arXiv:2304.04213v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Apr 2023

平移不变自旋系统的本征态热化假说

ShokiSugimoto[1*], JoschaHenheik[2], VolodymyrRiabov[2],L´aszl´o Erd˝os[2]

[1]物理学系，东京大学，〒113-0033日本东京都文京区本乡7-3-1。[2]奥地利科学技术研究所，奥地利克洛斯特新堡Am Campus 1，3400。

*通讯作者。电子邮件：sugimoto@cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp；贡献作者：joscha.henheik@ist.ac.at；volodymyr.riabov@ist.ac.at；lerdos@ist.ac.at；

摘要

我们证明了具有平均场相互作用的典型平移不变量子自旋系统中，局域可观测量满足本征态热化假说（ETH）。这在数学上验证了文献 [1]中的观察：对于一类自然受限的可观测量，具有额外平移对称性的系统也可能满足 ETH。我们还提供了数值证据，表明具有局域相互作用的哈密顿量也存在同样的现象。

关键词： 本征态热化，微正则系综，平移不变性，量子自旋系统

AMS 学科分类： 60B20, 82B44, 82D30

日期：*2023*年*4*月*11*日

1 引言

近期实验已经证明，孤立量子系统在幺正时间演化下会发生热化 [2–7]。在这一背景下，热化意味着，经过长时间演化后，可观测量达到由统计力学决定的平衡（热）值。孤立量子系统发生热化背后的主要机制是一个更强的概念，即 本征态热化假说（本征态热化假说） [8–10]。非正式地说，本征态热化假说断言：(i)物理的 可观测量 A

它们在多体量子系统的每个本征态上都取其热值，且（ii） A 在能量本征基中的非对角元都小得可以忽略。特别是，若能谱不存在大量简并，ETH 保证了对任意具有宏观确定能量的初态， A 的热化 [11–13]。已有数值研究针对若干具有局域或少体可观测量的具体模型验证了 ETH [1, 14–19]。另一方面，近期研究揭示了若干类 ETH 失效的系统：例如具有大量局域守恒量的系统 [20–22], 多体局域化 [23, 24], 以及量子多体疤痕态 [25, 26]。

作为研究这一问题的另一种方法，已有证明表明，对于从不具有其他幺正对称性的维格纳矩阵系综中采样得到的 H [8, 27, 28]几乎所有哈密顿量，ETH 对任意确定性可观测量均成立（另见 [29, 30]关于更一般平均场系综中的 ETH）。如果哈密顿量具有某种幺正对称性，那么对于与这些对称性相关的守恒量，ETH 显然会失效，因为我们可以找到哈密顿量与守恒量的共同本征态。然而，参考文献 [1] 观察到了一个有趣的现象，即使在具有平移对称性的系统中，局域量仍然满足 ETH。因此，在现实情况下，ETH 以何种方式普遍地成立，以及它对哪一类可观测量成立，这一问题仍未得到完全解决。

在本文中，我们从数学上严格证明了 [1]中的一项观察。更准确地说，我们证明，对于具有平移对称性的一个系综的平均场情形，支集不超过系统尺寸一半的量通常以最优收敛速度满足 ETH。支集超过系统尺寸一半的量通常也满足 ETH，但收敛速度较慢；而对于某些支集扩展到整个系统的可观测量，ETH 通常会失效。对于平均场情形，我们还通过一个具有更现实局域相互作用的哈密顿量系综的数值模拟，对解析结果进行了补充。

2 设置

我们考虑定义在标准离散环面的 $L \in \mathbb{N}$ 个格点上的一维周期性量子自旋系统

$$\mathbb{T}_L := \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}.$$

在每个顶点 $j \in \mathbb{T}_L$ 上，单粒子希尔伯特空间 $\mathcal{H}_j$ 由 $\mathbb{C}^2$ 给出，我们将其标准基记为 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$。相应的 L 粒子希尔伯特空间

$$\mathcal{H} := \bigotimes_{j=1}^{L} \mathbb{C}^2$$

简单地由张量积给出，其维数为 2^L。为简便起见，我们将讨论限制在自旋-1/2 情形，但我们的结果可以直接推广到一般的自旋 s 情形，此时单粒子希尔伯特空间为 $\mathbb{C}^{2s+1}$。

接下来，我们介绍哈密顿量系综，它最初在参考文献 [31] 中提出，并将在本文中进行研究。定义中的主要参数是

一个可调的相互作用范围 $\ell \le L$，这使我们能够考察在现实情形下，ETH 在多大程度上普遍成立。

定义 2.1 (哈密顿量)。 令 $T = T_L$ 为作用于 $\mathbb{T}_L$ 顶点处 L 个自旋的（向左）平移算符。我们将具有局域相互作用的哈密顿量系综定义为

$$H_L^{(\ell)} := \sum_{j=0}^{L-1} T_L^{-j}(h_\ell \otimes I_{L-\ell})T_L^j\,, \quad h_\ell := \sum_{p_1,\ldots,p_\ell=0}^{3} J_{p_1,\ldots,p_\ell}\sigma_1^{(p_1)}\ldots\sigma_\ell^{(p_\ell)} \tag{2.1}$$

其中 $\ell \le L$ 为相互作用范围， $I_{L-\ell}$ 是作用于格点 $\ell+1$、.....、 L 上的恒等算符。这里， $\sigma_j^{(p)}$ 是作用于格点 $j \in \mathbb{T}_L$ 的 p^{th} 泡利矩阵 $\sigma^{(p)}$ ，回顾一下标准泡利矩阵：

$$\sigma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

4^ℓ 系数 $J_{p_1,\ldots,p_\ell}$ 是相互独立且同分布的实值高斯随机变量，均值为零，$\mathbb{E}J_{p_1,\ldots,p_\ell} = 0$，方差为

$$v_\ell^2 := \mathbb{E}|J_{p_1,\ldots,p_\ell}|^2\,.$$

哈密顿量系综 h_ℓ (2.1) 包含诸如 XYZ 模型这样的典型自旋模型，$h_\ell = \sum_{p=1}^{3} J_p\sigma_1^{(p)}\sigma_2^{(p)}$ 。

注意，哈密顿量 $H_L^{(\ell)}$ 是同一个局域哈密顿量 h_ℓ的平移版本。特别地， $H_L^{(\ell)}$ 按构造具有平移不变性，即 $T_L H_L^{(\ell)} T_L^{-1} = H_L^{(\ell)}$ 。我们施加这一结构，以研究具有某种对称性的哈密顿量。接下来，我们将通过从位置空间切换到动量空间，利用 $H_L^{(\ell)}$ 的这一特性。

引理 2.2. 设

$$\Pi_k := \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} e^{2\pi i\frac{kj}{L}} T_L^{-j} \quad for \quad k = 0,\ldots,L-1 \tag{2.3}$$

为投影到 k-动量空间的投影算符，即 $T_L\Pi_k = e^{2\pi i\frac{k}{L}}\Pi_k$。那么$H_L^{(\ell)}$ 在动量空间表象中是分块对角的，也就是在T_L的特征基中是分块对角的，因为我们有

$$H_L^{(\ell)} = L\sum_{k=0}^{L-1} \Pi_k(h_\ell \otimes I_{L-\ell})\Pi_k\,. \tag{2.4}$$

证明。 将 T的谱分解 $T = \sum_{k=0}^{L-1} e^{2\pi ik/L}\Pi_k$ 代入（2.1）即可立即得到。 □

正如我们将在引理 3.4 中证明的那样，每个 L 动量扇区的维数几乎相等，$\mathrm{tr}_L\,\Pi_k \approx 2^L/L$。

为了简洁地陈述我们的主要结果，即平移不变系统中的本征态热化假说（定理3.1），我们需要引入微正则平均。下面，我们用 $|E_\alpha^{(k)}\rangle$ 表示 $H_L^{(\ell)}$ 在 k- 动量扇区中、特征值为 E_α的归一化特征向量，即 $H_L^{(\ell)}|E_\alpha^{(k)}\rangle = E_\alpha|E_\alpha^{(k)}\rangle$ 以及 $\Pi_k|E_\alpha^{(k)}\rangle = |E_\alpha^{(k)}\rangle$。很容易看出， H 在每个动量扇区中的谱几乎必然是单重的。

定义2.3 (微正则系综)。 对于每个能量 $E\in\mathbb{R}$ 和能量窗口 $\Delta>0$，我们定义以能量 E 为中心、宽度为 2Δ 的微正则能量壳层 $\mathcal{H}_{E,\Delta}$，其定义为

$$\mathcal{H}_{E,\Delta} \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{L-1} \mathcal{H}_{E,\Delta}^{(k)}, \quad where \quad \mathcal{H}_{E,\Delta}^{(k)} \coloneqq \operatorname{span}\left\{ |E_\alpha^{(k)}\rangle : \left|E_\alpha^{(k)} - E\right| \le \Delta \right\}.$$

我们将 $\mathcal{H}_E^{(k)}{}_{,\Delta}$ 的维数记为 $d_E^{(k)}{}_{,\Delta}$，并将 $\mathcal{H}_{E,\Delta}$ 的维数记为 $d_{E,\Delta}=\sum_{k=0}^{L-1} d_E^{(k)}{}_{\Delta,}$。每当 $d_{E,\Delta}>0$时，我们将 $\mathcal{H}_{E,\Delta}$ 内任意自伴可观测量 $A\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 的微正则平均定义为

$$\langle A\rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})}(E) \coloneqq \frac{1}{d_{E,\Delta}} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{|E_\alpha^{(k)}\rangle\in\mathcal{H}_{E,\Delta}^{(k)}} \langle E_\alpha^{(k)}|A|E_\alpha^{(k)}\rangle \ . \tag{2.5}$$

注2.4。 微正则平均在取热力学极限之前模拟微正则系综。为了具有物理意义，对能量壳层$\mathcal{H}_{E,\Delta}$有两个自然要求:

(i) 态密度在区间 $[E-\Delta, E+\Delta]$ 内近似为常数。*(ii)* 微正则能量壳层包含 $\gg 1$ 个态，即 $d_{E,\Delta}\to\infty$，当 $L\to\infty$ 时。

请注意，对于任意固定的能量 E，*(i)* 对 Δ 给出上界，而 *(ii)* 给出下界；二者都取决于 E。我们指出，在只有少数几个态的谱边附近，无法保证这两项要求能够同时满足。

事实上，从物理学的角度来看，将 $\langle A\rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})}(E)$ 由 (2.5)定义为微正则系综的有限维近似，在 *(i)* 和 *(ii)* 不满足时毫无意义。然而，我们将把定义 *2.3* 对任意 Δ 的情形，视为对物理学文献中标准微正则平均定义的扩展。我们的主要结果定理*3.1*甚至在这种扩展意义下的微正则平均中仍然成立。

我们定义

$$N \coloneqq 2^L = \dim\mathcal{H}$$

对于总希尔伯特空间的维数。下文中的解析结果均指系统尺寸趋于无穷大的极限，即 $L\to\infty$，或等价地 $N\to\infty$。我们还将采用随机支配这一常见概念（例如参见 [32]）。

定义 2.5。 给定两族非负随机变量

$$X := \left(X^{(N)}(u) : N \in \mathbb{N},\ u \in U^{(N)}\right) \quad and \quad Y := \left(Y^{(N)}(u) : N \in \mathbb{N},\ u \in U^{(N)}\right)$$

以 N 为索引，若对所有 ξ、 $D > 0$，均有下式成立，则称 X 被 Y 随机支配：

$$\sup_{u \in U^{(N)}} \mathbb{P}\left[X^{(N)}(u) > N^{\xi} Y^{(N)}(u)\right] \le N^{-D}$$

对任意充分大的 $N \ge N_0(\xi, D)$，并在此情形下使用记号 $X \prec Y$ 或 $X = \mathcal{O}_{\prec}(Y)$。

3 平均场情形下的主要结果

在本节中，我们始终考虑平均场情形 $\ell = L$。对于任意 $q \le L$，我们还引入 q-局域可观测量 这一概念，它适用于形如 $A = A_q \otimes I_{L-q}$ 的自伴算子；也就是说， A_q 是自伴的，且仅作用于前 q 个格点。

这一设定下的主要结果如下定理所示。

定理 3.1 （平移不变系统中的本征态热化假说）。 设 $\ell = L$，并考虑式 $H_L^{(L)}$ （2.1）中的哈密顿量，其本征值为 $E_\alpha^{(k)}$，相应的归一化特征向量为 $|E_\alpha^{(k)}\rangle$。那么，对每个 $\Delta > 0$ 以及有界的 q-局域可观测量 $A = A_q \otimes I_{L-q}$，$\|A\| \lesssim 1$，均有

$$\max_{\alpha,\beta} \max_{k,k'} \left| \langle E_\alpha^{(k)} | A | E_\beta^{(k')} \rangle - \delta_{\alpha\beta}\delta_{k,k'} \langle A \rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})} (E_\alpha^{(k)}) \right| \prec \frac{1}{2^{\min\{L/2, L-q\}}}, \tag{3.1}$$

其中，最大值取遍所有标记 $H_L^{(L)}$ 本征向量的指标。特别地，对于 $q \le L/2$，*ETH* 的最优收敛速度为$1/\sqrt{N}$阶。

定理3.1 推广到任意维数的结果 $d \ge 2$ 见定理A.3，该定理位于附录中。

注 3.2（ETH 的典型性）。定理*3.1* 断言，对于任意固定的局部可观测量 A，*ETH* 以(3.1)所示形式以极高的概率成立，即除去概率为 $N^{-D} = 2^{-LD}$的事件后，对任意固定的 D均成立，精确定义见*2.5*。这一例外事件可能依赖于可观测量 A。然而，只要 q 是L-独立的（实际上允许有温和的对数级增长），以下结论也成立：

$$\max_{\alpha,\beta} \max_{k,k'} \max_{A} \left| \langle E_\alpha^{(k)} | A | E_\beta^{(k')} \rangle - \delta_{\alpha\beta}\delta_{k,k'} \langle A \rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})} (E_\alpha^{(k)}) \right| \prec \frac{1}{2^{L/2}}, \tag{3.2}$$

也就是说，我们可以对所有有界的 q-局域可观测量 A 中的 (3.1)取上确界。这一扩展是以下简单结果：在 $4^q \times 4^q$ 维的 q-局域可观测量空间的单位球中选取足够精细的网格，然后使用并集界。估计式 (3.2) 可以看作在我们的平移不变平均场算子类 $H_L^{(L)}$ 中，*ETH* 的典型性的一种非常强的形式。它断言，除去耦合常数 $J_{p_1,\ldots,p_L}$ 的一个例外集合外，哈密顿量 $H_L^{(L)}$ 满足

具有最优收敛速度的本征态热化假说，在整个谱上均匀成立，并针对所有有限程（q-局域）可观测量进行检验。对于任意 D，只要 L 足够大，例外集的测度为 2^{-LD} 量级。

在引理 3.5 中，我们将看到，在平均场情形下，每个动量扇区上的哈密顿量都是一个高斯酉系综矩阵；特别地，H 的态密度遵循 Wigner 半圆律。通过初等计算可得，该半圆的半径为

$$R := 2 \cdot 2^L \sqrt{L} v_L (1 + O(2^{-L})) .$$

鉴于注记 2.4，我们还提到，$\langle A \rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})}(E)$ 中的 (3.1) 可视为微正则系综中 A 在能量 $|E| \le R$ 处的期望的近似，条件是

$$\frac{R}{N^{2/3}} \ll \Delta \ll R - |E| . \tag{3.3}$$

(3.3) 中的上界来自注记 2.4中的要求 (i)，而 (3.3) 中的下界则源于 (ii)，这是因为 Wigner 矩阵的谱边附近的特征值间距为 $R/N^{2/3}$ 的量级。

为后文起见，我们引入以下记号

$$\langle A \rangle := \frac{\operatorname{tr} A}{\operatorname{tr} I}$$

表示有限维希尔伯特空间上算子 A 的归一化迹，其中 I 是该空间上的恒等算子。特别地，若 $A = A_q \otimes I_{L-q}$ 是一个 q-局域可观测量，则 $\langle A \rangle = \langle A_q \rangle$。

定理3.1的证明关键依赖于这样一个事实：在我们的平均场情形 $\langle E_\alpha^{(k)} | A | E_\beta^{(k')} \rangle$ 收敛于$\delta_{\alpha\beta}\delta_{k,k'} \langle A \rangle$。换言之，该系统的热力学性质是平凡的；$A$ 的热值始终由其平均迹给出。这一点形式化为以下主要命题：

命题 3.3. 在定理 *3.1*的假设下，有

$$\max_{\alpha,\beta} \max_{k,k'} \left| \langle E_\alpha^{(k)} | A | E_\beta^{(k')} \rangle - \delta_{\alpha\beta}\delta_{k,k'} \langle A \rangle \right| \prec \frac{1}{2^{\min\{L/2, L-q\}}} . \tag{3.4}$$

有了命题 3.3，我们可以立即证明定理 3.1。

定理 *3.1*的证明。根据微正则平均（3.4）对 $\alpha = \beta$ 和 $k = k'$ 进行平均，我们得到

$$\max_{\alpha} \max_{k} \left| \langle A \rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})} (E_\alpha^{(k)}) - \langle A \rangle \right| \prec \frac{1}{2^{\min\{L/2, L-q\}}} .$$

将此与（3.4）结合起来，即可立即得出该结论。 □

本节其余部分将用于证明命题3.3，证明分为四个步骤。

1. 各动量扇区的大小在极高精度下都相同（引理 3.4）。2. 在每个动量扇区中，平均场哈密顿量 $H_L^{(L)}$ 在平移算符 T的特征基下表示为一个高斯酉系综矩阵（引理 3.5）。3. ETH 在每个动量扇区内分别成立（引理 3.6）。4. 每个动量扇区上的平均迹与总平均迹彼此接近——至少对于局域可观测量如此（引理 3.7）。

我们首先精确地表述全部四个引理，随后完成命题3.3的证明。

引理 3.4（步骤 1：动量扇区的维数）。 k-动量扇区的维数 $\mathrm{tr}_L\,\Pi_k$ 彼此几乎相等，具体而言，我们有

$$\mathrm{tr}_L\,\Pi_k = \frac{2^L}{L} + \mathcal{O}\Big(L^{1/2}2^{L/2}\Big)\,.$$

证明见第 3.1 节

引理 3.5（步骤 2：动量块中的高斯酉系综）。 平均场哈密顿量的每个动量块 $H_L^{(L)}$ 在 T的特征基下表示为一个独立同分布的复高斯维格纳矩阵（高斯酉系综），其元素的均值为零，方差为 $2^L\,L^2\,v_L^2$。回顾定义 2.1中的 $v_L^2 = \mathbb{E}|J_{p_1,\,\ldots,\,p_L}|^2$ 。

证明。 在平均场情形 $\ell = L$下，直接计算矩阵元素的全部一阶和二阶矩可知，相互作用矩阵 h_ℓ 是一个复高斯维格纳矩阵，其元素的方差为 $2^L v_L^2$。由于从标准基到 T 的特征基的变换是酉变换，且高斯分布在酉变换下保持不变，因此， h_ℓ 在 T的特征基下表示时仍是一个高斯维格纳矩阵。最后，式 （2.4）中的投影算符 Π_k 将非对角块置为零。将式 L （2.4）中的附加因子计入方差，即可证明引理 3.5。

□

接下来，我们证明本征态热化假说在每个动量扇区内成立。

引理 3.6（步骤 3：每个动量扇区内的本征态热化假说）。 对于任意确定性可观测量 A，满足 $\|A\| \lesssim 1$

$$\max_{\alpha,\beta}\max_{k}\left|\langle E_\alpha^{(k)}|A|E_\beta^{(k)}\rangle - \delta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{tr}_L\,(\Pi_k A\Pi_k)}{\mathrm{tr}_L\,\Pi_k}\right| \prec \frac{1}{2^{L/2}}\,. \tag{3.5}$$

证明。 对于任意固定的 k，引理 3.5 断言 $\Pi_k H_L^{(L)}\Pi_k$ 是一个标准高斯酉系综矩阵（除以 v_L进行归一化）。利用 [28，定理 2。2]，因此其本征向量$|E_\alpha\rangle = |E_\alpha^{(k)}\rangle$ 满足本征态热化假说，其形式为 $\langle E_\alpha|A|E_\beta\rangle$ 近似等于 A 在 k-动量扇区中的归一化迹。

$$\langle A\rangle_k := \frac{\mathrm{tr}_L\,(\Pi_k A\Pi_k)}{\mathrm{tr}_L\,\Pi_k}$$

以极高概率，误差由 k-动量扇区维数倒数的平方根给出， $1/\sqrt{\mathrm{tr}_L\,\Pi_k}$。这在以下意义下成立

定义 2.5中给出的随机支配意义下。利用引理 3.4中的 $\mathrm{tr}_L\,\Pi_k \approx 2^L/L$ ，我们得到，对于每个固定的 3.5 k，式（3.5）对所有特征向量一致成立。最后，随机支配中的极高概率控制使我们能够通过简单的并集界，对 $k=1$、2、……、 L 取最大值。至此，式（3.5）得证。 □

我们指出，这个证明的关键要素—— [28],中的定理 2.2——不仅适用于高斯系综，也适用于条目独立同分布（其条目分布满足某些矩条件）的任意 Wigner 矩阵，而其证明相当复杂。不过，正如引理 3.6所需的那样，GUE 的本征态热化假说也可以通过更初等得多的方法证明，因为本征向量是 Haar 酉矩阵的列。具体而言，可以利用 Weingarten 演算直接计算 $\langle E_\alpha|A|E_\beta\rangle$ 的矩 [33]。由于我们希望在（3.5）中以极高概率进行控制，因此需要计算 $\langle E_\alpha|A|E_\beta\rangle - \delta_{\alpha\beta}\langle A\rangle_k$。Weingarten 形式体系给出了精确答案，但对于高阶矩而言有些复杂，因此要确定其主导阶（由“梯子”图给出），还需要做一些初等计算。为求简洁，我们因此在上文引理 3.6的证明中采用了定理 2。

最后，我们在以下引理中给出命题3.3证明的第四步，也是最后一步；其证明见第 3.2节。

引理 3.7 （步骤 4：动量扇区内的迹）。设 $A = A_q \otimes I_{L-q}$ 是任意一个满足 $\|A\| \lesssim 1$ 的 q-局域可观测量。则有

$$\max_k \left| \frac{\mathrm{tr}_L\,(\Pi_k A \Pi_k)}{\mathrm{tr}_L\,\Pi_k} - \langle A\rangle \right| \leq \mathcal{O}\left(\frac{L}{2^{\min\{L-q,L/2\}}}\right). \tag{3.6}$$

此外，对于 $q > L/2+1$ ，这个界是最优的（相差因子 L）。

有了这四个引理，我们现在可以着手证明命题 3.3。

命题 *3.3* 的证明。首先，对于任意 q-局域可观测量 $A = A_q \otimes I_{L-q}$，由引理 3.6和引理3.7可得

$$\max_{\alpha,\beta}\max_k \left| \langle E_\alpha^{(k)}|A|E_\beta^{(k)}\rangle - \delta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{tr}_L\,(\Pi_k A\Pi_k)}{\mathrm{tr}_L\,\Pi_k}\right| \prec \frac{1}{2^{\min\{L-q,L/2\}}}. \tag{3.7}$$

对于元素 $\langle E_\alpha^{(k)}|A|E^{(k')}{}_\beta\rangle$（满足 $k\neq k'$），即在非对角块中，$|E_\alpha^{(k)}\rangle$ 和 $|E^{(k')}{}_\beta\rangle$ 是彼此独立的标准化高斯向量。因此，标准的集中估计表明

$$\max_{k\neq k'} \left| \langle E_\alpha^{(k)}|A|E_\beta^{(k')}\rangle\right| \prec \frac{1}{2^{L/2}}. \tag{3.8}$$

将（3.7）与（3.8相结合，我们证明了命题3.3。 □

3.1 动量扇区的维数：引理的证明3.4

在本节中，我们证明引理 3.4，并证明动量扇区的大小几乎相等。为此，我们说明，每个动量块大小的首项由乘积基中非周期元素的数量给出，乘积基为 $\mathcal{H}$。

我们使用群论记号给出证明。对于这里考虑的一维情形，这并非严格必要，因为环面的平移群$\mathbb{T}_L$ 是循环群。不过，这样做是为了便于推广到 d 维情形（参见引理 A.4）。

证明。我们引入以下对象。令 $\mathfrak{S}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的典范乘积基，

$$\mathfrak{S}(L) \coloneqq \{\sigma : \mathbb{T}_L \to \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}\}, \tag{3.9}$$

并令 $\mathcal{G}$ 为由 $T = T_L$ 生成的 $\mathbb{T}_L$ 的平移群。注意， $\mathcal{G}$ 是一个大小为 $|\mathcal{G}| = L$ 的有限循环群。 $\mathcal{G}$ 在 $\mathfrak{S}(L)$ 上的作用定义为

$$(g\sigma)(x) \coloneqq \sigma(g^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{T}_L, \quad \sigma \in \mathfrak{S}(L), \quad g \in \mathcal{G}. \tag{3.10}$$

特别地，集合 $\mathfrak{S}(L)$ 是由集合 $\mathfrak{S}_b(L)$ 不交并而成，这些集合定义为

$$\mathfrak{S}_b(L) \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}(L) : |\mathcal{G}_\sigma| = b\}, \quad b = 1, 2, \ldots, L,$$

其中 $\mathcal{G}_\sigma \subset \mathfrak{S}(L)$ 是 σ 在作用（3.10）下的稳定子。根据轨道-稳定子定理， $\mathfrak{S}_b(L) = \emptyset$ 对所有不整除 b 的 L 均成立。由于群 $\mathcal{G}$ 是循环群，因此对于所有 b ，它都有一个大小为 $b|L$ 的唯一子群，具体为

$$\mathcal{G}^{(b)} \coloneqq \{T^{L/b}, T^{2L/b}, \ldots, T^L\}.$$

注意，每个 $\sigma \in \mathfrak{S}_b(L)$都对应于约化环面上的唯一映射 $\widetilde{\sigma}$ ，约化环面$\mathfrak{S}(L/b) \coloneqq \mathbb{T}_L/\mathcal{G}^{(b)}$，其定义为

$$\widetilde{\sigma}([x]) \coloneqq \sigma(x), \quad [x] \in \mathfrak{S}(L/b). \tag{3.11}$$

由于 σ 被 $\mathcal{G}^{(b)}$稳定化，映射 $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ 在（3.11）中是良定义且单射的。特别地， $|\mathfrak{S}_b（L）| \le 2^{L/b}$，因此

$$2^L = \sum_{b|L} |\mathfrak{S}_b(L)| = M(L) + \sum_{b|L, b\ge 2} |\mathfrak{S}_b(L)| \le M(L) + \mathcal{O}\Big(L^{1/2} 2^{L/2}\Big), \tag{3.12}$$

其中 $M(L) \coloneqq |\mathfrak{S}_1(L)|$ 表示 $\mathfrak{S}(L)$中具有平凡稳定子的元素个数。最后一个不等式源于这样一个事实： L 至多有 $\mathcal{O}(L^{1/2})$个约数。

由于 $M(L) \le 2^L$，我们从（3.12）得出 t

$$M(L) = 2^L + \mathcal{O}\Big(L^{1/2} 2^{L/2}\Big). \tag{3.13}$$

对于任意 $k \in \{0, \ldots, L-1\}$，我们都可以通过定义来构造一个对应于特征值 $e^{2\pi i k/L}$ 的 T 特征向量。

$$\mathbf{v}(\sigma, k) := \Pi_k \sigma = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} e^{2\pi i \frac{kj}{L}} T^{-j} \sigma \,, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_1(L) \,. \tag{3.14}$$

由于 σ 在 T 作用下的轨道由 L 个不同的基元素组成，向量$\mathbf{v}(\sigma, k)$ 非零。此外，与不相交轨道中的 σ 和 σ' 相对应的向量$\mathbf{v}(\sigma, k)$和$\mathbf{v}(\sigma', k)$线性无关，因为它们不含有任何共同的基元素。因此，第 k个动量空间的维数下界由 $\mathfrak{S}_1(L)$中的不相交轨道数给出，即

$$\mathrm{tr}_L \, \Pi_k \geq \frac{2^L}{L} + \mathcal{O}\Big(L^{-1/2} 2^{L/2}\Big) \,, \tag{3.15}$$

其中我们使用了不等式（3.13）以及 $\mathfrak{S}_1$（L）中的所有轨道大小均为 L这一事实。利用（3.15），我们得到以下不等式链

$$\mathrm{tr}_L \, \Pi_k = 2^L - \sum_{j \neq k} \mathrm{tr}_L \, \Pi_j \leq \frac{2^L}{L} + \mathcal{O}\Big(L^{1/2} 2^{L/2}\Big) \,, \tag{3.16}$$

结合（3.15），这就完成了引理3.4的证明。 □

3.2 动量扇区内的迹：引理3.7的证明

本节将证明引理3.7，该引理计算动量扇区上的归一化迹tr_L（$\Pi_k A \Pi_k$）/$\mathrm{tr}_L \, \Pi_k$ 与整体归一化迹 $\langle A \rangle$ 之间的差异，其中 q-局域可观测量为 $A = A_q \otimes I_{L-q}$。我们将 A 分解为迹部分$\langle A \rangle I$和无迹部分 $\mathring{A} := A - \langle A \rangle I$。

引理的证明 3.7。 代入 $\Pi_k := \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} e^{2\pi i \frac{kj}{L}} T_L^{-j}$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_L(\Pi_k A \Pi_k) &= \langle A \rangle \, \mathrm{tr}_L \, \Pi_k + \mathrm{tr}_L(\Pi_k \mathring{A}) \\ &= \langle A \rangle \, \mathrm{tr}_L \, \Pi_k + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L-1} e^{2\pi i \frac{kj}{L}} \, \mathrm{tr}_L(T_L^{-j} \mathring{A}) \,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

接下来，任务是评估量 $\mathrm{tr}_L(T_L^{-j} \mathring{A})$ 的大小。

引理 3.8。 设 $A := A_q \otimes I_{L-q}$ 是一个 q-局域可观测量，且满足 $\|A\| \lesssim 1$。那么，对于任意 $j = 1$、……、$L-1$，有

$$\Big| \mathrm{tr}_L(T_L^{-j} A) \Big| \lesssim 2^{\max\{q, \gcd(j, L)\}} \,, \tag{3.18}$$

其中 gcd 表示最大公约数。

将（3.18）与 $\gcd(j,\ L) \le L/2$ 对 $j = 1, \ldots, L-1$ 以及引理 3.4 结合，可得界（3.6）。（3.6）对 $q > L/2+1$ 的最优性将在下文的引理 3.9中证明。 □

接下来给出引理 3.8 的证明。

引理 *3.8*。我们选择一个乘积基 $\{\, |s_1 \ldots s_L\rangle \mid s_j \in \{\uparrow, \downarrow\}\,\}$ 来计算迹。然后，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{tr}_L(T_L^{-j}A)\right| &= \left|\sum_{s_1\ldots s_L} \langle s_{1+j}\ldots s_{q+j}|A_q|s_1\ldots s_q\rangle \prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}\right| \\ &\lesssim \sum_{s_1\ldots s_L} \prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

由于克罗内克δ函数的乘积 $\prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}$，并非所有求和变量 $s_1, \ldots, s_L$ 都相互独立。

为了计算右端（3.19）中独立求和的数量，并得到 $\mathrm{tr}_L(T_L^{-j}A)$ 的上界，其中 $j = 1, \ldots, L-1$，我们计算乘积中独立 delta 的数量

$$\mathcal{G}^{(L)}_{q,j} \coloneqq \prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}\,. \tag{3.20}$$

这里，并非 $\mathcal{G}^{(L)}_{q\,j}$,中的所有δ函数都是独立的，也就是说，我们可以用更少的δ函数来表示 $\mathcal{G}^{(L)}_{q\,j}$,。例如，我们有 $\mathcal{G}^{(4)}_{1}$,2 $=\delta_{s_2 s_4}\delta_{s_3 s_1}\delta_{s_4 s_2} = \delta_{s_3 s_1}\delta_{s_4 s_2}$。

为了得到 $\mathcal{G}^{(L)}_{q\,j}$,的一个包含最少 δ函数的表达式，我们用图形表示乘积 $\prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}$：将格点排列在一个圆上，并用一条连接格点 m 和 $m+j$ 的线表示 $\delta_{s_m s_{m+j}}$（图 1）。通过在 $\prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}$的图中每出现一个环就恰好删去一个δ函数，即可得到 $\mathcal{G}^{(L)}_{q\,j}$,的最简表示。

的图可分两步得到：首先，在步骤 (i) 中画出 $\prod_{m=1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}$ 的图；然后，在步骤 (ii) 中删去对应于 δ函数 $\delta_{s_m s_{m+j}} (m = 1, \ldots, q)$的线，这些线在图1中以红色虚线表示。

在第一步 (i) 中，恰有 $\gcd(j, L)$ 个环，分别从格点 $1, \ldots, \gcd(j, L)$ 开始。若 $q > \gcd(j, L)$，则第二步 (ii) 之后不再有环剩余。因此，我们得到 $\mathcal{G}^{(L)}_{q\,j}$, 的最简表示为 $\mathcal{G}^{(L)}_{q}$,$_j$ $= \prod_{m=q+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}$。若 $q \le \gcd(j, L)$，则第二步 (ii) 之后，从格点 $q+1, \ldots,$ $\gcd(j, L)$ 开始的环仍然存在；对每个环，我们移除一个 delta，从而得到 $\mathcal{G}^{(L)}_{q\,j}$, 的最简表示为 $\mathcal{G}^{(L)}_{q}$,$_j$ $= \prod_{m=\gcd(j,L)+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}}$。

总之，我们得到 $\mathcal{G}_{q\,j}^{(L)}$，的最简表示为

$$\mathcal{G}_{q,j}^{(L)} = \prod_{m=\max\{q,\gcd(j,L)\}+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}} \,. \tag{3.21}$$

将（3.21）代入（3.19）可得

$$\left|\mathrm{tr}_L(T_L^{-j}A)\right| \lesssim \sum_{s_1\ldots s_L} \prod_{m=\max\{q,\gcd(j,L)\}+1}^{L} \delta_{s_m s_{m+j}} = 2^{\max\{q,\gcd(j,L)\}} \,. \qquad \square$$

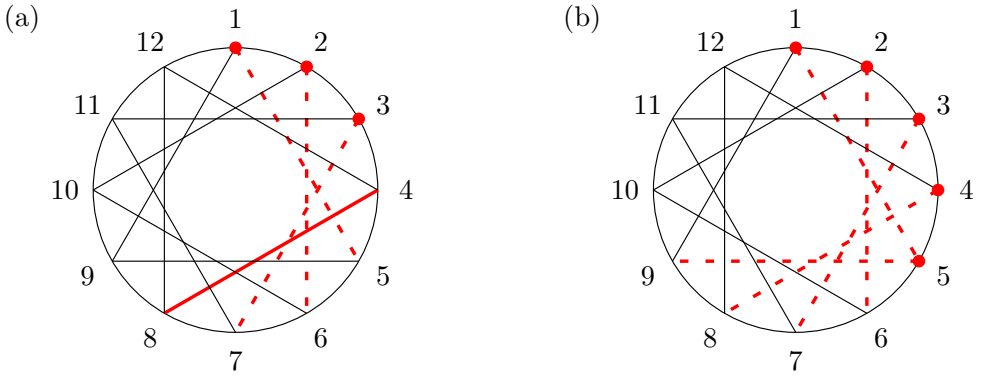

图1$\prod_{m=q+1}^{L}\delta_{s_{m+j}s_m}$ 对于(a) $L=12$、 $q=3$、 $j=4$ 和(b) $L=12$、 $q=5$、 $j=4$的乘积的图示表示。对于第一种情况 (a)，其中 $q<\gcd(j,L)$，步骤(ii) 后仍有一个4-8-12-4 的环，其中恰好包含一个用实心红线表示的冗余狄拉克δ函数 $\delta_{s_4 s_8}$。一般而言， $\prod_{m=q+1}^{L}\delta_{s_{m+j}s_m}$的图中每出现一个环，就会出现恰好一个冗余狄拉克δ函数。

最后，我们证明在 $q>L/2+1$ 区间内（3.6）的最优性。

引理 3.9。令 $B_q := T_q + T_q^{-1} - 2^{2-q}I_q$，其中 T_q 是仅作用于环面 $\mathbb{T}_q$上排列的前 q 个自旋的（左）平移算符。注意， B_q 是厄米且无迹的。那么，对于 $q>L/2+1$, $B := B_q \otimes I_{L-q}$ 在 k-动量扇区内的归一化迹为

$$\frac{\mathrm{tr}_L(\Pi_k B \Pi_k)}{\mathrm{tr}_L\,\Pi_k} = \frac{2}{2^{L-q}}\cos\left(\frac{2\pi k}{L}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{L}{2^{L/2}}\right). \tag{3.22}$$

这表明 q-局域可观测量 $B_q := T_q + T_q^{-1} - 2^{2-q}I_q$ 在 $q>L/2+1$时达到界限（3.6）。这还表明，在动量扇区内归一化迹的偏差 $\mathrm{tr}_L(\Pi_k B\Pi_k)/\mathrm{tr}_L\,\Pi_k$，相对于 $\langle B\rangle = 0$的偏差 $2^{-(L-q)}$，其量级为$2^{-(L-q)}$，当 $q>L/2+1$时会成为 ETH 中误差的主要来源。

引理3.9的证明。我们首先缩小一般成立的表达式（3.17）中对 j 求和的范围，并将其应用于 B_q。为此，我们引入奇偶算子 P_L，其定义为 $P_L\,|s_1 s_2 \dots s_L\rangle :$ $= \ |s_L \dots s_2 s_1\rangle$。它满足 $P_L T_L P_L \ = \ T_L^{-1}$ 以及 $P_L A P_L = I_{L-q} \otimes (P_q A_q P_q)$，对任意 $A = A_q \otimes I_{L-q}$均成立。由于 B_q 在奇偶变换下保持不变，因此我们有

$$\mathrm{tr}_L(T_L^{-j} B) = \mathrm{tr}_L[T_L^{+j}(I_{L-q} \otimes B_q)] = \mathrm{tr}_L(T_L^{-(L-j)} B)\,,$$

因此，借助（3.17）和（2.3），我们可以将其改写为

$$\mathrm{tr}_L(\Pi_k B \Pi_k) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \mathrm{tr}_L(T_L^{-j} \mathring{B}) \cos\left(\frac{2\pi k j}{L}\right) + \begin{cases} \frac{(-1)^k}{L} \mathrm{tr}_L(T_L^{-\frac{L}{2}} \mathring{B}) & L \text{ even} \\ 0 & L \text{ odd}\,. \end{cases} \tag{3.23}$$

当 $q > L/2 + 1$ 时，我们有 $j < q$，沿着 $\mathcal{G}_{q\,j}^{(L)}$ 的图中的线移动时，无法跳过区域 1、……、j（回忆一下（3.20））。因此，每条从格点 $p \in \{q+1, \dots, q+j\}$ 之一出发的线都会经过 $\{1, \dots, j\}$ 中的一个点。此外，p 与从 p 出发的线和 $\{1, \dots, j\}$ 的第一个交点之间的对应关系是一一对应的。因此，存在一个作用在 1、……、j 上的置换 τ_j，使得对于 $i = 1$、……、j，有$s_{q+i} = s_{\tau(i)}$，这是由于 $\mathcal{G}_{q\,j}^{(L)}$。借助这个置换 τ，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_L(T_L^{-j} B) &= \sum_{s_1 \dots s_L} \langle s_{q+1} \dots s_q s_{q+1} s_{q+j} | B_q | s_1 \dots s_q \rangle \, \mathcal{G}_{q,j}^{(L)} \\ &= \sum_{s_1 \dots s_q} \langle s_{q+1} \dots s_q s_{\tau(1)} s_{\tau(j)} | B_q | s_1 \dots s_q \rangle \\ &= \mathrm{tr}_q(\tau_j^\dagger T_q^{-j} B_q) \\ &= \mathrm{tr}_q(\tau_j^\dagger T_q^{-(j-1)}) + \mathrm{tr}_q(\tau_j^\dagger T_q^{-(j+1)}) - 2^{2-q}\,\mathrm{tr}_q(\tau_j^\dagger T_q^{-j})\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

由于 τ_j 是一个 j-局域算子（不一定是自伴的），作用于由 q 个格点组成的链上，因此我们可以对（3.24）中的每一项应用引理 3.8。结合 $j < q - 1$ 和 $\gcd(j,\ q) \le j$，我们得到

$$\mathrm{tr}_L(T_L^{-j} B) = \delta_{j1} 2^q + \mathcal{O}\big(2^j\big) = \delta_{j1} 2^q + \mathcal{O}\Big(2^{L/2}\Big)\,.$$

将该结果代入（3.23），并利用引理$_L\,\Pi_k \ = \ \frac{2^L}{L} \ + \mathcal{O}\big(L^{1/2} 2^{L/2}\big)$ 中的3.4，我们得到结果（3.22）。 □

4定理的数值验证3.1 对于 $\ell = \mathcal{O}(1)$

在本节中，我们通过数值结果展示，定理 3.1 对于 $\ell = 2$的非平均场情形也成立。为此，我们采用文献 [31, 34]中使用的以下 ETH 度量。对于任意自伴算符 A，我们定义

$$\Lambda = \Lambda(A) := \mathbf{E} \max_k \max_\alpha{}' \frac{\left| \langle E_\alpha^{(k)} | A | E_\alpha^{(k)} \rangle - \langle A \rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})}(E_\alpha^{(k)}) \right|}{a_{\max} - a_{\min}}\,, \tag{4.1}$$

其中 $a_{\max(\min)}$ 是 A的最大（最小）特征值。这里，$\mathbf{E}$ 表示对哈密顿量的各次实现（2.1）取平均，而 $\max_{\alpha}{}'$ 表示对谱中心能量壳层中的本征态取最大值，即满足以下条件的 $|E_\alpha^{(k)}\rangle$ ： α 。

$$\left|E_\alpha^{(k)} - \langle H\rangle\right| \le \Delta\,.$$

能量区间的宽度 Δ 设为 $\Delta = 0.4/L$ ，使其满足备注 2.4 中针对 $L \ge 6$提到的两个物理要求。采用这一 Δ取值后，由（4.1）定义的微正则能量壳层 $\mathcal{H}_{\langle H\rangle,\Delta}$ 通常包含超过 10 个态，而态密度在$\mathcal{H}_{\langle H\rangle,\Delta}$内不会变化太大。

我们选择 $A = B_q \otimes I_{L-q}$ 作为可观测量，其中 $B_q \coloneqq T_q + T_q^{-1} - 2^{2-q} I_q$ ，适用于$q = 2$、……、L。它使（3.6）中的上界取到等号，因此也使（3.2）中的上界取到等号。采用这一选择，对于任意 L 和 q，都有 $a_{\max} - a_{\min} \simeq 4$ 。因此，ETH 度量 Λ 本质上与定理 3.1 中（3.2）左侧的对角部分相同——不同之处在于，现在只在谱中心处对 α 取最大值（而不对所有 A取最大值）。这是因为，当 $\ell \ll L$ [35]时，局域可观测量 A $=A_q \otimes I_{L-q}$ 的本征态期望值 $\langle E_\alpha^{(k)}|A|E_\alpha^{(k)}\rangle$ 通常会呈现能量依赖性；对于计算上可处理的系统尺寸，在边缘附近的态数不足以计算微正则平均。ETH 度量 Λ具有合理的热力学性质：(i) 在线性变换 $A \mapsto aA + b$下保持不变；(ii) 无量纲；(iii) 对可加可观测量 A [31]具有热力学广延性。

图 2(a)–(c) 描绘了不同参数 q 取值下，ETH 度量 Λ 对 L 的依赖关系。特别是，图 2(b) 表明，只要 L 大致等于 q ，使得 $L - q < L/2$，ETH 度量 Λ 就会按 $\propto 2^{-L}$ 衰减。 q 取值越小，衰减速率越慢；但随着 q 增大，衰减速率会趋近于 2^{-L} 。在图 2(c) 中，我们进一步考察了 Λ 对 L 的依赖关系，其中 $q = 6$。数据表明，对于 $L - q \ll L/2$， Λ 按 $\propto 1.8^{-L}$ 衰减；而对于 $L \gtrsim 2q$， Λ 按 $\propto 1.8^{-L/2}$ 衰减。这些数值观察结果与我们针对平均场情形在定理 3.1 中得到的解析结果一致。该定理预言，在区域 $L - q \ll L/2$ 中， Λ 关于 L 指数衰减的指数应为区域 $L/2 \gtrsim L - q$ 中的两倍。这一事实表明，只要适当选择能量壳层宽度，该定理对于谱主体部分中的 $\ell = \mathcal{O}(1)$ 仍定性成立。

致谢。LE、JH 和 VR 获得了编号为 101020331 的 ERC高级资助“RMTBeyond”的资助。SS 获得了日本学术振兴会（JSPS）KAKENHI资助（编号 JP22J14935）以及东京大学世界领先创新研究生培养计划（WINGS）项目“推动变革的前沿物理与数学计划”（FoPM）的资助。

声明

竞争利益。 作者声明不存在利益冲突

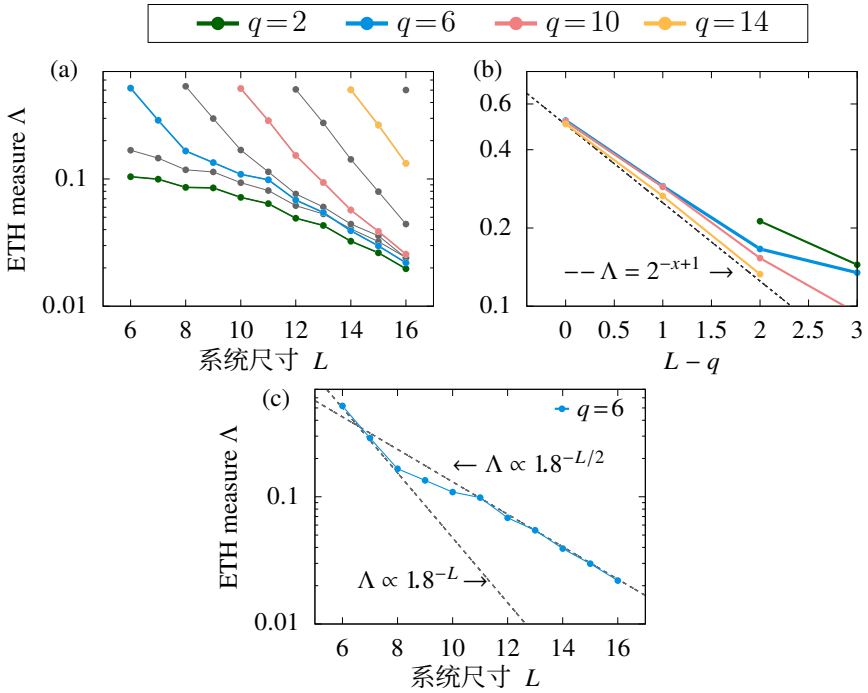

图 2 （a）可观测量 $A = B_q \otimes I_{L-q}$ 在$B_q \coloneqq T_q + T_q^{-1} - 2^{2-q} I_q$条件下，ETH 度量 Λ 随系统尺寸的变化。彩色曲线之间的灰色曲线表示 q 的中间值，即 $q = 4$、8、12。（b）图（a）中的相同数据，对应 $q = 2$、6、10 和 14，并以 $L - q$ 为横轴绘制。当 $L \simeq q$ 时， $L - q < L/2$， Λ 随 $\propto 2^{-L}$ 衰减。（c）图（a）中的相同数据，对应 $q = 6$。当 $L - q \ll L/2$ 时，它随 $\propto 1.8^{-L}$ 衰减。当 $L/2 \gtrsim L - q$ 时， Λ 的衰减变慢，并遵循底数为 $1.8^{-1/2}$ 的另一种指数衰减，而非 1.8^{-1}。除底数的值外，这一行为与（3.2）一致；式（3.2）预言，在区域 $L - q \ll L/2$ 中， L 内 Λ 指数衰减的指数应为区域 $L/2 \gtrsim L - q$ 中的两倍。标准误差小于数据点的大小。每个数据点的样本数在 1000 至 10000 之间。

附录A 扩展到更高维数

在本附录中，我们将主要结果定理 3.1推广到 d 维情形。

A.1 多维设置

设 $\mathbf{L} \coloneqq (L_1, \ldots, L_d)$ 为一个正整数向量，并令 $V \coloneqq \prod_{s=1}^{d} L_s$。我们考虑一个 d 维系统，其中 V 个量子自旋位于经典离散环面的顶点上

$$\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \coloneqq \bigtimes_{s=1}^{d} \mathbb{Z}/L_s\mathbb{Z}\,.$$

与之前一样，每个顶点上的单粒子希尔伯特空间为 $\mathbb{C}^2$，其标准基为 $\{|\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$。相应的 V 粒子希尔伯特空间为

$$\mathcal{H} \coloneqq \bigotimes_{s=1}^{V} \mathbb{C}^2 \quad \text{with dimension} \quad \dim\mathcal{H} = 2^V \,.$$

对于向量 $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$，我们引入一个矩形子区域 $\mathcal{R}_{\mathbf{q}} \subset \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$，定义如下

$$\mathcal{R}_{\mathbf{q}} \coloneqq \Big\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \colon 1 \le x_s \le q_s \,,\ s = 1, \ldots, d \Big\} \,.$$

形如 $A = A_{\mathbf{q}} \otimes I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}}$ 的自伴算符称为**q-局域可观测量**，其中 $A_{\mathbf{q}}$ 是自伴算符，作用于 $\mathcal{R}_{\mathbf{q}}$中自旋的希尔伯特空间，而 $I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}}$是 $\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}$上的恒等算符。

最后，令 T_s 为沿第 s个坐标方向作用于 $\mathbb{T}_{\mathbf{L}}$的（向左）平移算符。对于向量$\mathbf{j} \coloneqq (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$，我们引入 $T^{\mathbf{j}} \coloneqq \prod_{s=1}^{d} T_s^{j_s}$。

我们的模型的 d维版本在定义2.1 中如下给出。

定义 A.1. 设向量 $\boldsymbol{\ell} \coloneqq (\ell_1, \ldots, \ell_d) \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$ 确定各坐标方向上的相互作用范围。我们将局域相互作用的哈密顿量系综定义为

$$H_{\mathbf{L}}^{(\boldsymbol{\ell})} \coloneqq \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}} T^{-\mathbf{j}} \big(h_{\boldsymbol{\ell}} \otimes I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\boldsymbol{\ell}}} \big) T^{\mathbf{j}} \quad \textit{with} \quad h_{\boldsymbol{\ell}} \coloneqq \sum_{p_1, \ldots, p_{\boldsymbol{\ell}} = 0}^{3} J_{p_1, \ldots, p_{\boldsymbol{\ell}}} \sigma_1^{(p_1)} \ldots \sigma_{\boldsymbol{\ell}}^{(p_{\boldsymbol{\ell}})} \quad \text{(A1)}$$

其中符号 **1**、**2**、**.....**、 $\boldsymbol{\ell}$ 以任意顺序标记 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\ell}}$ 的元素。如同(2.1)中， $\sigma^{(p)}$ 对于 $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ 是泡利矩阵 (2.2)。

$4^{|\mathcal{R}_{\boldsymbol{\ell}}|}$ 系数 $J_{p_1, \ldots, p_{\boldsymbol{\ell}}}$ 是均值为零的独立同分布实高斯随机变量，$\mathbb{E} J_{p_1, \ldots, p_{\boldsymbol{\ell}}} = 0$，方差为 $v_{\boldsymbol{\ell}}^2 \coloneqq \mathbb{E} |J_{p_1, \ldots, p_{\boldsymbol{\ell}}}|^2$。

我们有引理的以下多维类比2.2，**引理 A.2**。 设

$$\Pi_{\mathbf{k}} \coloneqq \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}} e^{2\pi i \sum_{s=1}^{d} \frac{k_s j_s}{L_s}} T^{-\mathbf{j}} \quad \textit{for} \quad \mathbf{k} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$$

为到 $\mathbf{k}$ 动量空间的投影算符，即 $T_s \Pi_{\mathbf{k}} = e^{2\pi i \frac{k_s}{L_s}} \Pi_{\mathbf{k}}$ 对所有$s = 1$，**.....**， d。那么我们有

$$H_{\mathbf{L}}^{(\boldsymbol{\ell})} = V \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}} \Pi_{\mathbf{k}} \big(h_{\boldsymbol{\ell}} \otimes I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\boldsymbol{\ell}}} \big) \Pi_{\mathbf{k}} \,.$$

证明。 这由引理 2.2 按坐标逐一得到。 □

记 $|E_\alpha^{(\mathbf{k})}\rangle$ 为 $H^{(\boldsymbol{\ell})}{}_{\mathbf{L}}$ 所对应的特征值E_α 以及 **k**-动量扇区，即 $H^{(\ell)}{}_{\mathbf{L}}$ $|E_\alpha^{(\mathbf{k})}\rangle = E_\alpha |E_\alpha^{(\mathbf{k})}\rangle$ 和 $\Pi_{\mathbf{k}} |E_\alpha^{(\mathbf{k})}\rangle = |E_\alpha^{(\mathbf{k})}\rangle$，微正则平均的定义 与定义 2.3完全类似。

此外，每当我们使用符号 $\prec$ 表示随机支配（定义 2.5）时，均默认其带有 $N := 2^V$。

A.2 主结果的多维版本

定理 d维版本如下。3.1 表述如下。

定理 A.3 (d维平移不变系统中的本征态热化假说)。 设 $\ell = \mathbf{L}$，并考虑由 $H^{(\mathbf{L})}$ 给出的哈密顿量(A1)，其特征值为 $E_\alpha^{(\mathbf{k})}$，归一化本征向量为 $|E_\alpha^{(\mathbf{k})}\rangle$。那么，对于任意 $\Delta > 0$ 以及有界的 $\mathbf{q}$-局域可观测量 $A = A_{\mathbf{q}} \otimes I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}}$，满足 $q_s \le L_s/2$ 对所有 $s = 1, \dots, d$，都有

$$\max_{\alpha,\beta} \max_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \left| \langle E_\alpha^{(\mathbf{k})} | A | E_\beta^{(\mathbf{k}')} \rangle - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \langle A \rangle_\Delta^{(\mathrm{mc})} (E_\alpha^{(\mathbf{k})}) \right| \prec \frac{1}{2^{V/2}} \,. \tag{A2}$$

也就是说，本征态热化假说以最优收敛速度成立。

证明定理 A.3 的主要策略与定理 3.1完全相同，相关内容已在命题 3.3之后概述。因此，我们只讨论与第 3 节证明的区别，这些区别仅在于步骤 1（推广引理 3.4，参见引理 A.4）和步骤 4（推广引理 3.7，参见引理 A.4）。

引理A.4（步骤 1：动量扇区的维数）。 维数 $\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}\, \Pi_{\mathbf{k}}$ 的 $\mathbf{k}$-动量扇区对于$\mathbf{k} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$ 几乎彼此相等，其意义是我们有

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}\, \Pi_{\mathbf{k}} = \frac{2^V}{V} + \mathcal{O}\Big(2^{V/2 + (\log_2 V)^2}\Big) \,.$$

证明。令 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ 表示 $\mathcal{H}$的典范乘积基，如（3.9）所示，并令 $\mathcal{G}$为由平移算符 $\{T_s\}_{s=1}^d$生成的交换群。对 $\mathfrak{S}$ 的作用由（3.10）定义。

一般而言，群 $\mathcal{G}$ 不是循环群，因此 $\mathcal{G}$ 的子群并不由其大小唯一确定。然而， $\mathfrak{S}$ 可以分解为由 $\mathfrak{S}_\mathcal{K} = \mathfrak{S}_\mathcal{K}(\mathbf{L})$ 定义的集合的不交并。

$$\mathfrak{S}_\mathcal{K} := \{\sigma \in \mathfrak{S} : \mathcal{G}_\sigma = \mathcal{K}\} \,,$$

其中 $\mathcal{G}_\sigma \subset \mathcal{G}$ 是 σ 在作用（3.10）下的稳定子，且 $\mathcal{K} \le \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$的子群。类似于（3.11），对于任意子群 $\mathcal{K}$， $\mathcal{G}$我们定义映射

$$\varphi_\mathcal{K} : \mathfrak{S}_\mathcal{K} \to \Big({}^{\mathbb{T}_{\mathbf{L}}}\!/_{\mathcal{K}} \to \{\uparrow, \downarrow\} \Big) \,, \quad \big(\varphi_\mathcal{K}(\sigma)\big)([x]) := \sigma(x) \,, \quad [x] \in {}^{\mathbb{T}_{\mathbf{L}}}\!/_{\mathcal{K}} \,,$$

很容易看出这是一个单射，因此也是一个单射， $|\mathfrak{S}_\mathcal{K}| \le 2^{V/|\mathcal{K}|}$。因- 此，将 $\mathfrak{S}$ 中具有平凡稳定子的元素数量记为 $M(\mathbf{L})$，我们得到

$$2^V = \sum_{\mathcal{K} \le G} |\mathfrak{S}_\mathcal{K}| = M(\mathbf{L}) + \sum_{K \le G, |\mathcal{K}| \ge 2} |\mathfrak{S}_\mathcal{K}| \le M(\mathbf{L}) + s(\mathcal{G}) 2^{V/2} \,,$$

其中 $s(\mathcal{G})$ 表示 $\mathcal{G}$ 的子群数量。将此与以下众所周知的界限[1]结合

$$s(\mathcal{G}) \le |\mathcal{G}|^{\log_2 |\mathcal{G}|} \tag{A3}$$

以及平凡估计 $M(\mathbf{L}) \le 2^V$，我们得出结论

$$M(\mathbf{L}) = 2^V + \mathcal{O}\Big(2^{V/2+(\log_2 V)^2}\Big). \tag{A4}$$

为每个具有平凡稳定子的不相交轨道构造固定动量的一组线性无关向量$\mathbf{k} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$的方法与（3.14）类似。结合（3.15）和（3.16）的类似估计以及（A4），即可完成引理 A.4 的证明。

□

最后，我们讨论步骤 4的推广，即引理 3.7。

引理 A.5 (步骤 4：动量扇区内的迹)。 设 $A = A_{\mathbf{q}} \otimes I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}}$ 是一个有界的$\mathbf{q}$-局域可观测量，对所有 $s = 1$、……、d 都有 $q_s \le L_s/2$，则有

$$\max_{\mathbf{k}} \left| \frac{\mathrm{tr}_{\mathbf{L}} \left(\Pi_{\mathbf{k}} A \Pi_{\mathbf{k}}\right)}{\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}\, \Pi_{\mathbf{k}}} - \langle A \rangle \right| \le \mathcal{O}\left(\frac{V}{2^{V/2}}\right). \tag{A5}$$

证明。 将 $\Pi_{\mathbf{k}} := \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}} e^{2\pi i \sum_{s=1}^{d} \frac{k_s j_s}{L_s}} T^{-\mathbf{j}}$ 代入$\mathbf{k} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$，我们得到

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{L}} \left(\Pi_{\mathbf{k}} A \Pi_{\mathbf{k}}\right) = \langle A \rangle \,\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}\, \Pi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \{\mathbf{0}\}} e^{2\pi i \sum_{s=1}^{d} \frac{k_s j_s}{L_s}} \,\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}} \mathring{A}) \,.$$

因此，任务是评估量 $\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}} \mathring{A})$ 的大小。

引理 A.6。 设 $A := A_{\mathbf{q}} \otimes I_{\mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}}$ 是一个 $\mathbf{q}$-局域可观测量，且对所有$s = 1$、…、d 和 $\|A\| \lesssim 1$，均有 $q_s \le L_s/2$ 。那么，对任意 $\mathbf{j} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \{\mathbf{0}\}$，有

$$\left|\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}} A)\right| \lesssim 2^{V/2} \,. \tag{A6}$$

将（A6）与引理 A.4 结合可得界（A5）。 □

剩下要证明引理A.6。

引理*A.6*的证明。该 $d = 1$ 情形已在引理3.8中证明。因此，我们在下文假设 $d \ge 2$。我们在 $\mathbb{T}_{\mathbf{L}}$ 上选取希尔伯特空间的正交归一基$\{\, |s\rangle \mid s\colon\ \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \to \{\uparrow, \downarrow\}\,\}$ 以计算迹。然后，类似于（3.19），我们得到

$$\left|\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}} A)\right| \lesssim \sum_{s\colon\, \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \to \{\uparrow,\downarrow\}} \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}} \delta_{s(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}+\mathbf{j})} \,. \tag{A7}$$

[1]更确切地说，为了说明（A3）成立，注意，对于任意子群 $\mathcal{K}$ （属于） $\mathcal{G}$ 以及任意 $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{K}$，由 $\mathcal{K}$ 和 g 生成的子群大小至少为 $2|\mathcal{K}|$。因此，任意子群 $\mathcal{K}$ 至多由 $\log_2 |\mathcal{G}|$ 个元素生成，故 $\mathcal{G}$ 的所有子群构成的集合可单射映射到 $\mathcal{G}^{\log_2 |\mathcal{G}|}$。

接下来，类似于（3.20），我们统计（A7）右端的独立求和个数。为此，我们考虑图 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{q},\mathbf{j}} = (V, E)$，其顶点和边分别由 $V := \mathbb{T}_{\mathbf{L}}$ 和 $E := \{(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{j}) : \mathbf{x} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{R}_{\mathbf{q}}\}$ 给出。对于 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{q},\mathbf{j}}$ 中每出现一个环，乘积 $\prod_{\mathbf{x}\in\mathbb{T}_{\mathbf{L}}\setminus\mathcal{R}_{\mathbf{q}}} \delta_{s(\mathbf{x}),s(\mathbf{x}+\mathbf{j})}$ 中恰好会出现一个冗余狄拉克δ函数。因此，记 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{q},\mathbf{j}}$ 中环的数量为 $N(\mathbf{L}, \mathbf{q}, \mathbf{j})$，我们得到

$$\left|\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}}\mathring{A})\right| \lesssim 2^{|\mathcal{R}_{\mathbf{q}}|+N(\mathbf{L},\mathbf{q},\mathbf{j})}. \tag{A8}$$

与一维情形类似，根据引理 3.8，图 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{q},\mathbf{j}}$ 是从 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j}}$ 中移除所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_{\mathbf{q}}$ 对应的边 $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{j})$ 后得到的。因此，对于所有 $\mathbf{q}$，我们有 $N(\mathbf{L}, \mathbf{q}, \mathbf{j}) \leq N(\mathbf{L}, \mathbf{0}, \mathbf{j})$。现在，考虑循环群 $\langle T^{\mathbf{j}}\rangle$ 在 $\mathbb{T}_{\mathbf{L}}$ 上的轨道，可以计算 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j}}$ 中环的数量。显然，每个轨道的大小都相同。将其记为 $g(\mathbf{j})$，则 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j}}$ 中环的数量为

$$N(\mathbf{L}, \mathbf{0}, \mathbf{j}) = \frac{V}{g(\mathbf{j})}.$$

Note 由于根据假设，$\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$，我们有 $g(\mathbf{j}) \geq 2$.

如果 $g(\mathbf{j}) \geq 4$，则界 (A6) 已经得到证明，因为

$$\left|\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}}\mathring{A})\right| \lesssim 2^{|\mathcal{R}_{\mathbf{q}}|+N(\mathbf{L},\mathbf{q},\mathbf{j})} \leq 2^{\frac{V}{4}+\frac{V}{4}} = 2^{\frac{V}{2}},$$

这里我们使用了假设中的 $|\mathcal{R}_{\mathbf{q}}| \leq V/2^d$ 和 $d \geq 2$。

如果 $g(\mathbf{j}) = 2$ 或 $g(\mathbf{j}) = 3$，那么对于所有 s，必有 $g(\mathbf{j})j_s \equiv 0 \pmod{L_s}$。再次利用 $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$，可知存在一个非零分量 j_{t_0}。对于这样的坐标方向 $t \in \{1, ..., d\}$，必有 $g(\mathbf{j}) \mid L_t$，因为 $g(\mathbf{j}) \in \{2, 3\}$ 是素数。因此我们有如下分解

$$\mathbb{T}_{\mathbf{L}} = \mathcal{A}_t \sqcup T^{\mathbf{j}}\mathcal{A}_t \sqcup T^{2\mathbf{j}}\mathcal{A}_t, \quad \mathcal{A}_t := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}_{\mathbf{L}} : 1 \leq x_t \leq \frac{L_t}{g(\mathbf{j})}\right\}.$$

[{"id":0,"output":"每个环在 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j}}$ 都可以视为从 $\mathcal{A}_t$中的一个格点开始。因此，移除边 $(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{j})$ 对于所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_{\mathbf{q}}$ 从 $\mathcal{G}_{\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j}}$，会使环的数量至少减少 $|\mathcal{R}_{\mathbf{q}} \cap \mathcal{A}_t|$，这意味着"}]

$$N(\mathbf{L}, \mathbf{q}, \mathbf{j}) \leq N(\mathbf{L}, \mathbf{0}, \mathbf{j}) - |\mathcal{R}_{\mathbf{q}} \cap \mathcal{A}_t|.$$

因此，由 (A8)，我们得到

$$\left|\mathrm{tr}_{\mathbf{L}}(T^{-\mathbf{j}}\mathring{A})\right| \lesssim 2^{|\mathcal{R}_{\mathbf{q}}|-|\mathcal{R}_{\mathbf{q}}\cap\mathcal{A}_t|+N(\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j})} = 2^{|\mathcal{R}_{\mathbf{q}}\setminus\mathcal{A}_t|+N(\mathbf{L},\mathbf{0},\mathbf{j})}.$$

最后，我们有

$$|\mathcal{R}_{\mathbf{q}} \setminus \mathcal{A}_t| + N(\mathbf{L}, \mathbf{0}, \mathbf{j}) \leq \left(\frac{L_t}{2} - \frac{L_t}{g(\mathbf{j})}\right) \prod_{s(\neq t)} \frac{L_s}{2} + \frac{V}{g(\mathbf{j})} = \frac{V}{2^d}\left(1 - \frac{2}{g(\mathbf{j})}\right) + \frac{V}{g(\mathbf{j})} \leq \frac{V}{2},$$

由此完成引理A.6的证明。 □

参考文献

[1] Santos,L.F.、Rigol,M.：一维量子系统热化性质中的局域化与对称性的影响。《物理评论E》**82**（3），031130（2010）https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.031130[2] Trotzky,S.、Chen, A.Yu-Ao、Flesch, A.、McCulloch, I.P.、Schollw¨ock,U.、Eisert,J.、Bloch, I.：孤立的强关联一维玻色气体向平衡弛豫的探测。《自然物理》**8**（4），325–330（2012）https://doi.org/10.1038/nphys2232[3] Langen,T.、Geiger, R.、Kuhnert,M.、Rauer, B.、Schmiedmayer, J.：孤立量子多体系统中热关联的局域涌现。《自然物理》**9**（10），640–643（2013）[4]Clos, G.、Porras, D.、Warring, U.、Schaetz, T.：孤立量子系统中热化的时间分辨观测。《物理评论快报》**117**（17），170401（2016）https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.170401[5] Kaufman, A.M.、Tai, M.E.、Lukin, A.、Rispoli, M.、Schittko,R.、Preiss,P.M.、Greiner, M.：孤立多体系统中通过纠缠实现的量子热化。《科学》**353**（6301），794–800（2016）https://doi.org/10.1126/science.aaf6725 1603.04409[6] Neill,C.、Roushan, P.、Fang, M.、Chen, Y.、Kolodrubetz,M.、Chen, Z.、Megrant, A.、Barends, R.、Campbell, B.、Chiaro, B.、Dunsworth, A.、Jeffrey,E.、Kelly, J.、Mutus,J.、O'Malley, P.J.J.、Quintana, C.、Sank, D.、Vainsencher, A.、Wenner, J.、White, T.C.、Polkovnikov,A.、Martinis, J.M.：孤立量子系统中的遍历动力学与热化。《自然物理》**12**（11），1037–1041（2016）https://doi.org/10.1038/nphys3830[7] Tang, Y.、Kao, W.、Li, K.-Y.、Seo, S.、Mallayya,K.、Rigol,M.、Gopalakrishnan,S.、Lev, B.L.：偶极量子牛顿摆中可积性附近的热化。《物理评论X》**8**（2），021030（2018）https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021030 1707.07031[8]Neumann, J.：量子力学中遍历定理与H定理的证明。《欧洲物理学杂志H》**35**（2），201–237（2010）

[9] Deutsch，J.M.：封闭系统中的量子统计力学。Physical ReviewA43(4)，2046（1991）[10] Srednicki，M.：混沌与量子热化。Physical ReviewE50(2)，888（1994）[11] D'Alessio，L.、Kafri，Y.、Polkovnikov，A.、Rigol，M.：从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学。Advances in Physics 65(3)，239–362（2016） https://doi.org/10.1080/00018732.2016.11981341509.06411[12] Mori，T.、Ikeda，T.N.、Kaminishi，E.、Ueda，M.：孤立量子系统中的热化与预热化：理论综述。Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 51(11)，112001（2018） https://doi.org/ 10.1088/1361-6455/aabcdf[13]Deutsch，J.M.：本征态热化假说。Reports on Progress in Physics 81(8)，082001（2018） https://doi.org/10.1088/1361-6633/aac9f11805.01616[14] Rigol，M.、Dunjko，V.、Olshanii，M.：一般孤立量子系统中的热化及其机制。Nature 452(7189)，854–858（2008） https://doi.org/10.1038/nature06838[15]Rigol，M.：有限一维系统中热化的失效。Physical Review Letters 103(10)，100403（2009） https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.100403[16] Rigol，M.：一维费米子系统中的量子猝灭与热化。Physical Review A 80(5)，053607（2009） https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.0536070908.3188[17] Biroli，G.、Kollath，C.、L¨auchli，A.M.：稀有涨落对孤立量子系统热化的影响。Physical Review Letters 105(25)，250401（2010） https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.250401 0907.3731[18] Steinigeweg，R.、Herbrych，J.、Prelov˘sek，P.：孤立自旋链系统中的本征态热化。Physical Review E 87(1)，012118（2013） https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.012118 [19] Beugeling，W.、Moessner，R.、Haque，M.：本征态热化的有限尺寸标度。Physical Review E 89(4)，042112（2014） https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.042112[20] Rigol，M.、Dunjko，V.、Yurovsky，V.、Olshanii，M.：完全可积多体量子系统中的弛豫：一维晶格硬核玻色子高激发态动力学的从头研究。Physical Review

Letters 98(5), 050405 (2007年)

[21] Cassidy,A.C., Clark, C.W., Rigol, M.: 《可积晶格系统中的广义热化》。Physical ReviewLetters 106(14)，140405（2011）[22] Hamazaki,R., Ikeda, T.N., Ueda,M.: 《具有大量局域对称性的非可积系统中的广义Gibbs 系综》。PhysicalReview E 93(3)，032116（2016）[23] Basko, D.M., Aleiner,I.L.,Altshuler,B.L.: 《具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属–绝缘体转变》。Annalsofphysics 321(5)，1126–1205（2006）[24] Nandkishore,R., Huse, D.A.: 《量子统计力学中的多体局域化与热化》。Annual Review of CondensedMatter Physics 6(1)，15–38（2015）[25] Turner,C.J., Michailidis, A.A.,Abanin, D.A.,Serbyn,M., Papi´c, Z.: 《量子多体疤痕态导致的弱遍历性破缺》。Nature Physics 14(7)，745–749（2018）[26] Bull,K., Martin, I., Papi´c, Z.: 《一维晶格模型中疤痕多体动力学的系统性构造》。Physical Review Letters 123(3)，030601（2019）[27]Reimann, P.: 《冯·诺伊曼热化方法的推广》。Physical Review Letters 115(1)，010403（2015） https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.010403 1507.00262[28] Cipolloni, G., Erd˝os,L.,Schr¨oder, D.: 《Wigner 矩阵的本征态热化假说》。Communications inMathematical Physics 388(2)，1005–1048（2021） https://doi.org/10.1007/s00220-021-04239-z 2012.13215[29] Cipolloni, G., Erd˝os, L., Henheik,J.,Kolupaiev,O.: 《Wigner 矩阵等分原理中的高斯涨落》，1（2023） 2301.05181[30] Adhikari, A., Dubova, S.,Xu,C., Yin,J.: 《广义 Wigner 矩阵的本征态热化假说》（2023） 2302.00157 [31] Sugimoto,S.,Hamazaki,R., Ueda, M.: 《基于局域随机矩阵理论的本征态热化假说检验》。Physical Review Letters 126(12)，120602（2021） https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.120602[32] Erd˝os, L.,Knowles,A.,Yau, H.-T., Yin, J.: 《一般随机矩阵类的局部半圆定律》。Electronic Journal ofProbability 18(59)，1（2013）https: //doi.org/10.1214/EJP.v18-2473 1212.0164[33]Collins, B., Matsumoto, S., Novak, J.: 《Weingarten 演算》。Notices of the American Mathematical Society 69(05)，1（2022） https://doi.org/10.1090/

noti2474 2109.14890

[34] Sugimoto, S., Hamazaki, R., Ueda, M.: 长程相互作用系统中的本征态热化。Physical Review Letters **129**(3), 030602 (2022)https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.030602

[35] Hamazaki, R.,Ueda, M.: 大多数少体可观测量的非典型性。《物理评论快报》**120**(8),080603(2018) https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.080603