arXiv:2304.04206v1 [math.RA] 9 Apr 2023

半环的 k-理想的若干方面

THEMBA DUBE 和 Amartya Goswami

摘要。本文旨在研究半环中若干重要的 k-理想类，包括 k-素理想、 k-半素理想、 k-根理想、 k-不可约理想和 k-强不可约理想。我们讨论了 k-理想及其乘积、交和理想商在半环同态下的一些性质。

1. 引言

作为代数结构，半环无疑是环的一种自然推广，因此探讨环的哪些性质可以推广到半环是恰当的。人们或许会认为半环总能扩张为环，但[V39]给出了无法嵌入环中的半环实例。在研究环的结构时，理想发挥着至关重要的作用；半环中也是如此。然而，半环的理想在性质上与环的理想有显著差异。半环中缺少减法，这意味着环中的许多结果在半环中并无对应结论。由 k引入的 -理想概念 [H58] 旨在弥补缺乏减法这一不足。自 k-理想概念引入以来，已有多项相关研究（参见 [AA08、G99、H15、JRT22、L95、L65、L15、SA92、SA93、WSA96]）。

本文将探讨文献中尚未涉及的 k-理想的一些方面。本文及其续篇[DG23] 旨在利用上述文献中的结果，并推广环和半环中的相关结果，从而进一步推动 k-理想理论的发展。为此，我们推广了关于半环理想的文献 [G99、I56] 中的结果，以及关于环理想的文献 [L01、B72、AM69、A08、B53] 中的结果。

在研究 k-理想的特殊类（例如 X）时，起关键作用的结果如下，称为“交换原理”：

$$k\text{-X ideal} = k\text{-ideal} + \text{X ideal}. \tag{1.1}$$

例如，要证明 k-素理想的性质（见定义 3.4），只需证明素 k-理想的性质。事实证明，我们在此考察的所有 k-理想的特殊类都满足上述交换原理。证明中广泛使用的另一个工具是 k-理想的另一种表述方式，即通过 k-闭包运算来表述（见定义 2.4）。

现在我们简要介绍本文的内容。在 §2中，我们回顾 k-闭包运算的定义，并归纳其若干性质。我们根据 k-闭包运算定义 k-理想，并研究 k-理想上的一些运算。§3旨在研究若干特殊的 k-理想，其中包括 § k-素理想、 k-半素理想和 k-根理想（见 §3.1）；而在 §3.2中，我们讨论 k-不可约理想和 k-强不可约理想。最后，在 §4中，我们引入 k-理想的收缩和 k-理想的扩张的概念。本文最后对一些后续研究作简要评述。

2020年数学主题分类。16Y60。关键词和短语：半环， k-理想， k-闭包运算，弱诺特半环。1

2. k-理想

（交换）半环是一个系统 $(R, +, 0, \cdot, 1)$，满足 $(R, +, 0)$ 是交换幺半群，$(R, \cdot, 1)$ 是交换幺半群，对所有 $x \in R$，$0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$，并且 $\cdot$ 对 $+$ 满足分配律。我们将 xy 记作 $x \cdot y$。本文所说的半环，均指具有乘法单位元 1 的交换半环。半环同态 $\phi\colon R \to R'$ 是一个映射，满足 $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$，$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$，$\phi(0) = 0$，且对所有 $x, y \in R$，$\phi(1) = 1$。半环 R 的理想 I 是 R 的加法子幺半群，且对所有 $x \in I$ 和 $r \in R$，满足 $rx \in I$。若 $I \neq R$，则称理想 I 为真理想。我们也用符号 0 表示半环 R 的零理想。若 S 是半环 R 的非空子集，则 $\langle S \rangle$ 表示由 S 生成的理想。

定义 2.1 ([H58])。一个 k-理想 (或 可减理想) I 半环 R 的理想 R 满足以下条件：$x, x+y \in I$ 则有 $y \in I$[1]。

显然，零理想是一个 k-理想，并且包含于半环 R 的每个 k-理想中。我们用 $\mathrm{I}(R)$（分别用 $\mathrm{I}_k(R)$）表示 R 的所有理想（分别为所有 k- 理想）的集合。R 的一个 k- 真理想是指其真 k- 理想。半环的 k- 理想也可以通过 $\mathrm{I}(R)$ 上的闭包运算来定义。

定义 义 2.2 ([SA92])。设 R 是一个半环。 k-闭包 运算定义在 $\mathcal{I}(R)$ 定义为 y

$$C_k(I) = \{r \in R \mid r + x \in I \text{ for some } x \in I\}. \tag{2.1}$$

下一个引理汇总了后文所需的闭包运算的性质。

引理 2.3. 以下，I、$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和 J 是半环 R 的理想。
(1) $\mathrm{C}_k(I)$ 是包含 I 的最小 k-理想。(2) $\mathrm{C}_k(0) = 0$。(3) $\mathrm{C}_k(R) = R$。(4) $\mathrm{C}_k(\mathrm{C}_k(I)) = \mathrm{C}_k(I)$。(5) $I \subseteq J$ 蕴含 $\mathrm{C}_k(I) \subseteq \mathrm{C}_k(J)$。
(6) $\mathrm{C}_k(\langle I \cup J\rangle) \supseteq \mathrm{C}_k(I) \cup \mathrm{C}_k(J)$。(7) $\mathrm{C}_k(\tilde{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \tilde{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{C}_k(I_\lambda)$。(8) I 是 k-理想，当且仅当 $I = \mathrm{C}_k(I)$。(9) $\mathrm{C}_k(IJ) \supseteq \mathrm{C}_k(I)\,\mathrm{C}_k(J)$。

证明。(1) [JRT22，命题 3。1]。
(2)–(7) 显然。(8) [SA92，引理 2.2]。(9) 设 $r \in \mathrm{C}_k(I)\,\mathrm{C}_k(J)$。那么存在 $r' \in \mathrm{C}_k(I)$ 和 $r'' \in \mathrm{C}_k(J)$，使得 $r' + i \in I$, $r'' + j \in J$，并且 $r = r'r''$，其中 $i \in I$ 且 $j \in J$。注意到

$$r'r'' + r'j + r''i + ij = (r' + i)(r'' + j) \in IJ.$$

由于 $r'r'' + r'j + r''i \in R$, $r'j + r''i \in R$，且 R 是一个 k-理想，$r = r'r'' \in R$，由此完成证明 □

根据引理 2.3(8），我们现在得到一个 k-理想的另一种定义。

定义 2.4。理想 I 是半环 R 的 k-理想，当 $\mathrm{C}_k(I) = I$。

[1]请注意[H58]中的笔误：在 k-理想的定义中，“$y \in S$”应为“$y \in I$”。

由引理2.3(1)可知， k-闭包确实是由(2.1) 定义的映射 $C_k : I(R) \to I_k(R)$。我们的下一个目标是研究半环的各种 k-理想上的运算。容易看出，如果 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 k-理想的一个族，那么它们的交 $\tilde{\bigcap}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 也是一个 k-理想。然而，半环的两个 k-理想之和未必是一个 k-理想[2]，，但在格序半环中确实如此（参见 [G99，推论 21.22]）。如果 I 和 J 是半环 R 的 k-理想，则将它们的乘积定义为 $IJ = C_k(\{xy \mid x \in I, y \in J\})$。下面的引理给出了 k-理想的乘积与交之间的预期关系。证明是直接的。

引理 2.5. 对于半环 R 的任意两个 k-理想 I 和 J，我们有 $IJ \subseteq I \cap J$.

若 X 是半环 R 的子集，则 X 的湮灭子定义为

$$\mathrm{Ann}_R(X) = \{r \in R \mid rx = 0 \text{ for all } x \in X\}.$$

以下结果在 [G99，例 6 中得到了证明。10]。

命题 2。 6. 如果 X 是半环 R 的非空子集，且 $X \neq \{0\}$，那么 $\mathrm{Ann}_R(X)$ 是一个 k-理想 .

设 I 和 J 是半环 R的理想。则 I 关于 J 的理想商定义为

$$(I : J) = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}.$$

以下 命题及其推论给出了由理想商构造的 k-理想的例子 ts.

命题 2.7. 若 I 是一个 k-理想，且 J 是半环 R的一个理想，则 $(I : J)$ 是 R的一个 k-理想 .

证明。令 $r, r + r' \in (I : J)$。这意味着 $rJ \subseteq I$且 $rJ + r'J = (r + r')J \subseteq I$。由于 I是一个 k-理想，我们有 $r'J \subseteq I$，因此 $r' \in (I : J)$。□

推论2.8.假设 J、$\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$、 K 是理想，且 I、$\{I_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是半环 R 的 k-理想。则 $(I : J), ((I : J) : K), (I : JK), ((I : K) : J), (\tilde{\bigcap}_\omega I_\omega : J), \tilde{\bigcap}_\omega (I_\omega : J), (I : \acute{\prod}_\lambda J_\lambda)$，以及 $\tilde{\bigcap}_\lambda (I : J_\lambda)$ 都是 k- 理想。

环的所有理想所成的格是模格，而对于半环，同样的结论并不成立。然而，我们有以下结果，该结果已在 [H58] 中宣布。其证明可见于 [G99,命题 6。38]。

命题 2.9. 对于每个半环 R，$I_k(R)$ 是一个模格。

3. 某些 k-理想

本节旨在研究半环的若干特殊 k-理想。这些 k-理想类是通过将相应理想类的通常定义“限制”到 k-理想而得到的。

定义 3.1. 半环 R 的真 k-理想称为 k-极大理想，如果它不真包含于另一个真 k-理想中。

以下结果出自[SA93，推论 2。2] 它保证半环中的 k-极大理想集非空。

引理 3.2. 半环 R 的每个真 k-理想都包含于 R的一个 k-极大理想中。

正如引言中所指出的，交换原理（1.1）适用于我们所研究的k-理想类，因此下面的命题是该原理在 k-极大理想中的首个实例。

[2][G99，例mple 6.19]: $2\mathbb{N}$ 和 $3\mathbb{N}$ 是半环 $\mathbb{N}$ 的 k-理想，然而 $2\mathbb{N} + 3\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 不是一个 k-理想的 $\mathbb{N}$.

命题 3.3.半环 R 的理想 M 是 k-极大的，当且仅当它是一个 k-理想和 R 的极大理想。

证明。显然，每个同时也是极大理想的 k-理想都是 k-极大的。假设 M 是一个 k-极大理想，且对于某个 $I \in$ ，$\mathrm{I}(R) \setminus \mathrm{I}_k(R)$ 中有 $M \subsetneq I \subsetneq R$ 。 这意味着

$$M = C_k(M) \subsetneq I \subsetneq C_k(I) \subsetneq C_k(R) = R,$$

其中第一个和最后一个等式分别由（8）和（3）的引理2.3推出，而第一个和最后一个严格包含关系由引理2.3（5）推出。中间的严格包含关系由假设$I \in \mathcal{I}(R) \setminus \mathcal{I}_k$（$R$）以及引理 2.3（8）推出。由于 M 是 k-极大的， $M \subsetneq C_k$（I）$\subsetneq R$ 导致矛盾。□

3.1. k-素理想和 k-半素理想。在非交换半环中，素理想和半素理想的概念起着重要作用。在本节中，我们将把这些类型的理想扩展为 k-素理想和 k-半素理想。理想的根这一概念将由 k-根所取代。

定义 3.4. 半环 R 的 k-真理想 P 称为 k-素理想，如果 $IJ \subseteq P$ 蕴含 $I \subseteq P$ 或$J \subseteq P$对所有 $I, J \in \mathrm{I}_k(R)$。我们用 $\mathrm{spec}_k(R)$ 表示 R 的所有 k- 素理想的集合

交换原理（1.1）关于 k-素理想已在 [JRT22，命题 35]中证明。

命题 3.5. 半环 R 的理想 P 是 k-素理想，当且仅当 P 既是素理想，也是 R的 k-理想。

与（含幺）环中的情形一样，对于 $\mathrm{spec}_k(R)$也有如下结果。

命题 3.6. 每个非零半环都包含一个极小的 k-素理想。

证明。设 R 是一个非零半环。由引理 3.2可知 R 有一个 k-极大理想；根据 [H15，定理 3.4]，它也是一个素 k-理想，因此根据 kJRT22，命题 3 [，它是一个 5]-素理想。因此，集合 $\mathrm{spec}_k(R)$ 非空。根据佐恩引理的常规应用，即可得到所述结论。□

命题 3.7。对于 k-素理想 P （半环 R 中的），以下各项等价。
(1) 对所有 $x, y \in$， $xy \in P$ 蕴含 $x \in P$ 或 $y \in P$。 (2) 对所有 $I, J \in \mathrm{I}_k(R)$， $IJ \subseteq P$ 蕴含 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。

证明。令 $I \nsubseteq P$ 和 $j \in J$。若 $i \in I \setminus P$，则 $ij \in IJ \subseteq P$。但 $i \notin P$。根据假设，这意味着 $j \in P$，换言之，$J \subseteq P$。反过来，假设 $xy \in P$ 和 $x \notin P$。由 JRT22，命题 3.5]，可得 $\mathrm{h}xy\mathrm{i}_k = \mathrm{h}x\mathrm{i}_k \mathrm{h}y\mathrm{i}_k$，其中 $\mathrm{h}x\mathrm{i}_k$ 是包含 x 的最小 k- 理想。于是，$\mathrm{h}x\mathrm{i}_k \mathrm{h}y\mathrm{i}_k \subseteq P$ 且 $\mathrm{h}x\mathrm{i}_k \nsubseteq P$。由于 P 是 k- 素的，必有 $\mathrm{h}y\mathrm{i}_k \subseteq P$，从而 $y \in P$。□

以下命题源自环，其证明与环论中的对应版本完全相同，可见于 [AK13，引理3。19]。

命题 3.8（素理想避开引理）。设 I 是半环 R 的一个子集，在加法和乘法下封闭，且 $P_1, \ldots, P_n$ 是 k-理想，其中 $P_3, \ldots, P_n$ 是 k-素理想。若对所有 j, 都有 $I \nsubseteq P_j$，则存在一个 $x \in I$，使得对所有 j 都有 $x \notin P_j$。

回忆一下，在[L15,定义2.5] 中，若半环 R 的每个 k-理想 R 最终都保持不变，则称该半环为弱诺特半环。如果 R 具有其每个理想都是 k-理想的性质，那么 [G99,命题7.17] 表明， R 是弱诺特半环，当且仅当半环 R 的每个 k-素理想都是有限生成的。此外，在弱诺特半环 R 中， [L15, 推论 6.6] 指出，一个 k-理想的根 $\mathrm{R}_k(I)$

I 可以表示为有限个 k-素理想的有限交。在弱诺特半环中，我们还有另一个关于极小 k-素理想的结果。

命题3.9.如果 R 是一个弱诺特半环，那么半环R 的极小 k-素理想集合是有限的。

证明。我们给出一个拓扑证明。如果 R 是弱诺特的，那么拓扑空间（赋予扎里斯基拓扑）$\mathrm{spec}_k(R)$也是诺特的，因此 $\mathrm{spec}_k(R)$具有有限个不可约分支。现在，$\mathrm{spec}_k(R)$ 的每个不可约闭子集都具有以下形式

$$\mathrm{V}(P) = \{Q \in \mathrm{spec}_k(R) \mid P \subseteq Q\},$$

其中， P 是一个极小的 k-素理想。因此，当且仅当 P 是一个极小的k-素理想时，$\mathrm{V}(P)$才是不可约分支。因此， R 的极小 k-素理想的数量是有限的。□

现在定义 k-半素理想的概念。将在定理3.18 中证明， k-半素理想等价于 k-根理想（见定义3.12）。

定义3.10。半环的 k-真理想 P 被称为 k-半素理想，如果 $I^2 \subseteq P$ 则有 $I \subseteq P$, 对于所有k-理想 I 的 R。

类似于 k-素理想，我们对于 k-半素理想也有交换原理。

命题 3.11. 半环 R 的理想 Q 是 k-半素的，当且仅当 Q 是 k-理想且是 R 的半素理想。

证明。 注意，如果 Q 是一个 k-理想，同时也是半环 R的半素理想，那么根据定义 3.10， Q是 k-半素的。反之，设 Q 是一个 k-半素理想，并且 $I^2 \subseteq Q$ 对于某个 $I \in \mathcal{I}(R)$。 那么

$$(C_k(I))(C_k(I)) \subseteq C_k(I^2) \subseteq C_k(Q) = Q,$$

其中第一个和第二个包含关系分别由引理2.3(9)和引理2.3(5)得到。由于 Q 是k-半素的，应用引理2.3(1)，我们得到 $I \subseteq Q$。□

在环中，众所周知，理想 I 的根可定义为所有包含 I 的素理想的交集。若将 I 限定为 k-理想，并将素理想限定为 k-素理想，则可得到 k-根的概念。

定义 3.12([JRT22])。 k-根，指半环中 k-理想 I 的半环 R，定义为

$$\mathcal{R}_k(I) = \bigcap_{I \subseteq P} \{P \mid P \in \mathrm{spec}_k(R)\}. \tag{3.1}$$

若 $\mathrm{R}_k(I) = I$，则 I 被称为一个 k-根理想。

在以下引理中，我们汇集了 k-根的一些初等性质。

引理 3.13.在下文中， I 和 J 是半环 R的 k-理想。
(1) $\mathrm{R}_k(I)$ 是一个包含 I 的 k-理想。(2) $\mathrm{R}_k(\mathrm{R}_k(I)) = \mathrm{R}_k(I)$。(3) $\mathrm{R}_k(IJ) = \mathrm{R}_k(I \cap J) = \mathrm{R}_k(I) \cap \mathrm{R}_k(J)$。(4) $\mathrm{R}_k(I) = R$ 当且仅当 $I = R$。

证明。(1) 根据定义 3.12，可得 $I \subseteq \mathrm{R}_k(I)$。为证明 $\mathrm{R}_k(I)$ 是一个 k-理想，设 $x, x+y \in \mathrm{R}_k(I)$。这意味着，对于所有包含 I 的 k-素理想，均有 $x, x+y \in P$。由于每个这样的 P 都是一个 k-理想，因此 $y \in P$。于是 $y \in \mathrm{R}_k(I)$。

(2)由于根据(1)，$\mathrm{R}_k(I)$是一个 k-理想，应用引理 2.3(1) 得到 $\mathrm{R}_k(I) \subseteq \mathrm{R}_k(\mathrm{R}_k(I))$。由于根据(1)，$I \subseteq \mathrm{R}_k(I)$，根据定义 3.12，我们有$\mathrm{R}_k(I) \supseteq \mathrm{R}_k(\mathrm{R}_k(I))$。(3)由引理 2.3(5) 和引理 2.5 得出。(4) 由定义 3.12 得出。 □

接下来，我们希望证明半环的 k-半素理想与 k-根理想之间的等价性。众所周知，在（非交换）环和半环中，半素理想与根理想之间成立这种等价性。在非交换情形下，我们需要环和半环的 m-系与 n-系的概念，而在交换半环的 k-理想的语境中，仅乘法封闭子集就足够了。为获得这一等价性，我们首先通过一系列引理展开论证。

引理 3.14. 半环 R 的 P 理想 k 是素理想，当且仅当 $R \setminus P$ 是 R 的乘法封闭子集。

证明。假设 P 是 k-素的，且 $x, y \in R \setminus P$。那么由命题 3.7，$xy \notin P$，因此 $xy \in R \setminus P$。反过来，设 $x, y \notin P$。这意味着 $x, y \in R \setminus P$。由于 $R \setminus P$ 在乘法下封闭，$xy \in R \setminus P$，因此 $xy \notin P$，从而证明 P 是素的。因此，由命题 3.7，P 是 k-素的。□

引理 3.15。设 S 是半环 R 的乘法封闭子集。假设 P 是一个 k-理想，并且关于具有 $P \cap S = \emptyset$ 这一性质是极大的。那么 P 是 k-素理想。

证明。令 $x \notin P$ 并且 $y \notin P$，但$\langle x\rangle\langle y\rangle \subseteq P$。根据关于 P 的假设，存在 s，$s' \in S$ 使得$s \in \langle x\rangle + P$ 并且 $s' \in \langle y\rangle + P$。这意味着

$$ss' \in (\langle x\rangle + P)(\langle y\rangle + P) = \langle x\rangle\langle y\rangle + P \subseteq P,$$

矛盾。因此 P 是素的，根据命题 3.7，P 是一个 k-素理想。 □

引理3.16. k-理想 I 的 k-根 $\mathrm{R}_k(I)$ 等于集合

$$T = \{r \in R \mid \text{every multiplicatively closed subset containing } r \text{ intersects } I\}.$$

证明。假设 $r \in T$ 和 $P \in \mathrm{spec}_k(R)$，使得 $I \subseteq P$。那么根据引理 3.14，$R \setminus P$ 是 R 的乘法封闭子集，并且 $r \notin R \setminus P$。因此，$r \in P$。反之，设 $r \notin T$。这意味着存在 R 的一个乘法封闭子集 S，使得 $r \in S$ 和 $S \cap I = \emptyset$。根据佐恩引理，存在一个包含 I 且关于性质 $P \cap S = \emptyset$为极大的 k-理想P。根据引理 3.15，P 是一个素理想，并且根据命题3.7，P 是一个 k-素理想，且有 $r \notin P$。□

引理3.17.设 I是半环 R的 k-半素理想，且 $x \in R \setminus I$。那么存在 R 的乘法封闭子集 S，使得 $x \in S \subseteq R \setminus I$.

证明。按如下方式归纳定义 $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ 中的元素：$x_1 := x$；$x_2 := x_1x_1$；…；$x_n := x_{n-1}x_{n-1}$；…。显然 $x \in S$，并且也容易看出，$x_i, x_j \in S$ 蕴含 $x_ix_j \in S$。□

定理3.18。对于半环 R 的任意 k-理想 I，以下各项等价。

(1) I 是 k-半素的。(2) I 是 R的 k-素理想

的交。(3) I 是 k-根的。

证明。由定义 3.12 可知，(3) $\Rightarrow$ (2)。由于 k-素理想的交是一个 k-素理想，并且每个 k-素理想都是 k-半素的，因此可得(2) $\Rightarrow$(1)。剩下需要证明(1) $\Rightarrow$(3)，为此，只需证明 $\mathrm{R}_k(I) \subseteq I$。假设 $x \notin I$。则 $x \in R \setminus I$，根据引理 3.17，存在 R 的一个乘法封闭子集 S，使得 $x \in S \subseteq R \setminus I$。但是 $S \cap I = \emptyset$，因此根据引理 3.16，$x \notin \mathrm{R}_k(I)$。□

推论 3.19. 若 $I \in \mathrm{I}_k(R)$，则 $\mathrm{R}_k(I)$ 是包含.....的最小 k-半素理想 I.

3.2. k-不可约与 k-强不可约理想。强不可约理想最初由 [F49]针对交换环引入，当时称为原始理想。在 [B72，第301页，练习 34], 中，这些理想被称为拟素理想。“强不可约”一词最初用于非交换环，见[B53]。关于半环，可在 [G99]中找到对这些理想的研究。本节将介绍半环的k-不可约理想与 k-强不可约理想，并展示它们与 k-素理想及k-半素理想之间的一些关系。

定义 3.20. 设 R 是一个半环。
(1)一个 k-理想 I的 R称为 k-不可约的，如果 $J \cap J' = I$意味着对于所有$J, J' \in \mathrm{I}_k(R)$，$J = I$或 $J' = I$成立。(2) 一个 k-理想 I 的 R 称为 k-强不可约的，如果 $J \cap J' \subseteq I$ 意味着对于所有$J, J' \in \mathrm{I}_k(R)$，$J \subseteq I$ 或 $J' \subseteq I$ 成立。

显然，每个 k-强不可约理想都是 k-不可约理想，并且由引理2.5 可知，每个 k-素理想都是 k-强不可约理想。现在我们预期交换原理对于 k-不可约理想和 k-强不可约理想成立，结果如下。

命题3.21。半环 R 的理想 L 是 k-不可约的（k-强不可约的），当且仅当 L 同时是不可约的（强不可约的）以及 R 的 k-理想。
证明。我们给出关于 k-强不可约理想的证明；对于 k-不可约理想，只需对术语作平凡的更改即可。假设 L 是一个 k-强不可约理想，并且 I、J 是 R 的理想，使得$I \cap J \subseteq L$. 这意味着

$$C_k(I) \cap C_k(J) = C_k(I \cap J) \subseteq C_k(L) = L,$$

其中，第一个等式由引理2.3(7) 得出，而包含关系由引理 2.3(5) 得出。根据假设，这意味着$\mathrm{C}_k(I) \subseteq L$或 $\mathrm{C}_k(J) \subseteq L$。由于根据引理 2.3(1)，对于所有 $I \in \mathrm{I}(R)$，都有 $I \subseteq \mathrm{C}_k(I)$，因此得证。逆命题的证明显然。□

已知（参见 [G99，命题 7。33]），半环的强不可约理想具有以下等价的“逐元素”性质：如果 $a, b \in R$ 满足 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \subseteq I$，那么 $a \in I$ 或 $b \in I$。下一个命题表明，对于 k-强不可约理想也有类似结果。

命题 3.22. I 是半环 R 的 k-强不可约理想，当且仅当对于所有满足 $\mathrm{C}_k(\mathrm{h}a\mathrm{i}) \cap \mathrm{C}_k(\mathrm{h}b\mathrm{i})$ 的 a、$b \in R$，$\subseteq I$ 蕴含 $a \in I$ 或 $b \in I$。
证明。假设 I 是一个 k-强不可约理想 R 且 $\mathrm{h}a\mathrm{i} \cap \mathrm{h}b\mathrm{i} \subseteq I$ 对所有 $a, b \in R$. 这意味着

$$C_k(\langle a \rangle \cap \langle b \rangle) = C_k(\langle a \rangle) \cap C_k(\langle b \rangle) \subseteq C_k(I) = I,$$

其中第一个等式由引理 2.3(7)得出。由于 I 是 k-强不可约的，我们必有 $a \in \mathrm{h}a\mathrm{i} \subseteq \mathrm{C}_k(\mathrm{h}a\mathrm{i}) \subseteq I$ 或 $b \in \mathrm{h}b\mathrm{i} \subseteq \mathrm{C}_k(\mathrm{h}b\mathrm{i}) \subseteq I$。为证明逆命题，假设 I 是一个并非 k- 强不可约的 k- 理想。那么存在 k-理想 J 和 K，满足 $J \cap K \subseteq I$，但 $J \nsubseteq I$ 和 $K \nsubseteq I$。这意味着存在 $j \in J$ 和 $k \in K$，使得 $\mathrm{C}_k(\mathrm{h}\, j\mathrm{i}) \cap \mathrm{C}_k(\mathrm{h}k\mathrm{i}) \subseteq I$，但 $j \notin I$ 和 $k \in I$ 均不成立，矛盾。□

在定理 3.18中，我们已经看到，一个 k-根理想可以表示为包含它的 k-素理想的交。现在我们将看到，任何真 k-理想都可以用类似的方式表示为k-不可约理想的形式。不过首先给出一个引理。

引理 3.23. 设 R 是一个半环。令 $0 \neq x \in R$ 和 I 为 R 的 k-真理想，且 $x \notin I$。那么，存在 R 的一个 k-不可约理想 J，使得 $I \subseteq J$ 且 $x \notin J$。

证明。设 $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 R 的一条 k-理想链，满足对所有 $\lambda \in \Lambda$ 都有 $x \notin J_\lambda \supseteq I$。于是

$$x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda \supseteq I.$$

根据佐恩引理，该链中存在一个极大元 J。设 $J = J_1 \cap J_2$。根据 J 的极大性条件，必有 $x \in J_1$ 且 $x \in J_2$，因此 $x \in J_1 \cap J_2 = J$，这就产生了矛盾。因此， J 就是所需的 k-不可约理想。□

命题3.24. 如果 I 是半环 R的 k-真理想，那么 $I = \tilde{\mathrm{N}}_{I\subseteq J} J$，其中 J 是 R 的 k-不可约理想。

证明。根据引理3.23，存在一个 k-不可约理想 J，其属于 R，使得 $I \subseteq J$。假设 th at

$$J' = \bigcap_{I\subseteq J} \{J \mid J \text{ is } k\text{-irreducible}\}.$$

然后 $I \subseteq J_{\prime}$。我们断言 $J_{\prime} = I$。如果 $J_{\prime} \neq I$，那么存在一个 $x \in J' \setminus I$，并且根据引理 3.23，存在一个 k-不可约理想 $J_{\prime\prime}$使得 $x \notin J'' \supseteq I$， 矛盾。 □

众所周知，在弱诺特半环中， k-根可以表示为有限个 k-素理想的交。就 k-不可约理想而言，下面的命题将这一结果推广到了任意k-理想。注意，该命题对诺特交换环的不可约理想同样成立。

命题 3.25. 设 R 是一个弱诺特半环。那么， R 的每个 k-理想都可以表示为 R 的有限个 k-不可约理想的交。

证明。假设

$$\mathcal{F} = \left\{ J \in \mathcal{I}_k(R) \mid J \neq \bigcap_{i=1}^{n} L_i,\ L_i \text{ is } k\text{-irreducible} \right\}.$$

只需证明 $\mathrm{F} = \emptyset$。由于 R 是弱诺特的，F 有一个极大元 I。由于 $I \in \mathrm{F}$，它不是 R 的有限个 k-不可约理想的交。这意味着 I 不是 k-不可约的。因此，存在 k-理想 J 和 K，使得 $J \supsetneq I$、 $K \supsetneq I$，且 $I = J \cap K$。由于 I 是 F 的极大元，我们必有 J， $K \notin \mathrm{F}$。因此， J 和 K 是 R 的有限个 k-不可约理想的交，由此可得 I 也是 R 的有限个 k-不可约理想的交，矛盾。□

正如本节开头所承诺的，以下结果展示了素型与不可约型 k-理想之间的关系。

命题 3.26. 设 R 为半环。 R 的 k-理想 P 是 k-素的，当且仅当它是 k-半素的且k-强不可约的。

证明。 设 P 是半环 k-素理想 R。由命题 3.5， P 是半环 k-理想和素理想 R。这意味着 P 根据命题 k 3.11是 -半素的。由引理2.5 和命题

3.21，由此可得 P 也是 k-强不可约的。反之，设 P 是一个 k-半素且 k-不可约理想。假设 I， $J \in \mathcal{I}_k(R)$ 满足 $IJ \subseteq P$。那么

$$(I \cap J)^2 \subseteq IJ \subseteq P.$$

由于 P 是 k-半素的，这意味着 $I \cap J \subseteq P$。但 P 也是 k-强不可约的，这意味着 $I \subseteq P$或 $J \subseteq P$. □

对于交换环，已知（参见 [A08，定理 2.1(ii)]），每个真理想都包含于一个极小的强不可约理想中。顺便一提，半环的 k-强不可约理想也具有同样的性质。

命题3.27. 半环的每个 k-真理想都包含于一个极小的 k-强不可约理想中。

证明。设 I 是半环 R 的一个 k-真理想。考虑链 (E， ⊆)，其中

$$\mathcal{E} = \{J \mid I \subseteq J,\ J \text{ is } k\text{-strongly irreducible}\}.$$

由于半环的每个极大理想 R 都是强不可约的，根据命题 3.3 和命题 3.21，每个 k-极大理想都是 k-强不可约的，并且根据引理 3.2，每个真 k-理想都包含于一个k-极大理想中。因此集合 $\mathcal{E}$ 非空。根据佐恩引理，$\mathcal{E}$ 具有一个极小元，这就是我们所需的极小 k-强不可约理想。 □

下面的结果说明了半环的所有 k-理想何时都是 k-强不可约的，其证明显然。

命题 3.28。半环 R 的每个 k-理想都是 k-强不可约的，当且仅当 $\mathrm{I}_k(R)$ 是全序的。

我们以关于算术半环的一个定理结束本节，在该定理中， k-不可约性与 k-强不可约性相一致。

定理3.29。在一个算术半环 R 中，半环 R 的 k-理想当且仅当它是k-强不可约的。反之，如果半环 R 的 k-不可约理想是 k-强不可约的，则 R是算术的。

证明。 已在 [I56，定理 3] 中证明，在算术半环中，不可约理想与强不可约理想是等价的。由命题 3.21，我们便得到所述结论。反之， [I56，定理 7] 指出，如果不可约性蕴含强不可约性，那么该半环就是算术半环。再次将命题 3.21 应用于这一结果，我们得到逆命题。 □

推论 3.30. 在算术半环中，任意 k-理想都是包含它的所有 k-强不可约理想的交集。

4. k-EXTENSIONS AND k-CONTRACTIONS

本节旨在研究 k-理想及其在半环同态下的乘积、交与理想商的性质。这些性质是其（交换）环论版本的“k-理想论”推广（参见 [AM69，命题 1.17 和练习 1.18]）。

定义 4.1. 设 $\phi\colon R \to R'$ 是一个半环同态。
(1) 若 J 是 R'的 k-理想，则 J的 k-收缩（记作 J^c）定义为 $\phi^{-1}(J)$。(2) 若 I 是 R的 k-理想，则 I的 k-扩张（记作 I^e）定义为 $\mathrm{C}_k(\mathrm{h}\phi(I)\mathrm{i})$。

定理 4.2。设 $\phi\colon R \to R'$ 是一个半环同态。对于 R的 k-理想 I、 I_1 和 I_2 ，以及 R'的 k-理想J、 J_1 和 J_2 ，以下结论成立。
(1) J^c 是一个 k-理想的 R。(2)核kerϕ 是一个 k-理想的 R。(3) I^e 是一个 k-理想的 R'。(4) (a) $I \subseteq I^{ec}$ (b) $J \supseteq J^{ce}$ (c) $J^c = J^{cec}$ (d) $I^e = I^{ece}$。(5)集合$\{I \mid I^{ec} = I\}$与$\{J \mid J^{ce} = J\}$之间存在一个双射。(6) (a) $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e(b)(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$(c) $(I_1 : I_2)^e \subseteq (I_1^e : I_2^e)$ (d) $(\mathrm{R}_k(I))^e \subseteq \mathrm{R}_k(I)^e$。(7) (a) $(J_1 \cap J_2)^e = J_1^e \cap J_2^e(b)(J_1 J_2)^e \supseteq J_1^e J_2^e$(c) $(J_1 : J_2)^e \subseteq (J_1^e : J_2^e)$ (d) $(\mathrm{R}_k(J))^e = \mathrm{R}_k(J)^e$。(8)$\mathrm{R}_k(J)^c \subseteq \mathrm{R}_k(J^c)$。

证明。 (1) [G99， 命题 10。11]。
(2) 由于 0是一个 k-理想 R'，该断言由 (1) 得出。(3) 由引理 2.3(4)(4) 对于 (4.a)，注意到 $\phi(I) \subseteq C_k(\langle\phi(I)\rangle)$， 从而

$$I \subseteq \phi(I)^c \subseteq C_k(\langle\phi(I)\rangle)^c.$$

为证明 (4.b)， 令 $r' \in J^{ce} = \mathrm{C}_k(\mathrm{h}J^c\mathrm{i})$。则存在一个 $x \in \mathrm{h}\phi(J^c)\mathrm{i}$， 使得 $r' + x \in \mathrm{h}\phi(J^c)\mathrm{i}$。现在， $x \in \mathrm{h}\phi(J^c)\mathrm{i}$ 意味着 $x = \acute{\mathrm{I}}_i r'_i \phi(y_i)$， 对于 $r'_i \in R'$ 和 $y_i \in J^c$， 这随后意味着 $\phi(y_i) \in J$， 从而 $x \in J$。利用类似的论证，我们有 $r' + x \in J$。由于 J是一个 k-理想，这意味着 $r' \in J$， 证毕。利用 (4.a) 和 (4.b)， 我们即可证明 (4.c) 和 (4.d)。

(5) 考虑映射 $I \mapsto I^e$ 和 $J \mapsto J^c$， 证明即得。
(6) 为得到(6.a)， 令 $r' \in (I_1 \cap I_2)^e = \mathrm{C}_k(\mathrm{h}\phi(I_1 \cap I_2)\mathrm{i})$.这意味着对于某个$x \in \mathrm{h}\phi(I_1 \cap I_2)\mathrm{i}$， 有 $r' + x \in \mathrm{h}\phi(I_1 \cap I_2)\mathrm{i}$,从而 $x = \acute{\mathrm{I}}_i r'_i \phi(x_i)$,其中 $x_i \in I_1 \cap I_2$和 $r'_i \in R'$。这表明

$$\phi(x_i) \in C_k(\langle\phi(I_1)\rangle) \cap C_k(\langle\phi(I_2)\rangle),$$

因此 $x \in I_1^e \cap I_2^e$。同样地，我们得到 $r' + x \in I_1^e \cap I_2^e$。 由于 $I_1^e \cap I_2^e$是一个 k-理想（因为 I_1^e、 I_2^e都是理想，从而它们的交集也是理想），这意味着 $r' \in I_1^e \cap I_2^e$。 （6.b）的证明与（6.a）类似，主要区别在于使用同态性质： ϕ（$I_1 I_2$） $= \phi$（I_1）ϕ（I_2）。

为证明（6.c），设 $r' \in (I_1 : I_2)^e = \mathrm{C}_k(\mathrm{h}\phi(I_1 : I_2)\mathrm{i})$.根据 C_k 的定义，我们有$r' + x \in \mathrm{h}\phi(I_1 : I_2)\mathrm{i}$， 其中某个 $x \in \mathrm{h}\phi(I_1 : I_2)\mathrm{i}$ 满足此条件。但这意味着 $x = \acute{\mathrm{I}}_i r'_i \phi(r_i)$,其中 $r'_i \in R'$and$r_i \in (I_1 : I_2)$. 由此可得 $\phi(r_i) \in (\phi(I_1) : \phi(I_2))$. 因此,

$$x \in (C_k(\langle\phi(I_1)\rangle) : C_k(\langle\phi(I_2)\rangle)).$$

同样， 我们可以证明 $r' + x \in (I_1^e : I_2^e)$. 由于根据命题 2.7,$(I_1^e : I_2^e)$是一个 k-理想， 因此必有$r' \in (I_1^e : I_2^e)$,从而得证。

最后， 为了得到 (6.d)， 按照上述方法， 我们得到一个 $x \in \mathrm{h}\phi(\mathrm{R}_k(I))\mathrm{i}$， 这意味着$x = \acute{\mathrm{I}}_i r'_i \phi(x_i)$， 其中 $r'_i \in R'$and $x_i \in \mathrm{R}_k(I)$， 因此 $x_i \in P$ 对所有 $P \supseteq I$ 均成立。这意味着对所有 $P \supseteq I$， $\phi(x_i) \in \phi(P) \supseteq \phi(I)$。证明其余部分的论证与上文类似。

(7) 所有恒等式的证明都类似于（6）的证明。
(8) 注意， 如果 $y \in \mathrm{R}_k(J)^c$,那么 $y \in P$对所有 P使得 $P \supseteq J^c$， 其中 $P \in \mathrm{spec}_k(R)$. 由于

$$\mathcal{R}_k^c J = \left(\bigcap_{J \subseteq Q} Q\right)^c = \bigcap_{J^c \subseteq Q^c} Q^c,$$

我们有 $y \in \mathrm{R}_k^c J$。 □

结论性评述 4.3。我们以以下评述结束本文：

• 在本文后续部分，[DG23], 我们将探讨各种类型的 k-理想在半环的商与局部化下的性质。此外，在那篇论文中，我们旨在研究特殊类型半环中的 k-理想，即幂等半环、Gel'fand 半环、布尔半环和格序半环中的 -理想。

•在 [G99], 中，已经对半环上的模进行了全面研究，并引入了可减半模的概念。类似于我们在此考察的特殊 k-理想，也可以为可减半模引入相同的概念，并研究其性质。

• 利用 k-闭包运算，我们可以在 $\mathcal{I}(R)$ 上赋予一种次基闭集拓扑，并研究相应空间的拓扑性质。这项研究始于 [G23]。然而，也可以对 h-闭包运算开展类似研究。由于 k-闭包与 h-闭包运算之间存在良好的关系（见 [H15]），探究相应空间之间的拓扑联系将很有意义。

参考文献

[AK13] A. Altman 和 S. Kleiman，《交换代数术语》，Worldwide Center of Mathematics, LLC，2013。[AM69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数导论》，Addison-Wesley，1969。[AA08] R. E. Atani 和 S. E. Atani，《交换半环中的理想理论》，Bul. Acad. Stiin te Repub. Mold. Mat.，(2008)，14–23。[A08] A. Azizi，《强不可约理想》，J. Aust. Math. Soc.，84 (2008)，145–154。[B53] R. L. Blair，《理想格与环的结构》，Trans. the Amer. Math. Soc.，75 (1953)，136–153。[B72] N. Bourbaki，《数学元素：交换代数》，Addison-Wesley，Reading, MA，1972。[DG23] T. Dube 和 A. Goswami，《半环的某些 k-理想方面 II》（准备中）。[F49] L. Fuchs，《算术环的理想》，Comment. Math. Helv.，23 (1949)，334–341。[G99] J. S. Golan，《半环及其应用》，Springer，1999。[G23] A. Goswami，《半环的减性空间》，已投稿。[H15] H-C. Han，《半环中的极大 k-理想和 k-理想》，J. Algebra Appl.，14(10) (2015)，1250195（13 页）。[H58] M. Henriksen，《加法交换的半环中的理想》，Amer. Math. Soc. Notices，6(3) 31 (1958)，321。[L01] T. Y. Lam，《非交换环入门》，Springer，2001。[I56] K. Is´eki，《半环的理想理论》，Proc. Japan. Acad.，32 (1956)，554–559。[JRT22] J. Jun、S. Ray 和 J. Tolliver，《幂等半环上的格、谱空间与闭包运算》，J. Algebra，594 (2022)，313–363。[L95] S. LaGrassa，《半环：理想与多项式》，博士论文，爱荷华大学（1995）。[L65] D. R. LaTorre，《半环中的 h-理想与 k-理想》，Publ. Math. Debrecen，12 (1965)，219–226。[L15] P. Lescot，《半环中的素理想与一次理想》，Osaka J. Math.，52(3) (2015)，721–737。[SA92] M. K. Sen 和 M. R. Adhikari，《半环的 k-理想》，Internat. J. Math. & Math. Sci.，15(2) (1992)，347–350。[SA93] ———，《半环的极大 k-理想》，Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993)，699–703。[V39] H. S. Vandiver，《若干简单类型的半环》，Am. Math. Monthly，46(1) (1939)，22–26。[WSA96] H. J. Weinert、M. K. Sen 和 M. R. Adhikari，《半环中的单侧 k-理想与 h-理想》，Math. Pannon.，7 (1996)，147–162。

T. DUBE：[1] 数学科学系，南非大学，南非；[2] 国家理论与计算科学研究所（NITHECS），南非。
电子邮箱地址：dubeta@unisa.ac.za

A. GOSWAMI：[1] 数学与应用数学系，约翰内斯堡大学，南非；[2] 国家理论与计算科学研究所（NITHECS），南非。电子邮箱地址：agoswami@uj.ac.za