arXiv:2304.04243v1 [math.AG] 9 Apr 2023

热带曲线上的霍奇理论

YURY V. ELIYASHEV

摘要。我们构造了复流形上霍奇理论在热带曲线上的一种类似理论。我们采用分析方法研究这一问题，该方法基于热带微分形式的语言和 L^2– 上同调方法。

1. 引言

本文为 K¨ahler 流形构造经典霍奇理论的一种热带类比。我们只研究一维热带簇的情形，它是光滑复曲线上霍奇理论的一种热带类比。

我们非常简要地回顾复曲线的经典霍奇理论。关于霍奇理论的一般参考资料，参见 [3], [4]。设 C 是一条亏格为 n 的光滑紧复曲线。令 $\mathscr{E}^{p,\,q}(C)$ 表示 C 上光滑 (p,q)–微分形式的空间。Dolbeault 上同调 $H^{p\,,q}_{\overline{\partial}}(C)$ 是复形 $(\mathscr{E}^{p\,*}(C)\overline{\partial})$ 的上同调群，其中 $\overline{\partial}$ 是一个微分

$$\overline{\partial} : \mathscr{E}^{p,q}(C) \to \mathscr{E}^{p,q+1}(C).$$

设g是复数域上的厄米度量，而 ω是相应的凯¨勒形式。该度量在 $\mathscr{E}^{p,q}$(复数域) 上诱导出一个标量积，并定义了霍奇星算子

$$* : \mathscr{E}^{p,q}(C) \to \mathscr{E}^{1-p,1-q}(C).$$

令 $\overline{\partial}^*$ 为 $\overline{\partial}$. 的度量伴随。Laplace-Beltrami 算子定义如下:

$$\Delta = \overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^* : \mathscr{E}^{p,q}(C) \to \mathscr{E}^{p,q}(C).$$

.....的空间 调和形式 $\mathscr{H}^{p,q}$(复数域) 按定义是 Δ: $\mathscr{E}^{p,q}$(复数域) $\to \mathscr{E}^{p,q}$(复数域) 的核 .

我们的主要目标是证明以下陈述的热带类比。

T定理 1.1. 每个调和形式 $\varphi \in \mathscr{H}^{p,q}(C)$ 都是$\overline{\partial}$–闭的，因此定义了一个上同调类 $[\varphi] \in H^{p\,,q}_{\overline{\partial}}(C)$。映射 $\varphi \to [\varphi]$ 是 $\mathscr{H}^{p,q}(C)$ 与 $H^{p\,q}_{\overline{\partial}\,,}(C)$ 之间的同构。霍奇星算子是调和形式空间之间的同构 $*$: $\mathscr{H}^{p,q}(C) \simeq \mathscr{H}^{1-p\,1-q}(C)$。上同调群的维数等于

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{0,0}_{\overline{\partial}}(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}_{\overline{\partial}}(C) = 1,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}_{\overline{\partial}}(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^{0,1}_{\overline{\partial}}(C) = n,$$

其中 n 是复数域的亏格。

一维热带簇本质上是一个度量图 Γ，并带有一些额外特征。光滑 (p, q)–微分形式的一个类比，是定义在 Γ 的边上的一类特殊张量场，并在顶点处满足某些边界条件。我们将这类张量记为 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$，并称其为次数为 (p, q) 的正则热带超形式空间。存在一个微分

$$d'' : \mathscr{E}^{p,q}(\Gamma) \to \mathscr{E}^{p,q+1}(\Gamma)$$

以及复形（$\mathscr{E}^{p\,*}$, d′′）的上同调群 $H^{p\,,q}_{d''}(\Gamma)$。

关于超形式和热带上同调的参考文献，参见 [6], [7], [8]：热带上同调的概念在 [6] 中借助代数拓扑的方法提出；热带超形式的概念在 [8], 和 [7] 中提出。热带超形式在热带情形中发挥着与光滑微分形式相同的作用。文中还发展了热带上同调的微分拓扑方法，即德拉姆上同调理论的一个类似版本。在 [5] 中，以与本文相当类似的方式研究了度量图的德拉姆上同调。

空间 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$、算子 d'' 以及上同调群 $H^{p,q}_{d''}(\Gamma)$ 在热带情形中发挥着与复数域情形下的 $\mathscr{E}^{p,q}(C)$、$\overline{\partial}$ 和 $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(C)$ 相同的作用。

热带情形下也有 Kähler 形式和厄米度量的类似物，定义在 Γ. 上。此热带 Kähler 形式在 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 上诱导出一个标量积。令 d''^{*} 为相对于此标量积的 d'' 的度量伴随算子。于是我们可以定义 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta = d''d''^{*} + d''^{*}d''.$$

调和形式空间 $\mathscr{H}^{p,q}(\Gamma)$ 按定义是 Δ. 的核

热带曲线 Γ 的亏格按定义是 $H^1(\Gamma)$ 的秩，其中 $H^1(\Gamma)$ 是图 Γ. 的通常拓扑上同调群。本文的主要结果如下

定理1.2.设 Γ 为一条亏格为 n 的热带曲线。每个调和超形式 $\varphi \in \mathscr{H}^{p,q}(\Gamma)$ 都是 d''–闭的，因此定义了上同调类 $[\varphi] \in H^{p,q}_{d''}(\Gamma)$。映射 $\varphi \to [\varphi]$ 是 $\mathscr{H}^{p,q}(\Gamma)$ 与 $H^{p,q}_{d''}(\Gamma)$ 之间的同构。霍奇星算子将调和超形式映射为调和超形式，且映射

$*: \mathscr{H}^{p,q}(\Gamma) \to \mathscr{H}^{1-p,1-q}(\Gamma)$ 是一个同构。存在同构。

$$H^{1,1}(\Gamma) \simeq H^{0,0}(\Gamma) \simeq H^0(\Gamma, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

and

$$H^{1,0}(\Gamma) \simeq H^{0,1}(\Gamma) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n.$$

我们首先将我们的结果视为热带霍奇理论的一个玩具模型和概念证明，之后才将其视为关于热带曲线拓扑的结果。事实上，无需任何泛函分析或微分拓扑，就可以使用更加简单的方法计算热带曲线的上同调。真正的问题在于构造高维的热带霍奇理论。为此，可以沿用经典复霍奇理论以及本文的方法，但这条道路上似乎存在许多技术障碍。这些障碍的主要来源是：热带簇的不光滑性（它们在局部表现为多面体复形），以及各种解析对象在无穷远处的复杂行为，而后者是L^2–上同调理论中的典型现象。本文阐释了这两个问题。文章 [10] 关于 PL-霍奇理论的研究为我们的工作提供了重要灵感。

本文组织如下：第二节介绍主要对象，并处理问题的微分拓扑部分。第三节探讨与泛函分析和 L^2–上同调理论相关的方法。关于复^2–霍奇理论中的 L[3, 方法的一般参考资料，参见例如]第八章]。

有趣的是，本文主题与量子图密切相关。量子图的主要思想是研究度量图上的薛定谔方程和拉普拉斯方程 [2]。在这种情况下，图的顶点处会出现各种边界条件。据我们所知，文献中尚无将量子图方法应用于热带几何的资料。

2. 热带曲线与热带超形式

本节介绍本文的主要对象：热带曲线、热带超形式、热带上同调、热带 Kähler 形式及其上的运算。我们研究它们的性质，并证明一些具有微分拓扑性质的结果。此外，我们还展示这些对象与复几何的关系。

2.1. 热带曲线。

定义 2.1. 紧连通热带曲线 Γ 是一个连通度量图，其顶点集合为 V，边集合为 E，并满足以下条件：

(1) 集合 E 和 G 都是有限且非空的。(2) 边 $e \in E$ 的长度 l(e) 是正实数，或者 $+\infty$.(3) 当且仅当 e 与一个 1 次顶点关联时，长度 l(e) 才等于 $+\infty$ 。(4) 一条有限长度边 e 与闭区间 $[-l(e), 0]$ 等距，且该区间配备标准欧几里得度量。(5) 若一条无限长度边 e 与一个 1 次顶点及一个次数较高的顶点关联，则该边与闭区间 $[-\infty, 0]$ 等距，且该区间配备标准欧几里得度量，其中 $-\infty$ 是 1 次顶点的像。(6) 若一条无限长度边 e 与两个 1 次顶点关联，则该边与 $[-\infty, +\infty]$.等距。由于 Γ 是连通的，它必定是一个只有一条边和两个顶点的图，且整个图与 $[-\infty, +\infty]$.等距。

在本文中，我们将把紧连通热带曲线简称为曲线。曲线的亏格 Γ 定义为上同调群 $H^1(\Gamma)$ 的秩。

示例 2.2。让我们考虑几个曲线的例子。

- 任何具有有限长度边且所有顶点的次数均为 ≥ 2 的度量图，都可以视为热带曲线。
- 闭区间 $[-\infty, +\infty]$ 是一个亏格为0 的曲线。我们可以将这条曲线视为热带射影直线 $\mathbb{TP}^1 := [-\infty, +\infty]$.
- 有限个互不相交的 $[-\infty, 0]$ 副本沿着 0 拼接在一起
$$\Gamma = [-\infty, 0] \sqcup \cdots \sqcup [-\infty, 0] / \sim$$
是亏格为 0 的曲线的另一个例子。

注 2.3. 通常，在热带几何中，热带簇是通过$\mathbb{TR}^n = [-\infty, +\infty)^n$. 中的多面体复形来定义的。可以将这些多面体复形视为嵌入某个环境空间中的簇。在我们的定义中，我们不使用任何环境空间或嵌入。对于任何按照我们定义的紧连通热带曲线 Γ，都可以通过$\mathbb{TR}^n$中的多面体复形构造出一条与之同构的热带曲线。

注 2.4. 我们可以将 $S^1 = \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$（其中 $a \in (0, +\infty)$）视为亏格为 1 的热带曲线的一个例子。非正式地说，它是一个只有一条边且没有顶点的度量图，因此不符合我们对曲线的定义。为了解决这个问题，可以在这条曲线上添加一个顶点，并将其视为只有一个顶点和一个环的度量图。另一种处理这一问题的方法，是借鉴用图册和过渡映射定义拓扑流形的方式，扩展热带曲线的定义。按照这种方法，热带曲线是一个局部同构于度量图的空间，其过渡映射由仿射函数给出。本文不会采用这种方法。

2.2. $\mathbb{R}$上的热带超形式。

定义 2.5。次数为 (p,q)（$p,q = 0,1$）的热带超形式是在 $\mathbb{R}$ 上的线丛的光滑截面
$$\Lambda^{p,q} T^*\mathbb{R} := \bigwedge^p T^*\mathbb{R} \otimes \bigwedge^q T^*\mathbb{R}.$$
我们将 (p, q)–热带超形式的线性空间记为 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$。

这里 $\bigwedge^0 T^*\mathbb{R}$ 是一个平凡线丛。特别地，(0,0) 阶热带超形式是 $\mathbb{R}$上的光滑函数，(1, 0) 阶和 (0, 1) 阶热带超形式的空间可以分别与微分 1–形式，即协变阶数为 (0, 1) 的张量场相对应，而 (1, 1) 阶热带超形式可以与协变阶数为 (0,2) 的张量场相对应。

设 x 是 $\mathbb{R}$. 上的一个笛卡尔坐标。我们用 $d'x$ 和 $d''x$ 表示微分 dx，并分别将其视为 (1, 0)–热带形式或 (0,1)–热带形式；我们用 $d'x \wedge d''x$ 表示张量场 $dx \otimes dx$，并将其视为 (1, 1)–形式。于是，任意 (0,0)、(1,0)、(0,1)、(1,1)–热带超形式都可以分别写成 $\varphi(x)$、 $\varphi(x)d'x$、 $\varphi(x)d''x$、 $\varphi(x)d'x \wedge d''x$，其中 $\varphi(x)$ 是某个光滑函数。

存在自然的楔积
$$\wedge : \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{E}^{p',q'}(\mathbb{R}) \to \mathscr{E}^{p+p',q+q'}(\mathbb{R}).$$

(1, 0)–热带形式 d′x 与 (0, 1)–形式 d″x 的楔积定义为等于 (1, 1)–形式 d′x ∧d″x。楔积满足交替条件

$$d'x\wedge d''x=-d''x\wedge d'x,$$
$$d'x\wedge d'x=d''x\wedge d''x=0.$$

存在微分 d″ : $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})\to\mathscr{E}^{p,q+1}(\mathbb{R})$。它定义在 (0, 0)–形式上，即函数，如下

$$d''(\varphi(x))=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}d''x$$

以及在 (1, 0)–形式上作为

$$d''(\varphi(x)d'x)=d''(\varphi(x))\wedge d'x=-\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}d'x\wedge d''x,$$

在所有其他情况下，出于维数原因，d″ 等于零。

同样地，我们定义微分算子

$$d' : \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})\to\mathscr{E}^{p+1,q}(\mathbb{R}) :$$

d′(φ(x)) = $\frac{\partial}{\partial x}$φ(x)d′x，以及 d′(φ(x)d″x) = d′(φ(x)) ∧d″x = $\frac{\partial}{\partial x}$φ(x)d′x∧d″x，在所有其他情况下，d′ 等于零。 ℝ 上的(1,1)-形式的热带积分 φ(x)d′x ∧d″x 定义为

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)d'x\wedge d''x=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx,$$

其中右边是通常的积分。区间 I 上的 ℝ 积分以相同的方式定义$\int_I$ φ(x)d′x ∧d″x = $\int_I$ φ(x)dx.

注释 2.6。从抽象的观点来看，要在一个一维 ℝ–线性空间 L 上定义 (1,1)-热带超形式 ω 的热带积分，我们需要选择一个具有常系数的体积形式 μ。我们可以将此形式与T_0^*L的一个非零元素相识别，因为 T*L 的一个常截面由其在 0 处的取值所定义。

这个热带积分取决于 μ 的选择，我们将其记为$\int_{(L\,\mu)}\omega$. 形式 μ ⊗μ 给出了 T *L ⊗T *L 的一个平凡化。因此，任意 (1, 1)-热带超形式 ω 都可以写成 ω = f (x)μ ⊗μ，其中 f (x) 是 L 上的某个函数。

积分定义如下:

$$\int_{(L,\mu)}\omega=\int_L f(x)\mu,$$

其中右侧是通常意义上在一个定向线性空间上对最高次微分形式的积分，L 的定向由形式 μ. 诱导。

注意，对于形式 μ′ = −μ ，我们得到的积分与形式 μ. 的积分相同。事实上，我们有 ω = f (x)μ ⊗μ = f (x)(−μ) ⊗(−μ) = f (x)μ′ ⊗μ′，而这两个积分

$$\int_{(L,\mu)}\omega=\int_L f(x)\mu=-\int_L f(x)(-\mu)=-\int_L f(x)\mu'=\int_{\overline{L}}f(x)\mu'=\int_{(L,\mu')}\omega$$

相同，其中 L 是定向相反的空间 L，即由 μ′ 诱导的定向。

另一方面，对体积形式进行缩放会改变积分的值。事实上，若 μ′ = cμ，c > 0，则 f (x)μ ⊗μ = $\frac{1}{c^2}$ f (x)μ′ ⊗μ′. 。因此我们得到

$$\int_{(L,\mu)}\omega=\int_L f(x)\mu,$$
$$\int_{(L,\mu')}\omega=\int_L\frac{1}{c^2}f(x)\mu'=\int_L\frac{1}{c}f(x)\mu=\frac{1}{c}\int_{(L,\mu)}\omega.$$

设 Λ 是 L 中的一个格，则它通过条件 μ(e) = 1 唯一确定形式 μ（至多相差一个符号），其中 e 是 Λ. 的生成元。这里， μ(e) 是 μ ∈T_0^*L 的缩并，而 e ∈T_0L ≃L。因此，格 Λ 唯一确定热带积分。

在 $L = \mathbb{R}$ 的情况下，我们选择 Λ 等于 $\mathbb{Z}$，并选择 μ 等于笛卡尔坐标的微分 dx，这给出了热带积分的初始定义。

2.3. 热带曲线上的热带超形式。设 e 是 Γ 则空间 $\mathscr{E}^{p,q}(e)$ 上的 (p,q)–热带超形式定义为 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 在 $[-l(e),0]$ 或 $(-\infty,0]$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 上的限制，其中e 相应地与 $[-l(e),0]$ 或 $[-\infty,0]$ 或 $[-\infty,+\infty]$. 等距。形式$\int_e \omega$ 在边 e 上的积分 $\omega \in \mathscr{E}^{1,1}(e)$ 定义为在 $\mathbb{R}$.的对应区间上的热带积分。

~定义2.7。曲线上次数为 (p, q)、p、$q = 0, 1$ 的热带超形式的线性空间 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ Γ 定义如下

$$\widetilde{\mathscr{E}}^{p,q}(\Gamma) = \bigoplus_{e \in E} \mathscr{E}^{p,q}(e).$$

~我们用 ω_e 表示形式 $\omega \in \mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 在边 e 上的分量。

一个形式的积分 $\omega \in \widetilde{\mathscr{E}}^{1,1}(\Gamma)$ 在 Γ 上的定义为对所有边上的热带积分求和 s:

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{e \in E} \int_e \omega_e.$$

~注意，对于来自 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 的形式，并未对不同边端点处代表 Γ. 同一顶点的形式取值作任何要求。实际上，这个空间并不是黎曼曲面上光滑微分形式的恰当类比，在本文中只起辅助作用。光滑形式的热带类比是下文定义的正则热带超形式。

~定义 2.8。正则热带超形式的空间 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 是 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 的子空间。$\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 的元素应满足以下条件:

(1) 连续性。若对于与同一顶点 v 相接的任意两条边 $e, e' \in E$，φ_e 和 $\varphi_{e'}$ 在对应于 v 的点处取值相同，则 $(0, 0)$-形式 $\varphi \in \mathscr{E}^{0,0}(\Gamma)$ 连续。换言之，φ 必须是度量图 Γ. 上的连续函数

(2) 基尔霍夫定律。给定顶点 $v \in V$。设 $E_v \subset E$ 是与该顶点关联的一组边。假设边 $e \in E_v$ 与区间 $[-l(e),0]$ 相对应，且点 $0 \in [-l(e),0]$ 对应于顶点 v。令 $\varphi \in \widetilde{\mathscr{E}}^{1,0}(\Gamma)$ 为一个 $(1,0)$-形式，$\varphi_e = \varphi_e(x)dx$。我们称形式 φ 在顶点 v 处满足基尔霍夫定律，如果

$$\sum_{e \in E_v} \varphi_e(0) = 0.$$

如果形式 φ在曲线 Γ 的每个次数为 ≥ 2.的顶点处都满足基尔霍夫定律，则称其在曲线 Γ 上满足基尔霍夫定律。

(3) 无穷远处的正则性。我们称超形式 ω在无穷远处正则，如果对于 Γ 的任意一个次数为一的顶点 v，都存在 v 的一个邻域 U，使得 ω在 U 上的限制是常函数（若 ω 的次数为 $(0, 0)$），否则恒等于零；也就是说，若 ω 的次数为 $(1, 0)$、$(0, 1)$ 或 $(1, 1)$。

因此，如果一个形式在无穷远处正则，并且在 $(0,0)$–形式的情形下连续，或者在 $(1, 0)$–形式的情形下满足基尔霍夫定律，那么它就是正则的。

命题 2.9. 正则热带超形式 $\mathscr{E}^{*,*}(\Gamma)$ 在楔积和 d''-微分下封闭。

证明显然。

T定理 2.10（斯托克斯定理）。如果 $\omega \in \mathscr{E}^{1,1}_{0}(\Gamma)$，那么 $\int_\Gamma d''\omega = 0$. 因此，如果 $\varphi \in \mathscr{E}^{p,0}(\Gamma)$ 且 $\psi \in \mathscr{E}^{1-p,0}_{0}(\Gamma)$，那么

$$\int_\Gamma d''\varphi \wedge \psi = (-1)^{p+1} \int_\Gamma \varphi \wedge d''\psi.$$

证明。设 ω 是 $\mathscr{E}^{1,\,0}(\Gamma)$ 的一个元素。设 e 是 Γ 的一条边， $\omega_e(x)d'x$ 是 ω在 e 上的限制。利用牛顿–莱布尼茨公式可得 $\int_e d''(\omega_e(x)d'x) = -\omega_e(0) + \omega_e(l(e))$。由于 Γ 上的积分是各条边上的积分之和，结合牛顿–莱布尼茨公式、基尔霍夫定律以及无穷远处的正则性，我们得到第一个结论。

第二个陈述由第一个陈述和莱布尼茨法则推出。 □

2.4. 热带上同调。设 U 是 Γ. 中的一个开集。我们将 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma(U)$ 定义为 U 上光滑 (p, q)–形式的线性空间，这些形式按照定义 2.8 的意义是正则的。对应关系 $U \to \mathscr{E}^{p,q}\Gamma(U)$ 定义了 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma$ 上的光滑热带正则超形式层，空间 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma(U)$ 是 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma$ 在 U 上的截面空间。

令 Ω^1_Γ 为 d″–闭形式的子层 $\mathscr{E}^{1,0}_\Gamma$. 注意到，如果 (1, 0)–形式 φ 限制到一条边 e 上时是 d″–闭的，】【。

$$\varphi_e(x)d'x$$

具有局部常系数 $\varphi_e(x)$。

让我们更明确地描述层 Ω^1_Γ 。给定 Γ 的一个顶点v，其次数为d ≥ 2. 考虑 v 的一个小ε–邻域Uε 。它等距同构于

$$U_\varepsilon = \bigsqcup_{d\text{-times}} (-\varepsilon, 0]/\sim, \tag{1}$$

其中，不同区间的点 0通过等价关系进行识别。0 的等价类与顶点 v进行识别。在Uε 上的 Ω^1_Γ 截面是一个具有常系数的 (1,0)–形式的集合

$$\varphi_j d'x,\ \varphi_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, d,$$

其中，形式φ_jd′x定义在第j– 个区间（−ε、 0] ⊂ Uε，且系数满足基尔霍夫定律：

$$\sum_{j=1}^{d} \varphi_j = 0.$$

设v 是一个 1度顶点，其 ε–邻域Uε 等距于$U_\varepsilon = [-\infty, -\varepsilon)$，由于 Ω^1_Γ 的截面在无穷远处是正则的，该截面在 Uε. 上恒等于零

设 $\mathbb{R}_\Gamma$ 是 Γ 上的局部常值函数层 $\mathscr{E}^{0,0}_\Gamma$. 的一个子层。 $\mathbb{R}_\Gamma$ 的截面是在边上局部常值且在顶点处满足连续性性质的函数。显然，子层 $\mathbb{R}_\Gamma$ 与层 $\mathscr{E}^{0,0}_\Gamma$ 中 d″– 闭函数构成的子层重合。

注 2.11. 层 $\mathbb{R}_\Gamma, \Omega^1_\Gamma, \mathscr{E}^{p,q}\Gamma$ 在热带理论中发挥着与复数域情形下光滑曲线 C 上的全纯函数层 $\mathscr{O}_C$、全纯 1–形式 Ω^1_C以及光滑 (p, q)–微分形式 $\mathscr{E}^{p,q}C$ 相对应的作用。微分 d″ 发挥着与 $\overline{\partial}$ 算子相同的作用。

空间 Ω^1_Γ 是在 [9, 定义 2.25，热带 1-形式]中引入的。在那篇论文中，它与复曲线退化为热带曲线有关，也与曲线上全纯形式的退化有关。

命题 2.12. 存在如下层的正合序列

$$0 \to \Omega^1_\Gamma \xrightarrow{i} \mathscr{E}^{1,0}_\Gamma \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{1,1}_\Gamma \to 0,$$

$$0 \to \mathbb{R}_\Gamma \xrightarrow{i} \mathscr{E}^{0,0}_\Gamma \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{0,1}_\Gamma \to 0,$$

其中 i 是子层的自然包含。

证明. 根据定义，映射 i 是单射。d″ 的核由系数在各边上为常数的形式组成。这些形式恰好来自 Ω^1_Γ 或 $\mathbb{R}_\Gamma$. 因此 im i = ker d″.

的满射性d'' 可由牛顿–莱布尼茨公式推出。设U_ε 是一个 ε–顶点 v的邻域，如（1）中所定义。给定一个 (1,1)–形式 ω. 设

$$\omega_j(x)d'x \wedge d''x$$

是 ω 在U 的第 j– 条边上的一个分量。设 $\varphi_j(x) = \int_x^0 \omega_j(t)dt$ 和 $\varphi_j(x)d'x$是在第 j–条边上的(1,0)–形式φ 的一个分量。该形式 φ 是正则的。事实上， $\varphi_j(0) = 0$，因此它在 v 处满足基尔霍夫定律。我们有 $d''\varphi = \omega$.

设 $U_\varepsilon = [-\infty, -\varepsilon)$ 是一个 1度顶点的 ε–邻域，且 $\omega(x)d'x \wedge d''x$ 是 U_ε. 上的正则 (1,1)–形式。假设

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{x} \omega(t)dt$$

那么 φ(x)d′x 是 U_ε. 上的正则形式。事实上，由于 ω 在无穷远处正则，它在 $-\infty$. 的某个邻域上为零。因此积分收敛，并且 φ(x) 在同一邻域上等于零 $-\infty$.

对于边的一个内部点，存在一个邻域与有界区间 $U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ 等距。该邻域上的序列正合性由牛顿–莱布尼茨公式得出。因此，我们检查了所有可能的情形，并证明在任意点 $x \in \Gamma$ 的某个邻域内，算子 d'' 是满射的。

第二个序列中 d'' 的满射性的证明重复上述论证。 □

现定义双分次上同调群$H^{p,q}(\Gamma)$，其关于 Γ 的定义为

$$H^{1,q}(\Gamma) = H^q(\Gamma, \Omega^1_\Gamma),$$

$$H^{0,q}(\Gamma) = H^q(\Gamma, \mathbb{R}_\Gamma).$$

由于 $\mathbb{R}_\Gamma$ 是局部常值函数层，群 $H^{0,q}(\Gamma)$ 同构于图 Γ. 的通常拓扑上同调群 $H^q(\Gamma, \mathbb{R})$。

命题 2.13. 层 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma$是精细且无环的。存在一个同构$H^{p,q}(\Gamma) \cong H^q(\mathscr{E}^{p,*}(\Gamma), d'')$，其中 $H^q(\mathscr{E}^{p,*}(\Gamma), d'')$ 是该复形的上同调群

$$0 \to \mathscr{E}^{p,0}(\Gamma) \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{p,1}(\Gamma) \to 0.$$

证明。该结论的证明重复了光滑流形上光滑形式层无上同调性的证明，以及光滑流形上的切赫到德拉姆同构的证明。

对于 $\mathfrak{U}$ 的任意开覆盖 Γ，层的正则热带(0,0)-超形式$\mathscr{E}^{0,0}_\Gamma$. 都存在光滑单位分解。由于层 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma$ 是一个 $\mathscr{E}^{0,0}_\Gamma$–模，它上面存在单位分解，因此 $\mathscr{E}^{p,q}\Gamma$ 是细层，故为无循环的。

设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ 是 Γ的有限无环开覆盖，即 $\mathfrak{U}$ 这样一个开覆盖：对于其元素的任意交U， $\mathfrak{U}$ 与层的序列（2.12）相对应的截面序列都是正合的。利用构造切赫到德拉姆同构的标准方法，我们证明该命题。 □

2.5.Kähler形式、内积和霍奇星算子。设 $g = g(x)d'x \wedge d''x \in \mathscr{E}^{1,1}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$. 上的一个正的热带 (1,1)–超形式。我们称该形式为正的，如果对于每个$x \in \mathbb{R}.$， $g(x) > 0$。由于$g(x)d'x \wedge d''x$ 表示 $g(x)dx \otimes dx$，我们可以将 g 视为 $\mathbb{R}$. 上的黎曼度量。黎曼度量 g 定义了 $\varphi, \psi \in \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$中元素之间的逐点标量积 $(\varphi, \psi)_g(x)$。事实上，我们可以将 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$中的元素视为张量场，而黎曼度量定义了张量场上的逐点标量积。我们将两个形式 $\varphi, \psi \in \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 之间的标量积 $(\varphi, \psi)_g$ 定义为

$$(\varphi, \psi)_g = \int_{\mathbb{R}} (\varphi, \psi)_g(x) g,$$

其中，g 被视为热带 (1, 1)–形式，右侧是一个热带积分。此时我们暂不考虑该积分的收敛性。通常，我们会省略 $(\cdot,\cdot)_g$ 中的下标，改写为 $(\cdot,\cdot)$。下面用坐标来描述各种 p、q 情况下的标量积：

$$(f(x), h(x)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) h(x) dx$$

$$(f(x)d'x, h(x)d'x) = (f(x)d''x, h(x)d''x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)dx$$

$$(f(x)d'x\wedge d''x, h(x)d'x\wedge d''x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{g(x)}f(x)h(x)dx$$

霍奇星算子

$$*_g:\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})\to\mathscr{E}^{1-p,1-q}(\mathbb{R})$$

由关系式定义

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi\wedge *_g\psi=(\varphi,\psi)_g$$

永远 $\forall\ \varphi,\psi\in\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$。通常我们会省略 $*_g$ 中的下标，改写为 $*$.

霍奇星是等距映射，即，对于任意 φ、 $\psi\in\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$成立

$$(\varphi,\psi)=(*\varphi,*\psi).$$

此外，对于任意 $\psi\in\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 均成立。

$$**\psi=(-1)^{p+q}\psi.$$

在坐标表示下，霍奇星如下：

$$\begin{aligned}
*f(x)&=f(x)g(x)d'x\wedge d''x,\\
*f(x)d'x\wedge d''x&=\frac{1}{g(x)}f(x),\\
*f(x)d'x&=f(x)d''x,\\
*f(x)d''x&=-f(x)d'x.
\end{aligned}\tag{2}$$

注2.14. 在微分几何中，黎曼度量在张量场截面的空间上定义标准标量积。由于形式g 是一个(0,2)型对称张量场，我们可以将其视为 $\mathbb{R}$. 上的黎曼度量。此外，我们也可以将空间 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 视为张量场的空间。因此，这个黎曼度量在空间 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 上诱导出标准标量积，但这个标量积与上面定义的热带标量积不一致。

事实上，设 f $(x),h(x)$ be $\mathbb{R}$ 上的函数，那么函数空间上的标准标量积等于 s

$$(f(x),h(x))=\int_{\mathbb{R}}f(x)h(x)\sqrt{g(x)}dx.$$

在 1–形式空间上 可识别为 $\mathscr{E}^{1,0}(\mathbb{R})$ 或 $\mathscr{E}^{0,1}(\mathbb{R})$，标准标量等于

$$(f(x)dx,h(x)dx)=\int_{\mathbb{R}}f(x)h(x)\frac{1}{\sqrt{g(x)}}dx.$$

这是因为， $\mathbb{R}$ 上的热带超形式对应于 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$上的通常微分形式，而不是 $\mathbb{R}$上的形式；热带超形式空间上的标量积与 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. 上的标准标量积一致。这种对应关系将在下一小节中介绍。

若将 Γ 的一条边 e 认作 $\mathbb{R}$的一个区间，那么该区间上的一个 K¨ahler 形式便在 Γ.这条边上定义了标量积 (,) 和霍奇星算子。

定义 ∼N 2.15. 曲线 Γ 上的 K¨ahler 形式 g 是一个 (1,1)–形式 $g\in\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$，满足 (1) g 是正的，即在局部坐标中可表示为 $g=g(x)d'x\wedge d''x$，其中 g(x) 为正；(2) $\int_\Gamma g<+\infty$；(3) 对任意无限长度边 e，积分 $\int_e x^2g(x)d'x\wedge d''x$ 收敛。

˜我们如下定义 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 的标量积：

$$(\varphi,\psi)_g=\int_\Gamma\varphi\wedge *_g\psi.$$

注 2.16. 定义中的最后一个条件，即 $\int_\epsilon x^2 g(x) d'x \wedge d''x$ 的收敛性，将在下一节对 L^2- 理论的研究中发挥作用。它使我们能够对各种积分的收敛性获得一些估计。我们尚不清楚这里的充要条件是什么，也不清楚如何放宽这一条件。

正如示例 2.20 所展示的，源自复几何的热带 K¨ahler形式实际上具有在无穷远处迅速衰减的系数，这实际上是比我们在定义中所要求的高得多的收敛速率。

注 2.17。在热带背景下，凯¨勒形式 g 在经典复几何中扮演凯¨勒形式和厄米度量的角色。此外，凯¨勒形式 g 在 Γ. 的每条边上定义一个黎曼度量。注意，这个黎曼度量与 Γ 上的度量结构无关，也就是说，与边的长度无关。一般而言，霍奇星算子不保持正则性条件，即存在一个正则形式 $\varphi \in \mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$，使得 $*\varphi$ 不正则。这是热带情形与经典情形之间一个重要但令人遗憾的差异。事实上，流形上的光滑形式的霍奇星仍然是光滑形式。

我们可以将本节的结果概括如下

定理2.18. 设 g 是曲线 Γ. 上的 K¨ahler 形式，则 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 是一个微分双分次代数，并带有非退化配对。

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{E}^{p,q}(\Gamma) \otimes \mathscr{E}^{1-p,1-q}(\Gamma) \to \mathbb{R},$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Gamma \varphi \wedge \psi,$$

以及标量积

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi \wedge *\psi.$$

在该定理中，标量积和配对对所有元素都有定义，也就是说，所有积分都收敛。收敛性源于正则形式满足的无穷远处正则性条件，以及热带积分 $\int_\Gamma g$ 的收敛性，而后者是 K¨ahler 形式 g 的定义所要求的。

2.6.热带超形式与复几何。乍看之下，热带超形式及相关对象似乎有些人为构造之感。在本节中，我们将展示，这些对象可以用经典复几何的术语来进行自然诠释。

实数线 $\mathbb{R}$ 复数域 可被视为复环面的热带类比 $\mathbb{C}^*$. 存在映射

$$\log|z| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$$

连接二者。

令 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{C}^*)$ 表示在 $\mathbb{C}^*$. 上取值于 $\mathbb{C}$、双次数为 (p, q) 的光滑微分形式空间。定义分次代数同态 Θ: $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R}) \to \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{C}^*)$。在生成元上的定义如下

$$\Theta(\varphi(x)) = \varphi(\log|z|),\ \varphi(x) \in \mathscr{E}^{0,0}(\mathbb{R}),$$

$$\Theta(d'x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{dz}{z},\ \Theta(d''x) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}.$$

由于 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 是一个 $\mathbb{R}-$代数，我们将 Θ 视为一个 $\mathbb{R}-$代数同态。

考虑酉群 $U(1) = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ 以及标准作用 $U(1) \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$，即 $(t, z) \to t \cdot z$。该作用在 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{C}^*)$ 上诱导出 U (1) 的作用。 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 在 Θ 下的像是空间 $\mathscr{E}^{p,q}{}_{U(1)}(\mathbb{C}^*)$ 中的一个 $\mathbb{R}$-线性子空间，其中的形式关于 U (1)−不变。其复化 $\Theta(\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 与 $\mathscr{E}^{p,q}{}_{U(1)}(\mathbb{C}^*)$ 重合。

设 $g(x)d'x \wedge d''x$ 是一个热带 K¨ahler 形式。可以验证其像

$$\Theta(g(x)d'x \wedge d''x) = \frac{i}{4\pi} g(\log|z|) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2}$$

是 $\mathbb{C}^*$. 上的 K¨ahler 形式。K¨ahler 形式 $\omega = i2h(z)dz \wedge dz$ 确定了 $=$ 上的厄米度量 $h(z)dz \otimes dz$。因此，对于 K¨ahler 形式 $\omega = \Theta(g(x)d'x \wedge d''x)$，相应的厄米度量为

$$h = \frac{1}{2\pi}\frac{g(\log|z|)}{|z|^2}dz \otimes d\bar{z}.$$

令 $*_h$ 为霍奇星算子　　算子和 $(,)_h$ 是 $\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{C}^*)$上与度量 h 对应的标量积　　.

P命题 2.19. 假设 $\varphi, \psi \in \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$，则以下关系成立。　　:

$$*_h\Theta = \Theta *_g,$$
$$(\Theta\varphi, \Theta\psi)_h = (\varphi, \psi)_g,$$
$$\Theta(d''\varphi) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\bar{\partial}\Theta(\varphi),$$
$$\Theta(d'\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial\Theta(\varphi).$$

设 $\omega \in \mathscr{E}^{1,1}(\mathbb{R})$，则

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{C}^*} \Theta(\omega).$$

区间 $I = (a, b)$ 上的热带积分 $\int_I \omega$ 等于环域 $U = \{z \in \mathbb{C}^* : e^a < |z| < e^b\}$. 上的 $\int_U \Theta(\omega)$ 的积分。

证明只需进行直接计算。

因此，热带超形式可以重新诠释为代数$\mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{C}^*)$ 的 U (1)–不变形式的一个 $\mathbb{R}$–子代数。

例2.20。我们来考虑 Fubini-Study 度量及其 K¨ahler 形式

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2) = \frac{i}{2\pi}\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

关于 $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{CP}^1$.

这是热带形式。

$$\omega' = 2\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}d'x \wedge d''x$$

使得 $\Theta(\omega') = \omega$. 此外，$\omega' = \frac{1}{2}d'd''\log(1+e^{2x})$ 因此

$$\omega = \Theta(\frac{1}{2}d'd''\log(1+e^{2x})) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial\frac{i}{\sqrt{\pi}}\bar{\partial}\log(1+|z|^2).$$

由于 ω' 满足定义 2.15中的所有条件，因此我们可以将 ω' 视为热带射影空间 $\mathbb{TP}^1 = [-\infty, +\infty]$.上的 Kähler 形式

注 2.21. 根据我们对正则性的定义，上述例子中的热带形式 ω' 不是正则热带形式，因为它不满足无穷远处的正则性条件。另一方面，形式 $\Theta\omega'$可以延拓为 $\mathbb{CP}^1$. 上的光滑形式。还要注意，形式 ω' 的系数 $\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$ 在施瓦茨空间的意义下，是 $\mathbb{R}$ 上的一个快速衰减函数。

此外，由于曲线 Γ 上的任意 K¨ähler 形式 g 的系数处处为正，如果 Γ上存在无限长度边，那么 K¨ähler 形式 g 在无穷远处就不正则。另一方面，其系数在无穷远附近应当足够快地衰减，因为我们要求积分 $\int_\Gamma g$ 收敛。

此外，请注意，该映射

$$\log|z| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$$

可以延拓为映射

$$\log|z| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

这些观察使我们想到，可以如下扩展无穷远处正则性的概念。若热带形式 $\varphi \in \mathscr{E}^{p,q}(\mathbb{R})$ 能在整个 $\mathbb{C}$. 上延拓为光滑形式，则称其在无穷远处正则。我们认为这种延拓方式是合理的，但本文不再进一步探讨这一想法。

3. L^2 理论、Laplace-Beltrami 算子与调和形式

本节将证明本文的主要结论。我们将引入带有 L^2 系数的热带超形式、弱 $d''-$ 微分、Laplace-Beltrami 算子以及调和热带超形式等概念。本部分的主要方法沿用 L^2- 上同调理论的思路：泛函分析、无界微分算子、分布、索伯列夫空间以及各种解析估计。处理无限长度边需要进行一些繁琐的分析。

3.1. 带有 L^2 系数的热带超形式与弱 $d''-$ 微分。设 Γ 是一条带有 Kähler 形式 g 的热带曲线。记 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 为 Γ 上带有 L^2 系数的 $(p,q)-$ 形式所构成的希尔伯特空间，其标量积 $(\cdot,\cdot)_g$ 定义见第 2.5 小节。该空间是 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 的度量完备化。显然，正则形式空间 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 是 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 的子空间，而 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 也是 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$ 的度量完备化。

霍奇星算子存在一个连续线性延拓 $*$，其定义域为 $\mathscr{E}^{p,q}(\Gamma)$，值域为 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$，我们也将其记作 $*$.。霍奇星算子是 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 与 $\mathscr{L}^{1-p,1-q}(\Gamma)$ 之间的等距映射。

定义 3.1. 若形式 $\omega \in \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)$ 满足以下条件，则称其为形式 $\psi \in \mathscr{L}^{p,0}(\Gamma)$ 的弱 $d''-$微分：对任意正则形式 $\varphi \in \mathscr{E}^{1-p,0}(\Gamma)$，有

$$\int_\Gamma \omega \wedge \varphi = (-1)^{p+1} \int_\Gamma \psi \wedge d''\varphi. \tag{3}$$

我们将形式 ψ 的弱 $d''-$微分记作 $d''\psi$.

显然，正则形式的 $d''-$微分也是弱 $d''-$微分。

弱 $d''-$某形式的微分 ψ若存在则唯一。事实上，假设存在两个这样的微分 ω_1和 ω_2. 那么利用（3）可得

$$\int_\Gamma (\omega_1 - \omega_2) \wedge \varphi = (-1)^{p+1} \int_\Gamma (\psi - \psi) \wedge d''\varphi = 0$$

.

$$\int_\Gamma (\omega_1 - \omega_2) \wedge \varphi = \pm \int_\Gamma **(\omega_1 - \omega_2) \wedge \varphi = \pm(*(\omega_1 - \omega_2), \varphi) = 0$$

由于它对任意 $\varphi \in \mathscr{E}^{1-p,0}(\Gamma)$ 都成立，且 $\mathscr{E}^{1-p,0}(\Gamma)$ 在 $\mathscr{L}^{1-p,0}(\Gamma)$中稠密，因此我们得到等式 $\omega_1 = \omega_2$.
因此，存在稠密定义的无界算子

$$d'' : \mathscr{L}^{p,0}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma).$$

我们将其定义域记作 $\mathscr{D}(d'')$ 或记作 $\mathscr{D}^{p,0}(\Gamma)$。

下文中，我们用 $\mathscr{D}(A)$ 表示无界算子 A 的定义域。

3.2.预层 $\mathscr{L}^{p,q}$ 和 $\mathscr{D}^{p,0}$.

定义 3.2. 将 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 限制到 Γ 的开子集上，定义了 Γ. 上具有 L^2 系数的 $(p,q)-$ 超形式的预层 $\mathscr{L}^{p,q}$。定义预层 $\mathscr{L}^{p,0}$ 的子预层 $\mathscr{D}^{p,0}$。对于开子集 $U \subset \Gamma$，若存在 $\omega \in \mathscr{L}^{p,1}(U)$，使得对于任意在 U 上具有紧支集的 $\varphi \in \mathscr{E}^{1-p,0}(\Gamma)$，等式 (3) 成立，则 $(p,0)-$ 形式 $\psi \in \mathscr{L}^{p,0}(U)$ 属于 $\mathscr{D}^{p,0}(U)$。

示例 3.3。在上述定义中，形式 φ具有紧支集，且其位于开集U中。下面说明无穷边上的拓扑结构，以及在这种情况下什么被视为紧支集。考虑热带射影空间 $\mathbb{TP}^1 = [-\infty, +\infty]$. 那么，例如，$U = [-\infty, \infty)$ 是 $\mathbb{TP}^1$的开子集，集合$[-\infty, a], a \in \mathbb{R}$是$U$的紧子集，而集合 $[a, +\infty)$，$a \in \mathbb{R}$ 不是紧的。

备注 3.4。需要提醒的是，$\mathscr{L}_{p,q}$ 的层化是层 $\mathscr{L}_{p,q\ loc}$，它由在 Γ 上具有局部 L^2-系数的 (p,q)–超形式构成；也就是说，在开集 U 上，$\mathscr{L}_{p,q\ loc}(U)$ 的截面是这样的 (p,q)–超形式：其系数在 U 的每个紧子集上都是 L^2-可积函数。由于 Γ 是紧的，我们有 $\mathscr{L}^{p,q}{}_{loc}(\Gamma) = \mathscr{L}_{p,q}(\Gamma)$。为避免与局部 L^2-系数相关的复杂性，我们将使用预层 $\mathscr{L}_{p,q}$。

另一方面，$\mathscr{L}_{p,q}$ 和 $\mathscr{D}^{p,0}$ 几乎是层；若要成为层，它们必须满足局部性公理和粘合公理。让我们回顾一下层 $\mathscr{F}$ 的这些公理

（局部性）设 U 是一个开集，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 U 的一个开覆盖，且 $s,t \in \mathscr{F}(U)$ 是截面。如果对于所有 $i \in I$ 都有 $s|_{U_i} = t|_{U_i}$，则 $s = t$。

（粘合）设 U 是一个开集，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 U 的一个开覆盖，且 $\{s_i \in \mathscr{F}(U_i)\}_{i\in I}$ 是一族截面。如果每对截面在其定义域的交集上都相同，即对于所有 $i,j \in I$，都有 $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$，则存在一个截面 $s \in \mathscr{F}(U)$，使得对于所有 $i \in I$，都有 $s|_{U_i} = s_i$。

预层 $\mathscr{L}_{p,q}\mathscr{D}_{p,0}$ 满足任意开覆盖下的局部性公理，但只满足有限覆盖下的粘合公理。事实上，如果 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 U 的无限开覆盖，那么可能出现这样的情况：限制到每个 U_i 上的范数都是有限的，但元素在 U 上的范数却是无限的，因此该元素不属于 $\mathscr{L}_{p,q}(U)$。

由于正则热带 $\mathscr{D}^{p,0}$ 中存在单位分解，因此可以将截面粘合起来，因为正则热带空间中存在单位分解 $(0,0)$–形式。利用该单位分解，可以验证粘合后的截面满足方程 (3)。

事实上，设 U 是一个开集，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 U 的有限开覆盖，且 $\{\psi_i \in \mathscr{D}_{p,0}(U_i)\}_{i\in I}$ 是一族截面，满足 $\psi_i|_{U_i\cap U_j} = \psi_j|_{U_i\cap U_j}$ 对所有 $i,j \in I$ 均成立。那么存在一个截面 $\psi \in \mathscr{L}_{p,0}(U)$，使得 $\psi|_{U_j} = \psi_j$.由于形式 $\omega_i = d''\psi_j \in \mathscr{L}_{p,1}(U_i)$ 在其定义域的交叠部分上一致，因此我们可以将它们粘合为全局形式 $\omega \in \mathscr{L}_{p,1}(U)$。下面证明 ψ 是 $\mathscr{D}_{p,0}(U)$ 的一个元素，也就是说，对于任何在 U 上具有紧支集的 $\varphi \in \mathscr{E}^{1-}{}_{p,0}(\Gamma)$，都有：

$$\int_U \omega\wedge\varphi = (-1)^{p+1}\int_U \psi\wedge d''\varphi.$$

令 $\rho_i \in \mathscr{E}^{0,0}(\Gamma), i \in I$ 是从属于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$. 的单位分解然后

$$\int_U \omega\wedge\varphi = \sum_{i\in I}\int_{U_i}\omega\wedge\rho_i\varphi =$$

因为 $\rho_i\varphi$ 在 U_i 上有紧支集，我们得到

$$= (-1)^{p+1}\sum_{i\in I}\int_{U_i}\psi\wedge d''(\rho_i\varphi) = (-1)^{p+1}\int_U \psi\wedge d''\varphi.$$

3.3. 主要技术引理。

引理 3.5. 设 $U\cong[-\infty,a)$ 是 Γ 的一个1度顶点的开邻域，该顶点被识别为点 $-\infty$. 给定形式 $\omega \in \mathscr{L}_{p,1}(U)$。

如果 $p = 0$ an $d\omega = \omega(x)d''x$，让我们定义一个 $(0,0)$–形式 $\psi = \psi(x)$，即如下函数 *s:*

$$\psi(x) = -\int_x^a \omega(t)dt.$$

该函数 n ψ 是定义良好的，并且属于 $\mathscr{L}^{0,\ 0}(U)$，且满足以下估计 :

$$|\psi(x)| \le \sqrt{a-x}||\omega(x)d''x||.$$

(2) 如果 $p = 1$ 和 $\omega = \omega(x)d'x\wedge d''x$，定义一个 $(1,0)$–形式 $\psi = \psi(x)d'x$ 如下：

$$\psi(x) = -\int_{-\infty}^x \omega(t)dt.$$

该形式 ψ 是定义良好的，并且属于 $\mathscr{L}^{0,\ 1}(U)$，且满足以下估计：

$$|\psi(x)| \le \sqrt{\int_{-\infty}^x g(t)dt}||\omega(x)d'x\wedge d''x||.$$

(3) 映射 $\omega\to\psi$ 是从 $\mathscr{L}_{p,1}(U)$ 到 $\mathscr{D}_{p,0}(U)$ 的有界线性算子，且 $d''\psi = \omega$.。我们将此算子记为 T_U.

(4) 假设存在一个形式 $\widetilde{\psi} \in \mathscr{D}^{p,1}(U)$，使得 $d''\widetilde{\psi} = \omega$.。那么，若 $p = 1, \psi = \widetilde{\psi}$；若 $p = 0, \psi =$复数域 $+\widetilde{\psi}$,复数域 $\in \mathbb{R}$.

备注 3.6. 换句话说，该引理表明，从一个形式 $\omega \in \mathscr{L}^{p,1}(U)$出发，我们可以找到一个形式$\psi \in \mathscr{L}^{p,1}(U)$，使得 $d''\psi = \omega$. The value and the norm of ψ can be estimated using the norm of ω. 此外，形式 ψ is a unique form such that $d''\psi = \omega$ if $p = 1$, or unique up to addition of a constant if $p = 0$.

证明。让我们考虑(1,1)–形式的情形。令 $I_{\leq x}$为集合 $[-\infty, x]$.的示性函数。给定一个形式 $\omega = \omega(x)d'x \wedge d''x \in \mathscr{L}^{1,1}(U)$。然后，(0, 1)–形式 $\psi = \psi(x)d'x$定义如下：

$$\psi(x) = -\int_U I_{\leq x}(t)\omega(t)dt.$$

这个积分是定义良好的，事实上，它可以使用空间 $\mathscr{L}^{1,1}(U)$ 上的标量积来表示：

$$\int_U I_{\leq x}(t)\omega(t)dt = -(\omega, I_{\leq x}g),$$

且形式 $I_{\leq x}g$ 是 $\mathscr{L}^{1,1}(U)$ 的一个元素。

我们必须证明 $\psi \in \mathscr{L}^{1,0}(U)$。特别是，证明

$$||\psi||^2 = \int_U \psi^2(x)dx < +\infty.$$

回忆一下，

$$||\omega||^2 = \int_U \frac{1}{g(x)}\omega^2(x)dx$$

利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$|\psi(x)| = \left|\int_U I_{\leq x}(t)\omega(t)dt\right| = \left|\int_U \sqrt{g(t)}I_{\leq x}(t)\frac{1}{\sqrt{g(t)}}\omega(t)\psi\right| \leq ||\omega||\sqrt{\int_U g(t)I_{\leq x}(t)dt}.$$

因此我们得到了估计：

$$|\psi(x)| \leq ||\omega||\sqrt{\int_{-\infty}^{x} g(t)dt}.$$

Then

$$||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{a} \psi^2(x)dx \leq ||\omega||^2 \int_{-\infty}^{a} dx(\int_{-\infty}^{x} g(t)dt) =$$

交换积分顺序后，我们得到

$$= ||\omega||^2 \int_{-\infty}^{a} g(t)dt(\int_{t}^{a} dx) = ||\omega||^2 \int_{-\infty}^{a} (a-t)g(t)dt$$

根据 t 的定义 K¨ahler 度量（定义 2.15）积分 $\int_{a-\infty}$(a –t)g(t)dt 收敛。其 us

$$||\psi|| \leq C||\omega||$$

且常数复数域与 ω. 的选取无关。因此存在一个有界线性算子

$$T_U : \mathscr{L}^{1,1}(U) \to \mathscr{D}^{1,0}(U)$$

使得 $T_U\omega = \psi$.

让我们检查一下 $d''\psi$ 是否等于 ω.。这意味着，对于任意紧支集在 U 中的正则 (0, 0)– 形式 φ，都有：

$$\int_U \omega \wedge \varphi = \int_U \psi \wedge d''\varphi.$$

考虑等式右边

$$\int_U \psi \wedge d''\varphi = \int_U \psi(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{a}(-\int_{-\infty}^{x} \omega(t)dt)\varphi'(x)dx =$$

交换积分次序可得

$$= \int_{-\infty}^{a} (-\int_{t}^{a} \varphi'(x)dx)\omega(t)dt =$$

根据牛顿–莱布尼茨公式，由于 φ(x) 在 a 的某个邻域内等于零，我们得到

$$= \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\omega(t)dt = \int_{U} \omega \wedge \varphi.$$

因此， ψ 属于 $\mathscr{D}^{1,\ 0}$(U) 且 $d''\psi = \omega$.

我们来考虑 (0,1)–形式的情形。这种情形与前一种相当类似，但存在一些细微差别。给定一个形式

$$\omega = \omega(x)d''x \in \mathscr{L}^{0,1}(U).$$

令 $I_{x\leq}$ 为集合 [x, a) 的示性函数。考虑函数

$$\psi(x) = -\int_{U} I_{x\leq}(t)\omega(t)dt.$$

这个积分是定义良好的，因为它等于 $\mathscr{L}^{0,\ 1}$(U) 中两个元素的标量积:

$$\psi(x) = -(\omega, I_{x\leq}(t)d''x).$$

我们必须证明 $\psi \in \mathscr{L}^{0,0}$(U)，因此我们需要检查

$$||\psi||^2 = \int_{U} g(x)\psi^2(x)dx < +\infty.$$

由于

$$||\omega||^2 = \int_{U} \omega^2(x)dx$$

利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$|\psi(x)| = \left| \int_{U} I_{x\leq}(t)\omega(t)dt \right| \leq ||\omega|| \sqrt{\int_{U} I_{x\leq}(t)dt} = ||\omega|| \sqrt{a-x}.$$

Then

$$||\psi||^2 = \int_{U} g(x)\psi^2(x)dx \leq ||\omega|| \int_{-\infty}^{a} (a-x)g(x)dx$$

根据 K¨ahler 度量（定义 2.15），积分 $\int_{-\infty}^{a}$(a −x)g(x)dx 收敛。因此

$$||\psi|| \leq C||\omega||$$

且该常数不依赖于 ω. 的选择因此存在一个有界线性算子

$$T_U : \mathscr{L}^{0,1}(U) \to \mathscr{D}^{0,0}(U)$$

使得 $T_U\omega = \psi$.

我们来验证 $d''\psi$ 等于 ω.。这意味着，对于任意一个在 U 中具有紧支集的正则 (1, 0)–形式 φ = φ(x)d′x，都有:

$$\int_{U} \omega \wedge \varphi = -\int_{U} \psi \wedge d''\varphi.$$

考虑等式右边:

$$-\int_{U} \psi \wedge d''\varphi = -\int_{-\infty}^{a} (-\int_{x}^{a} \omega(t)dt)(-\varphi'(x))dx =$$

交换积分次序后，我们得到

$$= -\int_{-\infty}^{a} (\int_{-\infty}^{t} \varphi'(x)dx)\omega(t)dt =$$

由于 φ 是正则的，因此它在 $-\infty$. 的一个邻域内等于零。因此，应用牛顿–莱布尼茨公式，我们得到

$$= -\int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\omega(t)dt = \int_{U} \omega \wedge \varphi.$$

因此， ψ 属于 $\mathscr{D}^{0,\ 0}(U)$。

假设存在一个形式 $\tilde{\psi} \in \mathscr{D}_{p}{}^{0}(U)$，使得$d''\tilde{\psi} = \omega$. 则$d''(\tilde{\psi} - \psi) = 0$，因此 $\tilde{\psi} - \psi$的系数应为常数，即 $\tilde{\psi} - \psi$ 等于：当$p = 1$时，为 $cd''x$；或者当$p = 0$时，为 c，其中 $c \in \mathbb{R}$. 在 $p = 1$的情况下，

$$||cd''x||^2 = \int_{-\infty}^{a} c^2 dx = +\infty,$$

因此 $c = 0$ 和 $\tilde{\psi} = \psi$. 在 $p = 0$的情况下，积分

$$||c||^2 = \int_{-\infty}^{a} c^2 g(x)dx$$

根据Kähler形式的定义收敛¨（定义2.15），并且c 可以是任意实数。

□

3.4. 与索伯列夫空间的关系。

引理 3.7. 设 U 是复数域中的一个开子集，并且它等距于一个有限长度的开区间 $U \cong (a, b)$。给定一个形式 $\psi \in \mathscr{D}p^{0}(U)$，用坐标表示时，它等于 $\psi = \psi(x)d'x$ 或 $\psi = \psi(x)$。那么，系数 ψ(x) 属于索伯列夫空间 $H^1(U) = H^1(a, b)$。

证明。设 $\psi \in \mathscr{D}^{0,\ 0}(U)$。令 $\omega = \omega(x)d''x = d''\psi$. 那么这些元素的范数相等 l:

$$||\psi||^2 = \int_{a}^{b} \psi^2(x)g(x)dx,$$

$$||\omega||^2 = \int_{a}^{b} \omega^2(x)dx.$$

由于 g(x) 是 U 的闭包上的非负连续函数，存在常数 $0 < c, C$，使得对任意 $x \in U$，都有 $c < g(x) < C$。因此，$\mathscr{L}^{0,\ 0}(U)$ 上的范数等价于 $L^2(a, b)$ 上的标准范数：

$$c\int_{a}^{b} \psi^2(x)dx < ||\psi||^2 < C\int_{a}^{b} \psi^2(x)dx.$$

(1, 1)–形式 $\omega \in \mathscr{L}^{0,\ 1}(U)$ 的范数等于其系数函数ω(x) 在 $L^2(a, b)$ 上的标准范数。

考虑方程（3）：

$$\int_{U} \omega \wedge \varphi = -\int_{U} \psi \wedge d''\varphi.$$

由于 $\psi \in \mathscr{D}^{0,0}(U)$，对于任意在 U 上具有紧支集的正则 $\varphi = \varphi(x)d'x$，均成立。因此，系数 $\varphi(x) \in$复数域$_0^\infty(U)$ 是区间 $U = (a, b)$ 上的一个具有紧支集的光滑函数。用系数表示，该方程如下：

$$\int_{a}^{b} \omega(x)\varphi(x) = -\int_{a}^{b} \psi(x)\varphi'(x),$$

其中 $\psi(x)\ \omega(x) \in L^2(a, b)$，且 $\varphi(x) \in$复数域$_0^\infty(a, b)$。这正是索伯列夫空间的定义，因此 ω(x) 是 ψ(x) 的弱导数，而函数 ψ(x) 属于索伯列夫空间 $H^1(U)$. □

复数域推论 3.8. 给定一个形式 $\psi \in \mathscr{D}^{p,\ 0}(\Gamma)$以及 Γ 的一个次数为 ≥ 2. 的顶点 v， ψ的系数沿着与 v 相 incident 的边在 v 处具有定义良好的边界值。

证明。设 e 是 Γ 中与 v 相接的边。 设 U 是一个有限开区间，满足$U \subset e$，且U 的闭包包含 v。 根据引理 3.7，限制 $\psi|_U$ 的系数是从索伯列夫空间$H^1(U)$ 到 的一个函数，因此在 U 的边界上有定义良好的迹，特别是在 v

. □

3.5. d″ isa 闭。

P命题 3.9. 算子 d″ 是闭算子。

证明。一个算子是闭的，当且仅当它的图是闭的。设 $\omega_n \in \mathscr{D}_{p'}{}^0(\mathrm{d}'')$ $\omega_n \to \omega$属于 $\mathscr{L}_{p'}{}^0(\Gamma)$ 且 $\mathrm{d}''\omega_n \to \psi$ 属于 $\mathscr{L}_{p'}{}^1(\Gamma)$。则该关系

$$\int_\Gamma d''\omega_n \wedge \varphi = (-1)^{p+1} \int_\Gamma \omega_n \wedge d''\varphi$$

对于任意 $\varphi \in \mathscr{E}^{1-}{}_{p'}{}^0(\Gamma)$ 均成立。

Since $** = (-1)^{p+q}\mathrm{Id}$ 在 (p, q)–形式空间上以及 $(\alpha,\beta) = \int_\Gamma \alpha \wedge *\beta$ 中，我们得到 t

$$\int_\Gamma d''\omega_n \wedge \varphi = (-1)^{p-1} \int_\Gamma d''\omega_n \wedge ** \varphi = (-1)^{p-1}(d''\omega_n, *\varphi),$$

and

$$(-1)^{p+1} \int_\Gamma \omega_n \wedge d''\varphi = -\int_\Gamma \omega_n \wedge ** d''\varphi = -(\omega_n, *d''\varphi).$$

Thus

$$(-1)^p (d''\omega_n, *\varphi) = (\omega_n, *d''\varphi).$$

取 $\mathrm{n} \to \infty$ 时的极限，我们得到

$$(-1)^p (\psi, *\varphi) = (\omega, *d''\varphi).$$

该方程等价于

$$\int_\Gamma \psi \wedge \varphi = (-1)^{p+1} \int_\Gamma \omega \wedge d''\varphi.$$

因此， ψ是 ω.的弱 d″–微分 □

3.6. L^2-上同调与ˇCech 到 de Rham 同构。设 $\mathrm{H}^q(\mathscr{L}_{p\,*}(\Gamma), \mathrm{d}'')$ 为复形的上同调群

$$0 \to \mathscr{D}^{p,0}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma) \to 0,$$

其中 $\mathscr{D}^{p,0}(\Gamma) \subset \mathscr{L}_{p'}{}^0(\Gamma)$ 是算子 d″. 的定义域

定理 3.10. 对于 点 x 的一个足够小的邻域 U， $\in \Gamma$ 存在正合序列:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{R}_\Gamma(U) \xrightarrow{i} \mathscr{D}^{0,0}(U) \xrightarrow{d''} \mathscr{L}^{0,1}(U) \to 0, \\ 0 \to \Lambda^1_\Gamma(U) \xrightarrow{i} \mathscr{D}^{1,0}(U) \xrightarrow{d''} \mathscr{L}^{1,1}(U) \to 0, \end{aligned} \tag{4}$$

其中，i 是子预层的自然包含。

证明。首先，我们将证明以下命题。

L引理 3.11. 设 U 是 Γ 中某点的充分小邻域，则存在一个有界算子

$$T_U : \mathscr{L}^{p,1}_\Gamma(U) \to \mathscr{D}^{p,0}_\Gamma(U)$$

使得 $\mathrm{d}''\mathrm{T}_U = \mathrm{Id}$。

证明。为证明该陈述，我们将考虑几种不同的情形：邻域U可以是 1度顶点的邻域、次数为n 的 ≥ 2 顶点的邻域，或边上的内部点的邻域；p 可以等于 0 或 1。

令 $U \simeq [-\infty, a)$ 是1度顶点的一个邻域。我们将 $-\infty$ 与此顶点等同。在这种情况下，所需的算子 T_U： $\mathscr{L}_{p\Gamma}{}^1(U) \to \mathscr{D}_{p\Gamma}{}^0(U)$ 是在引理 3.5 中构造的。

给定 Γ 中一个次数为 d 的顶点 v， ≥ 2. 考虑 v 的一个邻域 U:

$$U = \bigsqcup_{d\text{-times}} (-a, 0]/\sim,$$

其中，不同区间的 0 点均通过等价关系 $\sim$. 识别。0 的等价类与顶点 v 识别。

给定一个形式 $\omega \in \mathscr{L}^{1,\ 1}(U)$。设 $e_i \simeq (-a\ 0] \subset U, i = 1, \ldots, d$ 是 U 的第 i− 条边，且 $\omega_i = \omega_i(x)d'x \wedge d''x$ 是 ω 在 e_i. 上的限制。定义 $\psi = T_U\omega$，其中 $\psi_i = \psi_i(x)d'x$ 是 ψ 在 e_i 上的限制，如下：

$$\psi_i(x) = \int_x^0 \omega_i(t)dt.$$

这些函数 $\psi_i(x)$ 是良定义的，因为它们可以表示为标量积

$$\psi_i(x) = (\omega, I_{i,x}g),$$

其中 ω、$I_{i,\ x}g \in \mathscr{L}^{1,\ 1}(U)$，而 $I_{i,\ x}$是集合 $[x\ 0] \subset e_i$. 的示性函数

由于 $\psi_i(0) = 0,\ i = 1,\ \ldots\ldots,\ d$，基尔霍夫定律对 ψ. 成立。使用引理 3.5 中的相同论证，我们可以验证 $\psi \in \mathscr{D}^{1,\ 0}(U)$，$d''\psi = \omega$，且 T_U有界。

最后，如果 $\omega \in \mathscr{L}^{0,\ 1}(U)$，且 $\omega_i = \omega_i(x)d''x$ 是 ω 在 e_i. 上的限制。我们定义 $\psi = T_U\omega$，其中$\psi_i = \psi_i(x)$ 是 ψ 在 e_i 上的限制，如下：

$$\psi_i(x) = -\int_x^0 \omega_i(t)dt.$$

由于 $\psi_i(0) = 0$，顶点 v 处满足连续性性质。再次使用上述相同的论证，我们可以验证 $\psi \in \mathscr{D}^{0,\ 0}(U)$、$d''\psi = \omega$ 和 T_U 均有界。

边的内部点邻域的情形等价于二度顶点邻域的情形。□

设 U 是 Γ. 中某点的一个充分小的邻域。d'': $\mathscr{D}p_\Gamma{}^0(U) \to \mathscr{L}p_\Gamma{}^1(U)$ 的核与 $\mathbb{R}_\Gamma(U)$ 或 $\Lambda^1_\Gamma(U)$ 重合。由引理 3.11，映射 d'': $\mathscr{D}^{0,}{}_\Gamma{}^0(U) \to \mathscr{L}^{0,}{}_\Gamma{}^1(U)$ 是满射。因此，序列 (4) 是正合的。□

命题 3.12. 存在一个同构

$$H^{p,q}(\Gamma) \cong H^q(\mathscr{L}^{p,*}(\Gamma), d'').$$

证明。利用正合序列（4），我们可以重复命题2.13的证明。 □

3.7. 弱 d''−可微形式的分部积分。

命题 3.13. 若 $\psi \in \mathscr{D}^{0,0}(\Gamma)$ 和 $\varphi \in \mathscr{D}^{1,0}(\Gamma)$ 是两个弱 d''−可微形式，则分部积分公式成立：

$$\int_\Gamma d''\psi \wedge \varphi = -\int_\Gamma \psi \wedge d''\varphi. \tag{5}$$

证明。首先注意，(5) 中的两个积分都有定义，即均收敛。事实上，考虑积分 $\int_\Gamma d''\psi \wedge \varphi$，利用霍奇星 $**= \pm \mathrm{Id}$ 的性质，我们可以将其改写为 $-\int_\Gamma d''\psi \wedge **\varphi$. 因此，它等于 $-(d''\psi, *\varphi)$。由于 $d''\psi \in \mathscr{L}^{0,\ 1}(\Gamma)$，且在这种情况下，霍奇星是 $\mathscr{L}^{1,0}(\Gamma)$ 与 $\mathscr{L}^{0,}1(\Gamma)$ 之间的同构，因此该标量积有定义，从而该积分也有定义。对第二个积分，我们可以采用同样的论证。

我们选择一个函数 $\rho_0 \in \mathscr{E}^{0,0}(\Gamma)$，使得

(1) 其取值介于 0 和 1 之间；(2) 在每条有限长度的边上，以及每个次数为 ≥ 2 的顶点的某个邻域内，取值均为 1；(3) 在每个次数为 1 的顶点的某个邻域内取值为 0，也就是说，在热带曲线的无穷远尾部的邻域内取值为 0。

记$\rho_1 = 1 - \rho_0$. 这两个函数为 ρ_0、ρ_1，它们给出了一个单位分解，使得其中一个在曲线的有限部分上非零，另一个在无限尾部上非零。

考虑积分

$$\int_\Gamma \psi \wedge d''\varphi = \int_\Gamma \rho_0\psi \wedge d''\varphi + \int_\Gamma \rho_1\psi \wedge d''\varphi.$$

的支撑 ρ_0 是有限长度边与无限长度边的紧部分之并。由引理3.7 可得 ψ 且 φ具有 H^1–系数，在 $\operatorname{supp}\rho_0$. 的一个邻域内。对于 H^1–函数，我们可以应用分部积分；顶点处的边界项因与斯托克斯定理（定理 2.10）相同的原因而消失。

第二个积分 $\int_\Gamma \rho_1\psi\wedge \mathrm{d}''\varphi$ 是对无限长度边的积分之和。假设一条无限长度边e同构于e $\cong[-\infty,0]$，函数 ρ_1 在点0的某个邻域上等于 0，并且在 $-\infty$. 的某个邻域上等于 1。从此刻起，令我们用 $\overline{\psi}$代替 $\rho_1\psi$. 。我们将证明

$$\int_{[-\infty,0]} d''\overline{\psi}\wedge\varphi = -\int_{[-\infty,0]}\overline{\psi}\wedge d''\varphi.$$

那么我们可以取一个 su 对所有无限长度边进行求和，即可证明该命题的结论。 on.

热带积分按定义等于：

$$\int_e \overline{\psi}\wedge d''\varphi = -\int_{-\infty}^0 \overline{\psi}(t)\varphi'(t)dt$$

and

$$\int_e d''\overline{\psi}\wedge\varphi = -\int_{-\infty}^0 \overline{\psi}'(t)\varphi(t)dt.$$

因此，我们必须证明#+#+#+#+

$$\int_{-\infty}^0 \overline{\psi}(t)\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^0 \overline{\psi}'(t)\varphi(t)dt. \tag{6}$$

将等式两边都拆分成积分之和：

$$\int_x^0 \overline{\psi}(t)\varphi'(t)dt + \int_{-\infty}^x \overline{\psi}(t)\varphi'(t)dt = -\int_x^0 \overline{\psi}'(t)\varphi(t)dt - \int_{-\infty}^x \overline{\psi}'(t)\varphi(t)dt,$$

其中 x $\in(-\infty,0]$. 由于我们的初始积分是收敛的，我们有

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^x \overline{\psi}(t)\varphi'(t)dt = 0$$

and

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^x \overline{\psi}'(t)\varphi(t)dt = 0.$$

根据引理 3.7，的限制 (x) $\varphi(x)$到任意区间 $(x,0)\subset[-\infty,0]\cong e, x\in\mathbb{R}$是索伯列夫空间 $H^1(x,0)$中的函数。因此，我们可以在 $(x,0)$上应用分部积分：

$$\int_x^0 \overline{\psi}(t)\varphi'(t)dt = \overline{\psi}(t)\varphi(t)|_x^0 - \int_x^0 \overline{\psi}'(t)\varphi(t)dt.$$

考虑项 $\overline{\psi}(t)\varphi(t)|_x^0 = \overline{\psi}(0)\varphi(0) - \overline{\psi}(x)\varphi(x)$。第一个被加数 $\overline{\psi}(0) = \rho_1(0)\psi(0)$ $= 0$等于零。我们将证明

$$\lim_{x\to-\infty}\overline{\psi}(x)\varphi(x) = 0.$$

考虑形式 $\omega = \mathrm{d}''\varphi$ 和 $\tau = \mathrm{d}''\overline{\psi}$. 在局部坐标中，我们有：

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}(x),\ \varphi = \varphi(x)d'x,\ \omega = \omega(x)d'x\wedge d''x,\ \tau = \tau(x)d''x.$$

假设 U $=[-\infty,0)\subset$ e。该算子

$$T_U : \mathscr{L}_\Gamma^{p,1}(U)\to\mathscr{D}_\Gamma^{p,0}(U)$$

在引理 3.11中定义。它具有以下性质 $d''T_U = \mathrm{Id}$，$T_U d''\varphi = T_U\omega = \varphi$，并且 $T_U d''\overline{\psi} = T_U\tau = \overline{\psi} + c$ 其中 c 是某个常数。根据 T_U 的定义，我们得到：

$$\overline{\psi}(x) + c = T_U\tau = -\int_x^0 \tau(t)dt,$$

and

$$\varphi(x)d'x = T_U\omega = -(\int_{-\infty}^{x}\omega(t)dt)d'x.$$

由于 $\overline{\psi}(0)=\rho_1($ 0)ψ(0) $=0$和 ψ(0) $+c=\int_0^0\tau(t)dt$，常数 c 等于 0，且 $\overline{\psi}=T_U\tau$.

以下估计已针对 T_U 得到证明:

$$|\varphi(x)| \le ||\omega||\sqrt{\int_{-\infty}^{x} g(t)dt},$$

$$|\overline{\psi}(x)| \le ||\tau||\sqrt{|x|}$$

根据 K 的定义¨ahler 度量（定义 2.15）积分 $\int_{-\infty}^{0} t^2 g(t)dt$ 收敛，这等价于

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} t^2 g(t)dt = 0.$$

对于$t \le x < 0$我们有 $x^2g(t) \le t^2g(t)$ 和

$$x^2\int_{-\infty}^{x} g(t)dt \le \int_{-\infty}^{x} t^2 g(t)dt$$

这等价于

$$\int_{-\infty}^{x} g(t)dt \le \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{x} t^2 g(t)dt.$$

最后，结合所有估计可得

$$|\varphi(x)\overline{\psi}(x)| \le ||\omega||\cdot||\tau||\sqrt{|x|}\sqrt{\int_{-\infty}^{x} g(t)dt} \le ||\omega||\cdot||\tau||\frac{1}{\sqrt{|x|}}\int_{-\infty}^{x} t^2 g(t)dt.$$

当 x 趋于 $-\infty$. 时，右端趋于 0 □

3.8. d″ 的伴随算子。考虑伴随算子

$$d''^{*} : \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,0}(\Gamma).$$

根据定义，若对任意 $\varphi \in \mathscr{D}^{0}_{命题}(\Gamma)$ 均成立，则 $d''^{*}\omega = \psi$

$$(d''\varphi, \omega) = (\varphi, \psi).$$

P命题 3.14. 伴随算子

$$d''^{*} : \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,0}(\Gamma)$$

是稠密定义且闭的。它等于

$$d''^{*} = -*d*.$$

特别地， $\psi \in \mathscr{D}(d''^{*})$ 当且仅当

$$*\psi \in \mathscr{D}^{1-p,0}(\Gamma).$$

其伴随算子 d''^{**} 等于 d″.

证明。由无界算子的基本性质可知，闭稠定算子的伴随算子 A^* 是闭稠定算子，其伴随算子 A 等于 A^{**} 等于 A, [1, 定理 3.1 和定理 3。3]。因此我们必须证明 $d''^{*} = -*d*$.

若 $A : H_1 \to H_2$ 是定义域为 $\mathscr{D}(A) \subset H_1$ 的无界算子，则其伴随算子 A^* 是无界算子 $A^* : H_1 \to H_2$，满足对于任意 $x \in \mathscr{D}(A) \subset H_1$，均有此关系成立。

$$(x, A^*y)_{H_1} = (Ax, y)_{H_2},$$

A^* 的定义域是 H_2 中满足该关系的元素所构成的极大子空间，即，

$$\mathscr{D}(A^*) = \{x \in H_2 : \exists z \in H_1, \forall y \in \mathscr{D}(A) : (y,z)_{H_1} = (Ay, x)_{H_2}\}.$$

假设形式 $\psi \in \mathscr{L}_{p'}{}^{1}(\Gamma)$ 属于 d''^{*}, $\psi \in \mathscr{D}(\mathrm{d}''^{*})$ 的定义域，且 $\omega = \mathrm{d}''^{*}\psi$. 那么根据伴随算子的定义，对于任意形式 $\varphi \in \mathscr{D}_{p'}{}^{0}(\Gamma)$，有以下等式成立：

$$(\varphi, \omega) = (d''\varphi, \psi).$$

我们可以将其改写如下：

$$\int_{\Gamma} \varphi \wedge *\omega = \int_{\Gamma} d''\varphi \wedge *\psi.$$

由于 $\mathscr{E}_{p'}{}^{0}(\Gamma)$ 是 $\mathscr{D}^{p,0}(\Gamma)$ 的子空间，因此对于任意正则形式 $\varphi \in \mathscr{E}_{p'}{}^{0}(\Gamma)$，此等式都成立。因此，根据定义，$*\psi$ 是 $\mathrm{d}''-$ 弱可微形式，且其微分等于

$$d'' * \psi = (-1)^{p+1} * \omega.$$

对前一个等式的两部分应用霍奇星算子，我们得到

$$*d'' * \psi = (-1)^{p+1} * *\omega = -\omega.$$

因此

$$d''^{*}\psi = \omega = - * d'' * \psi.$$

此时我们已经证明，如果 $\psi \in \mathscr{D}(d''^{*})$ 那么 $*\psi$ 是 $d''-$弱可微的。让我们证明逆命题：如果 $*\psi$ 是 $d''-$弱可微的，那么 $\psi \in \mathscr{D}(d''^{*})$。 根据命题 3.13，我们可以对两个 $\mathrm{d}''-$弱可微形式的乘积进行分部积分，也就是说，如果形式 $*\psi$ 是 $\mathrm{d}''-$弱可微的，那么对于任意形式 $\varphi \in \mathscr{D}_{p'}{}^{0}(\Gamma)$成立：

$$\int_{\Gamma} d''\varphi \wedge *\psi = (-1)^{p+1} \int_{\Gamma} \varphi \wedge d'' * \psi = \int_{\Gamma} \varphi \wedge *(- * d'' * \psi).$$

该等式可写为

$$(d''\varphi, \psi) = (\varphi, - * d'' * \psi).$$

因此我们证明了， $\mathscr{D}(\mathrm{d}''^{*})$的定义域恰好等于这样一类形式所构成的空间：它们的霍奇星是 $\mathrm{d}''-$弱可微的。 □

3.9. Laplace-Beltrami 算子与调和热带超形式。我们如下定义 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta = d''d''^{*} + d''^{*}d'' : \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma).$$

它的定义域等于

$$\mathscr{D}(\Delta) = \{\omega \in \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma) : \omega \in \mathscr{D}(d''^{*}), \omega \in \mathscr{D}(d''), (d''\omega) \in \mathscr{D}(d''^{*}), (d''^{*}\omega) \in \mathscr{D}(d'')\}.$$

由于维数原因， Δ 中的一个被加数恒等于零，因此 Δ 要么等于 $\Delta = \mathrm{d}''\mathrm{d}''^{*}$，要么等于 $\Delta = \mathrm{d}''^{*}\mathrm{d}''$.

P命题3.15.ω 是 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$的一个元素，当且仅当 $\Delta\omega = 0\, \mathrm{d}''\omega = 0$ 且$\mathrm{d}''^{*}\omega = 0$.

证明。假设 $\Delta\omega = 0$. 若 $\omega \in \mathscr{D}(\Delta)$，那么 $\omega \in \mathscr{D}(d''^{*}) \cap \mathscr{D}(d'')$。 由命题 3.14 可得 $d''^{**} = d''$.根据伴随算子的定义，我们得到

$$0 = (\Delta\omega, \omega) = (d''d''^{*} + d''^{*}d''\omega, \omega) = (d''^{*}\omega, d''^{*}\omega) + (d''\omega, d''^{**}\omega) = (d''^{*}\omega, d''^{*}\omega) + (d''\omega, d''\omega).$$

因此 $||\mathrm{d}''^{*}\omega|| = 0, ||\mathrm{d}''\omega|| = 0$， 且 $\mathrm{d}''^{*}\omega = \mathrm{d}''\omega = 0$.。反向结论可直接由 Laplace-Beltrami 算子的定义得出。 □

定义 3.16。令 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的核记为： $\mathscr{L}^{p,\,q}(\Gamma) \to \mathscr{L}_{p'q}(\Gamma)$，记作$\mathscr{H}_{p'q}(\Gamma)$。我们称这个空间 $\mathscr{H}_{p'q}(\Gamma)$ 为 Γ. 上次数为 (p, q) 的调和热带超形式空间

根据命题3.15 ，任意调和超形式都是闭的，因此存在映射 $\mathrm{i} : \mathscr{H}_{p'q}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{p,q}(\Gamma)$，它将任意调和形式映射到其在上同调群中的等价类。

命题 3.17. 映射 $\mathrm{i} : \mathscr{H}^{p,q}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{p,q}(\Gamma)$ 是一个同构。

证明。设 ω 是 $\mathscr{D}^{p,0}(\Gamma)$ 的一个元素。根据命题 3.15，$\mathrm{d}''\omega = 0$ 当且仅当 $\Delta\omega = 0$. 因此，$\mathrm{H}_{p'}{}^{0}(\Gamma) = \ker\mathrm{d}'' = \mathscr{H}_{p'}{}^{0}(\Gamma)$。

引理3.18。值域 im d″ 的 d″ 是闭的。

证明。令 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_i$为 Γ.的一个覆盖。记作$U_{ij}=U_i\cap U_j$.由于 Γ 是紧的，我们可以选择 $\mathfrak{U}$ 使得：

(1) $\mathfrak{U}$ 是有限覆盖；(2) 截面的序列 (4) 在任意 U_i和U_ij $=U_i\cap U$ j 上都是正合的；

(3) 存在有界算子 T_U如引理 3.11中所述，对任意U_i和 U_ij $=U_i\cap U$ j.

令复数域$_i(\mathscr{S})$为预层 $\mathscr{S}$ 和覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 ˇCech 复形，其微分为 δ.。特别是，

$$C_0(\mathscr{S})=\bigoplus_i \mathscr{S}(U_i),\ C_1=\bigoplus_{i<j}\mathscr{S}(U_{ij}),$$

以及 δ： 复数域$_0(\mathscr{S})$ →复数域$_1(\mathscr{S})$。

由于 $C_i(\mathscr{L}^{p,q})$ 是 $\mathscr{L}^{p,q}(U)$ 的直和，因此它具有由各被加数诱导的希尔伯特空间结构。于是 δ 是一个连续线性算子。核 $\ker\delta: C_0(\mathscr{L}^{p,q})\to C_1(\mathscr{L}^{p,q})$ 与 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 重合。实际上，这个核上的范数与 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 上的范数并不相同，但这两个范数等价。由于 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 是一个有界算子的核，因此它是 $C_0(\mathscr{L}^{p,q})$ 的闭子空间。我们将把 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 视为 $C_0(\mathscr{L}^{p,q})$ 的子空间。

有界算子 T_U: $\mathscr{L}^{p,1}(U)\to\mathscr{L}^{p,0}(U)$ 已在引理 3.11 中定义。令 T : 复数域$_0(\mathscr{L}^{p,1})$ →复数域$_0(\mathscr{L}^{p,0})$ 为 T_{U_i}· 的直和。算子 δT : $\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)$ → 复数域$_1(\mathscr{L}^{p,0})$ 的复合是一个连续线性算子。结合 d″T φ = φ、算子 δ 与 d″ 可交换，以及 $\ker\delta=\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 这些事实，对于任意 $\omega\in\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)$，我们得到

$$d''\delta T\omega=\delta d''T\omega=\delta\omega=0.$$

因此， δT 是从 $\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)$ 到.....的核的有界算子

$$d'':C_1(\mathscr{L}^{p,0})\to C_1(\mathscr{L}^{p,1}),$$

它等于复数域$_1(\mathbb{R}_\Gamma)$ 或复数域$_1(\Lambda^1_\Gamma)$ 中的一个。空间复数域$_1(\mathbb{R}_\Gamma)$ 和 复数域$_1(\Lambda^1_\Gamma)$ 都是有限维的。存在商映射

$$\varepsilon: C_1(\mathbb{R}_\Gamma)\to H^1(\Gamma,\mathbb{R}_\Gamma)=C_1(\mathbb{R}_\Gamma)/\delta C_0(\mathbb{R}_\Gamma)$$

and

$$\varepsilon: C_1(\Lambda^1_\Gamma)\to H^1(\Gamma,\Lambda^1_\Gamma)=C_1(\Lambda^1_\Gamma)/\delta C_0(\Lambda^1_\Gamma).$$

这些映射是连续的，因为它们是有限维向量空间之间的线性映射。

εδT 的核与 $\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)$ 中 im d″ 相同。事实上，假设 $\omega\in\mathscr{L}^{0,1}(\Gamma)$ 且 $\varepsilon\delta T\omega=0$，则存在一个上链 $\psi\in C_0(\mathbb{R}_\Gamma)$，使得 δT ω = δψ.由于 δ(T ω − ψ) = 0，我们得到 T ω − ψ ∈ $\mathscr{L}^{0,0}(\Gamma)$ 且 d″(Tω − ψ) = ω.对于 $\omega\in\mathscr{L}^{1,1}(\Gamma)$ 的情形，同样的论证也成立。由于 εδT 连续，核是闭的，因此 im d″ 也是闭的。□

由于 im d″ 是闭的，因此有如下分解

$$\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)=\text{im }d''\oplus(\text{im }d'')^\perp.$$

因此

$$H^1(\mathscr{L}^{p,*}(\Gamma),d'')=\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)/\text{im }d''\cong(\text{im }d'')^\perp$$

闭稠定算子的核与其伴随算子值域的正交补相同。因此，由命题 3.14 可得 (im d″)$^\perp$ = ker d″*. 根据命题 3.15，元素 $\omega\in\mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)$ 是调和的，当且仅当 d″*ω = 0，因此 $\mathscr{H}^{p,1}(\Gamma)$ =ker d″*，且 i : $\mathscr{H}^{p,1}(\Gamma)$ → H^1($\mathscr{L}^{p,*}(\Gamma)$, d″) 是一个同构。□

T定理 3.19。Laplace-Beltrami 算子是自伴算子。

命题。由于维数上的原因，算子 Δ 等于 $\Delta=d''d''^*$ 或 $\Delta=d''^*d''$. 根据冯·诺依曼定理，对于任意闭稠密定义的算子A，算子 A^*A 是一个自伴算子 [1, 定理 7。3]。因此，由命题3.14 可知，$d''d''^*$ 和 d''^*d'' 都是自伴算子。□

注 3.20。下面用局部坐标描述算子 Δ。设 x 是 Γ 的一条边上的局部坐标，K¨ahler 形式 g 在局部由方程 $g = g(x)d'x \wedge d''x$ 给出。通过直接计算可得

$$\Delta(f(x)) = -\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2},$$

$$\Delta(f(x)d'x) = -\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g^2(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial g(x)}{\partial x}d'x,$$

$$\Delta(f(x)d''x) = -\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g^2(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial g(x)}{\partial x}d''x,$$

$$\Delta(f(x)d'x\wedge d''x) = -\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{2}{g^2(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial g(x)}{\partial x} + \frac{2}{g^2(x)}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}f(x) - \frac{2}{g^3(x)}(\frac{\partial g(x)}{\partial x})^2 f(x)d'x\wedge d''x.$$

P命题 3.21. 霍奇星算子与 Laplace-Beltrami 算子可交换，即 $*\Delta = \Delta*$和 $\varphi \in \mathscr{D}(\Delta\colon \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma))$ 当且仅当 $*\varphi \in \mathscr{D}(\Delta\colon \mathscr{L}^{1-p,1-q}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{1-p,1-q}(\Gamma))$。

证明。首先，让我们检查 $\varphi \in \mathscr{D}(\Delta\colon \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,q}(\Gamma))$ 当且仅当 $*\varphi \in \mathscr{D}(\Delta\colon \mathscr{L}^{1-p,1-q}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{1-p,1-q}(\Gamma))$。

Δ 的定义域等于其中之一

$$\mathscr{D}(\Delta : \mathscr{L}^{p,0}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,0}(\Gamma)) = \{\omega : \omega \in \mathscr{D}(d''), d''\omega \in \mathscr{D}(d''^*)\},$$

or

$$\mathscr{D}(\Delta : \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma) \to \mathscr{L}^{p,1}(\Gamma)) = \{\omega : \omega \in \mathscr{D}(d''^*), d''^*\omega \in \mathscr{D}(d'')\}.$$

由命题 3.14 $\omega \in \mathscr{D}(d'')$ 当且仅当 $*\omega \in \mathscr{D}(d''^*)$，以及 $d''^* = -*d''*$. 因此，$d''\omega \in \mathscr{D}(d''^*)$ 当且仅当 $*d''\omega \in \mathscr{D}(d'')$。利用等式

$$*d'' = \pm * d'' * * = \pm d''^* *$$

根据前一条陈述，我们得到 $d''\omega \in \mathscr{D}(d''^*)$ 当且仅当 $d''^* * \omega \in \mathscr{D}(d'')$。因此，$\omega \in \mathscr{D}(d'')$ 且 $d''\omega \in \mathscr{D}(d''^*)$ 当且仅当 $*\omega \in \mathscr{D}(d''^*)$ 且 $d''^* * \omega \in \mathscr{D}(d'')$，这等价于

$$\omega \in \mathscr{D}(\Delta) \Longleftrightarrow *\omega \in \mathscr{D}(\Delta).$$

现在，让我们检查可交换性 $*\Delta = \Delta *$.。等式 $*\Delta = \Delta*$ 可以写成

$$*\Delta = - * d'' * d'' * - * * d'' * d'' = -d'' * d'' * * - *d'' * d'' * = \Delta *.$$

由于 $** = (-1)^{p+q}\mathrm{Id}$，作为作用在 $\mathscr{L}^{p,q}(\Gamma)$ 上的算子，我们得到

$$- * d'' * d'' * + (-1)^{p+q+1} d'' * d'' = (-1)^{p+q+1} d'' * d'' - *d'' * d'' * .$$

因此等式 $*\Delta = \Delta*$ 成立。 □

3.10. 主要结果与最后的评论。本文的主要结果如下

定理3.22.设 Γ 为亏格为n 的热带曲线。霍奇星算子将调和超形式映射为调和超形式，并且映射 $*\colon \mathscr{H}^{p,q}(\Gamma) \to \mathscr{H}^{1-p,1-q}(\Gamma)$ 是同构，因此，$H^{p,q}(\Gamma) \simeq H^{1-p,1-q}(\Gamma)$。特别地，

$$H^{1,1}(\Gamma) \simeq H^{0,0}(\Gamma) \simeq H^0(\Gamma, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

and

$$H^{1,0}(\Gamma) \simeq H^{0,1}(\Gamma) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n.$$

证明。根据命题 3.21，如果 ω 是 $\mathscr{H}^{p,q}(\Gamma)$ 的一个元素，那么 $*\omega$ 也是一个调和形式，$*\omega \in \mathscr{H}^{1-p,1-q}(\Gamma)$。由于 $** = \pm \mathrm{Id}$，我们得到 $*$ 是 $\mathscr{H}^{p,q}(\Gamma)$ 与 $\mathscr{H}^{1-p,1-q}(\Gamma)$ 之间的同构。因此，根据命题 3.17，我们得到 $H^{p,q}(\Gamma) \simeq H^{1-p,1-q}(\Gamma)$。根据定义，$H^{0,q}(\Gamma)$ 是局部常值函数层的上同调群，因此 $H^{0,q}(\Gamma)$ 与通常的拓扑上同调群 $H^q(\Gamma, \mathbb{R})$. □同构。

空间 $H^{0,0}(\Gamma)$ 由一个常值函数生成。由于常值函数的霍奇星与 K¨ahler 形式 g 成比例，g 的类是 $H^{1,1}(\Gamma)$ 的一个生成元。空间 $\mathscr{H}^{1,\ 0}(\Gamma)$ 是由边上系数为常数且满足基尔霍夫定律和无穷远处正则性条件的微分形式构成的空间。由于 $*d'x = d''x$，群 $\mathscr{H}^{0,\ 1}(\Gamma) \cong H^{0,1}(\Gamma)$ 由本质上相同的微分形式生成，只不过这里将它们视为 (0,1)–形式。

R评注 3.23. 定理 3.22 是紧黎曼曲面上的霍奇理论的一个热带类比。我们使用霍奇理论的方法证明了这个定理，但也可以使用相当简单的组合方法证明存在同构 $H^{p,q}(\Gamma) \simeq H^{1-p,1-q}(\Gamma)$。因此，就这一结果而言，我们的论文过于复杂了。可以将本文视为关于高维热带簇上的霍奇理论的一份概念验证。

注释 3.24。现在我们想讨论本文与量子图的关系。

量子图的研究主要致力于研究度量图上的薛定谔方程。这类研究通常基于对定态的研究，即拉普拉斯算子的特征函数。为了使拉普拉斯算子成为自伴算子，需要在图的顶点处施加一些边界条件。此类边界条件有多种，其中一些与我们的边界条件相似。

我们的方法与标准量子图理论有所不同。通常只考虑函数，而我们还考虑微分形式和张量场。我们利用调和形式作为计算某些上同调群的工具，而 Laplace-Beltrami 算子则由链复形导出。通常，量子图与上同调群和链复形的研究无关。在量子图的框架下，人们研究拉普拉斯算子的整个谱，但我们只研究调和函数和调和形式，即零特征向量。

在我们的情形中，Γ 上有一个黎曼度量 g，我们将其视为 K¨ahler 形式的类比。这个度量与 Γ 上的度量结构无关，也就是说，与边的长度无关；但如果我们取平凡的 g

$$g = d'x \wedge d''x \simeq dx \otimes dx,$$

那么边 e 的长度 l(e)，也就是函数 l(e)，是度量图 Γ 的初始数据的一部分，并且与黎曼度量 g 下的长度一致。在这种情形下，我们的理论实际上与标准量子图理论完全相同，至少在我们只研究函数时是如此。

此外，在我们的情形中，我们要求所有无限长度边相对于黎曼度量 g 都具有有限长度；否则，调和形式的行为会有所不同。例如，常函数在 Γ 上是调和的，但如果存在一条无限长度边，且 g 是平凡度量，那么非零常函数不属于 L^2，因为它的范数是无限的。因此，如果存在无限长度边，那么平凡黎曼度量就不适用于我们的目的。

注 3.25. 研究 Laplace-Beltrami 算子的谱性质（如特征值的渐近行为、Weyl 定律等），并将其与复曲线和量子图的谱性质进行比较，会很有意思。

参考文献

[1] Y.M. Berezansky、Z.G. Sheftel、G.F. Us，《泛函分析》，第 II 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1996。xvi+293 页。[2] Gregory Berkolaiko、Peter Kuchment；《量子图导论》。数学调查与专著，第 186 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013。xiv+270 页。[3]Jean-Pierre Demailly，《复分析与微分几何》，草稿版本见 https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf[4] Phillip Griffiths、Joseph Harris；《代数几何原理》。纯数学与应用数学。Wiley-Interscience，纽约，1978。xii+813 页。[5]Walter Gubler、Philipp Jell、Joseph Rabinoff，《图与Berkovich曲线的Dolbeault上同调》，2021，预印本 arXiv:2111.05747。[6] Ilia Itenberg、Ludmil Katzarkov、Grigory Mikhalkin、Ilia Zharkov；《热带同调》。《数学年鉴》374（2019），第 1-2 期，963–1006。[7] Philipp Jell、Kristin Shaw、Jascha Smacka；《超形式、热带上同调与庞加莱对偶》。Adv. Geom. 19（2019），第 1 期，101–130。[8] Aron Lagerberg；《超流与热带几何》。《数学杂志》270（2012），第 3-4 期，1011-1050。

[9] Lionel Lang, 《调和热带态射与逼近》。《数学年鉴》377（2020），第 1-2 期，379–419。[10] Nicolae Teleman；《组合霍奇理论与符号算子》。《数学发明》61（1980），第 3 期，227–249。《图与Berkovich曲线的Dolbeault上同调》Walter Gubler、Philipp Jell、Joseph Rabinoff, 《图与Berkovich曲线的Dolbeault上同调》，2021，预印本 arXiv:2111.05747。

尤.V. 伊利亚舍夫，国家研究型大学高等经济学院，圣彼得堡，俄罗斯 电子邮件地址： eliyashev@gmail.com