arXiv:2304.04251v1 [math.RA] 9 Apr 2023

低维实三代数的分类、导子与中心

AhmedZahari*上阿尔萨斯大´学，IRIMAS-D´数学系，18号卢米´埃尔兄`弟街，F-68093米卢斯，法国。Bouzid Mosbahi`斯法克斯大学，斯法克斯理学院，邮政信箱1171，3000 斯法克斯，突尼斯。
ImedBasdouri†加夫萨大学，加夫萨理学院，2112 加夫萨，突尼斯。

摘要。本文研究结合三代数的结构和代数簇。我们给出了$n \leq 4$维结合三代数的分类。利用结合三代数的分类结果，我们描述了低维结合三代数的导子和质心。我们结合结合三代数回顾了质心的一些性质，并计算了低维结合三代数的质心。

AMS 学科分类：17A30、17A32、16D20、16W25、17B63。
关键词：结合三代数、分类、导子、中心导子、中心、Rota-Baxter 三代数。

1 引言

一个结合三代数（或三结合代数）$(\mathcal{T}, \dashv, \vdash, \perp)$由一个向量空间和三个乘法组成。它可以被视为结合代数的变形。结合三代数退化为恰好一个结合三代数。在本文中，我们旨在研究结合三代数的结构。设 $\mathcal{T}$ 是一个 n 维 $\mathbb{K}$-线性空间，且 $\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$是 $\mathcal{T}$ 的一个基。$\mathcal{T}$ 上具有乘积 γ、δ和 ϕ 的三结合结构由$3n^3$ 个结构常数γ_i^kj、δ_i^kj和 ϕ_i^kj 确定，其中 $e_i \dashv ej = P_{k=1}^n \gamma_{ij}^k e_k$、$e_i \vdash e\, j = P_{k=1}^n \delta_{ij}^k e_k$以及$e_i \perp ej = P_{k=1}^n \phi_i^k je_k$。要求代数结构为三结合且含幺，会得到 $\mathcal{T}_t$ 的子簇 $\mathbb{K}^{3n^3}$。$\mathcal{T}$ 中的基本变换导致 $GL_n(k)$在 $\mathcal{T}_t$ 上的自然结构输运作用。因此，n 维代数的同构类与 $GL_n(k)$ 在 $\mathcal{T}_t$ 上的作用轨道之间存在一一对应关系。

*电子邮件地址：zaharymaths@gmail.com
†电子邮件地址：mosbahibouzid@yahoo.fr
‡电子邮件地址：basdourimed@yahoo.fr

使用代数和几何技术对结合三代数进行分类的问题，引发了人们对结合三代数的导子和中心的研究。Loday [3] 提出结合三代数，旨在为二代数提供对偶对象，并且结合三代数与数学和物理学多个领域的联系也得到了进一步研究。

在本文中，我们旨在研究有限维结合三代数的导子和质心。导子代数和质心对于代数的代数与几何分类问题非常有用。

本文的内容按章节可概述如下。在第一节中，我们介绍这一主题以及一些先前取得的结果。本文旨在介绍并分类结合三代数的导子和中心。本文组织如下。第二节给出本研究所需的一些基本概念。第三节讨论结合三代数的代数簇，并给出二维、三维和四维结合三代数在同构意义下的分类。第四节给出导子的分类。最后，在第五节中，我们给出质心的分类。在这种情况下，导子和质心的概念很容易从有限维代数的相应概念推广而来。质心代数在分类问题以及代数的各种应用中发挥着重要作用。在研究中，我们使用了二维、三维和四维结合三代数的分类结果。所考虑的所有代数和向量空间都假定定义在特征零的域 $\mathbb{K}$ 上。

2 预备知识

定义2.1. 结合二代数是一个向量空间 $\mathcal{D}$，配备两个二元运算：$\dashv$称为左运算，$\vdash$ 称为右运算，

(左运算) $\dashv\colon \mathcal{D}\times\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ 和 (右运算) $\vdash\colon \mathcal{D}\times\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ 满足这些关系

$$
\begin{aligned}
(x\dashv y)\dashv z &= x\dashv(y\dashv z), && (2.1)\\
(x\dashv y)\dashv z &= x\dashv(y\vdash z), && (2.2)\\
(x\vdash y)\dashv z &= x\vdash(y\dashv z), && (2.3)\\
(x\dashv y)\vdash z &= x\vdash(y\vdash z), && (2.4)\\
(x\vdash y)\vdash z &= x\vdash(y\vdash z). && (2.5)
\end{aligned}
$$

定义2.2.结合三代数是一个k-向量空间（$\mathcal{T}$，$\perp$，$\dashv$，$\vdash$），满足（$\mathcal{T}$，$\dashv$，$\vdash$）是一个结合二代数，（$\mathcal{T}$，$\perp$）是一个结合代数，并且，

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \tag{2.6}$$
$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{2.7}$$
$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{2.8}$$
$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{2.9}$$
$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{2.10}$$
$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{2.11}$$
$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{2.12}$$
$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{2.13}$$
$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{2.14}$$
$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{2.15}$$
$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z). \tag{2.16}$$

定义 2.3. 设 $(\mathcal{T}_1, \perp_1, \dashv_1, \vdash_1)$、$(\mathcal{T}_2, \perp_2, \dashv_2, \vdash_2)$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的结合三代数。则从 $\mathcal{T}_1$ 到 $\mathcal{T}_2$ 的同态是一个 $\mathbb{K}$-线性映射 ψ: $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$，满足

$$\psi(\dashv_1 y) = \psi(x) \dashv_2 \psi(y) \tag{2.17}$$
$$\psi(\vdash_1 y) = \psi(x) \vdash_2 \psi(y) \tag{2.18}$$
$$\psi(\perp_1 y) = \psi(x) \perp_2 \psi(y) \tag{2.19}$$

对所有 x、y $\in \mathcal{T}_1$。

注 2.4. 双射同态是 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的同构。

命题 2.5. 设 $(\mathcal{T}, \dashv, \perp, \vdash)$ 是一个结合三代数。那么关于乘法 $*$： $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$， $\mathcal{T}$ 是一个结合代数：

$$x * y = x \dashv y + x \vdash y - x \perp y$$

对于任意 x、y $\in \mathcal{T}$。

证明。利用结合三代数的公理，对于 x,y 有 $\in \mathcal{T}$

$(x*y)*z = (x \dashv y + x \vdash y - x \perp y) * z = (x \dashv y + x \vdash y - x \perp y) \dashv z + (x \dashv y + x \vdash y - x \perp y) \vdash z - (x \dashv y + x \vdash y - x \perp y) \perp z = (x \dashv y) \dashv z + (x \vdash y) \dashv z - (x \perp y) \dashv z + (x \dashv y) \vdash z + (x \vdash y) \vdash z - (x \perp y) \vdash z - (x \dashv y) \perp z - (x \vdash y) \perp z + (x \perp y) \perp z = x \dashv (y \vdash z) + x \vdash (y \dashv z) - x \perp (y \dashv z) + x \vdash (y \vdash z) + x \vdash (y \vdash z) - x \vdash (y \vdash z) - x \perp (y \vdash z) - x \vdash (y \perp z) + x \perp (y \perp z) = x \dashv (y * z - y \dashv z + y \perp z) + x \vdash (y \dashv z) - x \perp (y \dashv z) + x \vdash (y \vdash z) - x \perp (y \vdash z) - x \vdash (y \perp z) + x \perp (y \perp z) = x \dashv (y * z) - x \dashv (y \dashv z) + x \dashv (y \perp z) + x \vdash (y \dashv z) - x \perp (y \dashv z) + x \vdash (y \vdash z) - x \perp (y \vdash z) - x \vdash (y \perp z) + x \perp (y \perp z) = x \vdash (y \dashv z + y \vdash z - y \perp z) - x \perp (y \dashv z + y \vdash z - y \perp z) + x \dashv (y * z) = x \dashv (y * z) + x \vdash (y * z) - x \perp (y * z) = x * (y * z).$

□

定义 2.6。设 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathbb{K}$-代数，且 $\lambda \in \mathbb{K}$。如果一个 $\mathbb{K}$-线性映射 R: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 满足 Rota-Baxter关系：

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy)$$

$\forall$x, y $\in \mathcal{A}$，则称 R 为权为 λ 的 Rota-Baxter算子，并称 $(\mathcal{A}$,R) 为权为 λ 的 Rota-Baxter代数。

注 2.7. 若 R 是三代数 $(\mathcal{T}, \dashv, \perp, \vdash)$ 上权为 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的 Rota-Baxter算子，则它也是结合代数 $(\mathcal{T}, *)$ 上权为 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的 Rota-Baxter算子。

命题 2.8. 设 $(\mathcal{T}, \dashv, \perp, \vdash)$ 是权为 0 的 Rota-Baxter 三代数。那么 $(\mathcal{T}, \star)$ 是一个左对称代数，其中

$$x \star y = R(x) * y - y * R(x) \qquad and \qquad x * y = x \dashv y + x \vdash y - x \perp y$$

对所有 x、y $\in \mathcal{T}$。

证明。对于 x,y $\in \mathcal{T}$，我们有

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= (R(x) * y - y * R(x)) \star z \\ &= R(R(x) * y - y * R(x)) * z - z * R(R(x) * y - y * R(x)) \\ &= R(R(x) * y) * z - R(y * R(x)) * z - z * R(R(x) * y) + z * R(y * R(x))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}x \star (y \star z) &= x \star (R(y) * z - z * R(y)) \\ &= R(x) * (R(y) * z - z * R(y)) - (R(y) * z - z * R(y)) * R(x) \\ &= R(x) * (R(y) * z) - R(x) * (z * R(y)) - (R(y) * z) * R(x) + (z * R(y)) * R(x)\end{aligned} .$$

Then

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z - x \star (y \star z) &- (y \star x) \star z + y \star (x \star z) \\ &= R(R(x) * y) * z - R(y * R(x)) * z - z * R(R(x) * y) + z * R(y * R(x)) \\ &- R(x) * (R(y) * z) + R(x) * (z * R(y)) + (R(y) * z) * R(x) - (z * R(y)) * R(x) \\ &- R(R(y) * x) * z + R(x * R(y)) * z + z * R(R(y) * x) - z * R(x * R(y)) \\ &+ R(y) * (R(x) * z) - R(y) * (z * R(x)) - (R(x) * z) * R(y) + (z * R(x)) * R(y).\end{aligned} .$$

利用 x $*$ y $=$ x $\dashv$ y $+$ x $\vdash$ y $-$ x$\perp$y 和 Rota-Baxter 恒等式。然后结合律导出 (x $\star$ y) $\star$ z $-$ x $\star$ (y $\star$ z) $-$ (y $\star$ x) $\star$ z $+$ y $\star$ (x $\star$ z) $= 0$。因此我们得到 (x, y, z) $=$ (y, x, z)。 □

命题 2.9。设(A, $\dashv, \perp, \vdash$,R) 是一个权为 -1 的 Rota-Baxter 三代数。则 (A, $\star$) 是一个结合代数，具有

$$x \star y = R(x) * y - y * R(x) - x * y \qquad and \qquad x * y = x \dashv y + x \vdash y - x \perp y.$$

证明。对于 x,y $\in \mathcal{T}$ 我们有

$$\begin{aligned}x \star (y \star z) &= R(x) * (R(y) * z - z * R(y) - y * z) \\ &- (R(y) * z - z * R(y) - y * z) * R(x) - x * (R(y) * z - z * R(y) - y * z)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= R(R(x) * y - y * R(x) - x * y) * z \\ &- z * R(R(x) * y - y * R(x) - x * y) - (R(x) * y - y * R(x) - x * y) * z\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}x \star (y \star z) - (x \star y) \star z &= R(x) * (R(y) * z - z * R(y) - y * z) - (R(y) * z - z * R(y) - y * z) * R(x) \\ &- x * (R(y) * z - z * R(y) - y * z) - R(R(x) * y + y * R(x) + x * y) * z \\ &+ z * R(R(x) * y + y * R(x) + x * y) + (R(x) * y + y * R(x) + x * y) * z\end{aligned}$$

然后利用 x $*$ y $=$ x $\dashv$ y $+$ x $\vdash$ y $-$ x$\perp$y 以及 Rota-Baxter 恒等式，它消失了。 □

3 低维结合三代数的分类

代数的分类问题是现代代数中的重要问题之一。

本节回顾一些关于三结合代数的基本事实，后文将用到这些事实。设 V 是一个 n 维向量空间，$\{e_1,e2,\cdots,e_n\}$是 V 的一组基。那么，V 上的三结合结构可以定义为三个双线性映射：

$$\lambda : V\times V \longrightarrow V$$

表示左乘积 $\dashv$,

$$\mu : V\times V \longrightarrow V$$

表示右乘积 $\vdash$，以及

$$\xi : V\times V \longrightarrow V$$

表示中间乘积 $\perp$，并满足三结合代数公理。因此，一个 n 维三结合代数 $\mathcal{T}$可视为三元组 $\mathcal{T}$ =(V, λ, μ,ξ)，其中 λ、μ 和 ξ是 V 上的结合律。我们将 V 上三结合代数结合律的集合记作 Trias。

设 γ_{ij}^k、δ_{rs}^t 和 ϕ_{pl}^m 表示三结合代数相对于 V 的基 $\{e_1,e2,\cdots,e_n\}$ 的结构常数，其中 i、j、k、r、s、t、p、l、m 满足

$$e_i \dashv e_j = \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^k e_k, \quad e_r \vdash e_s = \sum_{t=1}^{n}\delta_{rs}^t e_t, \quad \text{and} \quad e_p \perp e_l = \sum_{m=1}^{n}\phi_{pl}^m e_m, \quad for \quad i,j,k,q,r,s,t,p,l \in \{1,n\}.$$

那么，Trias 可视为由以下关于结构常数 γ_{ij}^k、δ_{rs}^t 和 ϕ_{pl}^m 的多项式方程组确定的 $3n^3$ 维仿射空间中的闭子集：

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{n}(\gamma_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\gamma_{jk}^p\gamma_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\gamma_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\delta_{jk}^p\gamma_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\delta_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\gamma_{jk}^p\delta_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\gamma_{ij}^p\delta_{pk}^q-\delta_{jk}^p\delta_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\delta_{ij}^p\delta_{pk}^q-\delta_{jk}^p\delta_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\gamma_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\phi_{jk}^p\gamma_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\} \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{p=1}^{n}(\phi_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\gamma_{jk}^p\phi_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\gamma_{ij}^p\phi_{pk}^q-\delta_{jk}^p\phi_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\delta_{ij}^p\phi_{pk}^q-\phi_{jk}^p\delta_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\phi_{ij}^p\delta_{pk}^q-\delta_{jk}^p\delta_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \sum_{p=1}^{n}(\phi_{ij}^p\phi_{pk}^q-\phi_{jk}^p\phi_{ip}^q)=0, & i,j,q\in\{1,n\}. \end{cases}$$

因此，Trias 可视为 $3n^3$ 维仿射空间中的一个子簇。线性矩阵群 GL_n 通过改变基作用于 Trias。

引理3.1. 定义2.1中的公理分别等价于

$$\begin{cases} \gamma_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\gamma_{jk}^p\gamma_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \gamma_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\delta_{jk}^p\gamma_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \delta_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\gamma_{jk}^p\delta_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \gamma_{ij}^p\delta_{pk}^q-\delta_{jk}^p\delta_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \delta_{ij}^p\delta_{pk}^q-\delta_{jk}^p\delta_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \gamma_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\phi_{jk}^p\gamma_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\} \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_{ij}^p\gamma_{pk}^q-\gamma_{jk}^p\phi_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \gamma_{ij}^p\phi_{pk}^q-\delta_{jk}^p\phi_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \delta_{ij}^p\phi_{pk}^q-\phi_{jk}^p\delta_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \phi_{ij}^p\delta_{pk}^q-\delta_{jk}^p\delta_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}\\ \phi_{ij}^p\phi_{pk}^q-\phi_{jk}^p\phi_{ip}^q=0, & i,j,q\in\{1,n\}. \end{cases}$$

注意，$T rias_n^m$表示 n 维结合三代数的 m^{th} 同构类。

定理 3.2. 任意二维实结合三代数要么是结合的，要么同构于以下两两不同构的三结合代数之一：

Trias_2^1:$e_1 \dashv e_2 = ae_1, e_2 \dashv e_2 = ae_2, e_2 \vdash e_1 = ae_1, e_2 \vdash e_2 = ae_2,$
$e_1 \perp e_1 = be_1, e_1 \perp e_2 = be_1 + ae_2$,$\mathrm{Trias}_2^2$:$e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 =$
$e_2, e_1 \vdash e_1 = e_1, e_1 \vdash e_2 = e_2, e_1 \perp e_2 = e_1 + ae_2, e_2 \perp e_2 = e_2.$
Trias_2^3:$e_2 \dashv e_2 = e_2, e_2 \vdash e_1 = e_1, e_2 \vdash e_2 = e_2, e_2 \perp e_1 = e_1, e_2 \perp$
$e_2 = e_2$.Trias_2^4:$e_1 \dashv e_2 = e_1, e_2 \dashv e_2 = e_2, e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_2, e_2 \perp e$
$_2 = e_1 + e_2$.Trias_2^5:$e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \vdash e_1 = e_1, e_2 \vdash e_2 = e_2, e_1 \perp$
$e_1 = e_1, e_1 \perp e_2 = e_2$.$\mathrm{Trias}_2^6$:$e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 =$
$e_1, e_1 \perp e_1 = e_1$. Trias_2^7: $e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = e_1,$
$e_1 \vdash e_2 = e_2, e_1 \perp e_1 = e_1, e_1 \perp e_2 = e_2$. Trias_2^8:$e_1 \dashv e_1 = ae_1, e_2 \dashv$
$e_1 = ae_2, e_1 \vdash e_1 = ae_1, e_1 \vdash e_2 = ae_2, e_1 \perp e_1 = ae_1 + be_2$.

证明。设 $\mathcal{T}$ 是一个二维向量空间。为了确定 $\mathcal{T}$ 上的结合三代数结构，我们考虑关于一个结合三代数运算的 $\mathcal{T}$。令 $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \dashv)$ 为代数

$$e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 = e_2$$

我们定义 $\mathcal{T}$ 中的乘法运算 $\vdash, \perp$ 如下:

$$\begin{array}{lll} e_1 \vdash e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, & e_2 \vdash e_2 = \alpha_7 e_1 + \alpha_8 e_2, & \\ e_1 \vdash e_2 = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2, & e_1 \perp e_1 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, & e_2 \perp e_1 = \beta_5 e_1 + \beta_6 e_2, \\ e_2 \vdash e_1 = \alpha_5 e_1 + \alpha_6 e_2, & e_1 \perp e_2 = \beta_3 e_1 + \beta_4 e_2, & e_2 \perp e_2 = \beta_7 e_1 + \beta_8 e_2. \end{array}$$

现在验证结合三代数公理，可得到系数 α_i, β_i 的若干约束，其中 $1 \le i \le 8$。

应用 $(e_1 \vdash e_1) \dashv e_1 = e_1 \vdash (e_1 \dashv e_1)$，可得 $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \dashv e_1 = e_1 \vdash e_1$，进而得到 $\alpha_1 e_1 = e_1$。因此 $\alpha_1 = 1$。验证 $(e_1 \vdash e_1) \dashv e_1 = e_1 \vdash (e_1 \vdash e_1)$ 可得 $(e_1 + \alpha_2 e_2) \vdash e_1 = e_1 \vdash e_1$。我们有 $e_1 + \alpha_2 e_2 = e_1$。因此有 $\alpha_2 = 0$。考虑 $(e_1 \perp e_1) \dashv e_1 = e_1 \perp (e_1 \dashv e_1)$。这意味着 $(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \dashv e_1 = e_1 \perp e_1$,，因此 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = 0$。然后 $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \dashv)$ 与 $\mathrm{T\ rias}_2^6$ 同构。定理 3.2 列出的其他结合三代数可通过对上述观察稍作修改得到。□

定理 3.3. 任何 3 维实结合三代数要么是结合的，要么同构于以下两两不同构的结合三代数之一:

$$\begin{array}{lll} Trias_3^1: & \begin{array}{ll} e_1 \dashv e_2 = e_3, & e_2 \dashv e_3 = e_3, \\ e_2 \dashv e_1 = e_3, & e_1 \vdash e_2 = e_3, \end{array} & \begin{array}{ll} e_2 \vdash e_2 = e_3, e_1 \perp e_1 = e_3, & e_1 \perp e_2 = e_3, \\ & e_2 \perp e_2 = e_3. \end{array} \\ Trias_3^2: & \begin{array}{l} e_1 \dashv e_2 = e_3, \\ e_2 \dashv e_1 = e_3, \\ e_2 \dashv e_3 = e_3, \end{array} & \begin{array}{ll} e_1 \vdash e_2 = e_3, & e_2 \vdash e_2 = e_3 \quad e_1 \perp e_2 = e_3, \\ e_2 \vdash e_1 = e_3, & e_1 \perp e_1 = e_3, \quad e_2 \perp e_2 = e_3. \end{array} \\ Trias_3^3: & e_2 \dashv e_2 = e_1, \quad e_2 \vdash e_2 = e_1, & \begin{array}{l} e_2 \perp e_2 = e_3, \\ e_2 \perp e_3 = e_1 + e_3. \end{array} \\ Trias_3^4: & e_3 \dashv e_3 = e_1, \quad e_3 \vdash e_3 = e_1, & \begin{array}{l} e_3 \perp e_2 = e_1 + e_2, \\ e_3 \perp e_3 = e_1 + e_2. \end{array} \end{array}$$

Trias_3^5: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3, e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3, e_2 \perp e_2 = e_1 + e_2$. Trias_3^6: $e_1 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_1 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_2, e_1 \vdash e_1 = e_2, e_1 \vdash e_3 = e_2, e_3 \vdash e_1 = e_2, e_3 \vdash e_3 = e_2, e_3 \perp e_1 = e_2, e_3 \perp e_3 = e_2$. Trias_3^7: $e_1 \dashv e_1 = e_2 + e_3, e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_3, e_1 \perp e_1 = e_2 + e_3$. Trias_3^8: $e_2 \dashv e_2 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1, e_3 \dashv e_2 = e_1, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_2 = e_1, e_2 \vdash e_3 = e_1, e_3 \vdash e_2 = e_1, e_2 \perp e_2 = e_1, e_2 \perp e_3 = e_1, e_3 \perp e_2 = e_1$. Trias_3^9: $e_2 \dashv e_2 = e_3, e_2 \vdash e_2 = e_3, e_2 \perp e_1 = e_1 + e_3, e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$. Trias_3^{10}: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3, e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3, e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$. Trias_3^{11}: $e_2 \dashv e_1 = e_3, e_2 \dashv e_2 = e_3, e_2 \vdash e_1 = e_3, e_2 \vdash e_2 = e_3, e_2 \perp e_1 = e_3, e_2 \perp e_2 = e_3$. Trias_3^{12}: $e_1 \dashv e_1 = e_3, e_1 \dashv e_2 = e_3, e_2 \dashv e_1 = e_3, e_1 \vdash e_2 = e_3, e_2 \vdash e_1 = e_3, e_2 \vdash e_2 = e_3$. $e_2 \perp e_1 = e_3, e_2 \perp e_2 = e_3$.

证明。设 $\mathcal{T}$ 为一个三维向量空间。为了确定 $\mathcal{T}$ 上的三结合代数结构，我们考虑关于一种结合三代数运算的 $\mathcal{T}$。令 $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \dashv)$ 为该代数

$$e_2 \dashv e_1 = e_3, e_2 \dashv e_2 = e_3$$

在 $\mathcal{T}$ 中的乘法运算 $\vdash$、$\perp$。我们采用定理 3.2 证明中的相同方法。

于是 $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \dashv)$ 同构于 $\mathrm{T\ rias}_3^{11}$。定理 3.3 列表中的其他结合三代数可通过对上述观察作细微修改而得到。□

定理 3.4。任意四维实结合三代数要么是结合代数，要么同构于以下两两不同构的结合三代数之一：

Trias_4^1: $e_1 \dashv e_1 = e_2 + e_4, e_1 \dashv e_3 = e_2 + e_4, e_3 \dashv e_1 = e_4, e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_4, e_1 \vdash e_3 = e_2 + e_4, e_3 \vdash e_1 = e_4, e_1 \perp e_1 = e_2 + e_4, e_1 \perp e_3 = e_4, e_3 \perp e_3 = e_2$,$\mathrm{Trias}_4^2$: $e_1 \dashv e_1 = e_2 + e_4, e_1 \dashv e_3 = e_2 + e_4, e_3 \dashv e_1 = e_2 + e_4, e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_4, e_1 \vdash e_3 = e_2 + e_4, e_3 \vdash e_1 = e_2 + e_4, e_1 \perp e_1 = e_2 + e_4, e_1 \perp e_3 = e_2 + e_4, e_3 \perp e_1 = e_2 + e_4, e_3 \perp e_3 = e_2$. Trias_4^3: $e_1 \dashv e_1 = e_2 + e_4, e_1 \dashv e_3 = e_2 + e_4, e_3 \dashv e_1 = e_2 + e_4, e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_4, e_1 \vdash e_3 = e_2 + e_4, e_3 \vdash e_1 = e_2 + e_4, e_1 \perp e_1 = e_2 + e_4, e_1 \perp e_3 = e_2 + e_4, e_3 \perp e_3 = e_4$. Trias_4^4: $e_1 \dashv e_2 = e_4, e_2 \dashv e_1 = e_4, e_2 \dashv e_2 = e_4, e_2 \vdash e_1 = e_4, e_2 \vdash e_2 = e_4, e_3 \vdash e_1 = e_4, e_1 \perp e_2 = e_4, e_2 \perp e_1 = e_4, e_1 \perp e_2 = e_4, e_2 \perp e_1 = e_4$,$\mathrm{Trias}_4^5$: $e_1 \dashv e_2 = e_4, e_2 \dashv e_1 = e_4, e_2 \dashv e_2 = e_4, e_2 \vdash e_1 = e_4, e_2 \vdash e_2 = e_4, e_3 \vdash e_1 = e_4, e_1 \perp e_1 = e_4, e_2 \perp e_1 = e_4, e_3 \perp e_3 = e_4$. Trias_4^6: $e_3 \dashv e_4 = e_1 + e_2, e_4 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_2, e_3 \vdash e_4 = e_1 + e_2, e_4 \vdash e_3 = e_1 + e_2, e_4 \vdash e_4 = e_1 + e_2, e_3 \perp e_4 = e_1 + e_2, e_4 \perp e_3 = e_1 + e_2, e_4 \perp e_4 = e_1 + e_2$.

三元代数: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \perp e_2 = e_1 + e_3.$
$e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3,$

T rias$_4^8$: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \perp e_4 = e_1 + e_3.$
$e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3,$

T rias$_4^9$: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_4 = e_3,\ e_4 \perp e_2 = e_1 + e_3,$
$e_4 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \perp e_4 = e_1$

T rias$_4^{10}$: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_4 = e_3,\ e_4 \perp e_2 = e_1 + e_3,$
$e_4 \perp e_4 = e_1.$

T rias$_4^{11}$: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_4 \perp e_2 = e_1 + e_3.$

三元代数$_4^{12}$: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_4 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \perp e_2 = e_1 + e_3.$

T rias$_4^{13}$: $e_2 \dashv e_1 = e_4,\ e_3 \dashv e_3 = e_4,\ e_2 \vdash e_2 = e_4,\ e_1 \perp e_1 = e_4,\ e_3 \perp e_3 = e_4.$
$e_2 \dashv e_2 = e_4,\ e_1 \vdash e_3 = e_4,\ e_3 \vdash e_1 = e_4,\ e_1 \perp e_3 = e_4,$

三结合代数$_4^{14}$: $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_4 = e_1 + e_3,$
$e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \vdash e_4 = e_3,\ e_4 \perp e_2 = e_1 + e_3,$
$e_4 \dashv e_2 = e_1 + e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3,\ e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3,\ e_4 \perp e_4 = e_1.$

T rias$_4^{15}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3,\ e_4 \dashv e_2 = e_3,\ e_2 \vdash e_1 = e_3,\ e_2 \perp e_2 = e_3,$
$e_2 \dashv e_2 = e_3,\ e_1 \vdash e_1 = e_3,\ e_2 \vdash e_4 = e_3,\ e_4 \perp e_1 = e_3,$
$e_4 \dashv e_1 = e_3,\ e_1 \vdash e_4 = e_3,\ e_2 \perp e_1 = e_3,\ e_4 \perp e_4 = e_3.$

T rias$_4^{16}$: $e_1 \dashv e_1 = e_2 + e_4,\ e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_4,\ e_3 \vdash e_3 = e_4,\ e_3 \perp e_1 = e_2,$
$e_3 \dashv e_1 = e_2 + e_4,\ e_1 \vdash e_3 = e_2 + e_4,\ e_1 \perp e_1 = e_2,\ e_3 \perp e_3 = e_2 + e_4.$
$e_3 \dashv e_3 = e_2 + e_4,\ e_3 \vdash e_1 = e_2 + e_4,\ e_1 \perp e_3 = e_4,$

证明。设 $\mathcal{T}$ 为一个三维向量空间。为了确定 $\mathcal{T}$ 上的三结合代数结构，我们考虑相对于一个结合三代数运算的 $\mathcal{T}$。设 $\mathcal{C} = (\mathcal{T}, \dashv)$为该代数

$$e_1 \dashv e_2 = e_4, e_2 \dashv e_1 = e_4, e_2 \dashv e_2 = e_4.$$

多重 p运算 p运算 $\vdash, \perp$ 属于 $\mathcal{T}$。我们使用与定理 3.2 的证明相同的方法。

那么 $\mathcal{C} = (\mathcal{T}, \dashv)$ 同构于 T rias$_4^4$。定理 3.4 列表中的其他结合三代数可以通过对上述观察稍作修改得到。□

4 低维结合三代数的导子

定义 4.1. 结合三代数 $\mathcal{T}$ 的导子是一个线性变换: $\mathcal{D}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，满足

$$d(x \dashv y) = d(x) \dashv y + x \dashv d(y) \tag{4.1}$$
$$d(x \vdash y) = d(x) \vdash y + x \vdash d(y) \tag{4.2}$$
$$d(x \perp y) = d(x) \perp y + x \perp d(y) \tag{4.3}$$

对所有 x, y $\in \mathcal{T}$。

所有 $\mathcal{T}$ 的导子构成的集合记为Der$\mathcal{D}$。显然，Der$\mathcal{D}$ 是 End$\mathcal{D}$ 的线性子空间。

上述线性组合 n $\gamma_{ij}^{k}, \delta_{rs}^{t}, \phi_{pl}^{m}$o 的系数称为 $\mathcal{T}$ 在基 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 上的结构常数。

由于导子是向量空间 $\mathcal{T}$ 上的线性变换，因此可用矩阵形式 $hd^{ij}i_{ij=1,2\ldots,n}$ 表示，即 $\mathcal{D}(e_i) = P_{j=1}^{n} d_{ji} e_j i = 1, 2, \ldots, n.$

根据导子的定义，矩阵 $hd^{ij}i_{ij=1,2\ldots,n}$ 的条目$d_{ji}e_j i = 1, , 2, \ldots, n$，必须满足以下方程组：

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{n}(\gamma_{ij}^{k} d_{qk} - d_{ki}\gamma_{kj}^{q} - d_{kj}\gamma_{ik}^{q}) = 0, & i, j, q \in \{1, n\} \\ \sum_{q=1}^{n}(\delta_{ij}^{k} d_{qk} - d_{ki}\delta_{kj}^{q} - d_{kj}\delta_{ik}^{q}) = 0, & i, j, q \in \{1, n\} \\ \sum_{q=1}^{n}(\phi_{ij}^{k} d_{qk} - d_{ki}\phi_{kj}^{q} - d_{kj}\phi_{ik}^{q}) = 0, & i, j, q \in \{1, n\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

定理4.2. 二维结合三代数的导子具有以下形式：

IC	Der($\mathcal{D}$)	Dim($\mathcal{D}$)	IC	Der($\mathcal{D}$)	Dim($\mathcal{D}$)
T rias$_2^3$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	T rias$_2^7$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{11} \end{pmatrix}$	1
T rias$_2^4$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ -d_{11} & 0 \end{pmatrix}$	1	T rias$_2^8$	$\begin{pmatrix} 0 & d_{21} \\ 0 & -\frac{a-b}{b} d_{21} \end{pmatrix}$	1
T rias$_2^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$	1			

定理 4.3。三维结合三代数的导子具有以下形式：

IC	Der($\mathcal{D}$)	维数($\mathcal{D}$)	IC	Der($\mathcal{D}$)	维数($\mathcal{D}$)
T rias$_3^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{13} \end{pmatrix}$	2	T rias$_3^9$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{11} \\ d_{21} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3
T rias$_3^5$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ -d_{11} & 0 & -d_{13} \\ -d_{11} & 0 & -d_{13} \end{pmatrix}$	2	T rias$_3^{10}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ d_{21} & k_{10} & d_{23} \\ d_{31} & 0 & k_{11} \end{pmatrix}$	5
T rias$_3^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	T rias$_3^{11}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ d_{21} & k_{13} & \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$	4
T rias$_3^8$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & \frac{1}{2} d_{11} & 0 \\ d_{31} & 0 & \frac{1}{2} d_{11} \end{pmatrix}$	3	T rias$_3^{12}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & d_{11} & d_{23} \\ 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}$	3

证明。根据定理 4.3，我们仅证明一种情形，以说明所采用的方法；其他情形可以类似地处理，无需修改或稍作修改。考虑 T rias$_3^3$。应用方程组 (5.4)，得到 $d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{31} = d_{22} = d_{32} = 0$，$d_{23} = d_{13}, d_{33} = d_{13}$。因此，T rias$_3^3$ 的导子如下：

$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$、$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 Der($\mathcal{D}$) 的基，且 DimDer($\mathcal{D}$) = 2。其质心是

三维结合三代数的其余部分也可以按照上述方式进行。 □

定理 4。 4. 四维结合三代数的导子具有以下形式 :

IC	Der($\mathcal{D}$)	Dim($\mathcal{D}$)	IC	Der($\mathcal{D}$)	维数($\mathcal{D}$)
$\mathrm{T\,rias}^{1}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} \\ 0 & d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{11} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\,rias}^{9}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & \frac{1}{2}d_{11} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & \frac{1}{2}d_{11} \end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\,rias}^{2}_{4}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	三元组$^{10}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & \frac{1}{2}d_{11} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & \frac{1}{2}d_{11} \end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\,rias}^{3}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} \\ 0 & d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{11} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\,rias}^{11}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & \frac{1}{2}d_{11} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & \frac{1}{2}d_{11} \end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\,rias}^{4}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} \\ 0 & d_{11} & 0 & d_{24} \\ 0 & 0 & d_{11} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\,rias}^{12}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{8} & 0 \\ d_{21} & t_{7} & d_{23} & 0 \\ d_{31} & 0 & t_{6} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & t_{7} \end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\,rias}^{5}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} \\ 0 & d_{11} & 0 & d_{24} \\ 0 & 0 & d_{11} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\,rias}^{13}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} \\ 0 & d_{11} & 0 & d_{24} \\ 0 & 0 & d_{11} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}$	4
$\mathrm{T\,rias}^{6}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & t_{1} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & t_{2} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & 0 & t_{3} \end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\,rias}^{14}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & \frac{1}{2}d_{11} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & \frac{1}{2}d_{11} \end{pmatrix}$	4
$\mathrm{T\,rias}^{7}_{4}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathrm{T\,rias}^{15}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{43} & d_{11} \end{pmatrix}$	4
特里亚斯$^{8}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} & 0 \\ d_{21} & t_{5} & d_{23} & 0 \\ d_{31} & 0 & t_{6} & 0 \\ d_{41} & 0 & t_{7} & 0 \end{pmatrix}$	6	$\mathrm{T\,rias}^{16}_{4}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} \\ 0 & 2d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{11} & d_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}$	5

证明。根据定理 4.4，我们仅对一种情况给出证明，以说明所采用的方法；其他情况可以类似地进行处理，无需修改或仅需少量修改。考虑Trias^{1}_{4}。应用方程组(5.5)，我们得到$\mathrm{d}_{21} = \mathrm{d}_{31} = \mathrm{d}_{41} = \mathrm{d}_{42} = \mathrm{d}_{21} = \mathrm{d}_{31} = \mathrm{d}_{41} = \mathrm{d}_{42} = 0$、$\mathrm{d}_{22} = \mathrm{d}_{11}, \mathrm{d}_{33} = \mathrm{d}_{11}\ \mathrm{d}_{44} = 2\mathrm{d}_{11}$。因此，$\mathrm{T\,rias}^{12}_{3}$ 的导子如下给出

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}\ d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}, d_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

是 Der($\mathcal{T}$) 的基，且 DimDer($\mathcal{T}$) 为 = 5。其余三维结合三代数的质心也可以按照上述方法求得。□

推论 4.5。

- 二维结合三代数的导子维数介于零和一之间。
- 三维结合三代数的导子维数介于零和五之间。
- 四维结合三代数的导子维数在零到七之间变化。

注 4.6. 上述表格中使用了以下记号：

- $k_1 = d_{11} + d_{21}, \quad k_2 = \frac{1}{2}d_{11} + \frac{1}{2}d_{31}, \quad k_3 = d_{11} + d_{31} - d_{13}, \quad k_4 = d_{11} + d_{13} - d_{22}.$
- $t_1 = d_{11} + d_{21} - d_{12}$, $t_2 = \frac{1}{2}d_{11} + \frac{1}{2}d_{21}$, $t_3 = d_{11} - d_{21} - d_{12}$, $t_4 = d_{11} + d_{21}$, $t_5 = \frac{1}{2}d_{11} + \frac{1}{2}d_{31}$,
- $t_6 = d_{11} + d_{31} - d_{13}$, $t_7 = d_{11} + d_{31}$, $t_8 = d_{22} - d_{42}$, $t_9 = d_{11} - d_{31} - d_{13}$.

5 低维结合三代数的中心

5.1 结合三代数中心的性质

本节给出关于结合三代数$\mathcal{T}$的中心性质的以下结果。

定义 5.1. 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个非空子集。子集

$$Z_{\mathcal{T}}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{H} | x \bullet \mathcal{H} = \mathcal{H} \bullet x = 0\}, \tag{5.1}$$

称为 $\mathcal{T}$ 中 $\mathcal{H}$ 的中心化子集，其中 $\bullet$ 分别为 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。

定义 5.2. 设 $\mathcal{T}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的任意结合三代数。$\mathcal{T}$ 的左、右和中间中心 $\Gamma^{\dashv}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T})$、$\Gamma^{\vdash}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T})$ 和 $\Gamma^{\perp}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{T}$ 上的 $\mathbb{K}$-线性变换空间，定义为

$$\Gamma^{\bullet}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}) = \{\psi \in End_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}) | \psi(x \bullet y) = x \bullet \psi(y) = \psi(x) \bullet y \quad \text{for all} \quad x, y \in \Gamma\}, \tag{5.2}$$

其中 $\bullet$ 分别为 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。

定义5.3.设$\psi \in \mathrm{End}(\mathcal{T})$。如果$\psi(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{T})$且$\psi(\mathcal{T}^2) = 0$，则$\psi$称为中心导子。$\mathcal{T}$的所有中心导子的集合记为 $\mathbb{C}(\mathcal{T})$。

命题 5.4。设 $(\mathcal{T}, \vdash, \dashv, \perp)$ 是一个结合三代数。那么

i) $\Gamma(\mathcal{T})\mathrm{Der}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{T})$.

ii) $[\Gamma(\mathcal{T}), \mathrm{Dr}(\mathcal{T})] \subseteq \Gamma(\mathcal{T})$。

iii) $[\Gamma(\mathcal{T}), \Gamma(\mathcal{T})](\mathcal{T}) \subseteq \Gamma(\mathcal{T})$和 $[\Gamma(\mathcal{T}), \Gamma(\mathcal{T})](\mathcal{T}^2) = 0$.

证明。利用导子和中心的定义，i) – iii) 的证明是显然的。

□

命题5.5。设 $\mathcal{T}$是一个结合三代数，且 $\varphi\in\Gamma_{\mathcal{T}}$，$d\in Der(\mathcal{T})$。那么 $\varphi\circ d$ 是 $\mathcal{T}$ 的导子。

证明。事实上，如果 $x,y\in\mathcal{T}$，那么

$$\begin{aligned}(\varphi\circ d)(x\bullet y) &= \varphi(d(x)\bullet y + x\bullet d(y))\\ &= \varphi(d(x)\bullet y)+\varphi(x\bullet d(y)) = (\varphi\circ d)(x)\bullet y + x\bullet(\varphi\circ d)(y)\end{aligned}$$

其中，$\bullet$ 分别是 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。 □

命题　在 5.6 中，设 $\mathcal{T}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的结合三代数。那么 $\mathbb{C}(\mathcal{T}=\Gamma(\mathcal{T})\cap Der(\mathcal{T}$).

证明。若 $\psi\in\Gamma(\mathcal{T})\cap Der(\mathcal{T})$，则根据 $\Gamma(\mathcal{T})$和$Der(\mathcal{T})$的定义，我们有
$\psi(x\bullet y)=\psi(x)\bullet y+x\bullet\psi(y)$，且 $\psi(x\bullet y)=\psi(x)\circ y=x\circ\psi(y)$，其中 $x,y\in\mathcal{T}$。由此得到 $\psi(\mathcal{T}\mathcal{T})=0$和 $\psi(\mathcal{T})\subseteq Z(\mathcal{T})$，即 $\Gamma(\mathcal{T})\cap Der(\mathcal{T})\subseteq\mathbb{C}(\mathcal{T})$。逆向关系显然成立，因为 $\mathbb{C}(\mathcal{T})$ 同时属于 $\Gamma(\mathcal{T})$ 和 $Der(\mathcal{T})$，其中 $\bullet$分别为 $\dashv$、$\vdash$和 $\perp$。□

命题 5.7. 设 $(\mathcal{T},\vdash,\dashv,\perp)$ 是一个结合三代数。那么对于任意 $d\in Der(\mathcal{T})$ 和 $\varphi\in\Gamma(\mathcal{T})$。

(i) 复合 $d\circ\varphi$属于 $\Gamma(\mathcal{T})$，当且仅当 $\varphi\circ d$ 是 $\mathcal{T}$ 的中心导子。
(ii) 复合 $d\circ\varphi$是 $\mathcal{T}$ 的导子，当且仅当 $[d,\varphi]$是 $\mathcal{T}$ 的中心导子。

证明. i) 对任意 $\varphi\in\Gamma(\mathcal{T})$，$d\in Der(\mathcal{T})$，$\forall x,y\in\mathcal{T}$。我们有

$$\begin{aligned}d\circ\varphi(x\bullet y)=d\circ\varphi(x)\bullet y &= d\circ\varphi(x)\bullet y+\varphi(x)\bullet d(y)\\ &= d\circ\varphi(x)\bullet y+\varphi\circ d(x\bullet y)-\varphi\circ d(x)\bullet y.\end{aligned}$$

Therefore $(d\circ\varphi-\varphi\circ d)(x\bullet y)=(d\bullet\varphi-\varphi\circ d)(x)\bullet y.$

ii) 设 $d\circ\varphi\in Der(\mathcal{T})$，利用 $[d,\varphi]\in\Gamma(\mathcal{T}$，得到

$$[d,\varphi](x\bullet y)=([d,\varphi](x))\bullet y=x\bullet([d,\varphi](y)) \tag{5.3}$$

另一方面 $[d,\varphi]$ $d\circ\varphi-\varphi\circ d$ 且 $d\circ\varphi,\varphi\circ d\in Der(\mathcal{T})$。因此，

$$[d,\varphi](x\bullet y)=(d(\varphi\circ(x))\bullet y+x\bullet(d\circ\varphi(y))-(\varphi\circ d(x))\bullet y-x\bullet(\varphi\circ d(y)). \tag{5.4}$$

由 (5.3) 和 (5.4) 得到 $x\bullet([d,\varphi](y)=([d,\varphi](x)\bullet y=0$。
现在令 $[d,\varphi]$ 为 $\mathcal{T}$ 的中心导子。那么

$$\begin{aligned}d\circ\varphi(x\bullet y) &= [d\circ\varphi](x\bullet y)+(\varphi\circ d)(x\bullet y)\\ &= \varphi(\circ d(x)\bullet y)+\varphi(x\bullet d(y))\\ &= (\varphi\circ d)(x)\bullet y+x\bullet(\varphi\circ d)(y),\end{aligned}$$

其中，$\bullet$ 分别表示乘积 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。 □

5.2 低维结合三代数的质心

我们致力于描述二维、三维和四维结合三代数 $\mathcal{T}$ 的质心。质心 $\Gamma(\mathcal{T})$ 的一个元素 ψ 是向量空间 $\mathcal{T}$ 上的线性变换，可用矩阵形式表示为 $h^{\mathcal{T}_{ij}}i_{i,\ j=1,\ \ldots,\ n}$，即 $\psi(e_i) = P_{j=1}^{n} a_{ji} e_j i = 1,\ \ldots,\ n$。

根据中心的定义，矩阵 $h\mathcal{T}_i j\ i\ , j=1,\ldots,n$ 的各项 $\mathcal{T}_{ij} i, j = 1, 2, \ldots, n$ 必须满足以下方程组：

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n}(\gamma_{ij}^{k}C_{pk} - C_{ki}\gamma_{kj}^{p}) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}C_{pk} - C_{kj}\gamma_{ik}^{p}) = 0, \quad i,j,p \in \{1,n\} \\ \sum_{k=1}^{n}(\delta_{rs}^{t}C_{qt} - C_{tr}\delta_{ts}^{q}) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}(\delta_{rs}^{t}C_{qt} - C_{ts}\delta_{rt}^{q}) = 0, \quad r,s,q \in \{1,n\} \\ \sum_{k=1}^{n}(\psi_{pq}^{r}C_{sr} - C_{rp}\psi_{rq}^{s}) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}(\psi_{pq}^{r}C_{sr} - C_{rq}\psi_{pr}^{s}) = 0, \quad p,q,s \in \{1,n\}. \end{cases} \tag{5.5}$$

定理 5.8。二维复结合试代数的中心如下所示：

IC	Trias的中心	Dim($\mathcal{T}$)	IC	Trias 的中心	$\mathcal{T}$的维数
三重代数$_2^1$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1	三重代数$_2^5$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1
三重代数$_2^2$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1	三重代数$_2^6$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1
三重代数$_2^3$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1	T rias$_2^7$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1
T rias$_2^4$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1	T rias$_2^8$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1

定理 5.9。3 维复结合三代数的质心如下：

IC	Trias 的中心	Dim($\mathcal{T}$)	IC	Trias 的中心	维数($\mathcal{T}$)
T rias$_3^1$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1	T rias$_3^7$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1
T rias$_3^2$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1	T rias$_3^8$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{13} \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}$	4
T rias$_3^3$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	2	T rias$_3^9$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	1
T rias$_3^4$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	2	T rias$_3^{10}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	2
T rias$_3^5$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & k_1 & -a_{13} \\ a_{21} & 0 & k_2 \end{pmatrix}$	3	T rias$_3^{11}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & k_3 & -a_{23} \\ a_{31} & 0 & k_4 \end{pmatrix}$	5
T rias$_3^6$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	2.	T rias$_{12}^3$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 2a_{11} \end{pmatrix}$	3

证明。根据定理 5.9，我们仅对一种情形给出证明，以说明所采用的方法，其他情形可以类似地进行，或无需修改。考虑Trias_3^{12}。应用方程组(5.5)，我们得到$a_{12}=a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$，$a_{22}=a_{11}, a_{33}=2a_{11}$。因此，$\mathrm{T\ rias}_3^{12}$的导子如下所示

$a_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $a_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是 Der(Γ) 的基，且 DimDer(Γ) = 3。其余三维结合三代数部分的质心也可以按照上述类似的方法求得。□

定理 5.10。4 维结合三代数的质心如下：

IC	Trias 的中心	维数($\mathcal{T}$)	IC	Trias 的中心	维数($\mathcal{T}$)
$\mathrm{T\ rias}_4^1$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\0&a_{11}&0&0\\0&0&a_{11}&a_{34}\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	3	$\mathrm{T\ rias}_4^8$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&0\\a_{21}&k_3&0&0\\a_{31}&0&k_4&0\\a_{41}&0&a_{43}&k_3\end{pmatrix}$	7
$\mathrm{T\ rias}_4^2$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\0&a_{22}&0&0\\0&a_{32}&0&a_{34}\\0&0&a_{11}&a_{11}\end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\ rias}_4^9$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0\\0&0&a_{11}&0\\a_{41}&0&a_{43}&a_{11}\end{pmatrix}$	6
$\mathrm{T\ rias}_4^3$	$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0&a_{14}\\0&a_{11}&0&0\\0&a_{32}&a_{11}&a_{34}\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	5	$\mathrm{T\ rias}_4^{10}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{11}&a_{23}&0\\0&0&a_{11}&0\\a_{41}&0&a_{43}&a_{11}\end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\ rias}_4^4$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\0&a_{11}&0&a_{24}\\0&0&a_{11}&a_{34}\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	4	$\mathrm{T\ rias}_4^{11}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{11}&a_{23}&0\\0&0&a_{11}&0\\a_{41}&0&a_{43}&a_{11}\end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\ rias}_4^5$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&a_{11}&0&0\\0&0&a_{11}&0\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	1	$\mathrm{T\ rias}_4^{12}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&0\\a_{21}&k_2&a_{23}&0\\a_{31}&0&k_4&0\\a_{41}&0&a_{43}&k_3\end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\ rias}_4^6$	$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&k_1&0&0\\a_{31}&a_{32}&k_2&0\\a_{41}&a_{42}&0&k_2\end{pmatrix}$	7	$\mathrm{T\ rias}_4^{13}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\0&a_{11}&0&a_{24}\\0&0&a_{11}&a_{34}\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	4
$\mathrm{T\ rias}_4^7$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&0\\a_{21}&k_2&a_{23}&0\\a_{31}&0&k_4&0\\a_{41}&0&a_{43}&k_3\end{pmatrix}$	6	$\mathrm{T\ rias}_4^{14}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{11}&a_{23}&0\\0&0&a_{11}&0\\a_{41}&0&a_{43}&a_{11}\end{pmatrix}$	5
$\mathrm{T\ rias}_4^{15}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&a_{11}&0&0\\0&0&a_{11}&0\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	1	$\mathrm{T\ rias}_4^{16}$	$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0&a_{14}\\0&a_{11}&0&0\\0&a_{32}&a_{11}&a_{34}\\0&0&0&a_{11}\end{pmatrix}$	5

证明。根据定理 5.9，我们仅针对一种情形给出证明，以说明所采用的方法；其他情形也可以类似地处理，无需修改或只需稍作修改。考虑 $\mathrm{T\ rias}_4^{16}$。应用方程组 (5.5)，得到 $a_{21}=a_{31}=a_{41}=a_{42}=a_{21}=a_{31}=a_{41}=a_{42}=0$,

$a_{22} = a_{11}, a_{33} = a_{11}\, a_{44} = a_{11}$。因此，$Trias_3^{12}$的导子如下：$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, a $_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是 Der(Γ) 的基，且 DimDer(Γ) = 5。其余三维结合三代数的中心也可以按照上述方法类似地求得。□

推论 5.11。

- 二维结合三代数的质心维数为一。
- 二维结合三代数的质心维数在一到五之间变化。
- 二维结合三代数的质心维数在一到七之间变化。

注5.12。在上述表格中使用了以下记号：

- IC：结合三代数的同构类。
- Dim：导子代数和中心代数的维数。
- $k_1 = a_{11} + a_{21} - a_{12}$, $a_2 = a_{11} + a_{21}$, $k_3 = a_{11} + a_{31}$, $k_4 = a_{11} + a_{31} - a_{13}$.

参考文献

[1] A. Makhlouf 和 Ahmed Zahari, 《Hom-结合代数的结构与分类》, 《Acta et commentationes universitis Tartuensis de mathematica》, 第24卷第1期（2020）, 79 – 102.[2] A. Zahari 和 I. Bakayoko, 《关于 BiHom-结合二代数》, 《Open J. Math. Sci.》, 第7卷（2023）, 96 – 117.[3] Loday J.-L.、Frabetti A.、Chapoton F.、Goichot F., 《二代数及相关运算子》, 《Lecture Notes in Mathematics》, 1763, Springer, 柏林, 2001。[4] Benkanta G.、Neherb E., 《扩展仿射李代数与根分次李代数的中心》, 《Journal of Pure and Applied Algebra》, 204(1), （2006）, 117 – 145. [5]Merville D. J, 《幂零李代数的中心》, 《Comm. Algebra》, 20(12), （1992）, 3649 – 3682.[6] Rakhimov, I.S.、Fiidov, M. A., 《有限维结合二代数的质心》, 《Far East Journal of Mathematical Sciences》, 98(4), （2015）, 427 – 443.[7] M.A. Fiidov, I.S.,Rakhimov, S.K. said Hussain, 《结合代数的质心》, IEEE《国际数学研究与教育会议论文集》（CIREM7）, （2015）, 227 – 232.[8] G.Mozzola, 《五维结合代数的代数与几何分类》, 《Manuscripta Math.》, 第27卷第1期（1979）, 第 81 – 101 页, [9] Bakayoko I.、Bangoura M., 《双模与Rota-Baxter关系》, 《J. Appl. Mech. Eng》4:178, doi:10.4172/2168-9873.1000178, 2015。

[10] Bakayoko I.、Bangoura M.，《左-Hom-对称二代数与Hom-Poisson二代数》，《Konuralp Journal of Mathematics》，第3卷第2期，42-53，2015。[11] A. Makhlouf 和 S. Silvestrov，《Hom-代数结构》，《J. Gen. Lie Theory Appl.》第2卷（2008），第2期，51-64。[12] W. Basri 和 Rokhsiboev，《低维二结合代数》，第三届数学研究与教育会议论文集（ICREM3），UPM，马来西亚：（2007），164-170。[13] Rikhsiboev I.、Rakhimov I.、Basri W.，《三维复二结合代数的分类》，《Malaysian Journal of Mathematical Sciences》，4(2):241-254，2010。[14] W. Basri 和 Rokhsiboev，《低维二结合代数》，第三届数学研究与教育会议论文集（ICREM3），UPM，马来西亚：（2007）164-170。[15] A. Armour、H. Chen 和 Y. Zhang，《四维超代数的分类》，《Comm. in Algebra》第37卷，（2009），3697-3728。[16]M. Ikrom、Rokhsiboev、S. Isamiddin、Rakhimov 和 W. Basri，《三维复二结合代数的分类》，《Malaysian Journal of Mathematical Sciences》4(2)，（2010），241 – 254.[17] I. M. Rikhsiboev、I. S. Rakhimov 和 W. Basri，《二结合代数及其导子》，《J. phys : Conf. Ser》553，（2014），012006。[18] W. Basri、I. S. Rakhimov 和 I. M. Rokhsiboev，《四维幂零二结合代数》，《J. Generalised Lie Theory Appl.》28，doi : 10.4172/1736 – 4337.1000218。[19] A. Makhlouf 和 Yau D.，《Rota-Baxter Hom-Lie容许代数》，《Communication in Algebra》，23(3)，（2014），1231-1257。[20] I. S. Rakhimov、Al-Nashri、Al-Hossain，《低维复Leibniz代数的导子》，《JR Jornal of Algebra, Number Theory and Applications》，第21卷第1期，（2011），第 68 –81页。