arXiv:2304.04214v1 [physics.flu-dyn] 9 Apr 2023

合成湍流生成器 湍流生成器，用于壁面建模的大涡模拟格子玻尔兹曼方法 d

Xiao Xue，[1, a)] Hua-DongYao 和LarsDavidson流体动力学部，机械与海事科学系，查尔姆斯理工大学，*41296*，哥德堡，

瑞典

（日期：2023年4月11日）

合成湍流生成器（STG）位于雷诺平均纳维-斯托克斯（RANS）模拟与大涡模拟（LES）的交界处。本文针对高摩擦雷诺数下的多松弛时间（MRT）格子玻尔兹曼方法（LBM）框架，提出了一种考虑近壁面建模的STG。采用Reichardt壁面律结合基于力的方法，对近壁面场进行建模。将STG壁面模型（STG-WM）LES结果与不同分辨率下的湍流槽道流模拟 Re_τ =1000、2000、5200进行比较。结果表明，该方法与直接数值模拟（DNS）吻合良好，边界层厚度方向上的适应长度为6至8。该方法在高摩擦雷诺数下与RANS/LES-LBM相关的混合应用中具有广泛的应用潜力。

关键词：格子玻尔兹曼方法、合成湍流生成器、壁面模型

a)电子邮件：xiaox@chalmers.se

I. 引言

在与高雷诺数流动相关的工业应用中，壁面受限湍流在飞机、汽车和风电场等的设计中发挥着至关重要的作用([1])。直接数值模拟(DNS)可通过使用高阶数值近似和网格细化技术求解纳维-斯托克斯方程，从而准确量化其物理特性 ([2,3])。然而，DNS 的计算成本对于实际应用而言过高，因此不适合用于设计周期。大涡模拟 (LES) 可通过对亚网格尺度涡黏度进行建模来降低网格需求([4–6])。然而，LES仍然需要在近壁区域采用精细的网格分辨率，即要求网格点数与 $O(Re^n)$ 成正比，其中 $n = 13/7$ ([2,3,7])。壁面解析大涡模拟(WRLES)仍远未成为一种工程工具。为提高计算效率，相关研究尝试通过求解雷诺平均纳维-斯托克斯 (RANS)方程并在远场使用LES，或通过重构近壁速度、使用相对较少的网格对近壁区域进行建模。在过去几十年中，格子玻尔兹曼方法(LBM)在不同尺度的流体动力学问题模拟中日益受到重视，从微纳尺度 ([8–12])到低马赫数下的宏观尺度 ([13–17])。LBM通过在介观层面求解玻尔兹曼方程，而不是直接求解纳维-斯托克斯方程([16, 18–20])，为传统方法提供了一种替代方案。LBM易于并行化，且能够对离散粒子分布函数进行局部更新，因此颇具吸引力。[13] 在LBM（LES-LBM）框架中引入了有效湍流黏度，以对 LES 进行建模，从而能够以更高的稳定性模拟高雷诺数流动。该方法结合了 LES 技术的优势与 LBM 的计算效率。

为进一步提高计算效率，混合雷诺平均纳维-斯托克斯-大涡模拟方法因兼顾精度与计算成本而日益普及。雷诺平均纳维-斯托克斯方法用于在计算需求较低的区域维持宏观量，而大涡模拟则在计算密集区域提供详细的流动信息。正如[21]所强调的，在雷诺平均纳维-斯托克斯/大涡模拟界面生成高质量湍流对于获得准确结果至关重要。在传统计算流体力学中，研究人员采用了多种方法生成湍流，包括使用预先进行的直接数值模拟/大涡模拟数据（[22]）、速度场“循环利用”（[23–25]）、合成涡方法（SEM）（[26–28]）或控制技术（[29,30]）。现有的大多数研究都存在以下问题之一：湍流发展所需的适应长度相对较长、较高的...

计算成本较高，或难以推广至复杂几何体。[31] 成功开发了一种用于分离涡模拟（DES）（[32]）的合成湍流生成器（STG）。STG 方法根据能量谱给出的傅里叶系数生成速度脉动，而 SEM 方法则通过在入口平面叠加人工涡来模拟相干结构。结果表明，两种方法都快速且稳健，适应长度为 2-4 个边界层宽度。

尽管湍流发生器在传统 CFD 中是一个活跃的研究领域，但在格子玻尔兹曼方法框架中使用湍流发生器的研究仍然很少。[33] 通过在入口前设置一段“再循环”槽道流来生成槽道流湍流，但这需要预先模拟周期性湍流槽道流。因此，冗余的准备工作限制了其应用。[34] 在 LBM 中使用 SEM 方法（SEM-LBM）重构湍流；然而，这种方法可能需要相对较长的适应长度（[35]）。[36] 在 $Re_\tau = 180$ 将合成湍流发生器（STG）集成到格子玻尔兹曼方法框架中，并采用壁面解析大涡模拟-LBM 进行模拟，适应长度为 2–4 个边界层宽度。然而，摩擦雷诺数相对较低，且 Bhatnagar-Gross-Kroog（BGK）碰撞算子限制了该方法在高雷诺数情况下的应用。为了减少计算时间并保持 STG 的精度，在基于 LBM 的大涡模拟（WMLBM）中使用壁面模型对近壁流场进行建模并非易事。首个 WM-LBM 由 [37] 提出，他们利用 Musker 壁面函数或对数律（[38]）成功重构了第一层近壁速度。随后，相关研究提出了重构速度场或对速度反弹进行建模的思路[37, 39–42]。然而，在格子玻尔兹曼方法框架中，基于力的方法鲜有提及，也很少得到详细描述。

在本研究中，开发了一种合成湍流生成器，并将其与多重弛豫时间（MRT）碰撞算子和壁面模型LES-LBM相结合，以应对高摩擦雷诺数。近壁区域通过基于力的壁面模型进行建模，并采用Reichardt的壁面律（[43]）。在三个不同的摩擦雷诺数下检验STG方法的性能： $Re_\tau = 1000$、 $Re_\tau = 2000$和 $Re_\tau = 5200$ ，并在各种分辨率下将其与来自[44,45]的直接数值模拟数据进行比较。

II. 方法

A. 多松弛时间格子玻尔兹曼方法

在本研究中，我们采用一种具有 19 个离散方向的三维（3D）格子模型，称为D3Q19模型。格子单元位于位置 $\mathbf{x}$ 和时间 t，其离散速度集为 $\mathbf{c}_i$，其中 $i \in 0, \mathbf{1}, ..., Q-1$ $(Q = 19)$：

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_i = \{&(0,-1,-1),(-1,0,-1),(0,0,-1),(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,-1,0),\\&(0,-1,0),(1,-1,0),(-1,0,0),(0,0,0),(1,0,0),(-1,1,0),(0,1,0),\\&(1,1,0),(0,-1,1),(-1,0,1),(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1)\}.\end{aligned} \tag{1}$$

离散方向的权重定义为

$$w_9 = \frac{1}{3}, \quad w_{2,6,8,10,12,16} = \frac{1}{18}, \quad w_{0,1,3,4,5,7,11,13,14,15,17,18} = \frac{1}{36}. \tag{2}$$

考虑碰撞和外力项后，分布函数的演化方程可表示为：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i\Delta t, t + \Delta t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \Omega\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}^{\,\mathrm{eq}}(\mathbf{x}, t)\right] + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\Delta t, \tag{3}$$

其中，Ω为碰撞核，Δt 为格子玻尔兹曼时间步长，设为单位值。由于在高雷诺数（[46]）下，MRT碰撞核比BGK模型具有更高的数值稳定性，因此本文选择使用MRT碰撞核。

$$\Omega = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{M}, \tag{4}$$

其中，$\mathbf{M}$ 是通过格拉姆–施密特方法获得的、从粒子分布空间到矩空间的变换矩阵（$\mathbf{M}$ 矩阵见附录 VIII A）。$\mathbf{S}$ 是对角矩阵，其对角元素为不同矩对应的松弛频率；$\mathbf{S} = diag\{\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{Q-1}\}$时，MRT碰撞算子等价于BGK模型，其中 ω_i 设为相同的值 ω。频率ω_i 是弛豫时间 τ_i的倒数。注意，我们设定 $\tau_k = \tau_9 = \tau_{11} = \tau_{13} = \tau_{14} = \tau_{15}$，它们与运动黏度 ν相关，而运动黏度为

$$\nu = c_s^2\left(\tau_k - \frac{1}{2}\right)\Delta t, \tag{5}$$

其中 c_s 为声速，c_s^2 等于 $1/3$ 格子玻尔兹曼单位（LBU）。其他松弛参数可参见式（8.2）至式（8.6）。不同于在

分布函数空间 因此，MRT 在矩空间中进行碰撞，故式（3）可改写为 as:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{c}_i\Delta t, t+\Delta t) = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\left[\mathbf{m}(\mathbf{x},t) - \mathbf{m}^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x},t)\right] + \mathbf{F}(\mathbf{x},t)\Delta t, \tag{6}$$

其中$\mathbf{m}$ 是矩空间分量，其定义为

$$\mathbf{m}(\mathbf{x},t) = \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \tag{7}$$

矩空间平衡态$\mathbf{m}^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x}\ t)$可定义为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{m}_0^{\mathrm{eq}} = \rho, && \mathbf{m}_1^{\mathrm{eq}} = -11\rho + 19\rho(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\\
&\mathbf{m}_2^{\mathrm{eq}} = \frac{11}{2}\rho\left(3-(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\right), && \mathbf{m}_3^{\mathrm{eq}} = \rho u_x\\
&\mathbf{m}_4^{\mathrm{eq}} = -\frac{3}{2}\rho u_x, && \mathbf{m}_5^{\mathrm{eq}} = \rho u_y\\
&\mathbf{m}_6^{\mathrm{eq}} = -\frac{3}{2}\rho u_y, && \mathbf{m}_7^{\mathrm{eq}} = \rho u_z\\
&\mathbf{m}_8^{\mathrm{eq}} = -\frac{3}{2}\rho u_z, && \mathbf{m}_9^{\mathrm{eq}} = 2\rho u_x^2 - \rho u_y^2 - \rho u_z^2\\
&\mathbf{m}_{10}^{\mathrm{eq}} = -\rho u_x^2 + \frac{1}{2}\rho u_y^2 + \frac{1}{2}\rho u_z^2, && \mathbf{m}_{11}^{\mathrm{eq}} = \rho u_y^2 - \rho u_z^2\\
&\mathbf{m}_{12}^{\mathrm{eq}} = -\frac{1}{2}\rho u_y^2 + \frac{1}{2}\rho u_z^2, && \mathbf{m}_{13}^{\mathrm{eq}} = \rho u_x u_y\\
&\mathbf{m}_{14}^{\mathrm{eq}} = \rho u_y u_z, && \mathbf{m}_{15}^{\mathrm{eq}} = \rho u_x u_z\\
&\mathbf{m}_{16}^{\mathrm{eq}} = \mathbf{m}_{17}^{\mathrm{eq}} = \mathbf{m}_{18}^{\mathrm{eq}} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

式（6）中的$\mathbf{F}(\mathbf{x}\ t)$是 $F_i(\mathbf{x}\ t)$的向量，表示作用于流体单元上的体积力 ([47]):

$$F_i(\mathbf{x},t) = (1-\frac{\omega_i}{2})w_i\left[\frac{\mathbf{c}_i - \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{c_s^2} + \frac{\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{c_s^4}\mathbf{c}_i\right]\cdot\mathbf{g}, \tag{9}$$

其中$\mathbf{g}$ 是体积加速度。密度、动量和动量通量张量等宏观尺度量，可根据分布函数、离散速度和体积力计算得到:

$$\rho(\mathbf{x},t) = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i(\mathbf{x},t), \tag{10}$$

$$\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i(\mathbf{x},t)\mathbf{c}_i + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t, \tag{11}$$

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i(\mathbf{x},t)\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i. \tag{12}$$

请注意，动量通量 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}\ t)$ 可表示为平衡部分与非平衡部分之和，即 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}\ t) = \mathbf{\Pi}_{\mathrm{eq}}(\mathbf{x}\ t) + \mathbf{\Pi}_{\mathrm{neq}}(\mathbf{x}\ t)$。

B. Smagorinsky亚格子尺度模型

在本部分，总结了基于格子玻尔兹曼的斯马格林斯基 SGS 大涡模拟技- 术。在格子玻尔兹曼方法框架中，有效黏度 ν_{eff} ([13,33,48]) 被建模为分子黏度 ν_0 和湍流黏度 ν_t之和：

$$\nu_{\text{eff}} = \nu_0 + \nu_t, \qquad \nu_t = C_{\text{smag}}\Delta^2 \left|\bar{\mathbf{S}}\right|, \tag{13}$$

其中 $\left|\bar{\mathbf{S}}\right|$ 是滤波应变率张量：

$$\left|\bar{\mathbf{S}}\right| = \frac{-\tau_i\rho\Delta x^2/\Delta t + \sqrt{(\tau_i\rho)^2\Delta x^4/\Delta t^2 + 18\sqrt{2}\rho C_{\text{smag}}\delta^2 Q^{1/2}}}{6\rho C_{\text{smag}}\Delta^2}, \tag{14}$$

其中， C_{smag} 为Smagorinsky常数， Δ表示滤波尺度， τ_i 为矩空间碰撞的弛豫时间。 $Q^{1/2}$ 为 $Q^{1/2} = \sqrt{\mathbf{\Pi}_{\text{neq}} : \mathbf{\Pi}_{\text{neq}}}$，其中 $\mathbf{\Pi}_{\text{neq}}$ 为式（12）所示的动量通量张量非平衡部分。利用式（5），可得总弛豫时间 τ_{eff}：

$$\tau_i^{\text{eff}} = \frac{\tau_i}{2} + \frac{\sqrt{(\tau_i\rho\Delta x/\Delta t)^2 + 18\sqrt{2}C_{\text{smag}}Q^{1/2}}}{2\rho c}. \tag{15}$$

最后，将 τ_i^{eff}代入相关的 MRT碰撞算子松弛参数 τ_i ，以构建基于格子玻尔兹曼的大涡模拟系统。

C. LBM 的近壁建模

在格子玻尔兹曼方法框架中，已经有多种方法使用壁面模型对近壁场进行建模。其中大多数方法基于近壁分布函数的重构，以保持速度场和密度场，或采用反弹边界法来保持目标速度（[37, 39–42, 49]）。[37] 还在近壁区域将雷诺平均纳维–斯托克斯求解器与格子玻尔兹曼方法耦合，但已证明这种方法比整体式格子玻尔兹曼方法更加耗时。在本研究中，我们致力于开发一种基于近壁区域内力的壁面模型。

本文将使用 Reichardt壁面律 ([43])，而不是Musker 提出的壁面律。图1所示的Reichardt壁面律定义为

$$u^+ = 2.5\ln(1 + 0.4y^+) + 7.8(1 - e^{-y^+/11}) - y^+e^{-y^+/3}, \tag{16}$$

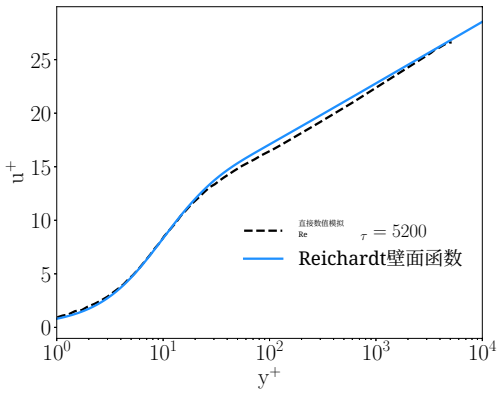

图1. Reichardt的壁面律从 $y^+ = 1$ 到 $y^+ = 10000$.

其中 u^+ 和 y^+ 是无量纲单位，定义为

$$u^+ = \frac{\langle u \rangle}{u_\tau}, \qquad y^+ = y u_\tau / \nu, \tag{17}$$

其中， u_τ 是剪切速度， $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \overline{\rho}}$ $\langle \cdot \rangle$ 表示空间或时间上的系综平均值， τ_w 是壁面剪切应力， u 是流向速度。图2 展示了在壁面处理过程中使用滑移壁面边界条件的情况。为了推广壁面模型，首先需要一个基向量$\mathbf{e}_x$ ，用于将近壁速度$\mathbf{u}_\mathrm{w}$ 投影到平行于壁面的方向:

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\|}, \tag{18}$$

其中，$\mathbf{u}_2$ 是距离壁面第二个单元中的速度，$\mathbf{n}$ 是壁面法向矢量。然后，我们将壁面附近第一个单元中的速度$\mathbf{u}_\mathrm{w}$投影，以获得标量流向速度 $\hat{u}_\mathrm{w}$，其定义为

$$\hat{u}_\mathrm{w} = \mathbf{u}_\mathrm{w} \cdot \mathbf{e}_x. \tag{19}$$

接下来，目标是计算摩擦速度 u_τ，并通过求解式（16）中的 u_τ 实现

$$u_\tau(\mathbf{x}, t) = u^+(y_\perp(\mathbf{x}, t), \hat{u}_\mathrm{w}(\mathbf{x}, t), u_\tau(\mathbf{x}, t)). \tag{20}$$

通过使用牛顿法，我们在局部更新摩擦速度。请注意，与使用平面平均摩擦速度（[39,42]）不同，本文使用局部值，以使算法更具通用性。壁面剪切应力可估算为 τ_w（$\mathbf{x}$ t） $= u_\tau^2$（$\mathbf{x}$ t）ρ（$\mathbf{x}$ t）。最后，壁面附近的力定义为

$$F_\mathrm{w}(\mathbf{x}, t) = -\tau_\mathrm{w}(\mathbf{x}, t) A, \tag{21}$$

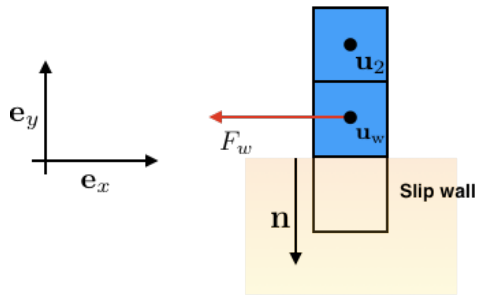

图 2. 壁面附近第一层的示意图

其中 F 是作用于壁面的剪切力。基于力的方法的一项显著优势是，无需重构分布函数即可求得壁面附近的目标速度和密度，因此比其他壁面建模方法更容易实现。

III. 壁面模型格子玻尔兹曼方法的合成湍流生成器

A. 格子玻尔兹曼方法框架中的合成湍流生成器公式

在本研究中，合成湍流生成器（STG）设置在槽道流的入口处。它需要来自 $k-\omega$ RANS模拟（[50]）的速度场。入口处的总速度$\mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x}\ t)$表示为

$$\mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_{\text{RANS}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x},t), \tag{22}$$

其中，$\mathbf{u}_{\text{RANS}}$ 是通过一维雷诺平均纳维-斯托克斯模拟获得的速度矢量。STG在时间 t的网格单元$\mathbf{x}$ 处生成速度脉动$\mathbf{u}'(\mathbf{x}\ t)$:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x},t) = a_{\alpha\beta}\mathbf{v}'(\mathbf{x},t). \tag{23}$$

时间平均速度脉动为零，即 $\langle\mathbf{u}'(\mathbf{x}\ t)\rangle = 0$。雷诺应力张量的 Cholesky 分解为:

$$\{a_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22}-a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32}-a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33}-a_{31}^2-a_{32}^2} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中， $R_{\alpha\beta} = \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle$ 是在对一维 RANS 数据进行后处理时，使用显式代数雷诺应力模型（[51]）从雷诺应力张量中获取的。式（23）中的 $\mathbf{v}'(\mathbf{x}\ t)$ 由 N 个傅里叶模态给出，具体如下:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x},t) = \sqrt{6}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{q^n}\left[\sigma^n \cos\left(k^n \mathbf{d}^n \cdot \mathbf{x}' + \phi^n\right)\right], \tag{25}$$

其中， q^n 是修正的冯·卡门谱的振幅， n 是模态数， k^n是模态方向向量的振幅$\mathbf{d}^n$ ，其中 $\sigma^n \cdot \mathbf{d}^n = 0$； ϕ^n 是随机模态相位，在区间 $[0, 2\pi)$内均匀分布。详细说明见[31] 和[36]。槽道流入口处的分布函数可定义为平衡部分与非平衡部分之和

$$f_i^{\text{in}}(\mathbf{x},t) = f_i^{\text{in(eq)}}(\mathbf{x},t) + f_i^{\text{in(neq)}}(\mathbf{x},t), \tag{26}$$

其中， $f_i^{\text{in(eq)}}(\mathbf{x}\ t)$是入口分布函数的平衡部分，可通过以下公式计算

$$f_i^{\text{in(eq)}}(\mathbf{x},t) = w_i \rho_{\text{in}}(\mathbf{x},t)\left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x},t)}{c_s^2} + \frac{\left[\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x},t)\right]^2}{2c_s^4} - \frac{\left[\mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x},t)\right]}{2c_s^2}\right]. \tag{27}$$

根据正则化格式[52], ，方程（26）中的入口分布函数非平衡部分可通过以下方式获得

$$f_i^{\text{in(neq)}}(\mathbf{x},t) \approx \frac{w_i}{c_s^4}\mathbf{Q}_i : \mathbf{\Pi}_{\text{neq}}^{\text{in}}, \tag{28}$$

其中， $\mathbf{Q}_i = \mathbf{c}_i\mathbf{c}_i - c_s^2\mathbf{I}$ ，其中$\mathbf{I}$ 为单位矩阵。 $\mathbf{\Pi}_{\text{neq}}^{\text{in}}$ 是矩通量张量的非平衡部分，其定义为

$$\mathbf{\Pi}_{\text{neq}} = \sum_{i=0}^{Q-1}\mathbf{Q}_i f_i^{\text{in(neq)}}(\mathbf{x},t). \tag{29}$$

入口处第 i 个方向上的未知变量，可根据已知方向按照$\mathbf{Q}_i = \bar{\mathbf{Q}}^{\text{inv}(i)}$计算，其中 $f_{\text{in(neq)}\,i}(\mathbf{x}\ t) = \bar{f}^{\text{in(neq)}}{}_{\text{inv}(i)}(\mathbf{x}\ t)$；这里“inv”表示未知变量的相反方向。对于入口边界的密度，我们采用 [53]中的思路。

$$\rho_{\text{in}}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{1 + \hat{u}_{\text{in}}(\mathbf{x},t)}(2\rho_\perp(\mathbf{x},t) + \rho_\parallel(\mathbf{x},t)), \tag{30}$$

其中， $\hat{}u_{\text{in}}$ 表示与边界处法向单位向量 $\mathbf{n}$ 的叉积， $\hat{}u_{\text{in}} = \mathbf{u}_{\text{LB}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{n}(|\hat{}u_{\text{in}}| < 0.3c_s)$，而$\mathbf{u}_{\text{LB}}^{\text{in}}$ 是界面处格子玻尔兹曼域的速度。 $\rho_\perp$

以及 $\rho_{\parallel}$ 是由其计算得到的密度

$$\rho_{\perp}(\mathbf{x},t)=\sum_{i\in\{i|\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{n}'=0\}} f_i^{\perp}(\mathbf{x},t), \qquad \rho_{\parallel}(\mathbf{x},t)=\sum_{i\in\{i|\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{n}'<0\}} f_i^{\parallel}(\mathbf{x},t), \tag{31}$$

其中 $\mathbf{n}'$ 是指向入口边界的法向量， $f_i^{\perp}$ 和 $f_i^{\parallel}$ 分别是指向边界和与边界平行的概率密度函数。

B. 实现总结

下面，我们总结 STG 在加权多松弛时间格子玻尔兹曼方法框架中的实现细节。

算法 1 STG-WMLBM：用于

MRT壁面模型格子玻尔兹曼方法

1. 根据式 (22) 获取入口处的 RANS 速度 $\mathbf{u}_{\mathrm{RANS}}(\mathbf{x})$。

2a. 从 RANS 模拟中读取已保存的值： $R_{\alpha\beta}$, k, ω 场等。

2b. 使用显式代数雷诺应力模型计算雷诺应力

3. 借助式 (24) 计算 $a_{\alpha\beta}$ 。

对于所有 t 从 0 到 t_{end} **执行**

对所有 网格单元**执行**

如果 单元格$\mathbf{x}$ 位于雷诺平均纳维-斯托克斯/LBM 入口处**则**

4. 根据公式 (25) 计算 $\mathbf{v}'(\mathbf{x}\ t)$】【。

5. 分别根据公式 (23) 和公式 (24) 计算脉动速度 $\mathbf{u}'(\mathbf{x}\ t)$。

6. 根据公式(30) 计算边界密度 $\rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}\ t)$。

7. 结合式（26）重构粒子的概率分布函数,

公式 (27) 和公式 (28)。

8.更新MRT框架中方程（15）的大涡模拟-LBM弛豫时间 t_{eff} 并替换

式 (5) 中与运动黏度相关的弛豫时间。

结束 if

如果单元$\mathbf{x}$ 位于壁面函数单元**则**

9. 计算$\mathbf{u}_2$。10.利用公式 (18) 计算壁面平行基向量 $\mathbf{e}_x$ 。11. 利用公式 (19) 计算标量流向速度$\hat{}u_{\mathrm{w}}$ 。12.利用公式(20) 和公式(16) 求解隐式函数，以获得 u_τ 。13. 利用 $\tau_{\mathrm{w}}(\mathbf{x}\ t) = u_\tau^2(\mathbf{x}\ t)\rho(\mathbf{x}\ t)$计算 τ_{w}。14. 利用公式(21) 更新单元 $F_{\mathrm{w}}(\mathbf{x}\ t)$ 上的力

end if

15. 考虑力的作用，应用迁移与碰撞步骤，更新每个单元处的 $f_i(\mathbf{x}\ t)$，见式（3）**end forend for**

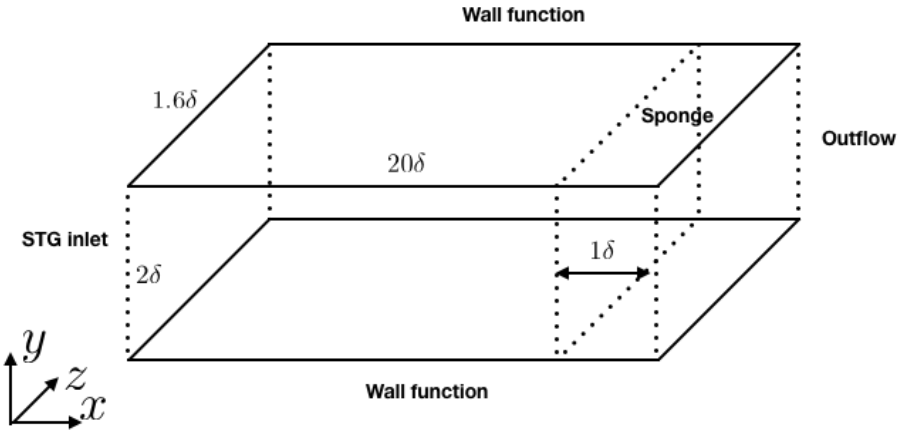

图3. 槽道流模拟的数值设置

IV. 湍流槽道流模拟

本节介绍以 STG 为入口的湍流槽道流模拟，分别对应 $Re_\tau = 1000$、 $Re_\tau = 2000$ 和 $Re_\tau = 5200$。本研究采用三种不同的分辨率（格子玻尔兹曼单位），以槽道高度 H 为参考值，即格子玻尔兹曼单位 $= H/20$、 $H/40$ 和 $H/60$。

A. 数值设置

湍流槽道流模拟在入口处使用STG，在出口处沿流向采用无压力边界。沿展向采用周期性边界条件（z），并在采用滑移边界条件的顶部和底部（y）平面附近的第一层网格处使用壁面函数。为最大限度地减小反射波对流场的影响，在出口（[36]）附近设置海绵区。槽道流的数值设置如图3所示，其中边界层厚度（δ）定义为槽道高度的一半。模拟域在x、y和 z 方向上的范围分别为 $20\delta \times 2\delta \times 1.6\delta$ in。海绵层厚度设为 1δ。Smagorinsky常数设为 $C_{smag} = 0.01$。模拟在不同的摩擦雷诺数和分辨率下进行，总计运行10个域穿越时间（$10T$）。统计分析在2个域穿越时间（$2T$）后开始。

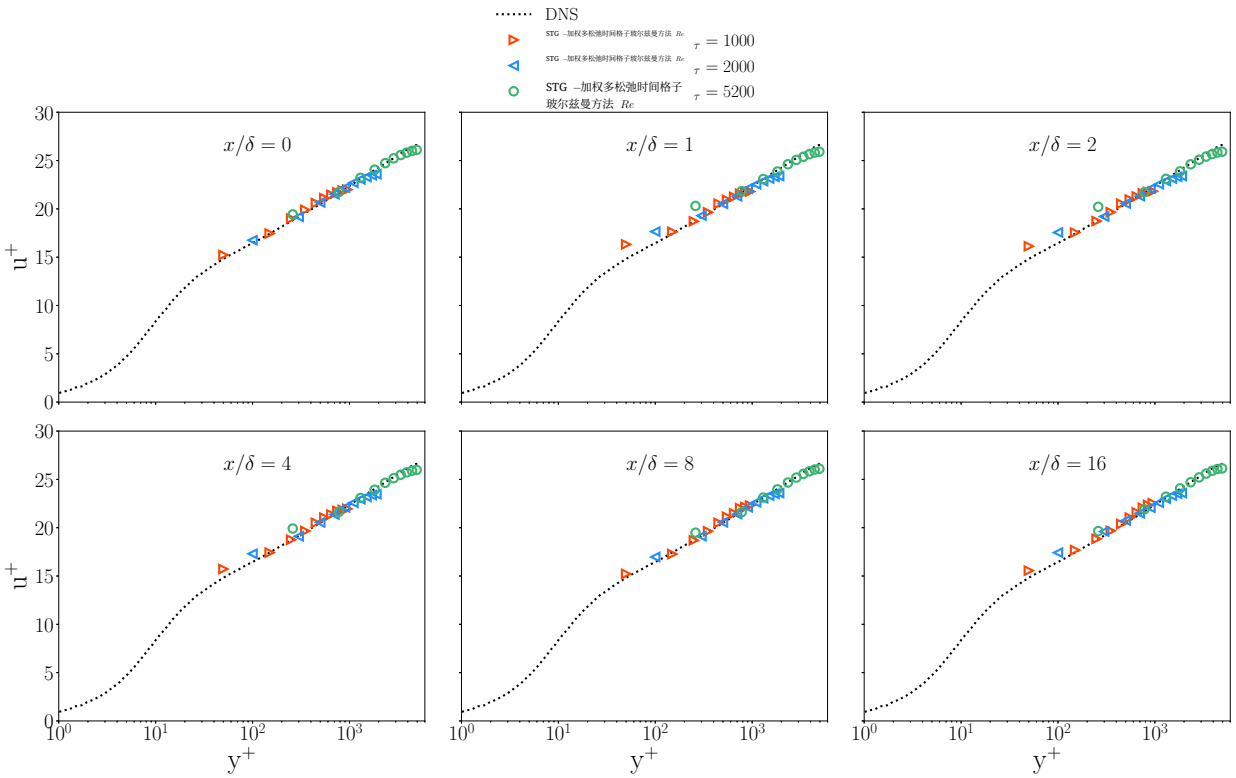

图4. u^+ 是 y^+ 在 $Re_\tau = 1000$，2000年，5200处的函数，单位为 $H = 20$ (格子玻尔兹曼单位)。

B. 结果

本工作验证了STG框架在高摩擦雷诺数下的适用性，即 $Re_\tau = 1000$、$Re_\tau = 2000$ 和 $Re_\tau = 5200$。初步研究聚焦于分辨率为 $H = 2\delta = 20$ 格子玻尔兹曼单位的情况。对于 $Re_\tau = 1000$、2000年和5200，在 $H = 20$ 格子玻尔兹曼单位下的 y^+ 数值分别约为50、100 和 260。由STG入口触发的结果与通过[44,45]获得的直接数值模拟数据进行了比较。

图4展示了u^+ 随y^+变化的平均速度场。STG-WMLBM结果与不同摩擦雷诺数下的直接数值模拟数据进行了比较。在全部三个摩擦雷诺数下，STG-WMLBM的结果从 $x/\delta = 0$ 开始均与直接数值模拟参考值吻合良好。尽管初始结果很有希望，但仍需进一步研究雷诺应力，以全面评估该方法的有效性。

图 5 显示了 $\langle u'v' \rangle^+$ 随 y/δ的变化。STG-WMLBM结果与不同摩擦雷诺数下的直接数值模拟数据进行了比较。对于 $Re_\tau = 2000$ 和 5200，STG-

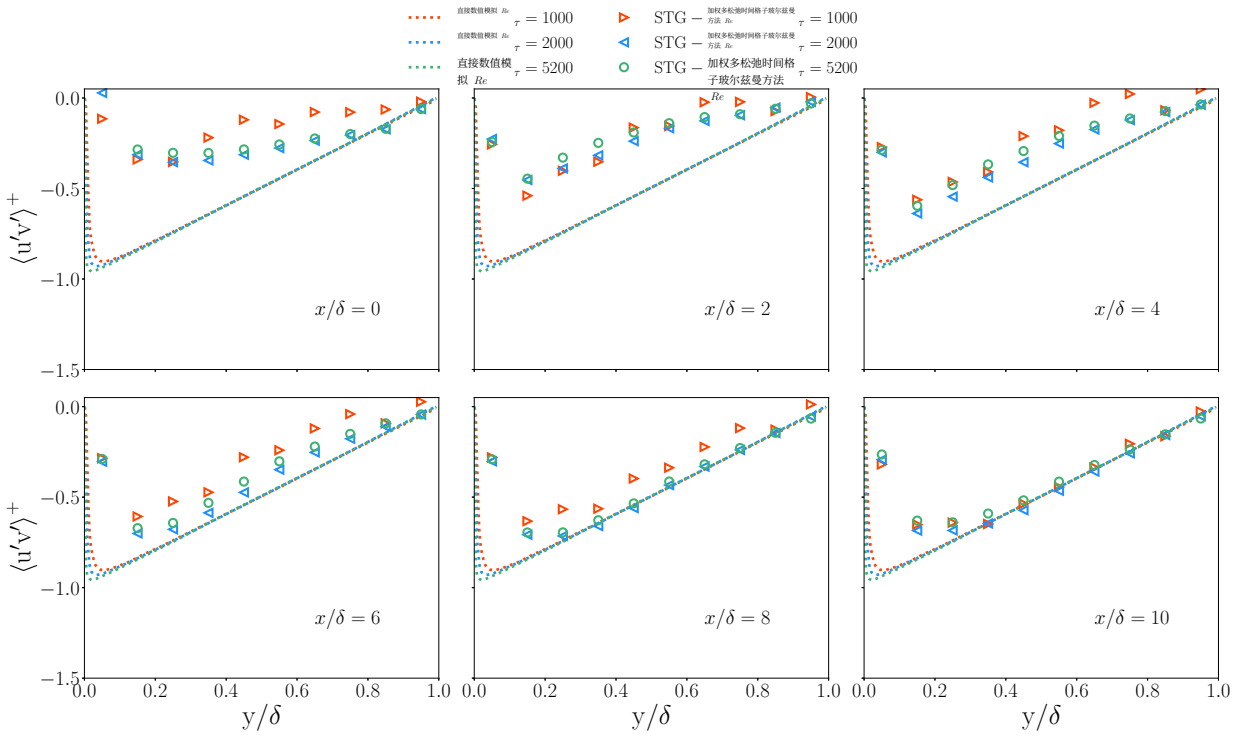

图5. $\langle u'v' \rangle^+$ 随 y/δ 的变化，在 $Re_\tau = 1000, 2000, 5200$ $H = 20$（格子玻尔兹曼单位）下。

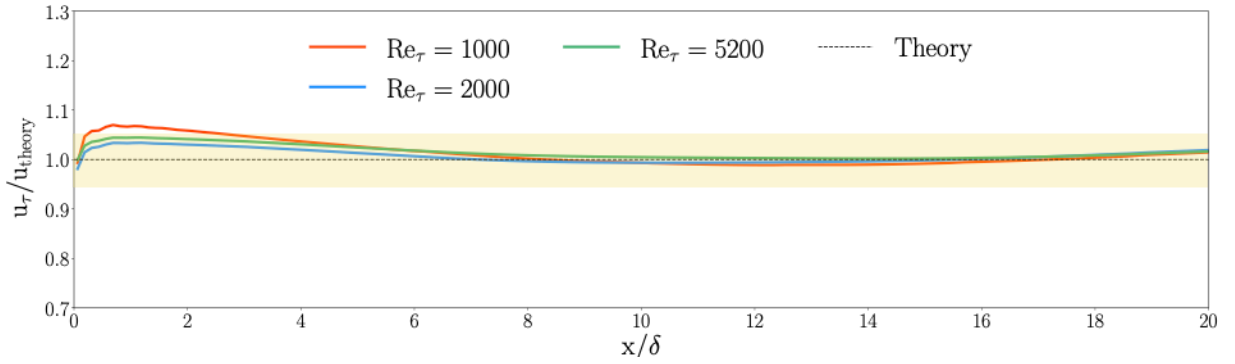

图6. 归一化的 u_τ/u^{theory} 随 x/δ 的变化，在 $Re_\tau = 1000, 2000, 5200$ $H = 20$（格子玻尔兹曼单位）下 .

加权多松弛时间格子玻尔兹曼方法结果在经过 $x/\delta = 6-8$后与直接数值模拟参考值表现出极好的一致性。同时，对于 $Re_\tau = 1000$，结果在约 x/δ =$8-10$时收敛于直接数值模拟数据。然而，在壁面附近观察到与直接数值模拟数据存在偏差，这可归因于分辨率较低。

接下来，我们将介绍在三个不同的摩擦雷诺数 $Re_\tau = 1000, 2000$年, 5200下的摩擦速度 u_τ/u_{theory}。图6表明，对于这三个摩擦

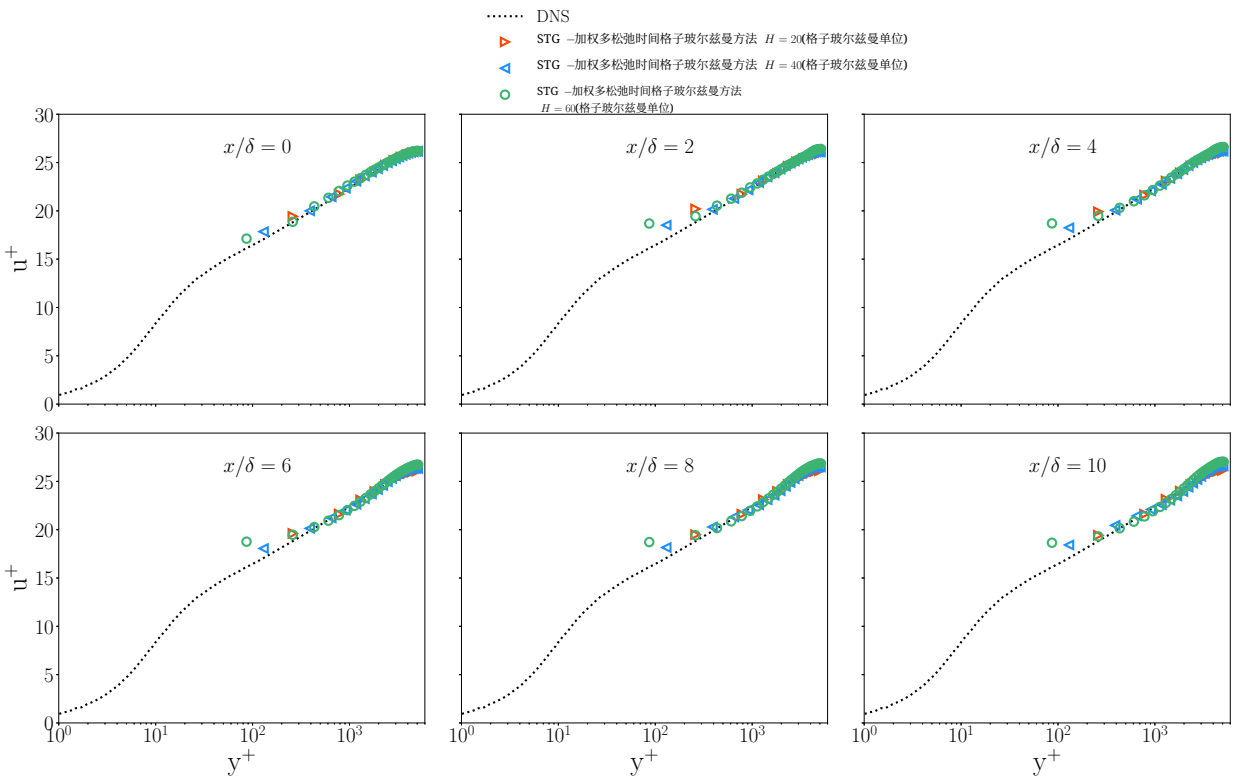

图7. u^+ 随 y^+ 变化的函数，在 $Re_\tau = 5200$ 处，不同分辨率 $H = 20$，40，60（格子玻尔兹曼单位）。

雷诺数在 $x/\delta = 2$ 到 $x/\delta = 4$。

针对不同的分辨率，进一步研究 STG 在 $Re_\tau = 5200$ 处进行：$H = 20$、40、60（格子玻尔兹曼单位），首个网格单元的 y^+ 分别等于 $y^+ \approx 260$、130、86。7。尽管近壁的前几个网格单元与参考值略有偏差，但远离壁面后，STG 的结果与直接数值模拟吻合良好，见图7。

对 $\langle u'v' \rangle^+$ 随 y/δ 的函数进行分析，涵盖全部三种分辨率。图8展示了STG数据与直接数值模拟参考值的结果，结果在约 $x/\delta = 6$ 到 $x/\delta = 8$处收敛于直接数值模拟参考值。

五、结论

本文提出了一种基于 LES- LBM 框架的合成湍流生成器（STG）模型，用于高摩擦雷诺数模拟（$Re_\tau = 1000$，2000年，5200）。我们采用基于 Reichardt 定律（[43]）的壁面函数，并结合基于力的方法，从而简化了实现过程。我们在不同条件下对 STG 模拟进行了检验

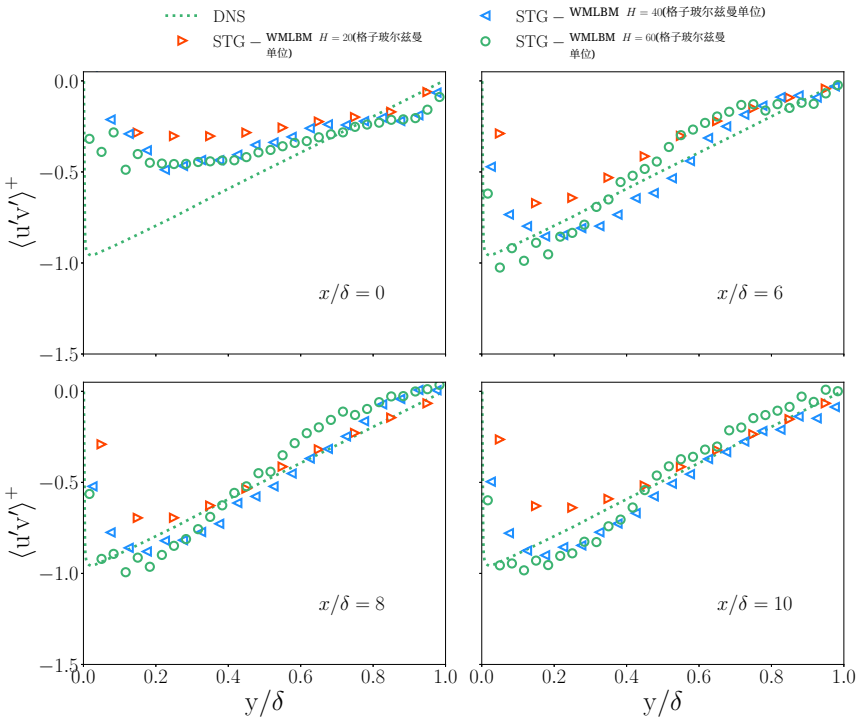

图 8。 $\langle u'v' \rangle^+$ 作为 y/δ 在 $Re_\tau = 5200$ 处的函数，针对不同分辨率 $H = 20$,40, 60（格子玻尔兹曼单位）。

分辨率（$H = 20$，40，60（LBU））下的结果，并与 DNS 数据进行比较，结果显示从槽道流入口处起便立即收敛至平均速度场。对雷诺应力的进一步分析表明，约在 $x/\delta = 6$ 至 $x/\delta = 8$ 时收敛至 DNS 数据。所提出的 STG 模型计算效率高，即使在低分辨率下也能快速收敛至 DNS 数据，因此有望应用于高雷诺数场景。

VI. 利益声明

作者声明，他们不存在已知的竞争性经济利益或可能被视为影响本文所报告工作的个人关系。

VII. 致谢

作者谨此感谢查尔姆斯交通领域前沿计划提供的资助。计算和数据处理得以借助瑞典提供的资源完成。

国家计算基础设施（SNIC），部分由瑞典研究理事会通过资助协议编号2018-05973提供资金。

参考值

[1]F. Port´e-Agel、Y.-T. Wu、H. Lu、R. J. Conzemius，通过风力涡轮机和风电场的大气边界层流动大涡模拟，《风工程与工业空气动力学杂志》99（4）（2011）154–168。[2]D. R. Chapman，计算空气动力学的发展与展望，《AIAA期刊》17（12）（1979）1293–1313。[3]H. Choi、P. Moin，大涡模拟的网格点要求：重新审视Chapman的估计，《流体物理学》24（1）（2012）011702。[4]J. Smagorinsky，利用原始方程进行的大气环流实验，《月度天气评论》91（3）（1963）99–194。URL ftp://ftp.library.noaa.gov/docs.lib/htdocs/rescue/mwr/091/mwr-091-03-0099.pdf[5]M. Germano、U. Piomelli、P. Moin、W. H. Cabot，一种动态亚格子尺度涡黏性模型，《流体物理学A：流体动力学》3（7）（1991）1760–1765。[6]P. Sagaut，《不可压缩流的大涡模拟》，科学计算，施普林格柏林海德堡，柏林、海德堡，2002年。URL http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-04695-1[7]X. I. Yang、K. P. Griffin，直接数值模拟和大涡模拟的网格点与时间步长要求，《流体物理学》33（1）（2021）015108。[8]X. Xue、L. Biferale、M. Sbragaglia、F. Toschi，受限多组分流体中粒子布朗扩散与摩擦的格子玻尔兹曼研究，《计算机科学杂志》47（2020）101113。[9]X. Xue、L. Biferale、M. Sbragaglia、F. Toschi，热涨落对纳米液丝断裂的影响，《物理评论E》98（1）（2018）012802。[10]X. Xue、L. Biferale、M. Sbragaglia、F. Toschi，受限条件下涨落多组分流体中颗粒沉降的格子玻尔兹曼研究，《欧洲物理学杂志E》44（11）（2021）1–10。

[11]D. Chiappini、X. Xue、G. Falcucci、M. Sbragaglia，通过伪势格子玻尔兹曼方法进行韧带断裂模拟，载于：《AIP会议论文集》，第1978卷，AIP出版社，2018年，第420003页。[12]D. Chiappini、M. Sbragaglia、X. Xue、G. Falcucci，伪势格子玻尔兹曼方法用于界面流动的流体动力学行为，《物理评论E》99（5）（2019）053305。[13]S. Hou、J. Sterling、S. Chen、G. Doolen，高雷诺数流动的格子玻尔兹曼亚格子模型，arXiv预印本comp-gas/9401004。[14]F. Toschi、E. Bodenschatz，湍流中粒子的拉格朗日性质，《流体力学年度评论》41（2009）375–404。[15]I. V. Karlin、A. Ferrante、H. C. ¨Ottinger，格子玻尔兹曼方法的完美熵函数，《欧洲物理学快报》47（2）（1999）182。[16]P. Lallemand、L.-S. Luo，格子玻尔兹曼方法理论：色散、耗散、各向同性、伽利略不变性与稳定性，《物理评论E》61（6）（2000）6546。[17]X. Shao、M. C. Santasmasas、X. Xue、J. Niu、L. Davidson、A. J. Revell、H.-D. Yao，利用图形处理器上的格子玻尔兹曼方法对大气边界层中的森林进行近壁面建模，《计算流体力学工程应用》16（1）（2022）2142–2155。[18]S. Succi，《格子玻尔兹曼方程：流体动力学及其他领域》，牛津大学出版社，2001年。[19]T. Kr¨uger、H. Kusumaatmaja、A. Kuzmin、O. Shardt、G. Silva、E. M. Viggen，《格子玻尔兹曼方法》，施普林格国际出版社10（2017）978–3。[20]P. Lallemand、L.-s. Luo、M. Krafczyk、W.-A. Yong，近不可压缩流动的格子玻尔兹曼方法，《计算物理学杂志》431（2021）109713。[21]X. Wu，入口湍流生成方法，《流体力学年度评论》49（2017）23–49。[22]J. Schl¨uter、H. Pitsch、P. Moin，用于与雷诺平均流动求解器耦合的大涡模拟入口条件，《AIAA期刊》42（3）（2004）478–484。[23]T. S. Lund、X. Wu、K. D. Squires，为空间发展边界层模拟生成湍流入口数据，《计算物理学杂志》140（2）（1998）233–258。

[24]P. Spalart、M. Strelets、A. Travin，边界层中大涡破碎装置的直接数值模拟，《国际热与流体流动杂志》27（5）（2006）902–910。[25]M. Shur、P. R. Spalart、M. Strelets、A. Travin，利用重叠区域在边界层中快速且准确地实现从雷诺平均纳维-斯托克斯到大涡模拟的切换，《流动、湍流与燃烧》86（2）（2011）179–206。[26]F. Mathey、D. Cokljat、J. P. Bertoglio、E. Sergent，对用于大涡模拟入口条件的涡方法的评估，《计算流体动力学进展：国际期刊》6（1-3）（2006）58–67。[27]N. Jarrin、R. Prosser、J.-C. Uribe、S. Benhamadouche、D. Laurence，使用合成涡方法重构混合雷诺平均纳维-斯托克斯/大涡模拟中的湍流脉动，《国际热与流体流动杂志》30（3）（2009）435–442。[28]A. Skillen、A. Revell、T. Craft，合成涡方法的精度与效率改进，《国际热与流体流动杂志》62（2016）386–394。[29]B. Roidl、M. Meinke、W. Schr¨oder，跨声速翼型流动的分区雷诺平均纳维-斯托克斯-大涡模拟计算，载于：第29届AIAA应用空气动力学会议，2011年，第3974页。[30]B. Roidl、M. Meinke、W. Schr¨oder，适用于可压缩流动的分区雷诺平均纳维-斯托克斯–大涡模拟方法，《计算机与流体》67（2012）1–15。[31]M. L. Shur、P. R. Spalart、M. K. Strelets、A. K. Travin，用于空气动力学与气动声学问题分区模拟中雷诺平均纳维-斯托克斯-大涡模拟接口的合成湍流生成器，《流动、湍流与燃烧》93（1）（2014）63–92。[32]M. L. Shur、P. R. Spalart、M. K. Strelets、A. K. Travin，具备延迟分离涡模拟与壁面模型大涡模拟能力的混合雷诺平均纳维-斯托克斯-大涡模拟方法，《国际热与流体流动杂志》29（6）（2008）1638–1649。[33]Y. Koda、F.-S. Lien，在图形处理器上实现格子玻尔兹曼方法，以模拟槽道内方柱绕流的湍流，《流动、湍流与燃烧》94（3）（2015）495–512。[34]E. Buffa、J. Jacob、P. Sagaut，结合入口湍流重构的基于格子玻尔兹曼的大涡模拟高层建筑空气动力学，《风工程与工业空气动力学杂志》212（2021）104560。[35]S. Fan、M. C. Santasmasas、X.-W. Guo、C. Yang、A. Revell，基于源项的湍流流动模拟：采用逐链人工可压缩性方法在图形处理器上实现，《国际计算流体动力学杂志》35（7）（2021）549–561。

[36]X. Xue、H.-D. Yao、L. Davidson，在雷诺平均纳维-斯托克斯与大涡模拟界面处用于格子玻尔兹曼方法的合成湍流生成器，《流体物理学》34（5）（2022）055118。[37]O. Malaspinas、P. Sagaut，基于格子玻尔兹曼方法的大涡模拟壁面模型，《计算物理学杂志》275（2014）25–40。[38]A. Musker，湍流边界层中光滑壁面速度分布的显式表达式，《AIAA期刊》17（6）（1979）655–657。[39]M. Haussmann、A. C. Barreto、G. L. Kouyi、N. Rivi`ere、H. Nirschl、M. J. Krause，采用格子玻尔兹曼方法、结合壁面模型的高雷诺数湍流槽道流大涡模拟——应用于科里奥利质量流量计，《计算机与数学及其应用》78（10）（2019）3285–3302。[40]H. Maeyama、T. Imamura、J. Osaka、N. Kurimoto，采用带近壁建模的格子玻尔兹曼方法进行非定常湍流模拟，载于：AIAA 2020 航空论坛，2020年，第2565页。[41]S. Wilhelm、J. Jacob、P. Sagaut，适用于逆压梯度下湍流流动大涡模拟的新型显式代数壁面模型，《流动、湍流与燃烧》106（1）（2021）1–35。[42]H. Asmuth、C. F.Janßen、H. Olivares-Espinosa、S. Ivanell，中性大气边界层的壁面模型格子玻尔兹曼大涡模拟，《流体物理学》33（10）（2021）105111。[43]H. Reichardt，光滑管道中湍流速度分布的完整描述，《ZAMM 应用数学与力学杂志》/《应用数学与力学杂志》31（7）（1951）208–219。¨S. Hoyas、J. Jim´enez，直至re$_\tau$= 2003的湍流槽道中速度脉动的标度关系，《流体物理学》18（1）（2006）011702。[45]M. Lee、R. D. Moser，直至re $_\tau$ ≈5200的湍流槽道流直接数值模拟，《流体力学杂志》774（2015）395–415。[46]D. d’Humieres，三维多松弛时间格子玻尔兹曼模型，《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学、物理与工程科学360（1792）（2002）437–451。[47]Z. Guo、C. Zheng、B. Shi，格子玻尔兹曼方法中力项的离散格子效应，《物理评论E》65（4）（2002）046308。

[48]J.Smagorinsky, 《使用原始方程的大气环流实验：I. 基本实验》, 《月度天气评论》91 (3) (1963) 99–164.[49]A. Pasquali,M. Geier,M. Krafczyk, 《通过累积格子玻尔兹曼方法模拟湍流的近壁面处理》, 《计算机与数学及其应用》79 (1) (2020年) 195–212.[50]D. C. Wilcox, 《重新评估尺度确定方程》, 《AIAA期刊》26 (11) (1988) 1299–1310.[51] S.Wallin,A.V.Johansson, 《不可压缩与可压缩湍流的新型显式代数雷诺应力模型》, 流体力学杂志403 (2000年) 89–132.[52]J.Latt, B. Chopard, O. Malaspinas, M.Deville,A. Michler, 《格子玻尔兹曼方法中的直线速度边界》, 《物理评论E》77(5) (2008)056703.[53]Q. Zou,X.He, 《格子玻尔兹曼BGK模型的压力与速度边界条件》, 《流体物理学》9 (6) (1997) 1591–1598。

VIII. 附录

A. D3Q19 MRT 矩阵及参数选择

式（4）中的 MRT 矩阵 M 定义为:

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
8 & 8 & -11 & 8 & 8 & 8 & -11 & 8 & -11 & -30 & -11 & 8 & -11 & 8 & 8 & 8 & -11 & 8 & 8 \\
1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & -4 & 12 & -4 & 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\
-2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
-2 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -4 & 0 & -4 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}. \tag{32}
$$

不由黏度确定的松弛参数设定如下:

$$\omega_0 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = \omega_1 = 1.0 \tag{33}$$

$$\omega_1 = 1.19, \tag{34}$$

$$\omega_2 = \omega_{10} = \omega_{12} = 1.6 \tag{35}$$

$$\omega_4 = \omega_6 = \omega_8 = 1.2 \tag{36}$$

$$\omega_{16} = \omega_{17} = \omega_{18} = 1.98 \tag{37}$$