\right)_{\gamma\in C}$，使得 $y_{\varphi(\gamma)}$ 满足 $\mathcal{P}_k.$ 那么，初始网 (x_α) 存在一个子网 (z_θ)，使得 (z_θ) 对所有$k=1$、2、...都满足 $\mathcal{P}_k$ 。

证明。根据我们的假设可立即得出，存在一个子网序列$x^n=\left(x^n_{\alpha_n}\right)_{\alpha_n\in A_n}$，其来自 $\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in A}$，使得 x^n 满足 $\mathcal{P}_n$，并且对于每个 n，x^n 都是 x^{n-1} 的子网，其中 $A_0=A$ 且 $x^0=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in A_0}\cdot$。这是通过使用共尾映射 $\varphi_n\colon\ A_n\longrightarrow A_{n-1}$，$x^n_{\alpha_n}=x^{n-1}_{\varphi_n\ (\alpha_n)}\ n=1,\ 2,\ .....$实现的。由于每个性质 $\mathcal{P}_k$ 在传递到最终子网时都得以保留，因此对于每个 n，子网 x^n 满足性质 $\mathcal{P}_k$，其中 $k=1,\ 2,\ .....,$ $n.$ 接下来，我们将构造一个网 $\left(y_\beta\right)_{\beta\in B}$，它是初始网的子网，也是每个 x^n 的最终子网，从而满足所有性质（$\mathcal{P}_n$）。其指标集 B 由所有形如 β 的元素组成。

$$\beta=(\beta_0,\beta_1,...,\beta_k)\in A_0\times A_1\times...\times A_k,$$

其中 k 是整数，并且对于每个 $i\in\{1,2,...,k\}$，都有 $\beta_{i-1}=\varphi_i(\beta_i)$。我们通过如下方式对集合 B 进行排序:

$$\begin{aligned}(\beta_0,\beta_1,...,\beta_p)\preccurlyeq(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_q)\\ \Leftrightarrow p\leq q\text{ and }\beta_i\leq\gamma_i\text{ for }0\leq i\leq p.\end{aligned}$$

(i) 我们声称，有序集 $(B, 4)$ 是有向的。为此，考虑 B 中的两个元素 $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p)$ 和 $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_q)$，并假设例如 $p \leq q$。由于 $A_0 = A$ 是有向的，存在满足 $\theta_0 \geq \beta_0$ 和 $\theta_0 \geq \gamma_0$. 的 $\theta_0 \in A_0$。由于 φ_1 是共尾的，存在 $\alpha_1' \in A_1$ 使得 $\alpha_1 \geq \alpha_1' \Longrightarrow \varphi_1(\alpha_1) \geq \theta_0$.。我们选取 $\theta_1 \in A_1$，使得 $\theta_1 \geq \alpha_1', \beta_1, \gamma_1$.。现在任取 $\beta_{p+1}, ..., \beta_q$，使其属于 $A_{p+1}, ..., A_q$；通过重复前面的过程，我们可以构造一个序列 $\theta_i \in A_i$, $1 \leq i \leq q$，使得 $\theta_i \geq \beta_i, \theta_i \geq \gamma_i$, 并且

$$\theta \geq \theta_i \Longrightarrow \varphi_i(\theta) \geq \theta_{i-1}.$$

通过令 $\alpha_q = \theta_q$ 来定义 $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_q)$，并且对于 $i = 1, ..., q$，令 $\varphi_i(\alpha_i) = \alpha_{i-1}$.。显然，$\alpha$ 属于 B，且满足 $\beta \preccurlyeq \alpha$ 和 $\gamma \preccurlyeq \alpha$.。这表明 $(B, 4)$ 是有向的。于是，我们可以通过令 $y_\beta = x_{\beta_0}$ 来定义所需的子网，其中 $\beta = (\beta_0, ..., \beta_n) \in B$.

(ii) 我们需要证明网 $y = (y_\beta)_{\beta \in B}$ 是 (x_α) 的子网。为此，只需证明映射 φ: $B \longrightarrow A$，由 $\varphi(\beta) = \beta_0$ 定义，是共尾的。固定 $\alpha_0 \in A$。我们要找到 $\gamma \in B$，使得当 $\beta \geq \gamma$. 时，$\varphi(\beta) \geq \alpha_0$。由于 φ_1 是共尾的，存在 $\gamma_1 \in A_1$ 使得

$$\alpha_1 \geq \gamma_1 \Longrightarrow \varphi_1(\alpha_1) \geq \alpha_0.$$

由此可知，对于每个满足 $\beta \succcurlyeq \gamma = (\varphi(\gamma_1) \quad \gamma_1)$ 的 $\in B$s，其中 $\beta = (\beta_0, ..., \beta_p)$，我们有 $\beta_1 \geq \gamma_1$，因此 $\varphi(\gamma) = \varphi_1(\beta_1) \geq \alpha_0$.。由此可见，$\varphi$ 是共尾的，正如所声称的那样。

(iii) 为完成证明，我们需要证明对于每个 $n.$，y 都是 x^n 的一个最终子网。为此，固定 B.中的一个元素 $\beta' = \left(\beta_0', \beta_1' .., \beta_{n+1}'\right)$。我们将证明网 $(y_\beta)_{\beta \geq \beta'}$ 是 x^n. 的一个子网。需要定义一个从 $\Gamma_n := \{\beta \in B : \beta \succcurlyeq \beta'\}$ 到 A_n 的共尾映射 ψ_n。合适的候选映射如下:

$$\varphi_n(\beta) = \beta_n \text{ for } \beta = (\beta_1, ..., \beta_q) \in \Gamma_n.$$

令 α_n 为 A_n. 中的一个固定元素。选取 $\gamma_{n+1} \in A_{n+1}$ 使得

$$\alpha_{n+1} \geq \gamma_{n+1} \Longrightarrow \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geq \alpha_n.$$

现令 $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_{n+1})$，其中对于 $i = 1, ..., n+1$，有 $\gamma_{i-1} = \varphi_i(\gamma_i)$，并令 $\theta \in B$ 满足 $\theta \succcurlyeq \beta'$ 和 $\theta \succcurlyeq \gamma$.。那么对于每个 $\beta \in B$，我们都有

$$\beta \succcurlyeq \theta \Longrightarrow \beta_n = \psi_n(\beta) \geq \theta_n \geq \alpha_n.$$

这表明 ψ_n 是共尾的，并完成了证明。 ■

4 个应用示例

本节将介绍一些结果，作为我们主要定理的应用。前两个应用只是对拓扑学和泛函分析中已知结果的新颖简短证明。接下来的两个应用是新结果，涉及紧算子，并回答了近期在[3]和 [1], 中提出的开放问题：作者采用经典的序列对角过程处理了可数情形，但由于缺少类似结果，对一般情形未作处理。定理 7 给出了这样的结果。自然会有人问，是否存在一种更一般的对角过程，其中性质集不要求可数。在这种情况下，无法期待构造性证明，而使用佐恩引理似乎显而易见。这类结果可应用于更一般的情形，并能为拓扑学中的蒂科诺夫定理、阿劳格鲁定理及其他若干结果给出非常简短的证明。我们计划在未来的工作中进一步探讨这一想法。

如前所述，我们给出紧空间的可数乘积的 Tychonoff 定理的一个简短证明。虽然对于可度量化空间而言，这个证明广为人知，但对于一般的拓扑紧空间，此前尚未有人注意到这一点。

定理 8 可数个紧空间的乘积是紧的。

∞证明。设(X_n)为紧空间的序列， $X = \prod X_n$ 其乘积。$n=1$直接应用定理6可知， X 中的每个 (x_α) 都有一个收敛子网，这表明 X 是紧的。

■

请注意，我们所呈现的结果也可应用于收敛结构意义下的紧性，而这些结构不一定是拓扑的。举例来说，我们称向量格 X 中的子集 A 是序紧的，如果 A 中的每个网都有一个极限属于 A.的收敛子网。定理 3表明，如果向量格 V_k 中的 A_k 是序紧的，那么∞ ∞ 的乘积 $A = \prod A_k$ 在向量格 $V = \prod V_k$. 中是序紧的

$k=1$ $k=1$

[{"id": 0, "input": "By applying our main theorem to the dual space of a separable Banach space X, we can obtain a short proof of the Banach-AlaogluTheorem.", "layout_label": "plain text"}]

命题 9 若巴拿赫空间 X 可分，则 B_{X^*} 的单位球 X^* 是弱*紧的。

证明。设 D 是 X 的一个可数稠密子集，并设 (x_α^*) 是 B_{X^*}.中的一个网。根据定理 1，存在 (x_α) 的一个子网 $\left(y_\beta^*\right)$ ，使得对每个 $x \in D.$ ， $y_\beta^*(x_n)$ 都收敛。容易推出，对每个 $x \in X.$ ， $y_\beta^*(x)$ 都收敛。记$y^*(x) = \lim y_\beta^*(x)$。容易看出 y是线性的；又因为对所有 $\beta \in B$， $\left|y_\beta^*(x)\right| \leq \|x\|$，所以 $|y^*(x)| \leq \|x\|$，因此 $y^* \in B_{X^*}$，证毕。 ■

5 两个应用

设 E 为巴拿赫空间， X 为巴拿赫格，并用 $L(E,X)$ 表示从 E 到 $X.$ 的所有线性连续算子组成的空间。若算子 $T:E \longrightarrow X$ 对每个有界序列 (x_n) 都存在一个子序列 $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ ，使得 $Tx_{\varphi(n)}$ 无收敛，则称其为序列无紧算子。另一方面，若 T 中的每个有界网 (x_α) 都存在一个子网 (y_β)，使得 (Ty_β) 无收敛，则称 T 为无紧的。此前已在 [2, 命题 9.2] 中证明，$L(E,X)$ 中所有序列无紧算子构成 $L(E,X)$ 的一个闭子空间；但 $L(X,E)$ 中一列无紧算子的极限是否仍然无紧，这一问题一直悬而未决。本文对此问题给出了肯定的回答。

定理 10设 E 是一个巴拿赫空间， X 是一个巴拿赫格。那么，所有从 E 到 X 的非紧算子组成的集合 $K_{un}(E,X)$ 是 $L(E,X)$ 的一个闭子空间。

证明。 $K_{un}(E,X)$ 是 $L(E,X)$ 的子空间这一事实显然成立。我们只需证明其闭性。设 (T_n) 是 $L(E,X)$ 中的一个由非紧算子组成的序列，并且收敛于 $T.$ 设 (x_α) 是 $E.$ 中的一个范数有界网。我们的目标是证明 (Tx_α) 具有一个收敛子网。我们称 X 中的网 (u_i) 满足性质 $(\mathcal{P}_n)$，如果 $T_n u_i$ 在 $X.$ 中收敛。根据我们的假设，每个性质 $\mathcal{P}_k$ 在取最终子网时都得以保持。由于 T_n 是非紧的，(x_α) 的每个子网 (y_β) 都有一个进一步的子网满足性质 $\mathcal{P}_k.$ 。因此，通过应用定理 7，存在 (x_α) 的一个子网 (y_β)，使得对于 $n = 1$，2，.....，有 $T_n y_\beta \xrightarrow{un} z_n$。为了完成证明，我们需要建立以下事实。

(i) $z_n \xrightarrow{un} z$ 对于某个 $z \in X.$(ii) $Ty_\beta \xrightarrow{un} z.$(i) 的证明。对于任意 $u \in X_+$，我们有不等式

$$\||z_p - z_q| \wedge u\| \leq \||z_p - T_p y_\beta| \wedge u\| + \||T_q y_\beta - z_q| \wedge u\| + \||T_p y_\beta - T_q y_\beta| \wedge u\|.$$

对 β 取上极限，我们得到

$$\|\left|z_p - z_q\right| \wedge u\| \leq \limsup_{\beta} \|\left|\left(T_q - T_p\right) y_\beta\right| \wedge u\| \leq \|T_p - T_q\| \sup \|y_\beta\| .$$

由此可得，对于 $u = |z_p| + |z_q|$,

$$\|z_p - z_q\| \leq \|T_p - T_q\| \sup \|y_\beta\| .$$

这证明了 (z_n) 是一个柯西序列，并确立了 (i)，因为 X 是一个巴拿赫空间。

(ii) 的证明 令 $u \in X_+$，并令 $M = \sup \|y_\beta\| .$，则对于所有 n,

$$\begin{aligned} \|\left|Ty_\beta - z\right| \wedge u\| &\leq \|\left|Ty_\beta - T_n y_\beta\right| \wedge u\| + \|\left|T_n y_\beta - z_n\right| \wedge u\| + \|\left|z_n - z\right| \wedge u\| \\ &\leq \|T - T_n\| M + \|\left|T_n y_\beta - z_n\right| \wedge u\| + \|z_n - z\| . \end{aligned}$$

现在对 β 取上极限，我们得到

$$\limsup_{\beta} \|\left|Ty_\beta - z\right| \wedge u\| \leq \|T - T_n\| M + \|z_n - z\| .$$

现在(ii)由(i)以及事实 $T_n \longrightarrow T.$ 推出。这就完成了证明。

在 [1], 中介绍了几种类型的紧算子。设 (X, p, E) 是可分解格赋范空间，且 (Y, q, F) 是一个格赋范空间，其中 F 是戴德金完备的。我们知道，每个受控算子 $T: X \longrightarrow Y$ 都有一个精确主控元 $|T|$ （见 ??）。因此，三元组 $(M(X,Y) \pi, L^{\sim}(X,Y))$ 是一个格赋范空间，其 $\pi(T) = |T|$（见 ..... [1]中的参考文献）。因此，若 (T_α) 是 $M(X,Y)$ 中的一个网，那么 $T_\alpha \mathrm{p}\longrightarrow T$ 属于 $M(X,Y)$ 当且仅当 $|T_\alpha - T| \xrightarrow{o} 0$ 属于 $L^{\sim}(X,Y)$。[1, 定理 5]证明，在这些假设下，若 (T_n) 是一列序列p-紧算子，且在 $M(X,Y)$ 中 p-收敛到 T，那么 T 是序列p-紧的。同样，这里也没有关于网的版本。

定理 11 设 E 和 F 是两个里斯空间，且 F 戴德金完备。设 (T_n) 是从 E 到 $F.$ 的序紧算子序列。我们假设 $T_n \longrightarrow T$ 相对一致地。则 T 是序紧的。

证明. 根据我们的假设，存在算子 $S \in L_b(E,F)$ 和一个递减至 0 的实数序列 ε_n，满足不等式$|T_n - T| \leq \varepsilon_n S$. 我们称网 (u_α) 满足性质 $\mathcal{P}_n$，如果网 $(T_n u_\alpha)$ 在 F. 中相对一致收敛。现在考虑E. 中的一个序有界网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$。应用定理 1，可得 (x_α) 的一个子网 (z_β)，以及 F 中的一个序列 (y_n)，使得

$$T_n x_{\varphi(w)} \xrightarrow{o} y_n \text{ for all } n = 1, 2, ...$$

现在我们断言

$$y_n \xrightarrow{ru} y. \tag{1}$$

由于 F 是戴德金完备的，存在一个网 $(z_{\alpha_n})_{\alpha_n\in A_n}$ 递减至零，使得

$$\left|Tx_{\psi_n(\alpha_n)} - y_n\right| \leq z_{\alpha_n}.$$

现在我们有了

$$\begin{aligned} |y_p - y_q| &\leq \left|y_p - T_p x_{\psi_p(\alpha_p)}\right| + \left|T_p x_{\psi_p(\alpha_p)} - T_q x_{\psi_q(\alpha_q)}\right| + \left|T_q x_{\psi_q(\alpha_q)} - x_q\right| \\ &\leq \gamma_{\alpha_p} + |T_p - T_q|\,|u| + \gamma_{\alpha_q}. \end{aligned}$$

对 α_p 和 α_q 取极限，我们得到:

$$|y_p - y_q| \leq |T_p - T_q|\,|u|\,.$$

现在我们证明第二个断言。对于每个 n，我们都有

$$\begin{aligned} \left|Tx_{\varphi(w)} - y\right| &\leq \left|Tx_{\varphi(w)} - T_n x_{\varphi(w)}\right| \\ &\quad + \left|T_n x_{\varphi(w)} - y_n\right| + |y_n - y| \\ &\leq |T_n - T|\,|u| + |y_n - y_n| + \left|T_n x_{\varphi(w)} - y_n\right|. \end{aligned}$$

由 (1) 可得娱乐主管

$$\limsup \left|Tx_{\varphi(w)} - y\right| \leq |T_n - T|\,|u| + |y_n - y_n|\,.$$

但由于 $y_n \longrightarrow y$和 $T_n \longrightarrow T$，我们得到 $\limsup \left|Tx_{\varphi(w)} - y\right| = 0$，这表明 $Tx_{\varphi(w)} \xrightarrow{o} y$，正如所需。 ■

参考文献

.[1]A. Aydın, E.Yu. Emelyanov, N. Erkur¸sun Ozcan, M.A.A. Marabeh, Indag. Math. (N.S.) 29 (2018) 633–656.[2] M. Kandi´c, M. Marabeh, V.G. Troitsky, 巴拿赫格中的无界范数拓扑, J. Math. Anal. Appl. 451 (1) (2017) 259–279.[3] Y. Deng, M O'BrienV.G. Troitsky, 巴拿赫格中的无界范数收敛, Positivity 21 (3) (2017) 963–974.[4] N. Gao, V. Troitsky, F. Xanthos, 巴拿赫格中的 Uo 收敛及其在 Ces`aro 均值中的应用, Israel J. Math. 220 (2017) 649–689, https://doi.org/10.1007/s11856-017-1530-y.[5]A.G. Kusraev, 受控算子, 载于：Mathematics and its Applications, vol. 519, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, p. xiv+446.[6] M. O'Brien, V.G. Troitsky & J.H. van der Walt (2022): 网收敛结构及其在向量格中的应用, Quaestiones Mathemati- cae, 1–38, 2022.