一种复杂边界处理方法：适用于切割笛卡尔单元网格的有限体积格式

秦朝晖

工程与计算机科学学院，塞达维尔大学，俄亥俄州塞达维尔，邮编45314

摘要

本文提出了一种二阶精度方法，用于计算复杂几何中的流体流动。该方法在有限体积框架中采用切割笛卡尔单元网格。通过微积分将曲面上的通量和梯度与单元平均值联系起来。由此得到的有限差分方程构成稀疏对角系统。该方法无需反复进行多项式插值或重构。本文采用该方法模拟了两个雷诺数下的二维不可压缩顶盖驱动半圆形腔流，并达到了二阶精度。该方法有望扩展至三阶精度。

1. 引言

在许多计算流体力学（CFD）研究中，人们非常需要精度高于二阶的数值格式，例如湍流大涡模拟（LES）。在大涡模拟中，网格尺度流动直接求解，而亚网格尺度（SGS）运动则通过模型处理。这种建模方法通常会在动量微分方程中引入一个与网格尺寸平方成正比的亚网格尺度项。二阶格式所产生的离散误差与该亚网格尺度项处于同一量级，因而会以不可预测的方式干扰该项。部分正是出于这一原因，高精度数值格式已成为此类研究的常规选择。例如，谱方法（Orzag，1980）和伪谱方法（Ku、Hirsh 与 Taylor，1987）已广泛用于湍流的直接数值模拟（DNS）和大涡模拟，例如参见（Kim、Moin 与 Moser，1987）。过去几十年来，基于帕德插值的高阶紧致格式（Lele，1992）（Kobayashi，1999）（Pereira、Kobayashi 与 Pereira，2001）在直接数值模拟和大涡模拟中的应用日益广泛，例如见（Gamet、Ducros、Nicoud 与 Poinsot，1999）以及（Xu L.、Cui、Xu、Zhang 与 Chen，2006）。与传统有限差分格式和有限体积格式相比，紧致格式采用更短的计算模板，却能达到相同的精度阶（Lele，1992）（Kobayashi，1999）。

很遗憾，将高阶数值格式应用于具有复杂边界的流动非常困难。例如，非结构化网格已广泛用于复杂区域流动的模拟，但使用这种网格即使实现二阶精度也相当复杂 （Yu、Ozoe 和 Tao，2005年）。谱方法和伪谱方法通常仅适用于非常简单的流动几何形状和边界条件。要将紧致格式应用于涉及不规则区域的流动问题，必须开发特殊处理来处理复杂边界。（Piller 和 Stalio，2008年）采用了一种坐标

将紧致格式从物理空间转换到计算空间的变换 方法。（Lacor、Smirnov 和 Baelmans，2004）提出了一种公式，使紧致格式能够用于任意结构化网格。（Wang、Ren 和 Li，2016）设计了一种用于非结构化网格的紧致有限体积格式。（Xu L. 等，2006）在其复杂几何流动的大涡模拟中，将浸入边界法（IBM）与紧致格式结合使用。由于单元几何和连接关系复杂，这些方法通常依赖大量多项式拟合，以重构每个不规则网格单元处紧致格式的系数。例如，在（Lacor、Smirnov 和 Baelmans，2004）的研究中，为确定二维无黏流三阶精度格式的系数，每个不规则网格单元都要求解八个方程。随着解的不断更新，这类多项式重构必须反复进行。采用笛卡尔网格上的高阶精度格式颇具吸引力，因为网格本身极为简单，可能使我们得以避免繁琐的多项式重构。事实上，计算流体力学领域最早的成功案例之一，是采用切割笛卡尔单元网格和有限差分法求解圆柱绕流（Thom，1933）。然而，在有限体积框架中引入切割笛卡尔单元网格颇具挑战。（Ye、Mittal、Udaykumar 和 Shyy，1999）开发了一种多项式插值法，用于获得浸入边界切割笛卡尔单元的单元面上通量和梯度的二阶精度近似。每个切割单元面都必须利用可用的相邻单元中心值求解多项式的六个未知系数；此外，对于二维流动，还必须考虑十六种不同的切割单元构型。这类多项式插值在每个时间步都会进行。（Mariani 和 Prata，2008）采用该方法研究了二维驱动盖不规则底部腔体中的流体流动。

另一个贯穿大多数基于有限体积的复杂边界处理方法的问题，是用分段直线段近似曲边界；就几何重现精度而言，这种方法只有一阶精度 （Pilliod & Puckett，2004）。

本文旨在介绍一种适用于采用切割笛卡尔单元网格的有限体积格式的复杂边界处理方法。作为迈向高阶有限体积方法的第一步，本文采用二阶精度格式。本文选取二维不可压缩顶盖驱动半圆形腔流作为示例，以说明该方法的有效性。

考虑一个直径为D 的二维半圆形腔体，如图 1 所示。腔内流体

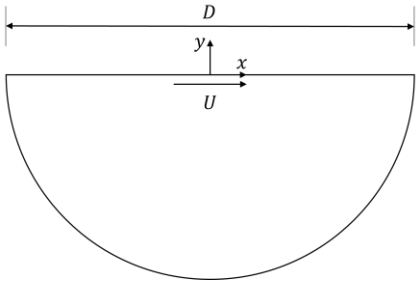

图 1

该腔体内的流体具有恒定密度和恒定黏度。流动由腔体顶盖驱动，顶盖长度无限，并以恒定速度 U 向右平移。（Glowinski、Guidoboni 和 Pan, 2006）在一项基准测试中采用基于算子分裂和有限元的方法研究了这种流动。他们的结果以及使用超精细网格和商业CFD软件获得的数据，将用于验证当前方法。

正如后文将展示的，当前方法不需要反复进行多项式重构或插值，也无需用分段线性线段近似不规则边界。此外，该方法在应用时，技术细节方面具有极大的灵活性。本文组织如下：第 2 节阐述数值方法；第 3 节给出半圆腔体顶盖驱动流动的数值结果，并将其与基准数据进行比较。最后，本文总结当前方法，并讨论实现更高阶格式的可能途径。

2. 数值方法 2.1.控制微分方程

tial 方程

腔体内的流场由纳维-斯托克斯方程和连续性方程控制。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (vu)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

其中，t 为时间；u 和v 分别为x方向和y方向的流速；p 为运动压力，ν 为运动黏度。

边界处采用无滑移条件，即，

$$u=v=0 \tag{4}$$

沿着半圆形壁面以及

$$u=U, v=0 \tag{5}$$

在腔体顶盖处。

2.2.网格

采用笛卡尔网格对控制微分方程进行离散化。如图2所示，笛卡尔单元被边界切割后形成切割单元。然而，这种网格，

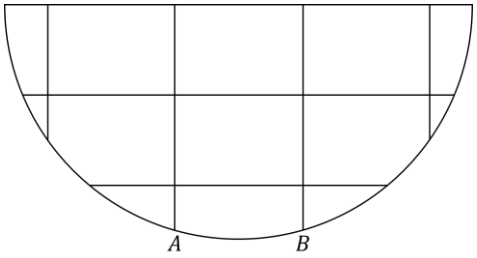

图2

在满足当前方法所要求的三个条件之前，还需要进行一些修改。

首先，每个单元面都必须光滑，即单元面曲率不存在不连续性。其次，单元面的每个坐标都必须是单调的。第三，在单元面的每个端点处，必须分别绘制一条水平网格线和一条垂直网格线。这些要求背后的依据将在后文中阐明。

图2所示的网格不满足第二项要求，因为面 AB 的 y-坐标不是单调的。它也不满足第三项要求，例如，面 AB 的两端各只有一条竖直网格线。

在对几何进行网格划分时，合理地分割几何边界即可轻松满足前两项要求。然而，第三项要求只有在计算……中才可行。

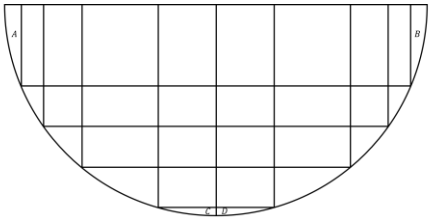

图3

至少有一个沿该方向横贯整个计算域的直线边界（例如腔体顶盖）的计算域，或对称域，而该腔体恰好也属于对称域。否则，强制满足这一要求可能会导致网格线无限延伸。幸运的是，大多数实际计算域要么属于这类形状，要么可以轻松调整为这类形状，而不会影响流动物理。

图3展示了一个符合全部三项要求的网格。如图所示，该网格仅包含四边矩形单元和三边切割单元。标有字母的四个切割单元需要进行特殊处理。由于单元 A 和 B 在一个方向上没有相邻单元（此处为 y 方向），因此称为孤立单元。单元 C 和 D 则称为孪生

单元，它们是并排相邻的切割单元。孤立单元和孪生单元是任何可应用当前方法的二维网格中仅有的例外情况。

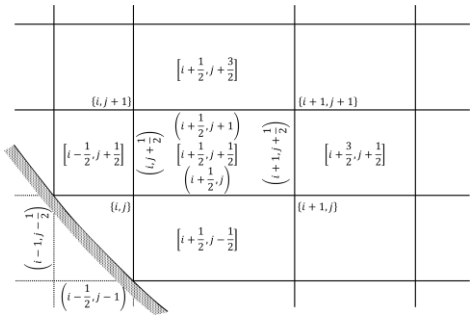

图4

在本研究中，我们首先对“原始”网格，即切割前的笛卡尔网格进行编号。切割单元继承其切割前原始单元的索引，而曲边界面则继承被其切去的两个面的索引。例如，图4左下角的完整切割单元是 $\left[i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right]$ 单元，该单元的曲边界面既是$(i-1,j-\frac{1}{2})$面，也是$(i-\frac{1}{2},j-1)$面。图中方括号内的索引】【”】【

方括号表示单元；圆括号表示面，花括号表示节点。在后续章节中，如果不会引起混淆，有时会使用单个索引表示一个网格实体。

2.3. 离散化

控制微分方程通过对每个网格单元进行积分来离散化。这些积分可以分为两个假想步骤。第一步，对单元的一个薄切片进行积分。例如，对于单元 $\left[i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right]$，可以用一条水平线 $y=Y$ 将其切出一个切片，如图5所示。对该切片积分方程(1)可得

$$\frac{\partial}{\partial t}u^X dy+[(uu)_e-(uu)_w]dy+\left[\frac{\partial(vu)}{\partial y}\right]^X dy = -(p_e-p_w)dy+\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^X\right]dy \tag{6}$$

其中，切片上的 w and e denote values at the west (left) and east (right) end。在此，我们将函数 $\phi(x,y)$ 的切片积分定义为

$$\phi^X(Y)=\int_{x_w(Y)}^{x_e(Y)}\phi(x,Y)dx \tag{7}$$

其中，$x_w(Y)$ 和 $x_e(Y)$ 是由 $y=Y$ 截出的单元切片的 x 的 coordinates of the two ends。在第二步中，对单元的整个 y 范围积分方程 (6)。或者，也可以先对垂直单元切片上的控制微分方程积分，再对整个单元的 x 范围积分。如果倾向于采用这种积分顺序，可以将沿由直线 $x=X$ 截出的垂直单元切片的切片积分定义为

$$\phi^Y(X) = \int_{y_s(X)}^{y_n(X)} \phi(X,y)dy \tag{8}$$

其中，$y_s(X)$ 和 $y_n(X)$ 是切片的 y-ooredinates of the south (b ottom) 端和北（顶部）端。完成这两个步骤，选择哪种积分顺序都无关紧要，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right]} + \left[(uu)^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} - (uu)^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}\right] + \left[(vu)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)} - (vu)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right] \\
&\quad = -\left[p^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} - p^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}\right] \\
&\quad + \nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

where the cell integral is

$$\phi^{xy} = \int_{x_w}^{x_e} \phi^Y(X)dX = \int_{y_s}^{y_n} \phi^X(Y)dY \tag{10}$$

其中 x_w、x_e、y_s 和 y_n are the lower and upper coordinates 是单元在 x 和 y 方向上的边界。我们将函数 ϕ 沿某个面（例如面 f ）的滑动积分定义为

$$\phi^x_f = \int_{x_w}^{x_e} \phi_f dx \tag{11}$$

$$\phi^y_f = \int_{y_s}^{y_n} \phi_f dy \tag{12}$$

其中 ϕ_f 是沿 fac f e .的 ϕ 值，如图 Note that 所示，倾斜面上的滑动积分可能不为零。按照相同的步骤，对方程(2)进行积分，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right]} + \left[(uv)^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} - (uv)^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}\right] + \left[(vv)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)} - (vv)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right] \\
&\quad = -\left[p^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)} - p^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right] \\
&\quad + \nu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right]
\end{aligned} \tag{13}$$

请注意，方程(9)和(13)是精确的，因为目前尚未作出任何假设；它们对内部矩形单元和边界切割单元均适用。

这是方便的。于将切片平均值、单元平均值和滑动平均值定义如下 :

$$\bar{\phi}^X(Y) = \frac{\phi^X(Y)}{x_e(Y) - x_w(Y)} \tag{14}$$

$$\bar{\phi}^Y(X) = \frac{\phi^Y(X)}{y_n(X) - y_s(X)} \tag{15}$$

$$\bar{\phi}^{xy} = \frac{\phi^{xy}}{\int_{x_w}^{x_e}[y_n(X) - y_s(X)]dX} = \frac{\phi^{xy}}{\int_{y_s}^{y_n}[x_e(Y) - x_w(Y)]dY} = \frac{\phi^{xy}}{\Delta V} \tag{16}$$

$$\bar{\phi}_f^x = \frac{\phi_f^x}{x_e - x_w} = \frac{\phi_f^x}{\Delta x} \tag{17}$$

$$\bar{\phi}_f^y = \frac{\phi_f^y}{y_n - y_s} = \frac{\phi_f^y}{\Delta y} \tag{18}$$

其中，Δx、 Δy 和ΔV 是单元的overall -, -sizes and 体积。应注意，当切片缩小至一个节点时，切片平均值就是节点值。例如，对于图5所示的单元$\left[i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right]$，沿$y = y_s$ 方向的切片平均值为$\bar{\phi}^X(y_s) = \phi_{\{i,j-1\}}$。接着，我们定义单元的平均$x$尺寸和$y$尺寸如下

$$\overline{\Delta x} = \frac{\int_{y_s}^{y_n}[x_e(Y) - x_w(Y)]dY}{y_n - y_s} = \frac{\Delta V}{\Delta y} \tag{19}$$

$$\overline{\Delta y} = \frac{\int_{x_w}^{x_e}[y_n(X) - y_s(X)]dX}{x_e - x_w} = \frac{\Delta V}{\Delta x} \tag{20}$$

请注意，Δx、 Δy、 ΔV、$\overline{\Delta x}$, and $\overline{\Delta y}$ are all constants, which on 只需计算一次。积分动量方程 () 和 () 随后可

9 13

改写为

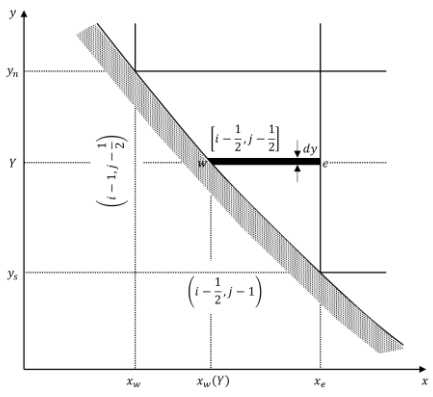

图5

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right]}+\frac{\overline{(uu)}^{y}_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}-\overline{(uu)}^{y}_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}}{\overline{\Delta x}}+\frac{\overline{(vu)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}-\overline{(vu)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}}{\overline{\Delta y}}$$
$$=-\frac{\bar{p}^{y}_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}-\bar{p}^{y}_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}}{\overline{\Delta x}}$$
$$+\nu\left[\frac{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}^{y}_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}-\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}^{y}_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}}{\overline{\Delta x}}+\frac{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}-\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}}{\overline{\Delta y}}\right] \tag{21}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right]}+\frac{\overline{(uv)}^{y}_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}-\overline{(uv)}^{y}_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}}{\overline{\Delta x}}+\frac{\overline{(vv)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}-\overline{(vv)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}}{\overline{\Delta y}}$$
$$=-\frac{\bar{p}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}-\bar{p}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}}{\overline{\Delta y}}$$
$$+\nu\left[\frac{\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}^{y}_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}-\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}^{y}_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}}{\overline{\Delta x}}+\frac{\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}-\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}^{x}_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}}{\overline{\Delta y}}\right] \tag{22}$$

空间精度要求计算方程 (21) 和 (22) 中的滑动平均值 f，单使其具有二阶截断误差（Kobayashi，1999）。此外，单元平均值是待求解的变量，因此，如果无法通过边界条件确定滑动平均值，则必须将其与相应的单元平均值联系起来。为此，我们将首先介绍 PKP 定理，该定理对于当前方法的构建至关重要。

Objective is to obtain (21) averages of the velocity field to the second order

2.4. PKP 定理：若两个函数

s ϕ 和 ψ 可视为仅关于一个坐标（例如 y）的函数。通过比较这两个函数乘积的积分的泰勒展开与这两个函数积分的乘积的泰勒展开，可得（Pereira, Kobayashi, & Pereira, 2001）

$$\frac{\int_{y_s}^{y_n}(\phi\psi)dy}{\Delta y}=\frac{\int_{y_s}^{y_n}\phi dy}{\Delta y}\frac{\int_{y_s}^{y_n}\psi dy}{\Delta y}+\frac{\Delta y}{12}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)_0\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_0+\mathcal{O}(\Delta y^4) \tag{23}$$

其中 $\Delta y=y_n-y_s$ and the subscript 0 denotes the middle point of this 范围。公式(24)下文将称为PKP定理（以其作者命名）。显然，该定理适用于滑动平均，因为沿一个面分布的变量可视为仅关于一个坐标的函数。因此，

$$\overline{(\phi\psi)}^{y}_{f}=\bar{\phi}^{y}_{f}\bar{\psi}^{y}_{f}+\frac{\Delta y_f^2}{12}\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_0\left(\frac{d\psi_f}{dy}\right)_0+\mathcal{O}\left(\Delta y_f^4\right) \tag{24}$$

注意，该方程右侧的两个导数是全导数，而不是偏导数。例如，沿着图6中示意的面，函数ϕ 在点b 处对y的全导数是

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_b = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\phi_a - \phi_b}{\delta y} \tag{25}$$

另一方面，部分 y -derivative of ϕ at the same point is

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_b = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\phi_c - \phi_b}{\delta y} \tag{26}$$

显然，对于近乎水平的倾斜面，它们沿着 vertical face, but they may 重合，但差异很大。这两个导数之间的关系为

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_b = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_b + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_b \left(\frac{dx_f}{dy_f}\right)_b \tag{27}$$

in which $\left(dx_f/dy_f\right)_b$ is the 面 f 在点b处的反斜率。显然

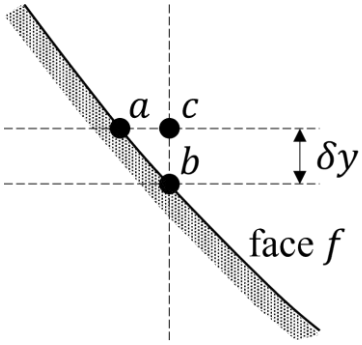

图6

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_b = \left(\frac{d\phi_f}{dx}\right)_b \left(\frac{dx_f}{dy_f}\right)_b \tag{28}$$

and

$$\left(\frac{d\phi_f}{dx}\right)_b = \left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_b \left(\frac{dy_f}{dx_f}\right)_b \tag{29}$$

如果 $\overline{(\phi\psi)}_f^y$ 只需达到二阶精度，例如方程 (21)和(22) 中的非线性项，则只需要方程 (24) 右侧的第一项。然而，为了在$\overline{(\phi\psi)}_f^y$中达到三阶精度——正如当前方法后续发展所必需的那样——必须保留方程 (24) 右侧的第二项，并且该项中的两个全导数必须至少以一阶精度进行近似。这可以通过多种方式实现。例如，我们可以利用垂直面或倾斜面的南侧和北侧相邻面上的滑动平均，来近似此类面的 y-中心处的全导数：

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_0 = a_s\bar{\phi}_s^y + a_n\bar{\phi}_n^y + \mathcal{O}(h) \tag{30}$$

其中

$$\begin{cases} a_s = -\dfrac{2}{2\Delta y_f + \Delta y_s + \Delta y_n} \\ a_n = \dfrac{2}{2\Delta y_f + \Delta y_s + \Delta y_n} \end{cases} \tag{31}$$

下标s 和n 分别指第 r 个相邻面 i 符号h 表示与局部网格尺寸相当的常数。该方程可以通过使用泰勒展开推导得到。注意，倾斜边界面的南/北相邻面是其正下方/正上方的边界面。例如，图4中边界面 $(i-1, j-\frac{1}{2})$ 的南相邻面是边界面 $(i, j-\frac{3}{2})$。

如果面 f 只有北侧相邻面，则我们有

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_0 = a_f\bar{\phi}_f^y + a_n\bar{\phi}_n^y + \mathcal{O}(h) \tag{32}$$

其中

$$\begin{cases} a_f = -\dfrac{2}{\Delta y_f + \Delta y_n} \\ a_n = \dfrac{2}{\Delta y_f + \Delta y_n} \end{cases} \tag{33}$$

另一方面，如果面 f 有面，则有

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_0 = a_s\bar{\phi}_s^y + a_f\bar{\phi}_f^y + \mathcal{O}(h) \tag{34}$$

其中

$$\begin{cases} a_s = -\dfrac{2}{\Delta y_s + \Delta y_f} \\ a_f = \dfrac{2}{\Delta y_s + \Delta y_f} \end{cases} \tag{35}$$

或者，我们可以使用熟悉的中心差分来近似此类导数：

$$\left(\frac{d\phi_f}{dy}\right)_0 = \frac{\phi_f(y_n) - \phi_f(y_s)}{\Delta y_f} + \mathcal{O}(h^2) \tag{36}$$

其中y_s 和 y_n 是该y 近似至少具有二阶精度，如果面两端的节点值具有二阶精度。此类节点值可以通过相邻面的滑动平均获得，如下所示：

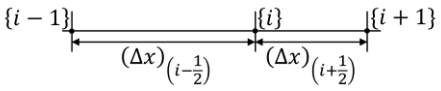

图 7

对于如图7所示的三个连续节点，即 $\{i-1\}$、$\{i\}$ 和 $\{i+1\}$，我们有

$$b_i\phi_{\{i\}} = d_i\bar{\phi}^x_{\left(i-\frac{1}{2}\right)} + e_i\bar{\phi}^x_{\left(i+\frac{1}{2}\right)} + \mathcal{O}(h^3) \tag{37}$$

系数为

$$\begin{cases} b_i = (\Delta x)_{\left(i-\frac{1}{2}\right)} + (\Delta x)_{\left(i+\frac{1}{2}\right)} \\ d_i = (\Delta x)_{\left(i+\frac{1}{2}\right)} \\ e_i = (\Delta x)_{\left(i-\frac{1}{2}\right)} \end{cases} \tag{38}$$

该公式可通过将公式（37）两侧的Taylor 级数展开式中对应的项进行等同，直到所需的精度阶而推导得到。

如果节点 $\{i\}$ 位于西侧（左侧）边界，且沿此边界的 ϕ 未知，则可通过以下公式求得。

$$\phi_{\{i\}} + \phi_{\{i+1\}} = 2\bar{\phi}^x_{\left(i+\frac{1}{2}\right)} + \mathcal{O}(h^2) \tag{39}$$

这里有一个紧致格式，即

s adopted to minimize the stencil siz

如果节点 $\{i\}$ 位于东（右）边界上，则有

$$\phi_{\{i-1\}} + \phi_{\{i\}} = 2\bar{\phi}^x_{\left(i-\frac{1}{2}\right)} + \mathcal{O}(h^2) \tag{40}$$

需要注意的是，作为一篇论文，当前方法在应用上具有很大的灵活性。例如，内部节点 mentioned in the introduction of th 值可以根据相邻竖直面而非水平面上的滑动平均值计算。此外，也可以直接将节点值与周围的单元平均值联系起来，而不是与滑动平均值联系起来。另一个例子是，在边界面的中心计算 y-导数时，可以使用方程 (32) 或 (33)；或者，也可以先计算 x-导数，再使用方程 (28)求出 y-导数。此外，只要能保持所需的精度，在该过程的几乎每一步中都可以自由选择任意数值格式。现在我们可以转而讨论如何将滑动平均值与单元平均值联系起来。

2.5. 滑动平均的评估 滑动平均，如果无法获得

le 可由边界条件得出，并可按如下方式与单元平均值相关联。

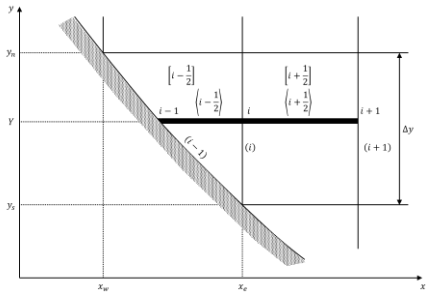

图 8

我们可以使用一条水平线 $y = Y$ 切割跨越目标面的两个单元，即面 (i)，如图 8所示。我们有一个类似于公式 (37) 的公式：

$$b_i\phi_i = d_i\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + e_i\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} + \mathcal{O}(h^3) \tag{41}$$

这些系数是

$$\begin{cases} b_i = (\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + (\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} \\ d_i = (\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} \\ e_i = (\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} \end{cases} \tag{42}$$

其中，下标位于角括号内的单元中。这里，ϕ_i 是水平线与面（i）交点处的 ϕ 值。对面（i）的 y 范围积分方程 (41)，再除以 Δy，得到

$$\frac{\int_{y_s}^{y_n}(b_i\phi_i)dy}{\Delta y} = \frac{\int_{y_s}^{y_n}\left(d_i\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}\right)dy}{\Delta y} + \frac{\int_{y_s}^{y_n}\left(e_i\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}\right)dy}{\Delta y} + \mathcal{O}(h^3) \tag{43}$$

如果这两个 (i) 的 b_i, d_i, e_i 和 $(\Delta x)_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}$ 是常数，则方程 (43) 化简为

$$b_i\bar{\phi}^y_{(i)} = d_i\bar{\phi}^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} + e_i\bar{\phi}^{xy}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} + \mathcal{O}(h^3) \tag{44}$$

如果这些系数中至少有一个 b_i, d_i, e_i 和 $(\Delta x)_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}$ 可能不再是常数，而是 y-坐标的已知函数。方程 (43) 中的各项随后可以利用 PKP 定理进行求值。方程 (43) 的左侧是

$$\frac{\int_{y_s}^{y_n}(b_i\phi_i)dy}{\Delta y} = \frac{\int_{y_s}^{y_n} b_i dy}{\Delta y}\bar{\phi}^y_{(i)} + \frac{\Delta y^2}{12}\left(\frac{db_i}{dy}\right)_0\left[\frac{d\phi_{(i)}}{dy}\right]_0 + \mathcal{O}(h^4) \tag{45}$$

由于必须保留方程 (45) 的三阶项，且这一侧的两个导数必须至少达到一阶精度。显然

$$\frac{\int_{y_s}^{y_n} b_i dy}{\Delta y} = \overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} + \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \tag{46}$$

and

$$\left(\frac{db_i}{dy}\right)_0 = \left[\frac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + \left[\frac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \tag{47}$$

可以精确计算；误差 $[d\phi_{(i)}/dy]_0$ 可用上一节讨论的方法进行评估。

and only need to be done once. The deriva

同理，方程 (43) 的右侧为

$$\begin{aligned}\frac{\int_{y_s}^{y_n}\left(d_i\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}\right)dy}{\Delta y} + \frac{\int_{y_s}^{y_n}\left(e_i\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}\right)dy}{\Delta y} &= \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}\overline{\left(\bar{\phi}^X\right)}^y_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} + \overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}\overline{\left(\bar{\phi}^X\right)}^y_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ &+ \frac{\Delta y^2}{12}\left\{\left[\frac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left[\frac{d\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right. \\ &\left.+ \left[\frac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left[\frac{d\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right\} + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned} \tag{48}$$

且 $\left[d\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}/dy\right]_0$ 可用中心差分近似：

$$\left[\frac{d\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 = \frac{\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}(y_n) - \bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}(y_s)}{\Delta y} + \mathcal{O}(h^2) \tag{49}$$

切片平均值 $\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}$ 借助 PKP 定理再次计算。由于

of (48) on the right side of Equation are co

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^{xy}_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]} &= \frac{\int_{y_s}^{y_n}(\Delta x)_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}dy}{(\Delta V)_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]}} = \frac{1}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]}}\frac{\int_{y_s}^{y_n}(\Delta x)_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}dy}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]}}\left\{\overline{(\Delta x)}_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]}\overline{\left(\bar{\phi}^X\right)}^y_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]}\right. \\ &\left.+ \frac{\Delta y^2}{12}\left[\frac{d(\Delta x)_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left[\frac{d\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right\} + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned} \tag{50}$$

它表示

$$\overline{\left(\bar{\phi}^X\right)}^y_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]} = \bar{\phi}^{xy}_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]} - \frac{\Delta y^2}{12\overline{(\Delta x)}_{\left[i\pm\frac{1}{2}\right]}}\left[\frac{d(\Delta x)_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left[\frac{d\bar{\phi}^X_{\langle i\pm\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + \mathcal{O}(h^3) \tag{51}$$

组装(45) (51) equations through together, we end up with

$$A_i\bar{\phi}^{y}_{(i-1)} + B_i\bar{\phi}^{y}_{(i)} + C_i\bar{\phi}^{y}_{(i+1)} = D_i\bar{\phi}^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} + E_i\bar{\phi}^{xy}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} + r_i + \mathcal{O}(h^3) \tag{52}$$

其中

$$\begin{cases} A_i = 0 \\ B_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} + \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ C_i = 0 \\ D_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ E_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} \\ r_i = \dfrac{\Delta y^2}{12}\left\{\left(\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 - \dfrac{\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right)\left[\dfrac{d\bar{\phi}^{X}_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \right. \\ \left. + \left(\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 - \dfrac{\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right)\left[\dfrac{d\bar{\phi}^{X}_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 - \left(\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + \left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right)\left[\dfrac{d\phi_{(i)}}{dy}\right]_0\right\} \end{cases} \tag{53}$$

This equation is valid for all interior vertical faces including those sandwiched between two 矩形单元，其中 $r_i = 0$。

边界面的方程推导过程与上述过程类似。所得公式与方程 （52）具有相同的一般形式。对于仅在其东（右）侧具有相邻单元的西（左）边界面（i），有

$$\begin{cases} A_i = 0 \\ B_i = 1 \\ C_i = 1 \\ D_i = 0 \\ E_i = 2 \\ r_i = -\dfrac{\Delta y^2}{6\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left[\dfrac{d\bar{\phi}^{X}_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \end{cases} \tag{54}$$

对于一个 右边界（i），系数为 that only has left neighboring cells, t

$$\begin{cases} A_i = 1 \\ B_i = 1 \\ C_i = 0 \\ D_i = 2 \\ E_i = 0 \\ r_i = -\dfrac{\Delta y^2}{6\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left[\dfrac{d\bar{\phi}^{X}_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \end{cases} \tag{55}$$

方程 (52)通(55)inate 方向可用于网格同一行或同一列上的面，但孤立单元的边界面除外。对于孤立单元，其两个边界面的方程，即方程 (54) 和 (55)

相同，并且必须提供一个额外的方程，将在下一节中讨论。

导数的滑动平均与单元平均值的关系，几乎可以用上文阐述的相同方式表示。对于图 8所示的切片，我们有

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = f_i\phi_i + d_i\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + e_i\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + \mathcal{O}(h^2) \tag{56}$$

其中

$$\begin{cases} f_i = \dfrac{2\left[(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} - (\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}\right]}{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}} \\ d_i = -\dfrac{2(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}\left[(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + (\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}\right]} \\ e_i = \dfrac{2(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}\left[(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + (\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}\right]} \end{cases} \tag{57}$$

如果 (i) 是西（左）边界面，则公式为

$$b_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i + c_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i+1} = -6\phi_i + 6\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} + \mathcal{O}(h^3) \tag{58}$$

其中

$$\begin{cases} b_i = 2(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} \\ c_i = (\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} \end{cases} \tag{59}$$

相应的公式为 th ary 面 (i) e east (right) bound

$$a_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i-1} + b_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = 6\phi_i - 6\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} + \mathcal{O}(h^3) \tag{60}$$

其中

$$\begin{cases} a_i = (\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} \\ b_i = 2(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle} \end{cases} \tag{61}$$

如果当前面 (i) 的一侧相邻单元不规则，而东（右）侧相邻单元为矩形单元，则 $(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}$ 在界面的一端消失，见图 8。对于这种情况，我们可以将方程 (56) 两边乘以 $(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}$，这样对该面的 y-范围积分时就不会出现奇点。根据 PKP 定理，结果为

$$A_i\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}^{y}_{(i-1)}+B_i\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}^{y}_{(i)}+C_i\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}^{y}_{(i+1)}=F_i\bar{\phi}^{y}_{(i)}+D_i\overline{(\phi)}^{xy}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}+E_i\overline{(\phi)}^{xy}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}+r_i+\mathcal{O}(h^3) \tag{62}$$

其中

$$\begin{cases} A_i=0 \\ B_i=\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} \\ C_i=0 \\ F_i=2\left[1-\dfrac{\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}{(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\right] \\ D_i=-2(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}\overline{\left[\dfrac{1}{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}+(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\right]}^{y} \\ E_i=-D_i-F_i \\ r_i=\dfrac{\Delta y^2}{12}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\left\{-\dfrac{2}{(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d\phi_{(i)}}{dy}\right]_0+\left[\dfrac{2(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}{\left\{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}+(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}\right\}_0^2}-\dfrac{D_i}{B_i}\right]\left[\dfrac{d\bar{\phi}^{X}_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0\right. \\ \quad\left.+\dfrac{2}{(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}\left\{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}+2(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}\right\}}{\left\{(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}+(\Delta x)_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}\right\}^2}\right]_0\left[\dfrac{d\bar{\phi}^{X}_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0-\left[\dfrac{d\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{(i)}}{dy}\right]_0\right\} \end{cases} \tag{63}$$

Notice that A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, , and coefficients in r_i 仅计算一次。 are all constants and need to be calcula

有人可能会想，为什么我们不将方程两边同时乘以再取滑动平均，这样得到的方程便适用于所有内部垂直面。此方法行不通，因为该方程会有五阶截断误差，而当前名义上为四阶、实际上为三阶精度的 PKP 定理版本无法支持这一点。

对于一个面（i），其东（右）侧相邻单元为不规则边界单元，西（左）侧相邻单元为矩形单元，我们可以将方程(56)两边乘以（Δx）$_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}$，然后在该面的$y$范围内对方程积分。方程(62)的系数和残差项为

$$\begin{cases} A_i = 0 \\ B_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ C_i = 0 \\ F_i = 2\left[\dfrac{\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}{(\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}} - 1\right] \\ D_i = -E_i - F_i \\ E_i = 2(\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}\overline{\left[\dfrac{1}{(\Delta x)_{\langle \imath+\frac{1}{2}\rangle} + (\Delta x)_{\left[\imath-\frac{1}{2}\right]}}\right]}^{y} \\ r_i = \dfrac{\Delta y^2}{12}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \left\{ \dfrac{2}{(\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d\phi_{(i)}}{dy}\right]_0 - \left[\dfrac{2(\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}{\left\{(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} + (\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}\right\}_0^2} + \dfrac{E_i}{B_i}\right]\left[\dfrac{d\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \right. \\ \left. - \dfrac{2}{(\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}\left\{(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} + 2(\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}\right\}}{\left\{(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle} + (\Delta x)_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}\right\}^2}\right]_0 \left[\dfrac{d\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 - \left[\dfrac{d\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{(i)}}{dy}\right]_0 \right\} \end{cases} \tag{64}$$

Equations (63) and (64) and their counterparts for horizontal faces) apply to all interfaces 但变生单元之间的系数除外，因为（Δx）$_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}$ 和（Δx）$_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}$ 在此类面的一个端点处均为零。稍后将讨论这种情况。

对于西（左）边界面 (i)、方程的系数和残差项 (62) are

$$\begin{cases} A_i = 0 \\ B_i = 2\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ C_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ F_i = -6 \\ D_i = 0 \\ E_i = 6 \\ r_i = -\dfrac{\Delta y^2}{12}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \left\{ \dfrac{6}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + 2\left[\dfrac{d\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{(i)}}{dy}\right]_0 + \left[\dfrac{d\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{(i+1)}}{dy}\right]_0 \right\} \end{cases} \tag{65}$$

For an east (right) boundary face (i), the coefficients and residual term of Equation (62) ar

$$\begin{cases} A_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} \\ B_i = 2\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} \\ C_i = 0 \\ F_i = 6 \\ D_i = -6 \\ E_i = 0 \\ r_i = -\dfrac{\Delta y^2}{12}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \left\{ -\dfrac{6}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + 2\left[\dfrac{d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{(i)}}{dy}\right]_0 + \left[\dfrac{d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{(i-1)}}{dy}\right]_0 \right\} \end{cases} \tag{66}$$

Although Equations (65) and (66) are applicable to boundary faces between cells, we do not 不要在此类面上使用它们。相反，我们将它们应用于孪生单元界面，例如面(i)，然后将它们相加，以构造孪生单元界面的一个方程，而方程 (63) 和(64) 不适用于该方程。该方程再次采用方程 (62) 的形式，并且

$$\begin{cases} A_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} \\ B_i = 2\left[\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]} + \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}\right] \\ C_i = \overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]} \\ F_i = 0 \\ D_i = -6 \\ E_i = 6 \\ r_i = -\dfrac{\Delta y^2}{12}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \left\{ -\dfrac{6}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d\bar{\phi}^X_{\langle i-\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + 2\left[\dfrac{d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{(i)}}{dy}\right]_0 + \left[\dfrac{d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{(i-1)}}{dy}\right]_0 \right\} \\ \quad -\dfrac{\Delta y^2}{12}\left[\dfrac{d(\Delta x)_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 \left\{ \dfrac{6}{\overline{(\Delta x)}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}}\left[\dfrac{d\bar{\phi}^X_{\langle i+\frac{1}{2}\rangle}}{dy}\right]_0 + 2\left[\dfrac{d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{(i)}}{dy}\right]_0 + \left[\dfrac{d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{(i+1)}}{dy}\right]_0 \right\} \end{cases} \tag{67}$$

Then we need equations for boundary faces of twin cells different from Equations (65) and (66). 这个问题将在下一节讨论。

2.6. 孤立单元和孪生单元的特殊处理 如上一节所述，仅在

方程(54)和(55)（或另一方向上的对应方程）可用于孤立单元，以计算其边界上的滑动平均值；例如，在图9中计算孤立单元A的边界面1和2上的$\bar{\phi}^x$ 时即可采用这些方程。有许多方法可以解决这一问题，例如多项式拟合。下面介绍一种更符合当前工作理念的方法。

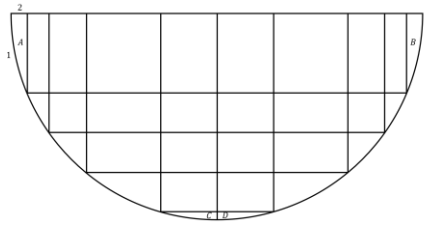

图9

首先，孤立单元只是在一个方向上孤立。在另一方向上计算其滑动平均值并不困难。例如，我们可以求得图9中孤立单元A的面1上的$\bar{\phi}^{y}$，因为沿x方向，该单元具有足够的相邻单元；也就是说，单元A在x方向上并不孤立。沿同一面计算的滑动平均值$\bar{\phi}^{x}$可由$\bar{\phi}^{y}$按如下方式求得。

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^{x}_{(1)} = \frac{\int_{x_{1,w}}^{x_{1,e}} \phi_1 dx_1}{(\Delta x)_{(1)}} &= \frac{1}{(\Delta x)_{(1)}} \int_{y_{1,n}}^{y_{1,s}} \phi_1 \frac{dx_1}{dy_1} dy_1 = -\frac{1}{(\Delta x)_{(1)}} \int_{y_{1,s}}^{y_{1,n}} \phi_1 \frac{dx_1}{dy_1} dy_1 \\ &= -\frac{(\Delta y)_{(1)}}{(\Delta x)_{(1)}} \overline{\left(\phi_1 \frac{dx_1}{dy_1}\right)}^{y} \\ &= -\frac{(\Delta y)_{(1)}}{(\Delta x)_{(1)}} \left[\overline{\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)}^{y} \bar{\phi}^{y}_{(1)} + \frac{(\Delta y)^2_{(1)}}{12} \left(\frac{d^2 x_1}{dy_1^2}\right)_0 \left[\frac{d\phi_{(1)}}{dy}\right]_0 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(h^4) \right]\end{aligned} \tag{68}$$

in which

$$\overline{\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)}^{y} = \frac{1}{(\Delta y)_{(1)}} \int_{y_{1,s}}^{y_{1,n}} \frac{dx_1}{dy_1} dy_1 = \frac{1}{(\Delta y)_{(1)}} \int_{x_{1,e}}^{x_{1,w}} dx_1 = -\frac{(\Delta x)_{(1)}}{(\Delta y)_{(1)}} \tag{69}$$

因此，

$$\bar{\phi}^{x}_{(1)} = \bar{\phi}^{y}_{(1)} - \frac{(\Delta y)_{(1)}}{(\Delta x)_{(1)}} \left\{ \frac{(\Delta y)^2_{(1)}}{12} \left(\frac{d^2 x_1}{dy_1^2}\right)_0 \left[\frac{d\phi_{(1)}}{dy}\right]_0 + \mathcal{O}(h^4) \right\} \tag{70}$$

并 $(d^2 x_1/dy_1^2)_0$ can be computed exactly and $[d\phi_{(1)}/dy_0]$ may be estimated与第2.4节中介绍的方法相结合。一旦求得 $\bar{\phi}^{x}_{(1)}$，沿另一边界面（面2）的切片平均即可使用类似于(54)或 (55) 的方程进行计算。

尽管并非必需，也可以借助公式 (27)，由 $(\partial\phi/\overline{\partial x}^{y})$ 求出沿面1的导数 $(\partial\phi/\partial y)$ $\overline{}^{x}$ 的滑动平均，如下所示：

$$\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}^{x}_{(1)} = \frac{1}{(\Delta x)_{(1)}}\int_{x_{1,w}}^{x_{1,e}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_1 dx_1$$
$$= \frac{1}{(\Delta x)_{(1)}}\int_{y_{1,n}}^{y_{1,s}}\left[\frac{d\phi_1}{dy_1} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_1\frac{dx_1}{dy_1}\right]\frac{dx_1}{dy_1}dy_1$$
$$= \frac{1}{(\Delta x)_{(1)}}\int_{y_{1,s}}^{y_{1,n}}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_1\frac{dx_1}{dy_1} - \frac{d\phi_1}{dy_1}\right]\frac{dx_1}{dy_1}dy_1 \quad (71)$$
$$= \frac{1}{(\Delta x)_{(1)}}\left\{\overline{\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_1\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2\right]}^{y}(\Delta y)_{(1)} - \left(\phi_1\frac{dx_1}{dy_1}\right)\Big|_{y_{1,s}}^{y_{1,n}}\right.$$
$$\left. + \overline{\left(\phi_1\frac{d^2x_1}{dy_1^2}\right)}^{y}(\Delta y)_{(1)}\right\}$$

滑动 ing averages of products are then evaluated using the PKP theorem, wh这给出

$$\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}^{x}_{(1)} = \frac{(\Delta y)_{(1)}}{(\Delta x)_{(1)}}\left\{\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}^{y}_{(1)}\overline{\left[\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2\right]}^{y} + \frac{(\Delta y)_{(1)}^2}{6}\left[\frac{d\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{(1)}}{dy}\right]_0\left(\frac{dx_1}{dy_1}\frac{d^2x_1}{dy_1^2}\right)_0\right.$$
$$- \frac{1}{(\Delta y)_{(1)}}\left(\phi_1\frac{dx_1}{dy_1}\right)\Big|_{y_{1,s}}^{y_{1,n}} + \frac{1}{(\Delta y)_{(1)}}\bar{\phi}^{y}_{(1)}\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)\Big|_{y_{1,s}}^{y_{1,n}} \quad (72)$$
$$\left. + \frac{(\Delta y)_{(1)}^2}{12}\left[\frac{d\phi_{(1)}}{dy}\right]_0\left(\frac{d^3x_1}{dy_1^3}\right)_0 + \mathcal{O}(h^4)\right\}$$

第 2.4 节和第 2.5 节中介绍的方法，同样的方法也适用于变生单元的边界面，例如图9 中的单元 C 和 D。

2.7. 求解过程

将动量方程(21)和(22)中的滑动平均表示为相应的单元平均值后，可将其写成如下符号形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}^{xy}_{[i]} + A^u_{[i]}\bar{u}^{xy}_{[i]} = \sum_{l|i}A^u_{[l]}\bar{u}^{xy}_{[l]} + r^u_{[i]} - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}^{xy}_{[i]} \quad (73)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}^{xy}_{[j]} + A^v_{[j]}\bar{v}^{xy}_{[j]} = \sum_{k|j}A^v_{[k]}\bar{v}^{xy}_{[k]} + r^v_{[j]} - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}^{xy}_{[j]} \quad (74)$$

这些方程位于网格 and Navier-Stokes equations can be solved by any co 求解器中，我们的方法如下

由于时间精度并非本研究关注的重点，我们采用简单的隐式格式进行时间推进。方程(73)和(74)变为

$$\frac{\left(\bar{u}_{[i]}^{xy}\right)^{*}-\left(\bar{u}_{[i]}^{xy}\right)^{n}}{\Delta t}+A_{[i]}^{u}\left(\bar{u}_{[i]}^{xy}\right)^{*}=\sum_{l|i}A_{[l]}^{u}\left(\bar{u}_{[l]}^{xy}\right)^{*}+\left(r_{[i]}^{u}\right)^{m}-\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{[i]}^{xy}\right]^{m} \tag{75}$$

and

$$\frac{\left(\bar{v}_{[j]}^{xy}\right)^{*}-\left(\bar{v}_{[j]}^{xy}\right)^{n}}{\Delta t}+A_{[j]}^{v}\left(\bar{v}_{[j]}^{xy}\right)^{*}=\sum_{k|j}A_{[k]}^{v}\left(\bar{v}_{[k]}^{xy}\right)^{*}+\left(r_{[j]}^{v}\right)^{m}-\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}_{[j]}^{xy}\right]^{m} \tag{76}$$

其中，the superscript $*$ indicates an intermediate flow field, n denotes the previous 表示时间层，m 表示前一次迭代。为避免压力和速度的奇偶解耦，我们提出了一种受（Pascau, 2011）工作启发的求解过程。首先，我们定义

$$\left(\bar{u}_{[i]}^{xy}\right)^{**}=\frac{\sum_{l|i}A_{[l]}^{u}\left(\bar{u}_{[l]}^{xy}\right)^{*}+\left(r_{[i]}^{u}\right)^{m}}{A_{[i]}^{u}},\quad \left(\bar{v}_{[j]}^{xy}\right)^{**}=\frac{\sum_{k|j}A_{[k]}^{v}\left(\bar{v}_{[k]}^{xy}\right)^{*}+\left(r_{[j]}^{v}\right)^{m}}{A_{[j]}^{v}} \tag{77}$$

When steady state is reached, we have

$$\left(\bar{u}_{[i]}^{xy}\right)^{*}=\left(\bar{u}_{[i]}^{xy}\right)^{**}-\frac{1}{A_{[i]}^{u}}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{[i]}^{xy},\quad \left(\bar{v}_{[j]}^{xy}\right)^{*}=\left(\bar{v}_{[j]}^{xy}\right)^{**}-\frac{1}{A_{[j]}^{v}}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}_{[j]}^{xy} \tag{78}$$

如果达到稳态，我们随后在垂直内部面上计算一速度 hange, Equation is used to calculate the cell-face velocities using a sliding-averag

$$\left[\bar{u}_{(i)}^{y}\right]^{*}=\frac{D_i}{B_i}\left(\bar{u}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}^{xy}\right)^{**}+\frac{E_i}{B_i}\left(\bar{u}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}^{xy}\right)^{**}-\frac{1}{B_i}\left(\frac{D_i}{A_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}^{u}}+\frac{E_i}{A_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}^{u}}\right)\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{(i)}^{y}+\frac{r_i}{B_i}+\mathcal{O}(h^2) \tag{79}$$

该 B_i constant coefficients D_i, E_i, and the form of the residual term r_i are identical 与方程(53)中的对应项相同。我们所做的改变是将单元的压力梯度替换为面处的压力梯度，这是Rhie-Chow 动量插值法（Rhie& Chow, 1983）的基本思想，其作用是添加一个三阶项，以抑制可能出现的压力振荡。比较方程(78) 和 (79) 表明

$$\frac{1}{A_{(i)}^{u}}=\frac{1}{B_i}\left(\frac{D_i}{A_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}^{u}}+\frac{E_i}{A_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}^{u}}\right) \tag{80}$$

然后我们构造一个虚构的 $\bar{u}_{(i)}$ equation for $\left[\bar{u}_{(i)}^{y}\right]^{*}$ before th 稳态得到

$$\frac{\left[\bar{u}_{(i)}^{y}\right]^{*}-\left[\bar{u}_{(i)}^{y}\right]^{n}}{\Delta t}+A_{(i)}^{u}\left[\bar{u}_{(i)}^{y}\right]^{*}=\sum_{l|i}A_{(l)}^{u}\left[\bar{u}_{(l)}^{y}\right]^{*}+\left[r_{(i)}^{u}\right]^{m}-\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{(i)}^{y}\right]^{m+1} \tag{81}$$

where

$$\sum_{l|i}A_{(l)}^{u}\left[\bar{u}_{(l)}^{y}\right]^{*}=A_{(i)}^{u}\left[\frac{D_i}{B_i}\left(\bar{u}_{\left[i-\frac{1}{2}\right]}^{xy}\right)^{**}+\frac{E_i}{B_i}\left(\bar{u}_{\left[i+\frac{1}{2}\right]}^{xy}\right)^{**}\right],\quad \left[r_{(i)}^{u}\right]^{m}=A_{(i)}^{u}\frac{(r_i)^{m}}{B_i} \tag{82}$$

类似的方程 也存在于 $\left[\bar{v}^x_{(j)}\right]^*$ 沿水平方向的内部面：

$$\frac{\left[\bar{v}^x_{(j)}\right]^* - \left[\bar{v}^x_{(j)}\right]^n}{\Delta t} + A^v_{(j)}\left[\bar{v}^x_{(j)}\right]^* = \sum_{k|j} A^v_{(k)}\left[\bar{v}^x_{(k)}\right]^* + \left[r^v_{(j)}\right]^m - \left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}^x_{(j)}\right]^{m+1} \tag{83}$$

These two equations can be written in more compact forms:

$$\left[\bar{u}^y_{(i)}\right]^* = -\frac{1}{\tilde{A}^u_{(i)}}\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}^y_{(i)}\right]^{m+1} + \left[R^u_{(i)}\right]^m, \quad \left[\bar{v}^x_{(j)}\right]^* = -\frac{1}{\tilde{A}^v_{(j)}}\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}^x_{(j)}\right]^{m+1} + \left[R^v_{(j)}\right]^m \tag{84}$$

in which

$$\tilde{A}^u_{(i)} = A^u_{(i)} + \frac{1}{\Delta t}, \quad \left[R^u_{(i)}\right]^m = \frac{1}{\tilde{A}^u_{(i)}}\left(\sum_{l|i} A^u_{(l)}\left[\bar{u}^y_{(l)}\right]^* + \left[r^u_{(i)}\right]^m + \frac{1}{\Delta t}\left[\bar{u}^y_{(i)}\right]^n\right) \tag{85}$$

and

$$\tilde{A}^v_{(j)} = A^v_{(j)} + \frac{1}{\Delta t}, \quad \left[R^v_{(j)}\right]^m = \frac{1}{\tilde{A}^v_{(j)}}\left(\sum_{k|j} A^v_{(k)}\left[\bar{v}^x_{(k)}\right]^* + \left[r^v_{(j)}\right]^m + \frac{1}{\Delta t}\left[\bar{v}^x_{(j)}\right]^n\right) \tag{86}$$

单元上的 (3) 连续性方程，例如单元 $\left[i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right]$ 导致

$$\frac{\left[\bar{u}^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}\right]^* - \left[\bar{u}^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}\right]^*}{\overline{\Delta x}} + \frac{\left[\bar{v}^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}\right]^* - \left[\bar{v}^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right]^*}{\overline{\Delta y}} = 0 \tag{87}$$

代入 (81) (83) (87) of Equations and into Equation gives

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\overline{\Delta x}}\left(\frac{1}{\tilde{A}^u_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}}\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}^y_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}\right]^{m+1} - \frac{1}{\tilde{A}^u_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}}\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}^y_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}\right]^{m+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\Delta y}}\left(\frac{1}{\tilde{A}^v_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}}\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}^x_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}\right]^{m+1}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\tilde{A}^v_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}}\left[\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}^x_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right]^{m+1}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\overline{\Delta x}}\left(\left[R^u_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}\right]^m - \left[R^u_{\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}\right]^m\right) \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\Delta y}}\left(\left[R^v_{\left(i-\frac{1}{2},j\right)}\right]^m - \left[R^v_{\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}\right]^m\right)
\end{aligned} \tag{88}$$

例如，方程 (62) 的解 $(\bar{v}^x)^m$ 这个新的压力场可用于计算新的中间速度场。我们可以继续这样迭代，直 $n+1$ 时间层的流场。重复进行这种时间推进，直至获得稳态解。

3. 数值结果

顶盖驱动的半圆腔体流在雷诺数 $Re_D = 100$ 和 $Re_D = 1000$ 下采用当前方法进行模拟。雷诺数定义为

$$Re_D = \frac{UD}{\nu} \tag{89}$$

其中U 为盖板速度，D 为腔体，dynamic ar为流体运动黏度。模拟中所使用的网格如图10所示。网格的上半部分在y方向上均匀；下半部分在x方向上均匀。这两个部分的分界线为$y/D = -\cos(\pi/4)/2$，即图中的粗水平线。沿盖板（$y/D = 0$）的网格单元数（设为N）是沿腔体垂直中心线（$x/D = 0$）的网格单元数的两倍。这样，无论选择何种网格密度，$x/D = -\cos(\pi/4)/2$和$y/D = -\cos(\pi/4)/2$始终都是网格线，且沿这些网格线的网格始终近似均匀，因此可以方便地利用这些线上的结果来确定数值格式的精度阶。这两条线至少有一个端点位于圆形边界上，从而使我们能够探究当前复杂边界处理方法的有效性。

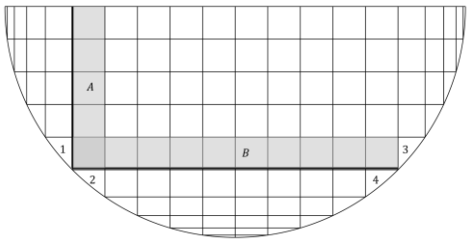

图*10*

通常认为，若流场中固定点处的离散误差与局部单元尺寸 h 的 n 次方成正比，则该数值格式具有 n 阶精度。尽管这一界定看似直接明了，但并非不存在歧义。例如，矩形单元的 h 是什么？是 Δx、Δy、$\sqrt{\Delta x \Delta y}$、$(\Delta x + \Delta y)/2$，还是其他值？这种歧义这反映出，精度阶的定义确实取决于数值格式。当前方法中 h 的定义因公式而异，但始终具有 $(\Delta x)^m(\Delta y)^n$ 的形式，其中 $m + n = 1$。因此，对于当前的二阶精度方法，当局部单元的 Δx 和 Δy 均减半时，流场中固定点处的离散误差将变为原来的四分之一。然而，对于大多数不规则单元而言，不可能同时将 Δx 和 Δy 减半。例如，对于两个孪生单元，当 $\Delta x \ll D$ 为 /2 时，$\Delta y \approx \Delta x^2/D$ 。因此，如果 Δx 减半，则对于这些单元，Δy 将变为原来的四分之一，这可能导致精度阶表现出某些表面上的不一致。例如，如果某个参数在一个孪生单元处的离散误差与 $\Delta x^4 \Delta y^{-2}$ 成正比，按照我们的定义，这仍具有二阶精度，但由于离散误差为 $\Delta x^4 \Delta y^{-2} \sim \Delta x^4 \Delta x^{-4} \sim \Delta x^0$ 阶，其表现可能类似于零阶格式。为避免这些细微问题，我们使用 图10 中所示的线和单元来辅助确定精度阶，因为这些单元的 Δx 几乎都与 Δy 相同。由于有限体积格式通常会得到全局一致的精度阶

（Kobayashi，1999），因此，当前的做法应能够揭示当前方法的实际精度阶。

针对每个雷诺数测试三种网格密度。对于 $Re_D = 100$，分别为 $N = 20$、40 和 60；对于 $Re_D = 1000$，分别为 $N = 40$、60 和 80。

在$Re_D = 100$ 处沿竖直线 $x/D = -\cos(\pi/4)/2$ 和水平线 $y/D = -\cos(\pi/4)/2$ 的面平均速度分布如图11所示。符号表示当前数值结果，曲线表示使用商业CFD软件获得的基准数据

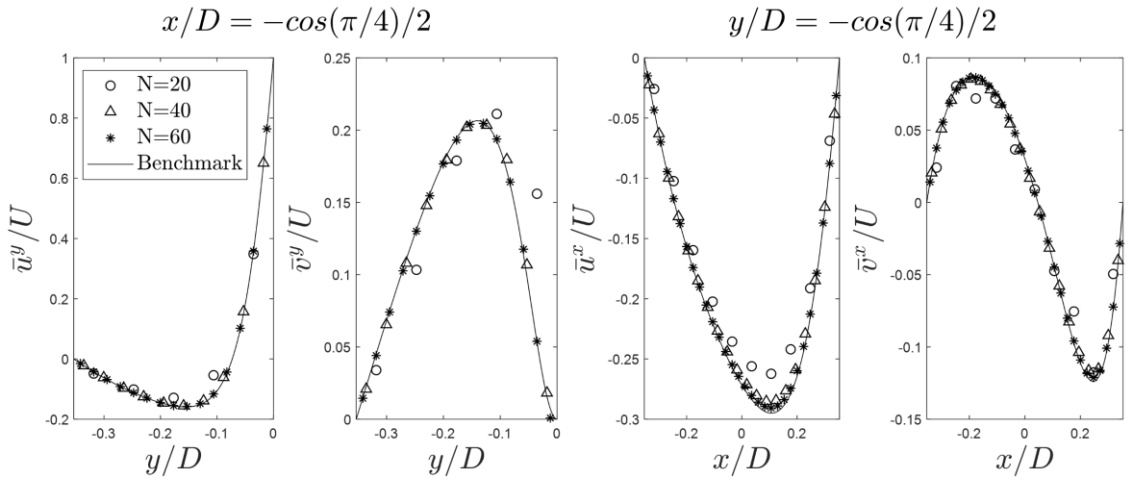

图11

采用 ANSYS FLUENT 和包含 43924 个单元的非结构化网格。沿这两条线的面平均速度梯度如图12所示。

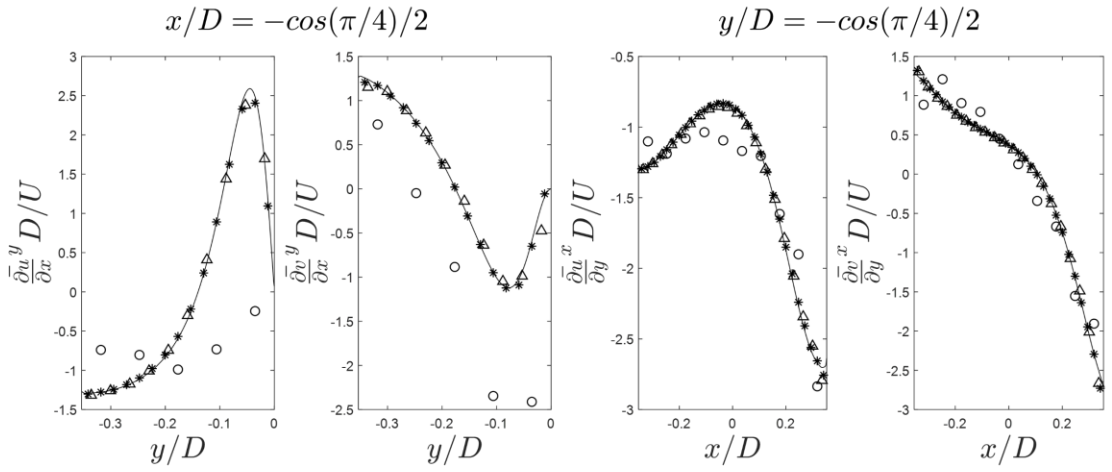

图12

单元平均速度与图10中标记为“*A*”的单元对应的基准数据，在图13中进行了比较。请注意，图中“$N = 20$, 基准测试”之类的图例表示与当前采用特定网格密度所得数值结果相对应的基准数据。

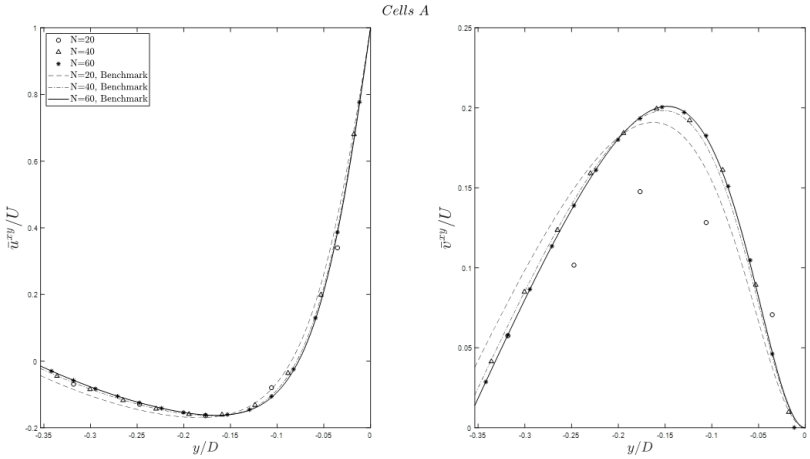

图*13*

图10中标记为“*B*”的单元的单元平均速度与图14中的相应基准数据进行了比较。

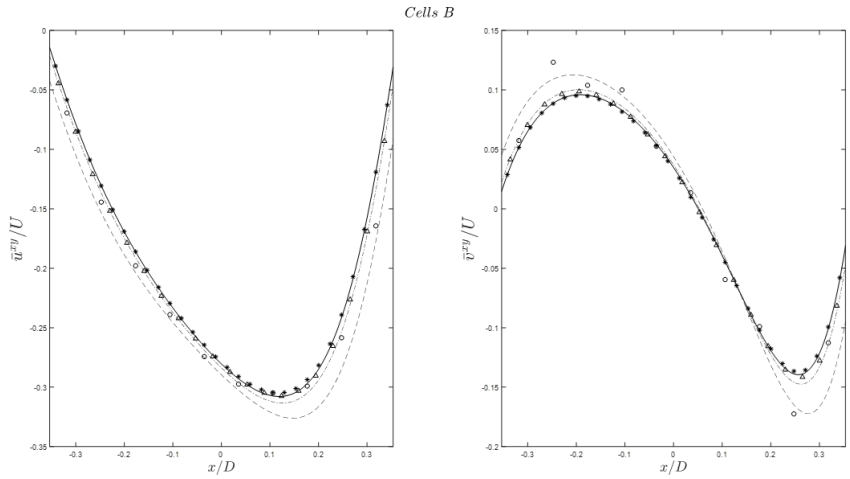

图*14*

将标记为“1”至“4”的四个不规则边界单元的单元平均速度值与基准数据进行了比较，结果见表1。对应于单元1至4的区域内的基准单元平均速度值，是利用 ANSYS FLUENT 的区域分离和体积平均功能获得的。

表1

速度	网格（N）	单元1	单元2	单元 3	单元 4
$\bar{u}^{xy}/U$	20	-0.0462	-0.0124	-0.0899	-0.0375
	基准测试	-0.0278	-0.0286	-0.0611	-0.0572
	40	-0.0150	-0.0154	-0.0329	-0.0315
	基准测试	-0.0146	-0.0147	-0.0310	-0.0294
	60	-0.0101	-0.0101	-0.0218	-0.0211
	基准测试	-0.0098	-0.0101	-0.0207	-0.0202
$\bar{v}^{xy}/U$	20	0.0334	0.0126	-0.0769	-0.0273
	基准测试	0.0323	0.0228	-0.0695	-0.0439
	40	0.0153	0.0131	-0.0319	-0.0251
	基准测试	0.0158	0.0131	-0.0331	-0.0258
	60	0.0103	0.0090	-0.0214	-0.0180
	基准测试	0.0104	0.0094	-0.0216	-0.0185

将采用当前方法和最精细网格（$N = 60$）计算得到的流场（流线）与基准结果进行了比较，结果见图15。

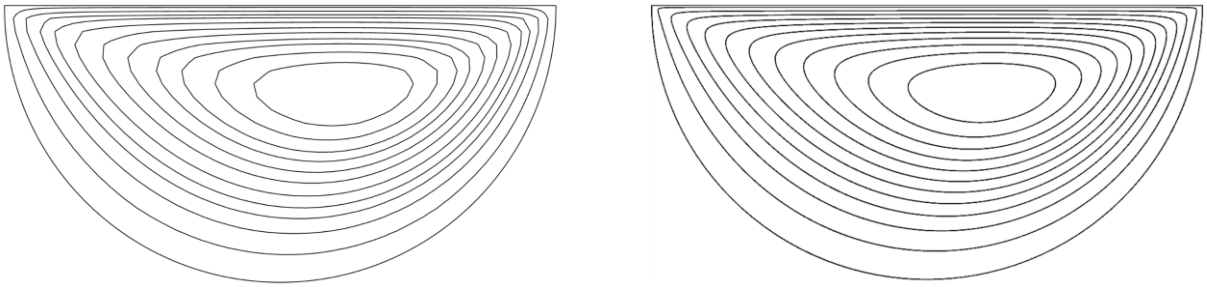

图15

沿线 $x/D = -\cos(\pi/4)/2$ 和 $y/D = -\cos(\pi/4)/2$的面平均速度及速度梯度离散误差的算术平均值，以及单元“A”和“B”的单元平均速度离散误差，还有图10所示不规则边界单元1至4的单元平均速度平均误差，被用于评估当前方法的精度阶。结果汇总于表2中。随着网格密度从$N = 20$ 至N =40增加，所有流场变量的误差降低均呈现二阶或高于二阶的精度。随着网格从$N = 40$ 细化至$N = 60$，大多数流场变量表现出二阶或接近二阶的行为。少数变量表现不同，其中最明显的是$\overline{\partial u\ \partial x^{y}}$ /沿线 $x/D = -\cos(\pi/4)/2$的变量：随着网格密度从$N = 40$ 增加至$N = 60$，其误差降低仅为0.69阶；然而，当网格密度从$N = 20$ 变为 $N = 40$时，误差降低却达到惊人的4.77阶。我们无法对这一现象给出很好的解释。可以注意到，包括不规则边界单元在内的所有单元平均速度都呈现出二阶或接近二阶的精度。

$Re_D = 1000$ 案例的数值结果与基准测试进行比较，结果见图16至图20以及表3，顺序与 $Re_D = 100$中所示的完全相同

案例。感兴趣变量的平均误差见表4。可以看出，随着网格从$N = 60$ 加密至$N = 80$ ，所有流动变量均呈现二阶或接近二阶的行为（阶数均高于二阶，只有一个变量为1.99阶），唯一例外是沿$x/D = -\cos(\pi/4)/2$线的$\bar{v}^y$ ，其阶数为1.84，仍非常接近二阶精度。更重要的是，随着网格密度从$N = 60$ 提高至$N = 80$，所有单元平均速度（包括不规则边界单元中的速度）均达到二阶精度。对于这个高雷诺数案例，$N = 40$ 网格似乎过于粗糙，因此截断误差的首项仍未占主导地位；只有网格密度足够高（例如$N = 60$）时，二阶行为才会充分显现。

其他几个值得关注的参数与（Glowinski、Guidoboni 和 Pan，2006）的基准研究进行了比较，见“错误！未找到引用源。”。这些参数包括流函数最小值及其位置（主涡的“涡心”），以及次级涡的分离角（这些角度的定义见图20）。这里只给出了$Re_D = 1000$ 情形的参数，因为所引用的基准研究未讨论$Re_D = 100$ 情形。可以看出，使用$N = 80$ 网格得到的当前结果与基准数据非常吻合。

表2

变量	网格 (N)	误差	阶数的精度	变量	网格（N）	误差	.....的阶数 精度
$\bar{u}^y/U$	20	0.0239	-	$\bar{v}^y/U$	20	0.0352	-
	40	0.0033	2.86		40	0.0032	3.45
	60	0.0015	1.94		60	0.0016	1.69
$\bar{u}^x/U$	20	0.0228	-	$\bar{v}^x/U$	20	0.0105	-
	40	0.0047	2.28		40	0.0025	2.06
	60	0.0021	1.97		60	0.0011	2.02
$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}^y D/U$	20	1.1190	-	$\overline{\frac{\partial v}{\partial x}}^y D/U$	20	1.0736	-
	40	0.0409	4.77		40	0.0709	3.92
	60	0.0309	0.69		60	0.0191	3.23
$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}^x D/U$	20	0.1564	-	$\overline{\frac{\partial v}{\partial y}}^x D/U$	20	0.2260	-
	40	0.0255	2.62		40	0.0305	2.89
	60	0.0102	2.26		60	0.0158	1.62
$\overline{(u}_A{}^{xy}) /U$	20	0.0277	-	$\overline{(v}_A{}^{xy}) /U$	20	0.0352	-
	40	0.0033	3.06		40	0.0022	4.00
	60	0.0014	2.17		60	0.00095	2.07
$\overline{(u}_B{}^{xy}) /U$	20	0.0123	-	$\overline{(v}_B{}^{xy}) /U$	20	0.0142	-
	40	0.0027	2.21		40	0.0025	2.48
	60	0.0013	1.81		60	0.0010	2.28
$\overline{(u)}_{1-4}{}^{xy} /U$	20	0.0208	-	$\overline{(v)}_{1-4}{}^{xy} /U$	20	0.0088	-
	40	0.0013	4.02		40	0.00061	3.84
	60	0.00058	1.94		60	0.00028	1.97

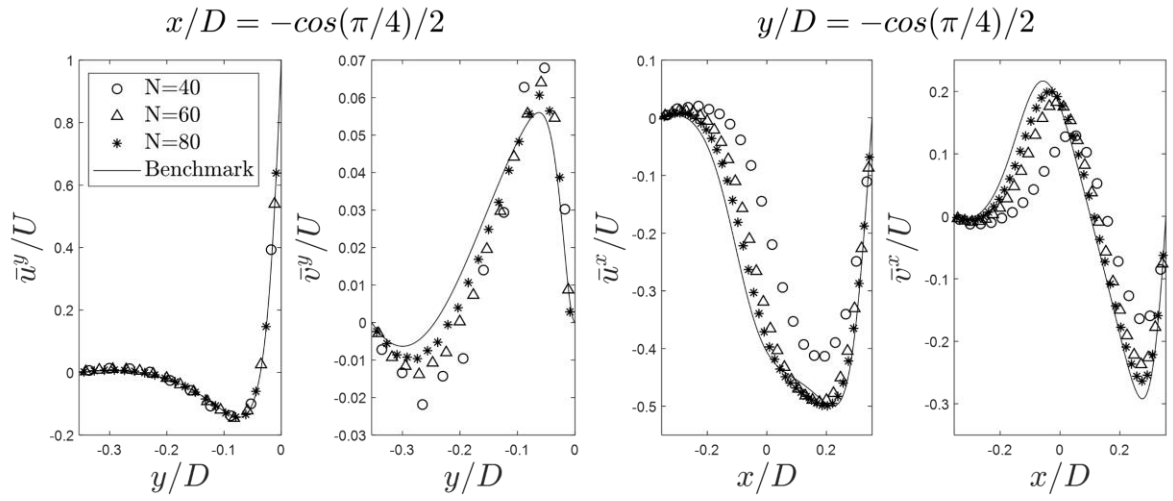
$x/D = -cos(\pi/4)/2$
$y/D = -cos(\pi/4)/2$
N=40
N=60
N=80
Benchmark
$\bar{u}^y/U$
$\bar{v}^y/U$
$\bar{u}^x/U$
$\bar{v}^x/U$
y/D
y/D
x/D
x/D

图 16

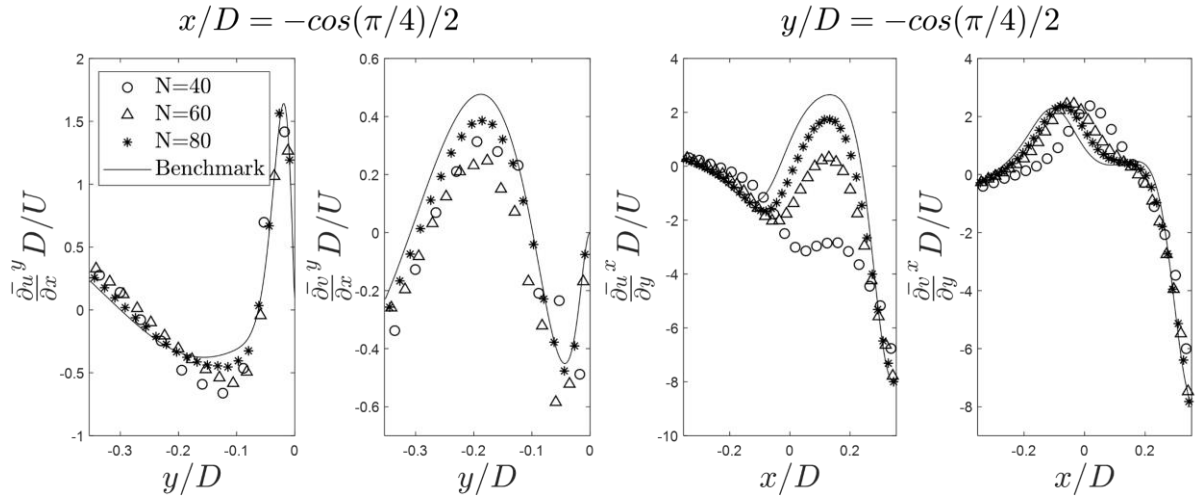
$x/D = -cos(\pi/4)/2$
$y/D = -cos(\pi/4)/2$
N=40
N=60
N=80
Benchmark
$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}^y D/U$
$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}^y D/U$
$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}^x D/U$
$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}^x D/U$
y/D
y/D
x/D
x/D

图 17

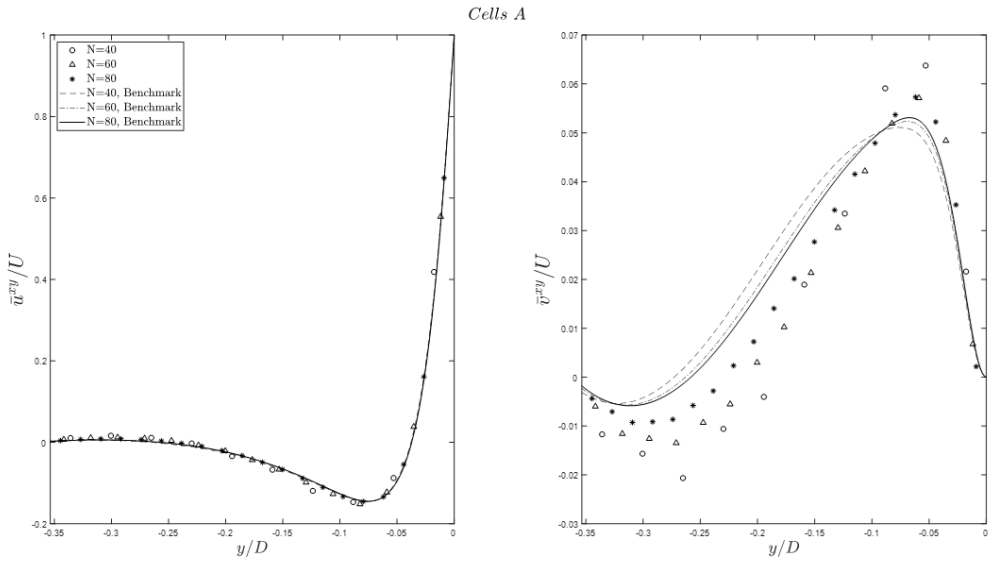
Cells A
N=40
N=60
N=80
N=40, Benchmark
N=60, Benchmark
N=80, Benchmark
$\bar{u}^{xy}/U$
$\bar{v}^{xy}/U$
y/D
y/D

图 18

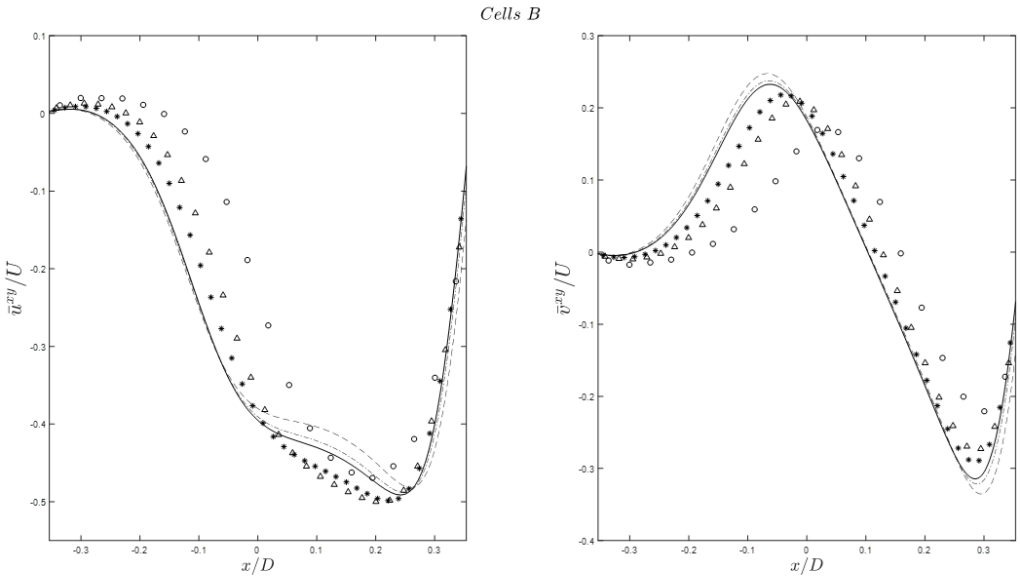
Cells B
$\bar{u}^{xy}/U$
$\bar{v}^{xy}/U$
x/D
x/D

图19

表 3

速度	网格（N）	单元 1	单元 2	单元 3	单元 4
$\bar{u}^{xy}/U$	40	0.0058	0.0029	-0.0865	-0.0744
	基准测试	0.0022	0.0022	-0.0916	-0.0862
	60	0.0020	0.0028	-0.0634	-0.0584
	基准测试	0.0016	0.0016	-0.0615	-0.0596
	80	0.0016	0.0015	-0.0478	-0.0460
	基准测试	0.0013	0.0012	-0.0470	-0.0464
$\bar{v}^{xy}/U$	40	-0.0061	-0.0026	-0.0786	-0.0511
	基准测试	-0.0024	-0.0020	-0.0977	-0.0750
	60	-0.0020	-0.0026	-0.0605	-0.0475
	基准测试	-0.0017	-0.0015	-0.0641	-0.0543
	80	-0.0018	-0.0013	-0.0463	-0.0400
	基准测试	-0.0013	-0.0011	-0.0484	-0.0432

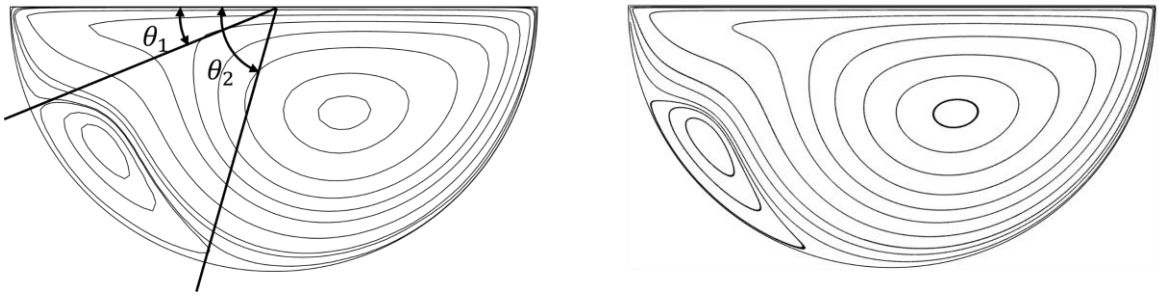

图20

表4

变量	网格（N）	误差	精度阶 精度	变量	网格 (N)	误差	顺序 精度
$\bar{u}^y/U$	40	0.0115	-	$\bar{v}^y/U$	40	0.0131	-
	60	0.0054	1.85		60	0.0073	1.44
	80	0.0025	2.64		80	0.0043	1.84
$\bar{u}^x/U$	40	0.1088	-	$\bar{v}^x/U$	40	0.0800	-
	60	0.0402	2.46		60	0.0392	1.76
	80	0.0210	2.26		80	0.0206	2.23
$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}^y D/U$	40	0.1860	-	$\overline{\frac{\partial v}{\partial x}}^y D/U$	40	0.1581	-
	60	0.1250	0.98		60	0.1730	-0.22
	80	0.0540	2.92		80	0.0599	3.69
$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}^x D/U$	40	2.3331	-	$\overline{\frac{\partial v}{\partial y}}^x D/U$	40	0.9141	-
	60	1.2816	1.48		60	0.5119	1.43
	80	0.6382	2.42		80	0.2887	1.99
$(\overline{u}_A^{xy})/U$	40	0.0148	-	$(\overline{v}_A^{xy})/U$	40	0.0149	-
	60	0.0069	1.89		60	0.0089	1.27
	80	0.0031	2.74		80	0.0048	2.12
$(\overline{u}_B^{xy})/U$	40	0.0788	-	$(\overline{v}_B^{xy})/U$	40	0.0867	-
	60	0.0398	1.68		60	0.0405	1.88
	80	0.0211	2.21		80	0.0211	2.27
$\overline{(u)}_{1-4}^{xy}/U$	40	0.0053	-	$\overline{(v)}_{1-4}^{xy}/U$	40	0.0118	-
	60	0.0012	3.70		60	0.0029	3.43
	80	0.00048	3.16		80	0.0015	2.35

表 5

	当前工作	基准测试	相对误差
ψ_{min}/DU	-0.0766	-0.0779	1.7%
$(x/D, y/D)$	(0.1321, -0.1945)	(0.1214, -0.2030)	（8.8%，4.2%）
θ_1	22.74°	21.42°	6.2%
θ_2	74.74°	71.49°	4.5%

4. 总结与讨论

与其他基于有限体积的复杂边界处理方法相比，我们的方法具有以下优点：

1. 我们采用切割笛卡尔网格。这类网格只需极少的编程工作即可生成，并且占用的计算机存储空间也很小。2. 我们不使用分段线性线段近似复杂边界。除采用坐标变换的方法外，几乎所有其他方法都会采用此类近似，这可能会给数值计算带来不确定误差。3. 我们不采用多项式插值或重构，而仅使用微积分和有限差分，在不规则面上获得二阶精度的通量和梯度。多项式插值/重构通常需要求解大量方程，以确定重构多项式的系数。这些方程本身还涉及数量非常多且复杂的积分，必须对其进行计算，尽管对于给定网格，通常只需计算一次。我们的方法也需要计算一些积分一次，但这些积分简单得多。在每次迭代或每个时间步中，我们的方法无需通过求解方程组来确定重构多项式的系数，只需计算某些有限差分，因此所需的计算资源更少；尤其考虑到每个网格单元都必须进行此类方程组求解和有限差分计算。4. 有些方法必须区分相当多不同的单元配置，并据此采用不同的处理方式。我们的方法只需识别四种情况：矩形单元、不规则边界单元、孤立单元和孪生单元。5. 我们的方法在实现时具有极大的灵活性。事实上，该方法最核心的部分是 PKP 定理，几乎所有其他技术细节都可以

定制。 从这个意义上说，当前方法与其说是一种特定的数值格式，不如说是一个通用框架。6. 由该方法得出的有限差分方程构成了熟悉的稀疏对角方程组，因此可以采用许多成熟的求解方法。

当前方法的一些缺点包括：
1. 我们生成切割单元网格的方法相当僵化，灵活性不如许多其他方法。 2. 由于这种特定的网格生成方式，一些网格单元具有非常大的长宽比。 3. 除了沿第三维方向挤出二维几何形状之外，似乎没有简便的方法将当前方法扩展到三维流动。 4. 在当前框架下，实现四阶或更高阶格式可能比较困难。下面将更详细地讨论这一点。

将当前方法扩展到四阶精度，需要使用五阶精度的 PKP 定理来计算沿单元面流场变量导数的滑动平均（参见方程 (56) 和 (62)）。随后还必须显式计算该定理右侧的四阶项（见方程 (24)），其中包括许多新的导数；此外，还必须使用至少三阶精度的有限差分来近似方程(24)右侧第二项中的两个导数。尽管从理论上来说这是可行的，但这种方法较为复杂。不过，将当前方法扩展到三阶精度似乎相对直接，因为这种扩展仍然使用原始的四阶 PKP 定理。当然，随后所有单元面通量和梯度都必须通过三阶精度方程进行计算。这样的格式在复杂几何中的湍流 LES 等应用中将非常有用。

参考文献

Gamet, L., Ducros, F., Nicoud, F., & Poinsot, T.（1999）。非均匀网格上的紧致有限差分格式：在可压缩流直接数值模拟中的应用。《国际流体数值方法杂志》，159-191。
Glowinski, R., Guidoboni, G., & Pan, T. W.（2006）。二维半圆形腔体中的壁面驱动不可压缩黏性流动。《计算物理学杂志》，76-91。Kim, J., Moin, P., & Moser, R.（1987）。低雷诺数下充分发展槽道流的湍流统计特性。《流体力学杂志》，133-166。Kobayashi, M. H.（1999）。一类 Padé 有限体积方法。《计算物理学杂志》

s,

137-180。

Ku, H. C., Hirsh, R. S.,& Taylor, T. D. (1987). 一种用于求解三维不可压缩 Navier-Stokes 方程的伪谱方法。 计算物理学杂志，439- 462。Lacor, C., Smirnov,S.,& Baelmans, M. (2004). 任意结构化网格上紧致中心格式的有限体积公式。 计算物理学杂志，535-566。Lele, S. K. (1992)。具有类谱分辨率的紧致有限差分格式。 计算物理学杂志，16-42。Mariani,V.C.,& Prata,A.T.(2008)。应用于具有不规则底壁的驱动盖腔体内流动的欧拉-拉格朗日方法。 数值传热，*B*辑：基础，206-233。Orzag, S. A. (1980)。复杂几何中的谱方法。 计算物理学杂志，70-92。Pascau, A.(2011)。非定常 Navier-Stokes 方程结构化共置网格中的单元面替代方案。流体数值方法国际期刊，812-833。Pereira, J.M., Kobayashi, M. H., & Pereira, J. C.(2001)。用于不可压缩Navier-Stokes 方程求解的四阶精度有限体积紧致方法。 计算物理学杂志，217- 243。Piller, M., &Stalio, E. (2008)。边界贴合网格上的紧致有限体积格式。 计算物理学杂志，4736-4762。Pilliod, J.E., &Puckett, E. G. (2004)。用于追踪材料界面的二阶精度流体体积算法。 计算物理学杂志，465-502。Rhie,C.M.,&Chow, W. L. (1983)。具有尾缘分离的翼型绕流湍流数值研究。 *AIAA* 期刊，1525-1532。Thom, A. (1933)。低速下圆柱体绕流。 皇家学会学报 *A*，651

-

669. Wang, Q., Ren, Y. X., & Li, W. (2016). 非结构化网格上的紧致高阶有限体积方法 I：基本公式与一维格式。*Journal of Computational Physics*，863-882。Xu, L., Cui, G. X., Xu, C. X., Zhang, Z. S., & Chen, N. X. (2006). 用于无

n-

均匀网格上湍流大涡模拟的高精度有限体积方法。*Acta Aerodynamica Sinica*，275-284。Xu, L., Cui, G., Xu, C., Wang, Z., Zhang, Z., & Chen, N. (2006). 复杂湍流大涡模拟的高精度有限体积方法。*International Journal of Turbo and Jet Engin*

es,

191-210。Ye, T., Mittal, R., Udaykumar, H. S., & Shyy, W. (1999). 适用于具有复杂浸入边界的黏性不可压缩流的笛卡尔网格方法。第*37*届*AIAA*航空航天科学会议暨展览会（第545-557页）。内华达州里诺：AIAA。

Yu, B., Ozoe,H., & Tao-Q.（2005年）。不可压缩流非结构网格上的同位有限体积法。计算流体动力学进展，181-189。