《天体物理学杂志》，944:194（18页），2023年2月20日 https://doi.org/10.3847/1538-4357/acb536
© 2023。作者。由美国天文学会出版。
OPEN ACCESS

流动和磁场扭曲对磁通管中慢磁流体波共振吸收的影响

MohammadSadeghi[1,2] , [1] [1] [3] ,KaramPahari 和 KayoomarsKarami 物理系，库尔德斯坦大学，Pasdaran 街，邮政信箱66177-15175，Sanandaj，伊朗 [2] 数学等离子体天体物理中心（CmPA），鲁汶大学，Celestijnenlaan200B，2400信箱，B-3001鲁汶，比利时 [3]物理系，理学院，拉齐大学，克尔曼沙赫，伊朗 收稿于 2022年7月25日；修订于 2023年1月18日；接受于 2023年1月19日；发表于 2023年2月27日

摘要

观测表明，整个太阳大气中都存在扭曲磁通管和等离子体流。本研究的主要目的是求得存在磁场扭曲和等离子体流时疏散波模的阻尼率。在磁孔条件下，我们推导了非均匀层中慢连续谱疏散波模的色散关系，并对其进行数值求解。对于所选取的密度分布、磁场和等离子体流随半径在非均匀层中的变化，我们表明，低速等离子体流下扭曲磁场对共振吸收的影响大于高速等离子体流下的影响。

统一天文学词库概念：太阳物理学(1476)；太阳光球(1518)；太阳大气(1477)

1. 引言

加热太阳日冕的机制之一是磁流体力学（MHD）波的传播及其阻尼。Aschwanden等（1999）和Nakariakov 等（1999）首次报告了日冕环的横向振荡。Nakariakov等（1999）报告了周期为 4.27 分钟、阻尼时间为 14.5 分钟的振荡。Wang与 Solanki（2004）利用TRACE观测报告了周期为3.9分钟、阻尼时间为11.9 分钟的振荡。太阳大气中的磁流体力学波研究对于太阳地震学（例如，Nakariakov 与 Verwichte 2005；De Moortel 与 Nakariakov2012；Nakariakov 等 2016）和大气加热（例如，Arregui2015；De Moortel与 Browning 2015）非常重要，而研究重点仍然是太阳日冕中的振荡（Aschwanden等 1999；Nakariakov 等 1999；Wang 等 2002；Erdélyi 与 Taroyan2008；Aschwanden 与 Schrijver2011；Pascoe 等 2016）。太阳大气低层中的各种磁流体力学波模，尤其是光球中的磁孔，已经得到识别和研究（例如，Dorotovič 等 2008，2014；Jess 等 2009，2017；Morton 等 2011；Tian 等 2014；Grant 等（2015）；Moreels 等 2015；Freij 等2016；Wang等2018）。太阳大气的磁孔中经常研究疏散波。磁孔相对较小（直径约为 1–6 Mm），场强约为 1 kG，参见例如 Sobotka（2003）。Aschwanden 等（2004）首次观测到日冕中大尺度环振荡的轴对称模，而 Dorotovič等（2008）利用瑞典太阳望远镜首次报告了太阳大气低层中的疏散波观测，其周期为20–70 分钟。Dorotovič 等（2014）研究了磁孔和太阳黑子，以寻找轴对称模，并报告了周期为4–65分钟的慢模和快模。他们表明，光球结构中存在许多不同波长的轴对称模。Grant 等（2015）观测到磁孔中的疏散波，其周期为181–412 秒。他们还表明，在磁孔条件下，疏散波具有如此强的阻尼，以至于在一个振荡周期的0.25秒内就会消失。Keys等（2018）报告称，在磁孔中，表面模多于体模，并且表面态携带的能量多于体模。他们还发现体模的周期为 83–500 秒，并表明表面模的振荡周期小于 100 秒。

磁流体力学波的共振吸收最初由 Ionson（1978）在太阳物理学中提出，用于解释其阻尼机制。在这一机制中，全局模振荡的能量被转移至磁通管边界非均匀层中的局部阿尔芬（尖点）扰动，参见例如 Goossens 等人（2011）。尽管许多研究人员已经研究了日冕条件下的共振吸收（例如 Ofman 和 Davila 1995；Goossens 等人 2002；Ruderman 和 Roberts 2002；Aschwanden 等 2003；Terradas 等 2006a、2006b；Ruderman 和 Erdélyi 2009；Soler 等 2013；Scherrer 和 McKenzie 2017），但共振吸收在低层大气中的作用尚未得到充分研究（Bogdan 等 1996；Ruderman 2009；Giagkiozis 等人 2016；Yu等人 2017a、2017b）。在低层大气中，除了阿尔芬共振吸收之外，尖点共振吸收也可能十分重要。Yu等人（2017a、2017b）表明，对于光球中的慢表面扭结波和疏散波的阻尼而言，慢（尖点）共振吸收可能是比阿尔芬共振吸收更有效的机制。

迄今为止，已有许多研究探讨了存在磁场扭曲（Bennett 等人 1999；Erdélyi & Carter 2006；Erdélyi & Fedun 2006，2007；Karami & Bahari 2010；Ebrahimi & Karami 2016；Giagkiozis 等人 2016；Sadeghi 和 Karami 2019）或等离子体流（Joarder 等人 1997；Soler 等人 2011；Bahari 2018；Sadeghi 等（2021））时的共振吸收。Ruderman（2007）表明，仅在磁通管内部紧邻边界处存在磁场扭曲，对扭 kink 波的振荡频率没有影响。Karami & Bahari（2010）研究了扭曲磁场对共振吸收的影响。他们表明，对于日冕环，驻立 kink 波的基频模与第一泛音模的周期比 P_1/P_2 小于 2。Karami & Bahari（2012）报告称，如果在磁通管的环状层中考虑磁场扭曲，则其会影响扭 kink 波的振荡特性

本作品的原始内容可根据知识共享署名 4.0 许可协议的条款使用。本作品的任何进一步传播均须保留对作者(s) 的署名，以及作品标题、期刊引文和 DOI。

。Giagkiozis 等人（2015）研究了扭曲磁场存在时快磁笛体波的振荡频率所受到的影响。此外，Giagkiozis 等人（2016）表明，疏散波的阻尼率会随着磁场扭曲的增强而增加。Sadeghi 和 Karami（2019）研究了磁孔条件下弱磁场扭曲存在时慢磁笛表面波的慢共振吸收。他们得出结论，磁场扭曲能够提高波的阻尼率。观测表明，太阳大气中的磁通管处处存在等离子体流，例如可参见 Brekke 等人（1997）、Winebarger 等人（2001，2002）、Teriaca 等人（2004）、Doyle 等人（2006）、Ofman & Wang（2008）以及 Tian 等（2008，2009）。Grant 等（2015）表明，磁孔中的平均上升流速约为阿尔芬速度的三分之一，但他们观测到的最高流速约为 1.15 阿尔芬速度。Ruderman & Petrukhin（2019）研究了流动对扭 kink 波的影响。他们报告称，流动对日冕地震学的影响较弱，但对日珥有显著影响。Bahari & Jahan（2020）研究了扭曲磁场和等离子体流对磁通管的影响。他们表明，对于弱扭曲，基频模和第一泛音模的频率都会随着等离子体流的增强而降低。他们还得出结论，当磁通管中同时考虑磁场扭曲和等离子体流时，驻立 kink 波的基频模与第一泛音模的周期比 P_1/P_2 小于 2。Sadeghi 等（2021）表明，在磁孔条件下，背景等离子体流的存在能够显著提高慢磁笛（扭 kink）表面波的阻尼率。

本文旨在拓展 Sadeghi 和 Karami (2019) 以及 Sadeghi 等人 (2021年) 开展的研究，考察磁场扭曲与等离子体流同时存在对慢磁笛表面波阻尼的影响。第 2 节介绍模型以及支配磁流体力学波的基本运动方程。第 3 节中，我们发现了无非均匀层和存在非均匀层两种情况下的色散关系。我们在第 4 节讨论数值结果。最后，我们在第 5 节总结全文。

2. 模型和运动方程

2.1. Model of the Flux Tube

描述磁性扰动的线性化理想磁流体动力学方程磁通管中的方程由 Kadomtsev (1966) 给出

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)^2\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\nabla}\delta p-\frac{1}{\mu_0}(\delta\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\delta\boldsymbol{B})), \tag{1a}$$

$$\delta p=-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}p-\gamma p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}, \tag{1b}$$

$$\delta\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\xi}), \tag{1c}$$

其中，ρ、p和B分别为背景密度、动力学压力和磁场。此外，$\boldsymbol{\xi}$ 是拉格朗日位移矢量，而 δp和 δB分别是压力和磁场的欧拉扰动。这里，γ 是比热比（在本文中取为 5/3），μ_0 是真空磁导率。

我们考虑一个具有扭曲磁场的静态圆柱形磁通管模型。背景磁场和等离子体流在柱坐标系中定义为

$$\boldsymbol{B}=(0,B_\phi(r),B_z(r)), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{V}=(0,V_\phi(r),V_z(r)). \tag{3}$$

r 方向上的磁流体静力平衡方程可由零阶理想磁流体力学方程得到，表示为

$$\frac{d}{dr}\left(p+\frac{B_\phi^2(r)+B_z^2(r)}{2\mu_0}\right)=\frac{\rho V_\phi^2(r)}{r}-\frac{B_\phi^2(r)}{\mu_0 r}. \tag{4}$$

我们将利用该方程确定平衡等离子体压力对径向坐标的依赖关系。根据 Sadeghi 和 Karami (2019) 以及 Sadeghi 等人 (2021年)的研究模型，我们定义密度分布、磁场分量，以及等离子体流的纵向分量，如下：

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_i, & r\leqslant r_i,\\ \rho_i\left(1+(\zeta_\rho-1)\left(\dfrac{r-r_i}{r_e-r_i}\right)^n\right), & r_i<r<r_e,\\ \rho_i\zeta_\rho, & r\geqslant r_e,\end{cases} \tag{5}$$

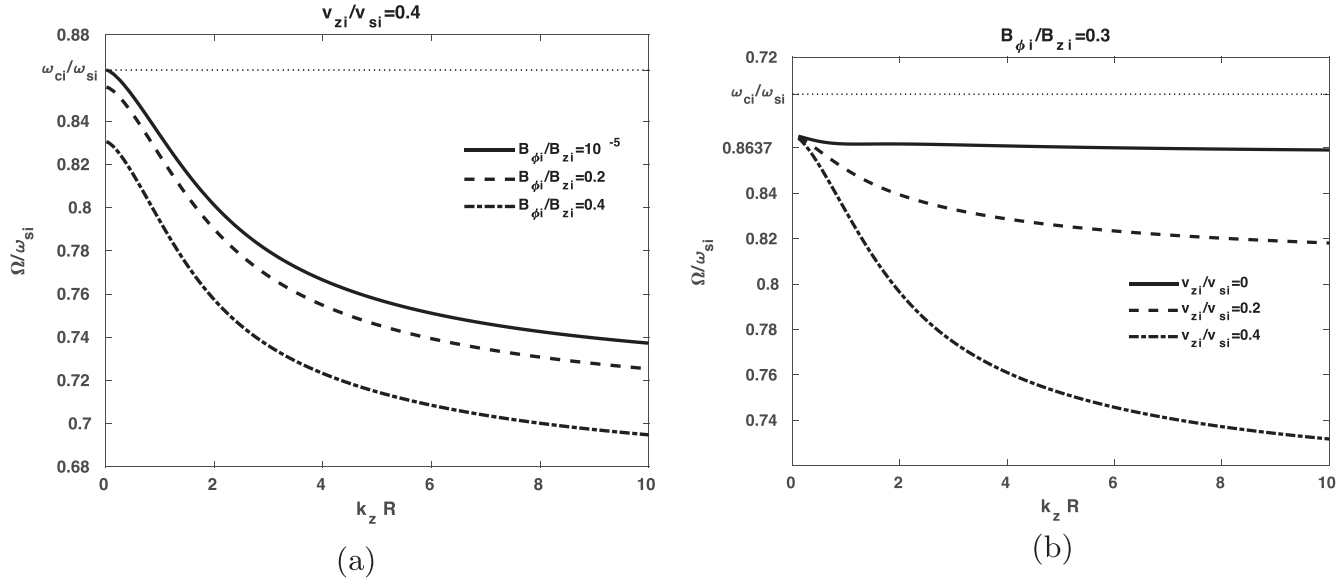

图1. 根据方程（40）得到的多普勒频移相速度 Ω/ω_{si}，展示了慢表面扭曲模随 k_zR 的变化，以及不同 (a) 扭转参数 $B_{\phi i}/B_{zi}$ 和 (b) 流动参数 v_{zi}/v_{si} 取值时的情况。对于磁孔条件，按照 Grant 等（2015），辅助参数取为 $v_{Ai} = 12$ km s^{-1}、$v_{Ae} = 0$ km s^{-1}（即 $B_{ze} = 0$）、$v_{ze} = 0$ km s^{-1}、$v_{si} = 7$ km s^{-1}、$v_{se} = 11.5$ km s^{-1}、$v_{ci} = 6.0464$ km s^{-1}（；0.8638 v_{si}），以及 $v_{ce} = 0$ km s^{-1}。

$$B_z(r) = \begin{cases} B_0, & r \leqslant r_i, \\ B_0\sqrt{1 + (\zeta_{B_z}^2 - 1)\left(\dfrac{r - r_i}{r_e - r_i}\right)}, & r_i < r < r_e, \\ B_0\zeta_{B_z}, & r \geqslant r_e, \end{cases} \tag{6}$$

$$B_\phi(r) = \begin{cases} Ar, & r \leqslant r_i, \\ Ar_i\sqrt{1 + (\zeta_{B_\phi}^2 - 1)\left(\dfrac{r - r_i}{r_e - r_i}\right)}, & r_i < r < r_e, \\ \zeta_{B_\phi}Ar_i, & r \geqslant r_e, \end{cases} \tag{7}$$

$$V_z(r) = \begin{cases} V_{zi}, & r \leqslant r_i, \\ V_{zi}\left(1 + (\zeta_{V_z} - 1)\left(\dfrac{r - r_i}{r_e - r_i}\right)\right), & r_i < r < r_e, \\ \zeta_{V_z}V_{zi}, & r \geqslant r_e. \end{cases} \tag{8}$$

在这些方程中，ρ_i、B_0, 和 V_{zi} 分别表示磁通管内部区域的等离子体密度、纵向磁场和纵向等离子体流，且它们均为常量。扭转参数 A 控制磁场的方位分量，也为常量。ζ_q表示外部区域与内部区域中物理量 q 的取值之比，其中 q 代表等离子体密度以及背景磁场和等离子体流的分量。为简便起见，我们假设等离子体流平行于背景磁场。利用这一条件，可由方程 (6)–(8) 得到等离子体流的方位分量：

$$V_\phi(r) = \frac{B_\phi}{B_z}V_z = \begin{cases} A_V r, & r \leqslant r_i, \\ A_V r_i[1 + \delta(\zeta_{V_z} - 1)]\sqrt{\dfrac{[1 + \delta(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)]}{[1 + \delta(\zeta_{B_z}^2 - 1)]}}, & r_i < r < r_e, \\ \zeta_{V_\phi}A_V r_i, & r \geqslant r_e. \end{cases} \tag{9}$$

参数 $=A^V{}_{AV}{}_{B_0}{}^{zi}$ 以及 $\zeta\_\_\_ = \zeta\ \zeta\ \zeta^\phi{}_\phi\ V\ {}_B\ {}_{Vz}\ {}_{Bz}$，它们给出了方位向等离子体 流及其在外部和内部区域中的比值，并非独立变量。利用等离子体 流与磁 场平行这一条件，可以用先前定义的参数表示这些量。将方程 (5)、(6)、(7)和 (9) 代入

磁流体静力学方程 (4)，可得背景气体压强

$$p(r)=\begin{cases} p_0-\left(1-\dfrac{\mu_0\rho_i A_V^2}{2A^2}\right)\dfrac{A^2r^2}{\mu_0}, & r\leqslant r_i,\\ A_1+A_2r+A_3r^2+A_4r^3+A_5\ln(r/r_i)+A_6\ln\left(\dfrac{l+(r-r_i)(\zeta_{B_z}^2-1)}{l}\right), & r_i<r<r_e,\\ p_1-\left(1-\dfrac{\mu_0\rho_i\zeta_\rho\zeta_{V_\phi}^2A_V^2}{\zeta_{B_\phi}^2A^2}\right)\dfrac{\zeta_{B_\phi}^2A^2r_i^2}{\mu_0}\ln(r/r_e), & r\geqslant r_e. \end{cases} \tag{10}$$

在此方程中，p_0是积分常数，它给出了磁通管轴处的等离子体压力，而其他参数见附录A。

这里的静态模型经过调整，使其在没有等离子体流动时，退化为 Sadeghi 和 Karami (2019)所考虑的平衡模型；而在没有磁场扭曲时，它则恢复 Sadeghi 等人 (2021年)所考虑的模型。此外，阿尔芬速度、声速和尖峰速度定义如下：定义如下：

$$v_{Ai}^2\equiv\frac{B^2(r_i)}{\mu_0\rho_i},\qquad v_{Ae}^2\equiv\frac{B^2(r_e)}{\mu_0\rho_e}, \tag{11}$$

$$v_{si}^2\equiv\gamma\frac{p(r_i)}{\rho_i}=\gamma\left(p_0-\left(1-\frac{\mu_0\rho_iA'^2}{2A^2}\right)A^2r_i^2/\mu_0\right)/\rho_i,\ v_{se}^2\equiv\gamma\frac{p(r_e)}{\rho_e}=\gamma\frac{p_1}{\rho_e}, \tag{12}$$

$$v_{c(i,e)}^2\equiv\frac{v_{s(i,e)}^2v_{A(i,e)}^2}{v_{s(i,e)}^2+v_{A(i,e)}^2}. \tag{13}$$

此处，$^2=\ ^2_\phi+\ ^2_z B\ B\ B$、$v_{A(i,e)}$、$v_{s(i,e)}$和$v_{c(i,e)}$ 分别是阿尔芬速度、声速和尖峰速度，下标i 和e分别表示内部区域和外部区域。 β参数，即磁通管内等离子体压力与磁压力之比，为磁通管是

$$\beta\equiv\frac{p(r_i)}{B^2(r_i)/(2\mu_0)}=2v_{si}^2/(\gamma v_{Ai}^2). \tag{14}$$

利用该方程，积分常数 p_0 可表示为 β 参数的函数，如下：

$$\frac{p_0}{B_i^2/(2\mu_0)}=\beta+2\left(1-\frac{\mu_0\rho_iA_V^2}{2A^2}\right)A^2r_i^2/B_i^2, \tag{15}$$

其中 $B_i=B(r_i)$。接下来，利用方程 (12)，该方程给出了磁通管内外的声速，并利用方程 (14)，我们确定外部区域与内部区域的密度比为

$$\begin{aligned}\zeta_\rho\equiv\frac{\rho_e}{\rho_i}&=\left(\frac{v_{si}}{v_{se}}\right)^2\frac{p(r_e)}{\left[p_0-\left(1-\frac{\mu_0\rho_iA_V^2}{2A^2}\right)A^2r_i^2/\mu_0\right]},\\ &=\frac{2\mu_0}{B_i^2\beta}\left(\frac{v_{si}}{v_{se}}\right)^2[B_i^2\beta/2\mu_0+A_2(r_e-r_i)+A_3(r_e^2-r_i^2)+A_4(r_e^3-r_i^3)+A_5\ln(r_e/r_i),+A_6\ln(1+(\zeta_{B_z}^2-1))].\end{aligned} \tag{16}$$

2.2. 控制方程

这里，我们使用方程 1(a)–(c) 来获得等离子体径向位移的微分方程，然后确定磁通管各个区域中的微分方程解。由于磁通管的静态量与时间无关，且仅依赖于径向坐标 r，柱坐标中的扰动量可以进行傅里叶分析，表示为

$$(\boldsymbol{\xi},\delta P_T)\propto e^{i(m\phi+k_zz-\omega t)}, \tag{17}$$

其中 ω 为角频率，m 为方位波数，且只允许取整数值；k_z为纵向波数。此外，$\delta P_T=\delta p+\boldsymbol{B}$。 $\delta\boldsymbol{B}/\mu_0$ 为总扰动压力的欧拉扰动。利用（17）中的

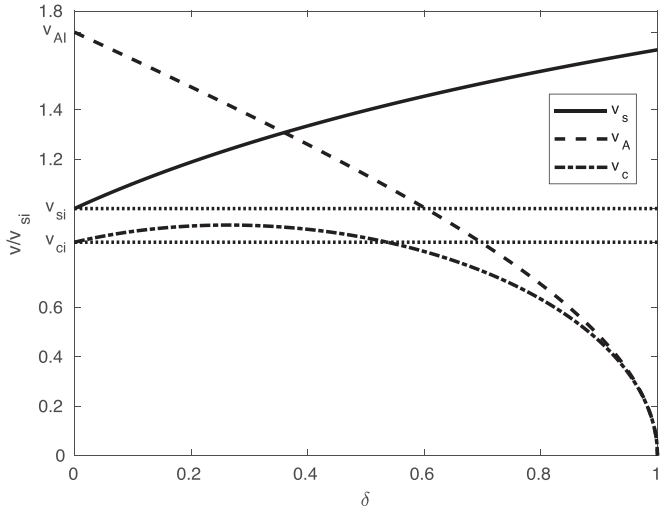

图 2. 声速、阿尔芬速度和尖峰速度随非均匀层中径向坐标 δ 的变化。上、下水平点线分别表示 v_{si} 和 v_{ci}，二者均以内部声速归一化。磁通管的参数为 l/R $=0.1$、$B_{\phi i}/B_{zi}=0.3$、$v_{Ai}=12$ km s^{-1}、$v_{Ae}=0$ km s^{-1}（即 $B_{ze}=0$）、$v_{ze}=0$ km s^{-1}、$v_{ze}=0$ km s^{-1}、$v_{si}=7$ km s^{-1}、$v_{se}=11.5$ km s^{-1}、$v_{ci}=6.0464$ km s^{-1}(；0.8638 v_{si})以及 $v_{ce}=0$ km s^{-1}。

方程组 1(a)–(c)，可以得到以下两个一阶微分方程：

$$\mathcal{D}\frac{d(r\boldsymbol{\xi})}{dr}=C_1(r\boldsymbol{\xi})-rC_2\delta P_T, \tag{18a}$$

$$\mathcal{D}\frac{d\delta P_T}{dr}=\frac{1}{r}C_3(r\boldsymbol{\xi})-C_1\delta P_T. \tag{18b}$$

这些系数已由 Bondeson 等人推导（1987）以及 Goossens 等人（1992）。方程中的系数18（a）和（b）定义为：

$$\mathcal{D}\equiv\rho(\Omega^2-\omega_A^2)(v_s^2+v_A^2)(\Omega^2-\omega_c^2), \tag{19a}$$

$$C_1\equiv Q\Omega^2-2m(v_s^2+v_A^2)(\Omega^2-\omega_c^2)T/r^2, \tag{19b}$$

$$C_2\equiv\Omega^4-\left(k_z^2+\frac{m^2}{r^2}\right)(v_s^2+v_A^2)(\Omega^2-\omega_c^2), \tag{19c}$$

$$C_3\equiv\rho\mathcal{D}\left[\Omega^2-\omega_A^2+\frac{2B_\phi}{\mu_0\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{B_\phi}{r}\right)-2v_\phi\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]+Q^2-4(v_s^2+v_A^2)(\Omega^2-\omega_c^2)T^2/r^2, \tag{19d}$$

$$\Omega\equiv\omega-\omega_f,\qquad \omega_f\equiv\frac{m}{r}v_\phi+k_zv_z, \tag{19e}$$

$$Q\equiv-(\Omega^2-\omega_A^2)\frac{\rho v_\phi^2}{r}+\frac{2\Omega^2B_\phi^2}{\mu_0 r}+\frac{2\Omega f_B B_\phi v_\phi}{\mu_0 r}, \tag{19f}$$

$$T\equiv\frac{f_B B_\phi}{\mu_0}+\rho\Omega v_\phi, \tag{19g}$$

and

$$f_B\equiv\frac{m}{r}B_\phi+k_zB_z,\qquad \omega_A^2\equiv\frac{f_B^2}{\mu_0\rho},\qquad \omega_c^2\equiv\left(\frac{v_s^2}{v_A^2+v_s^2}\right)\omega_A^2.$$

结合这两个一阶方程18(a) 和(b)，我们得到一个关于径向位移的二阶常微分方程，该方程已由 Goossens 等人确定(1992) 为

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{\mathcal{D}}{rC_2}\frac{d}{dr}(r\xi_r)\right]+\left[\frac{1}{\mathcal{D}}\left(C_3-\frac{C_1^2}{C_2}\right)-r\frac{d}{dr}\left(\frac{C_1}{rC_2}\right)\right]\xi_r=0. \tag{20}$$

共振吸收发生在条件 $\mathcal{D}=0$ 下，这给出了四个多普勒频移连续谱；两个频移后的阿尔芬连续谱$\omega=\omega_f(\mathrm{r})\pm\omega_A(\mathrm{r})$，以及两个频移后的慢连续谱 $\omega=\omega_f(\mathrm{r})\pm\omega_c(\mathrm{r})$。在这里，我们研究沿等离子体流动方向传播的慢表面波。对于这些波，在我们这里所考虑的磁通管模型中，条件 $\omega=\omega_f(\mathrm{r})+\omega_c(\mathrm{r})$ 和 $\omega=\omega_f(\mathrm{r})+\omega_A(\mathrm{r})$ 都是

已充满。Yu等人(2017b）表明，阿尔fvén共振吸收并不是慢表面扭曲波的有效阻尼机制。我们将这一结果推广到慢表面sausage波，并将慢共振吸收视为慢表面 sausage波的唯一阻尼机制。我们将阿尔fvén共振吸收的研究以及这一推广的有效性推迟到未来的工作中。如果过渡层中没有等离子体流，如Bahari等人(2020）针对扭 kink 波所考虑的情况，那么随着流速充分增大，可能不会再发生共振吸收，磁流体力学波会无阻尼地传播；但是，由于我们考虑了过渡层中的等离子体流，即使在较大的流速下，共振吸收的条件也仍然得到满足。

2.3. Solution Inside the Flux Tube

在本节中，我们求解磁通管内部区域的方程 (20)。为此，我们首先简化轴对称模 的系数，这些系数由方程 (19) 给出，并使用磁通管的内部参数($m = 0$)

$$\mathcal{D}_i \equiv \rho_i(\Omega_i^2 - \omega_{Ai}^2), \tag{21a}$$

$$C_1 \equiv \left(\frac{2n_i^2A^2}{\mu_0} + \frac{2n_i^2B_{zi}AA_V}{\Omega_i\mu_0} - \rho_i n_i^2(\omega_{Ai}^2 - \Omega_i^2)A_V^2\right)r, \tag{21b}$$

$$C_2 \equiv n_i^2 - k_z^2, \tag{21c}$$

$$C_3 \equiv \rho_i^2\left((\Omega_i^2 - \omega_{Ai}^2)^2 + Q_i^2 - 4\left(\frac{\omega_{Ai}^2A^2}{\mu_0\rho_i} + \Omega_i^2A_V^2 + \frac{2\Omega_i\omega_{Ai}AA_V}{\mu_0^{1/2}\rho_i^{1/2}}\right)\right), \tag{21d}$$

$$Q_i^2 \equiv \left(\frac{4n_i^2A^4}{\mu_0^2\rho_i^2} + n_i^2A_V^4 - \frac{2n_i^2\omega_{Ai}^2A_V^4}{\Omega_i^2} + \frac{n_i^2\omega_{Ai}^4A_V^4}{\Omega_i^4} + \frac{4(1-\Omega_i^2)n_i^2\omega_{Ai}AA_V^3}{\Omega_i^3\mu_0^{1/2}\rho_i^{1/2}} + \frac{8n_i^2\omega_{Ai}A^3A_V}{\Omega_i\mu_0^{3/2}\rho_i^{3/2}} - \frac{4n_i^2\omega_{Ai}^2A^2A_V^2}{\mu_0\rho_i}\right)r^2, \tag{21e}$$

$\omega\ \omega\ \omega$ o W $= -kv$, , *fi z zi i fi*

$$n_i^2 \equiv \frac{\Omega_i^4}{(v_{Ai}^2 + v_{si}^2)(\Omega_i^2 - \omega_{ci}^2)}. \tag{22}$$

经过这些简化，描述径向位移的微分方程变为

$$\mathcal{R}^2\frac{d^2\ \xi_r}{d\mathcal{R}^2} + \mathcal{R}\frac{d\ \xi_r}{d\mathcal{R}} - \left(1 + \frac{k_{ri}^2}{k_z^2}\mathcal{R}^2 + E\mathcal{R}^4\right)\xi_r = 0, \tag{23}$$

其中

$$\mathcal{R} = k_\alpha r, \tag{24}$$

$$k_\alpha \equiv k_z(1 - \alpha^2)^{1/2}, \tag{25}$$

$$\alpha^2 \equiv \frac{4A^2\omega_{Ai}^2}{\mu_0\rho_i(\omega^2 - \omega_{Ai}^2)^2} + \frac{\Omega_i^2A_V^2}{(\omega^2 - \omega_{Ai}^2)^2} + \frac{2\Omega_i\omega_{Ai}AA_V}{\mu_0^{1/2}\rho_i^{1/2}(\omega^2 - \omega_{Ai}^2)^2}, \tag{26}$$

$$E \equiv \frac{\rho_i^2k_{ri}^2Q_i^2 - C_1^2}{D_i^2k_z^2(1-\alpha^2)^2r^2}, \tag{27}$$

$$k_{ri}^2 \equiv -(n_i^2 - k_z^2)\left(=\frac{(\omega_{si}^2 - \Omega_i^2)(\omega_{Ai}^2 - \Omega_i^2)}{(v_{Ai}^2 + v_{si}^2)(\omega_{ci}^2 - \Omega_i^2)}\right). \tag{28}$$

在此，我们定义了频率 $\omega_{s(i,e)} = kv^{s(i,e)}$。方程 (23) 的拉格朗日位移的径向分量 ξ 在磁通管 ($r \leqslant r_i$) 对于疏散波模 ($m = 0$) 如下所示 (Giagkiozis 等人 2015，2016)：

$$\xi_{ri}(s) = A_i\frac{s^{1/2}}{E^{1/4}}e^{-s/2}M(a, b; s), \tag{29}$$

其中 A_i 是一个常数，并且 $M(.)$ 是库默函数 (阿布拉莫维茨与斯特冈 2012)。利用方程 (29) 代入方程 18(a) 可以得到磁通管内部的总压强欧拉扰动关系磁通管中可以表示为

$$\delta P_{Ti}(s) = A_ie^{-s/2}\left(\frac{k_aD_i}{n_i^2 - k_z^2}\right)\left[\left(\frac{n_i + k_z}{k_z}\right)sM(a, b; s) - 2M(a, b-1; s)\right], \tag{30}$$

其中

$$a \equiv 1 + \frac{k_{ri}^2}{4k_z^2 E^{1/2}}, \quad b = 2, \quad s \equiv k_\alpha^2 E^{1/2} r^2. \tag{31}$$

2.4. Solution Outside the Flux Tube

现在我们确定方程 (20) 在磁通管的外部区域中。系数由方程 (19) 对于轴对称模 ($m = 0$) 使用磁通管外部区域中的参数为

$$\mathcal{D}_e \equiv \rho_e(\Omega_e^2 - \omega_{Ae}^2), \tag{32a}$$

$$C_1 \equiv \left(\frac{2n_e^2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2}{\mu_0} + \frac{2n_e^2 B_0 A A_V \zeta_{B_z}\zeta_{B_\phi}\zeta_{V_\phi} r_i^2}{\Omega_e \mu_0} - \rho_e n_e^2(\omega_{Ae}^2 - \Omega_e^2)A_V \zeta_{V_\phi} r_i\right)\frac{1}{r}, \tag{32b}$$

$$C_2 \equiv n_e^2 - k_z^2, \tag{32c}$$

$$C_3 \equiv \rho_e^2\left((\Omega_e^2 - \omega_{Ae}^2)^2 + Q^2 - 4\left(\frac{\omega_{Ae}^2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2}{\mu_0\rho_e} + \Omega_e^2\zeta_{v_\phi}^2 A_v^2 r_i^2 + \frac{2\Omega_e\omega_{Ae}\zeta_{B_\phi}\zeta_{V_\phi} A A_V r_i^2 v_{\phi e}}{\mu_0^{1/2}\rho_e^{1/2}}\right)\frac{1}{r^2}\right), \tag{32d}$$

$$\begin{aligned} Q_e^2 \equiv \Bigg(&\frac{4n_e^2\zeta_{B_\phi}^4 A^4 r_i^4}{\mu_0^2\rho_e^2} + n_e^2\zeta_{v_\phi}^4 A_v^4 r_i^4 - \frac{2n_e^2\omega_{Ae}^2\zeta_{v_\phi}^4 A_V^4 r_i^4}{\Omega_e^2} + \frac{n_e^2\omega_{Ae}^4\zeta_{V_\phi}^4 A_V^4 r_i^4}{\Omega_e^4} \\ &+ \frac{4(1-\Omega_e^2)n_e^2\omega_{Ae}\zeta_{B_\phi}\zeta_{V_\phi}^3 A A_V^3 r_i^4}{\Omega_e^3\mu_0^{1/2}\rho_e^{1/2}r_e^4} + \frac{8n_e^2\omega_{Ae}\zeta_{B_\phi}^3\zeta_{V_\phi} A^3 A_V r_i^4}{\Omega_e\mu_0^{3/2}\rho_e^{3/2}} - \frac{4n_e^2\omega_{Ae}^2\zeta_{B_\phi}^2\zeta_{V_\phi}^2 A^2 A_V^2 r_i^4}{\mu_0\rho_e}\Bigg)\frac{1}{r^2}, \end{aligned} \tag{32e}$$

$$\omega_{fe} \equiv k_z v_{ze}, \quad \Omega_e = \omega - \omega_{fe}. \tag{32f}$$

因此，微分方程(20) 控制磁通管外部的径向位移的 磁通管变为 s

$$r^2\frac{d^2\ \xi_r}{dr^2} + r\frac{d\ \xi_r}{dr} - (k_{re}r^2 + \nu^2)\xi_r = 0. \tag{33}$$

该方程的解 具有物理上可接受的行为，即在径向坐标取较大值时趋于零 is

$$\xi_{re}(r) = A_e K_\nu(k_{re}r). \tag{34}$$

此处 $K(.)$ 是修正的第二类贝塞尔函数 (阿布拉莫维茨与斯特冈 2012)。将解 (34) 代入方程 18(a)，可得到磁通管外部总压强的欧拉扰动为

$$\delta P_{Te}(r) = A_e\left[\left(\frac{\mu_0(1-\nu)D_e - 2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2 n_e^2}{\mu_0 r(k_z^2 - n_e^2)}\right)K_\nu(k_{re}r) - \frac{D_e}{k_{re}}K_{\nu-1}(k_{re}r)\right]. \tag{35}$$

在方程 (34) 和 (35)中，使用以下定义：

$$k_{re}^2 \equiv -(n_e^2 - k_z^2)\left\{=\frac{(\omega_{se}^2 - \Omega_e^2)(\omega_{Ae}^2 - \Omega_e^2)}{(v_{Ae}^2 + v_{se}^2)(\omega_{ce}^2 - \Omega_e^2)}\right\}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \nu^2(r) \equiv 1 + \frac{1}{D_e^2}\Bigg(&\rho_e^2 k_{re}^2 Q_e^2 - 4k_{re}^2\rho_e^2\left(\frac{\omega_{Ae}^2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2}{\mu_0\rho_e} + \Omega_e^2 v_{\phi e}^2 + \frac{2\Omega_e\omega_{Ae}\zeta_{B_\phi}\zeta_{V_\phi} A A_V r_i^2}{\mu_0^{1/2}\rho_e^{1/2}}\right) \\ &+ \left(\frac{2n_e^2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2}{\mu_0} + \frac{2n_e^2 B_0 A A_V \zeta_{B_z}\zeta_{B_\phi}\zeta_{V_\phi} r_i^2}{\Omega_e\mu_0} - \rho_e n_e^2(\omega_{Ae}^2 - \Omega_e^2)\zeta_{V_\phi} A_V r_i\right)^2 \\ &+ D_e\left(\frac{2n_e^2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2}{\mu_0} + \frac{2n_e^2 B_0 A A_V \zeta_{B_z}\zeta_{B_\phi}\zeta_{V_\phi} r_i^2}{\Omega_e\mu_0} - \rho_e n_e^2(\omega_{Ae}^2 - \Omega_e^2)\zeta_{V_\phi} A_V r_i\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{37}$$

如果 $v_\phi = 0$，这个方程简化为

$$\nu^2(r) \equiv 1 + 2\frac{\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2}{\mu_0^2 D_e^2}(2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2 n_e^2 k_z^2 + \mu_0\rho_e[\omega_{Ae}^2(3n_e^2 - k_z^2) - \omega^2(n_e^2 + k_z^2)]). \tag{38}$$

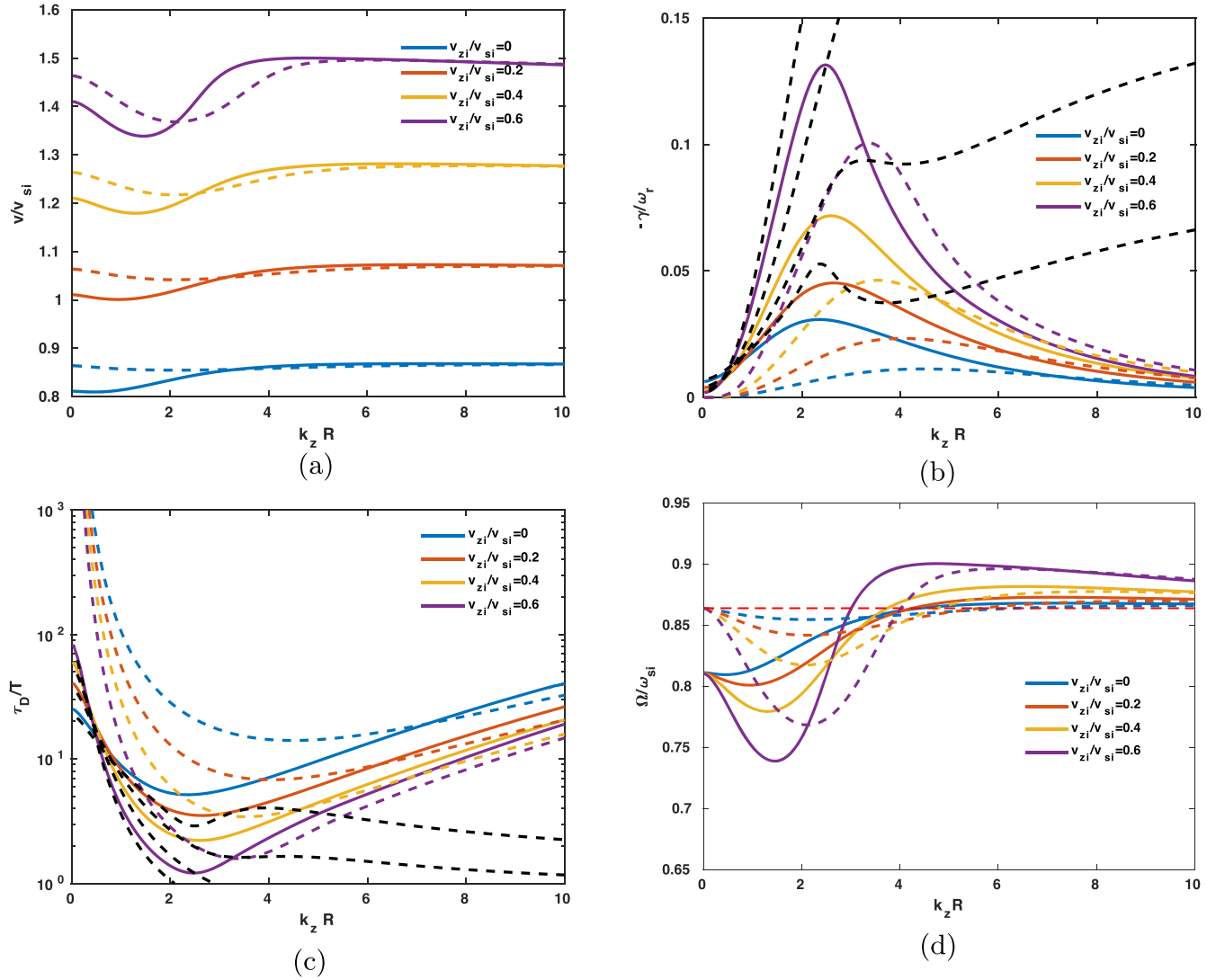

图 3. (a) 相速度 $v/v_{si} \equiv \omega_r/\omega_{si}$，(b) 阻尼率与频率之比 $-\gamma/\omega_r$，(c) 阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega/(2\pi|\gamma|)$，以及 (d) 多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 随 k_zR 的变化，其中 $l/R = 0.1$；图中展示了不同流动参数下的慢表面扭曲模。虚线和实线分别对应 $\phi_i/\ z_i = 0$B B 和 $\phi_i/\ z_i = 0$ 3B B 的情况。黑色虚线表示根据方程 (55) 得到的解析结果。磁通管的其他参数为 $v_{Ai} = 12$ km s^{-1}、$v_{Ae} = 0$ km s^{-1}（即 $B_{ze} = 0$）、$v_{ze} = 0$ km s^{-1}、$v_{si} = 7$ km s^{-1}、$v_{se} = 11.5$ km s^{-1}、$v_{ci} = 6.0464$ km s^{-1} (; 0.8638 v_{si})，以及 $v_{ce} = 0$km s^{-1}。

在流速趋于零的极限下，第 2.3 节和第 2.4 节中得到的所有解均归结为 Giagkiozis 等人确定的相应解(2015年) 以及 Sadeghi 和 Karami (2019)确定的相应解；而在磁场扭转趋于零的极限下，所述解则归结为 Sadeghi 等人 (2021年)确定的相应解。

3. 色散关系

3.1. 无非均匀层情况下的色散关系

现在，我们利用磁通管边界处适当的边界条件，推导出不存在非均匀层时疏散波模的色散关系。径向位移以及总压强的拉格朗日扰动必须在磁通管边界处连续

$$\xi_{ri}|_{r=R} = \xi_{re}|_{r=R}, \tag{39a}$$

$$\left(\delta P_{Ti} - \frac{B_{\phi i}^2}{\mu_0 r}\,\xi_{ri}\right)\Bigg|_{r=R} = \left(\delta P_{Te} - \frac{B_{\phi e}^2}{\mu_0 r}\,\xi_{re}\right)\Bigg|_{r=R}, \tag{39b}$$

其中 R 是管半径。将方程 (29)、 (29)、 (30)和 (35) 给出的解代入上述边界条件，经过一些代数运算后，可得到如下色散关系：

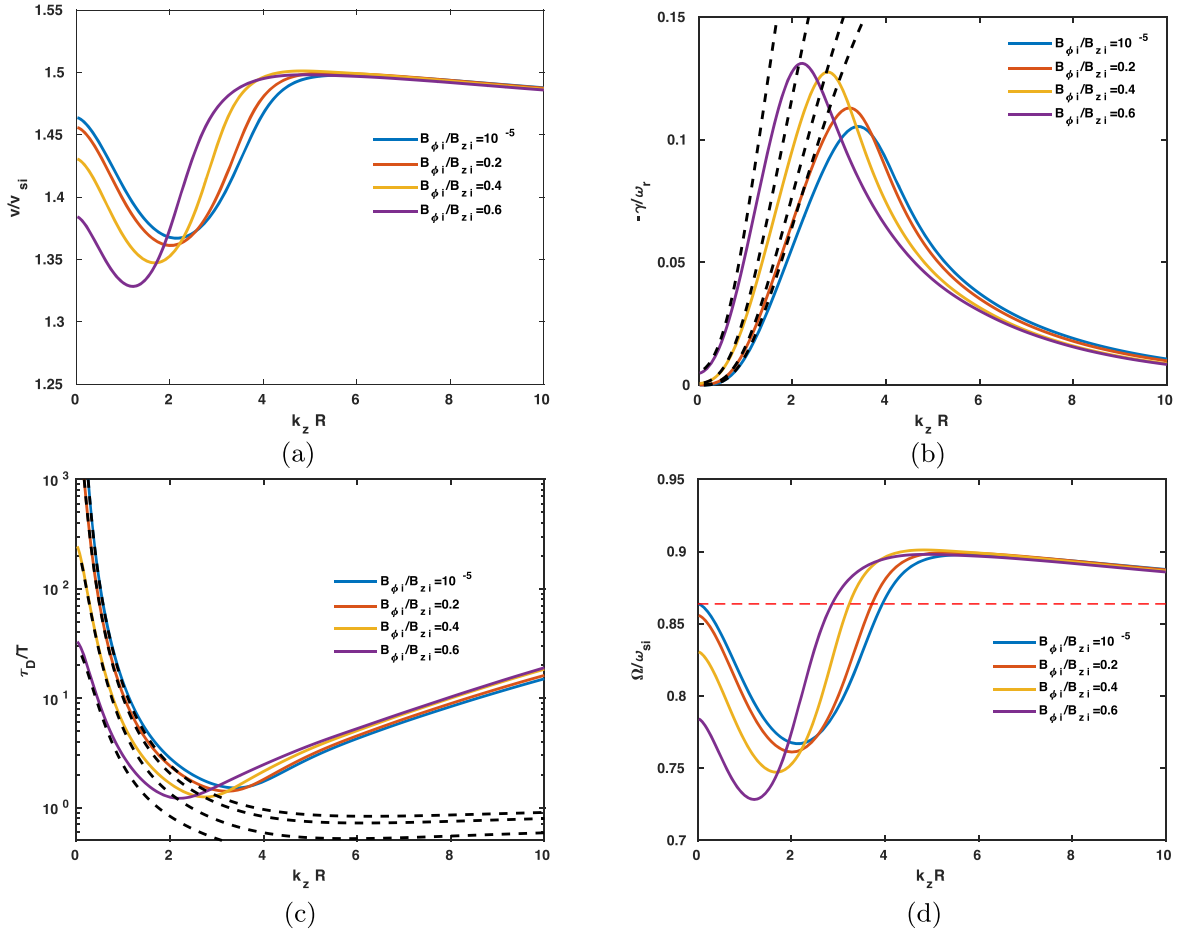

图4. 对于扭转参数的不同取值，慢表面扭曲模的 (a) 相速度 $v/v_{si} \equiv \omega_r/\omega_{si}$、(b) 阻尼率与频率之比 $-\gamma/\omega_r$、(c) 阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega/(2\pi|\gamma|)$ 以及 (d) 多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 随 k_zR 的变化，其中 $l/R = 0.1$，流动参数 $v_{zi}/v_{si} = 0.6$。黑色虚线表示由方程 (55) 得到的解析结果。磁通管的其他参数与图 3 中相同。

$$-\frac{\mu_0 D_i}{k_{ri}^2}\left[\left(\frac{n_i + k_z}{k_z}\right)s - 2\frac{M(a,b,s-1,\ )}{M(a,b,s,\ )}\right] = \frac{\mu_0 D_e}{k_{re}^2}\left(1 - \nu - \frac{k_{re}RK_\nu k_{re}R(\quad)}{K_\nu(k_{re}\quad)}\right) - \left(1 + \frac{2n_e^2}{k_{re}^2}\right)\zeta_{B_\phi}^2 A^2R^2 + A^2R^2. \tag{40}$$

这里，我们对这一色散关系进行数值求解。在图1中，我们绘制了由方程（40）得到的慢表面扭曲模的多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 与k_zR的关系。图（a）展示了磁扭曲参数和流动参数$v_{zi}/v_{si} = 0.4$的各种取值。该图表明，在给定流动下，随着磁扭曲参数的增加，多普勒频移相速度降低。此外，对于较小的磁扭曲（即 $B_{\phi i}/B_{zi} = 10^{-5}$），结果与Sadeghi 等（2021）的结果一致。图（b）表明，在给定磁扭曲（$B_{\phi i}/B_{zi} = 0.3$）下，随着流动参数的增加，多普勒频移相速度的值降低，并且在较大的k_zR 处，降低速率更大。该图显示，对于无流动的情况（即 $v_{zi}/v_{si} = 0$），恢复了 Sadeghi 和 Karami（2019）的结果（虚线）。

3.2. 存在非均匀层和共振吸收时的色散关系

根据Sakurai 等人 (1991)，我们无需求解微分方程 (20) 在非均匀层中。根据 Sakurai 等人 (1991)的结果，我们可以利用如下连接公式连接 磁通管内外的解：

$$[\xi_r] \equiv \xi_{re}(r_e) - \xi_{ri}(r_i), = \frac{-i\pi\mu\omega_c^4}{|\Delta_c| r B^2 \omega_A^2}\bigg|_{r=r_c}\left(\delta p_{T_i} - \frac{Q_i \xi_{ri}}{\omega_c^2}\right)\bigg|_{r=r_i}, \tag{41a}$$

$$[\delta p_T] \equiv \delta p_{T_e}(r_e) - \delta p_{T_i}(r_i), = \frac{-i2\pi\omega_c^2 Q}{|\Delta_c| r B^2 \omega_A^2}\bigg|_{r=r_c}\left(\delta p_{T_i} - \frac{Q_i \xi_{ri}}{\omega_c^2}\right)\bigg|_{r=r_i}, \tag{41b}$$

其中 $[\xi_r]$ 和 $[\quad]\delta p_T$ 分别表示穿过非均匀(共振) 层时拉格朗日径向位移和总压强扰动的跳跃条件。下标c 表示慢共振的位置($r = r_c$)以及 | | ( )D o ωΩ −c d dr c ² ² 。 =r rc

将方程(20) 的解代入方程(29) 和30)中，并代入方程(34) 和(35)中，便可得到磁通管连接公式flux tube in theconnection formulae 41(a)和(b)，以及存在磁场扭曲和等离子体流时慢表面 sausage 波的色散关系：flow canbe obtained as follows:

$$D_{\mathrm{AR}} + iD_{\mathrm{AI}} = 0, \tag{42}$$

其中 D_{AR} 和 D_{AI} 由下式给出

$$D_{\mathrm{AR}} = \rho_i(\Omega_i^2 - \omega_{Ai}^2) - r_i\rho_e(\Omega_e^2 - \omega_{Ae}^2)\frac{k_{ri}}{k_{re}}\mathcal{Q}, \tag{43}$$

$$D_{\mathrm{AI}} = \frac{\pi\rho_i\rho_e k_z^2}{k_{re}\rho_c|\Delta_c|}\bigg|_{r=r_c}\left(\frac{v_{sc}^2}{v_{Ac}^2 + v_{sc}^2}\right)^2 \times ((\Omega_i^2 - \omega_{Ai}^2) + \mathcal{Z})(\Omega_e^2 - \omega_{Ae}^2)\mathcal{G}, \tag{44}$$

其中

$$\mathcal{Q} \equiv -k_{ri}r_i\frac{\left(\frac{\mu_0 D_e(1-v) - 2\zeta_{B_\phi}Ar_in_e^2}{D_e\mu_0 r_e k_{re}} - \frac{K_{v-1}(k_{re}r_e)}{K_v(k_{re}r_e)}\right)}{\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]}, \tag{45}$$

$$\mathcal{G} \equiv \left(-\frac{Qk_{re}}{\omega_c^2 D_e}\bigg|_{r=r_c} + \frac{\mu_0(1-v)D_e - 2\zeta_{B_\phi}^2 A^2 r_i^2 n_e^2}{\mu_0 r_e k_{re} D_e} - \frac{K_{v-1}(k_{re}r_e)}{K_v(k_{re}r_e)}\right), \tag{46}$$

$$\mathcal{Z} \equiv \frac{Q_i^2 k_{ri}^2}{\omega_{ci}^2\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]}. \tag{47}$$

利用给出密度、磁场和等离子体压力背景值的方程，我们将非均匀层（$r_i < r < r_e$）中的声速、阿尔芬速度和尖峰速度定义为

$$v_s^2 = v_{si}^2\left[\frac{1 + \delta(\zeta_\rho v_{sei}^2 - 1) + \Lambda}{1 + \delta(\zeta_\rho - 1)}\right], \tag{48}$$

$$v_A^2 = v_{Ai}^2\left[\frac{1 + \delta(\zeta_\rho v_{Aei}^2 - 1)}{1 + \delta(\zeta_\rho - 1)}\right], \tag{49}$$

$$v_c^2 = \frac{v_{si}^2 v_{Ai}^2}{[1 + \delta(\zeta_\rho - 1)]} \times \frac{[1 + \delta(\zeta_\rho v_{sei}^2 - 1) + \Lambda][1 + \delta(\zeta_\rho v_{Aei}^2 - 1)]}{[v_{si}^2(1 + \delta(\zeta_\rho v_{sei}^2 - 1) + \Lambda) + v_{Ai}^2(1 + \delta(\zeta_\rho v_{Aei}^2 - 1))]}, \tag{50}$$

其中 δ o $- -rrrr^{i}{}_{ei}$，$\zeta_\rho \equiv \rho_e/\rho_i$, $v_{sei} \equiv v_{se}/v_{si}$, $v_{Aei} \equiv v_{Ae}/v_{Ai}$ 和

$$\Lambda \equiv \frac{\gamma}{v_{si}^2}[A_3(r^2 - \delta r_e^2) + A_4(r^3 - \delta r_e^3) + A_5(\ln(r/r_i) - \delta\ln(r_e/r_i)) + A_6(\ln(1 + \delta(\zeta_{B_z}^2 - 1)) - \delta\ln(1 + (\zeta_{B_z}^2 - 1))]. \tag{51}$$

在光球条件下，参数 Λ 可简化为

$$\Lambda \equiv \frac{\gamma}{v_{si}^2}[A_3(r^2 - \delta r_e^2) + A_4(r^3 - \delta r_e^3) + A_5(\ln(r/r_i) - \delta\ln(r_e/r_i))]. \tag{52}$$

在图 2 中，我们绘制了过渡层内背景声速、阿尔fvén速度和尖峰速度随 δ 变化的关系。如图1所示，多普勒频移振荡频率小于 v_{si}，因此慢波和阿尔fvén共振阻尼的条件都满足。但正如我们在第2.2节中所讨论的，我们忽略阿尔fvén共振吸收。请注意，尖点共振发生在多普勒频移频率等于尖点频率的位置，即 $\Omega = \omega_c = k_z v_c$。与 Yu 等人（2017b）以及 Sadeghi & Karami（2019）类似，尖点共振点的位置 r_c 可通过令方程（50）中的 v_c 等于 Ω/k_z得到。

并将其写成关于δ δo = =– – c r r r r r r r c c i e i 的代数方程，如下所示：

$$\mathcal{A}\delta_c^4 + \mathcal{B}\delta_c^3 + \mathcal{C}\delta_c^2 + \mathcal{E}\delta_c + \mathcal{F} = 0. \tag{53}$$

常数 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$和 $\mathcal{F}$见附录 B。方程 (42) 和 (53) 可通过数值方法同时求解，从而得到波的振荡频率、阻尼率和共振点。

3.3. 弱阻尼极限—慢连续谱

在弱阻尼极限下，可以根据色散关系确定阻尼率的解析表达式 (42)。注意，在方程 (43) 和 (44) 中，我们有复多普勒频移频率 $\Omega = \omega - k_z v_z$ 其中 $\omega = \omega_r + i\gamma$，其中 ω_r 和 γ分别为尖点频率和阻尼率。弱阻尼极限下的阻尼率 γ，即 $\gamma \ll \omega_r$，可表示为(Goossens 等人 1992)

$$\gamma = -D_{\rm AI}(\omega_r)\left(\frac{\partial D_{\rm AR}}{\partial \omega}\bigg|_{\omega_r}\right)^{-1}. \tag{54}$$

使用方程(54)，我们得到阻尼率的解析关系 γ (参见附录C)，对于慢表面 sausage 波如下：

$$\begin{aligned}\gamma = &-\frac{\pi\rho_e k_z^2}{k_{re}\rho_c|\Delta_c|}\bigg|_{r=r_c}\left(\frac{v_s^2}{v_A^2+v_s^2}\right)^2\\ &\times\frac{((\Omega_i^2-\omega_{Ai}^2)+\mathcal{Z})(\Omega_e^2-\omega_{Ae}^2)^2\mathcal{G}}{2\left(\Omega_i-\chi\Omega_e\frac{k_{ri}}{k_{re}}\mathcal{Q}\right)-\Omega_e\chi\mathcal{T}},\end{aligned} \tag{55}$$

其中，物理量 $\mathcal{T}$由方程(C14)给出。注意，在无扭转的极限下，即$B_{\phi i} = B_{\phi e} = 0$，方程(45)、(46)、(47)、(C7)和(C8) 可化简为

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \mathcal{Q}_0 \equiv \frac{I_0'(x)K_0(y)}{I_0(x)K_0'(y)},\\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0 \equiv \frac{K_0(y)}{K_0'(y)},\\ \mathcal{Z} &= 0,\\ \mathcal{P} &= \mathcal{P}_0 \equiv \left(\frac{I_0''(x)}{I_0(x)} - \frac{I_0'(x)^2}{I_0(x)^2}\right)\frac{K_0(y)}{K_0'(y)},\\ \mathcal{S} &= \mathcal{S}_0 \equiv \left(1 - \frac{K_0''(y)K_0(y)}{K_0'(y)^2}\right)\frac{I_0'(x)}{I_0(x)},\end{aligned} \tag{56}$$

其中 x =k$_r$i$_r$i 和 =y k r$_{re}$ e，并且我们还使用了如下关系

$$a \lim_{\to\infty} \frac{M(a,\, b-1,\, s)}{M(a,\, b,\, s)} = \frac{x}{2}\frac{I_0(x)}{I_1(x)}. \tag{57}$$

对于直磁场的情况，方程(56) 和(57) 可用于简化 $\mathcal{T}$因此，方程(55) 给出的阻尼率可化简为 Sadeghi 等人（(40)）中的方程，适用于存在流动时的慢 sausage 表面模。（2021年）

4. 数值结果

本节中，我们利用磁孔条件下色散关系（42）的数值解，求出慢表面扭曲模的频率和阻尼率。本文不关注周期比 P$_1$/P$_2$ ，因为它与驻波情形相关，而我们研究的是传播波。参照 Grant 等（2015），我们设定磁通管参数为 v$_{Ai}$ = 12 km s^{-1}、v$_{Ae}$ = 0 km s^{-1} （即 B$_{\phi e}$ = B$_{ze}$ = 0）、v$_{si}$ = 7 km s^{-1}、v$_{se}$ = 11.5 km s^{-1}、v$_{ci}$ = 6.0464 km s^{-1} (；0.8638 v$_{si}$)以及 v$_{ce}$ = 0 km s^{-1}。数值结果见图 3–7。

图 3 表示了对于不同流动参数 v$_{zi}$/v$_{si}$ = (0, 0.2, 0.4, 0.6) 的取值以及非均匀层厚度 l/ R = 0.1 时，慢表面扭曲模的相速度（或归一化频率）v/v$_{si}$ = ω_r/k$_z$v$_{si}$ ≡ ω_r/ω_{si}、阻尼率与频率之比 $-\gamma/\omega_r$、阻尼时间与周期之比 τ_D/T = ω/(2$\pi|\gamma|$) 以及多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 随 k$_z$R 的变化。图 3 中的虚线和实线分别对应 $_{\phi_i}$ $_{zi}$ = 0B B / 和 $_{\phi_i}$ $_{zi}$ = 0 3B B ./ 的情况。黑色虚线表示根据弱阻尼极限下的方程（55）得到的结果。图中显示：（i）相速度 v/v$_{si}$ 随流动参数 v$_{zi}$/v$_{si}$ 的增加而增大。（ii）随着流速增加，$-\gamma/\omega_r$ 的最大值也增大。此外，在扭转磁通管中，$-\gamma/\omega_r$ 的最小值出现在比无扭转磁通管更小的 k$_z$R 处。（iii）流速增加时，阻尼时间与周期之比的最小值减小。（iv）等离子体流对减小阻尼时间与振荡周期之比的作用在无扭转磁通管中更加显著；例如，对于 τ_D/T 而

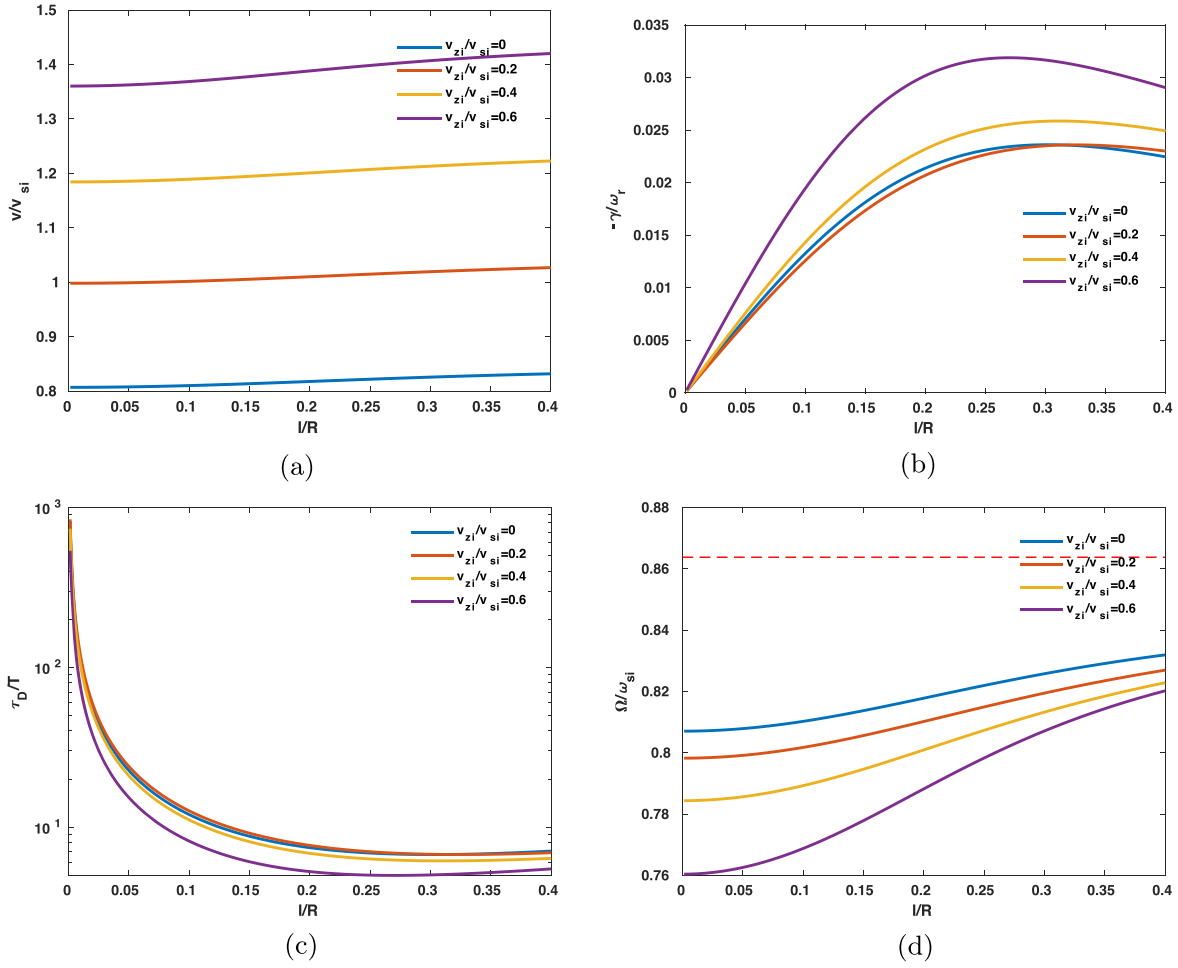

图5. (a) 相速度 $v/v_{si} \equiv \omega_r/\omega_{si}$，(b) 阻尼率与频率之比 $-\gamma/\omega_r$，(c) 阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega/(2\pi|\gamma|)$，以及 (d) 多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 随 l/R 的变化；其中慢表面扭曲模的 $k_zR = 0.7$，$\phi_i = B_i/B_{zi} = 0.5$，流动参数各不相同。磁通管的其他参数与图 3 相同。

$v_{zi}/v_{si} = 0.6$ 和 $\phi_i = 0.5 B_i/B_{zi}$。/ 减少 ~45%；但对于 $v_{zi}/v_{si} = 0.6$ 和 $\phi_i = 0 B_i/B_{zi}$ / 减少 ~88%，与静态磁通管的情况相比。（v）多普勒频移相速度的最小值 Ω/ω_{si} 随着 流动参数的增加而减小。

图4展示了不同扭转参数 $\phi_i = B_i/B_{zi} = 0, 0.2, 0.4, 0.6$、非均匀层厚度 $l/R = 0.1$ 以及流动参数 $v_{zi}/v_{si} = 0.6$ 下，慢表面扭曲模的相速度（或归一化频率）$v/v_{si} \equiv \omega_r/\omega_{si}$、阻尼率与频率之比 $-\gamma/\omega_r$、阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega/(2\pi|\gamma|)$以及多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 随 k_zR 的变化。该图表明：(i) 随着扭转参数增大，相速度 v/v_{si} 的最小值减小，并向较小的 k_zR 移动。(ii) 扭转参数增大时，$-\gamma/\omega_r$ 的最大值增大，并向较小的 k_zR 移动。(iii) 随着扭转参数增大，阻尼时间与周期之比的最小值减小；我们的数值计算表明，静态管中的降幅更大。例如，与无扭转磁通管的情况相比，当 $v_{zi}/v_{si} = 0.6$ 且 $\phi_i = 0.4 B_i/B_{zi}$ 时，τ_D/T 的最小值降低 ~23%；而当 $v_{zi}/v_{si} = 0$ 且 $\phi_i = 0.4 B_i/B_{zi}$ 时，则降低 ~49%。

在图5和图6中，我们绘制了不同流动参数 $v_{zi}/v_{si} = (0、0.2、0.4、0.6)$下，具有磁场扭曲 $\phi_i = 0.5 B_i/B_{zi}$ 和 $k_zR = (0.7、2)$时，v/v_{si}、$-\gamma/\omega_r/T$ 以及 Ω/ω_{si} 随非均匀层厚度 l/R 变化的关系。该图表明：(i) 对于给定的流动参数 v_{zi}/v_{si}，随着 l/R 增大，相速度 v/v_{si} 和多普勒频移相速度 Ω/ω_{si} 的值增加。(ii) 随着 l/R 增大，阻尼率与振荡频率之比 $-\gamma/\omega_r$ 达到最大值，随后减小。(iii) 当 v_{zi}/v_{si} 增大时，$-\gamma/\omega_r$ 的最大值增大，并向较小的 l/R 移动。例如，对于 $\phi_i = 0.5 B_i/B_{zi}$ 和 $k_zR = 0.7$ 的情况，当流动参数 v_{zi}/v_{si} 从 0 增大到 0.6 时，$-\gamma/\omega_r$ 的值增加了 ~26%；对于 $\phi_i = 0.5 B_i/B_{zi}$ 和 $k_zR = 2$ 的情况，与无扭转情况相比，该值增加了 ~71%。

图7的面板(a)和(b)分别展示了阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega/(2\pi|\gamma|)$ 的最小值随流速 v_{zi}/v_{si} 和扭转参数 B_i/B_{zi} 的变化，其中非均匀层厚度为 $l/R = 0.1$。面板(a)展示了不同扭转参数（$\phi_i = B_i/B_{zi} = 0, 0.3, 0.5$）下的结果。该面板表明，对于较小的 v_{zi}/v_{si}，扭转的影响很重要；但对于较大的流动参数（$v_{zi}/v_{si} > 0.6$），磁场扭曲的影响可以忽略不计。面板(b)展示了不同流动参数 $v_{zi}/v_{si} =$（0，0.2，0.4，0.6，0.8，1）下，$\tau_D/T = \omega/(2\pi|\gamma|)$ 随扭转参数的变化。该面板表明，对于较小的 B_i/B_{zi}，流动参数的影响要重要得多；但对于较大的 B_i/B_{zi}，流动的影响则较小。需要指出的是，为绘制图7，采用了观测中的阻尼时间与周期之比的最小值。

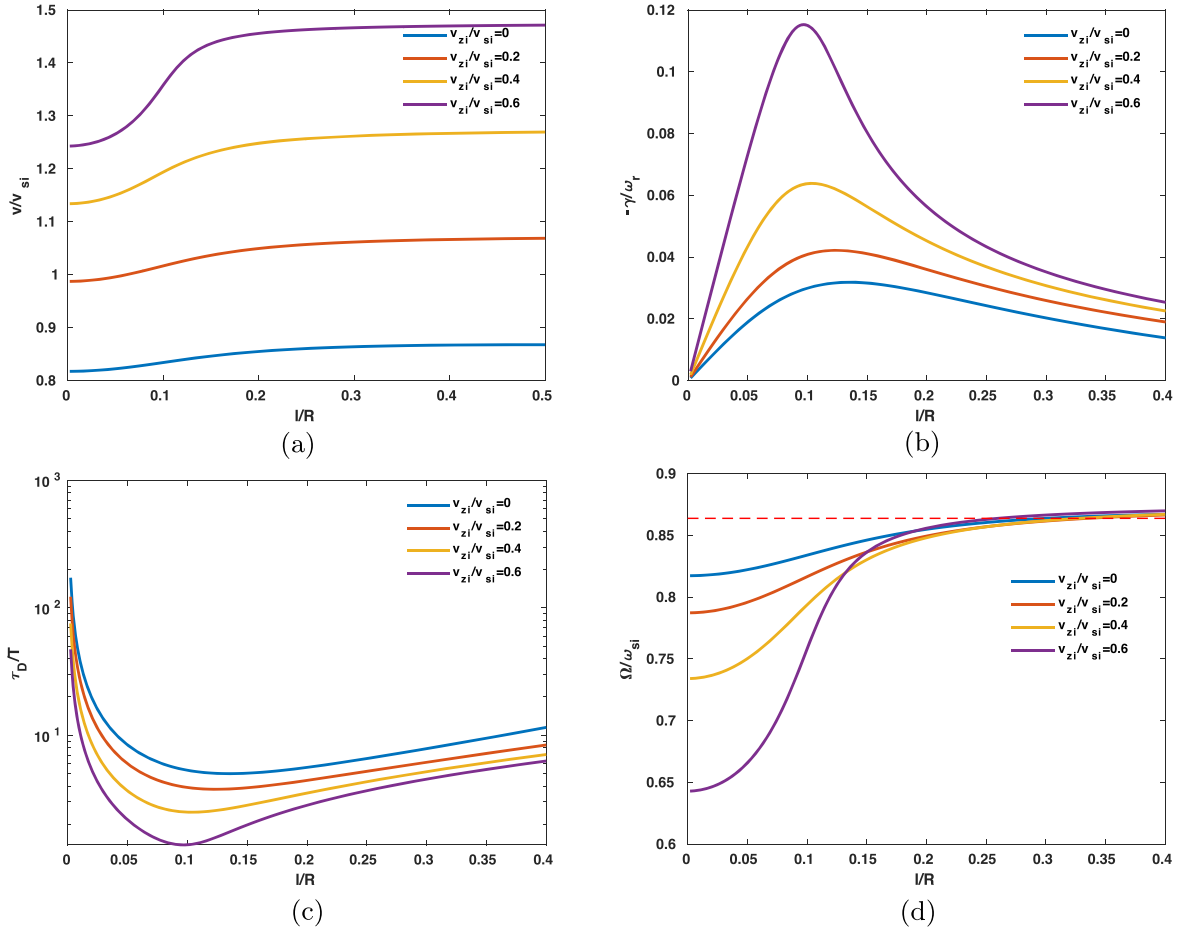

图6。 与图 5相同，但针对 $k_zR = 2$。

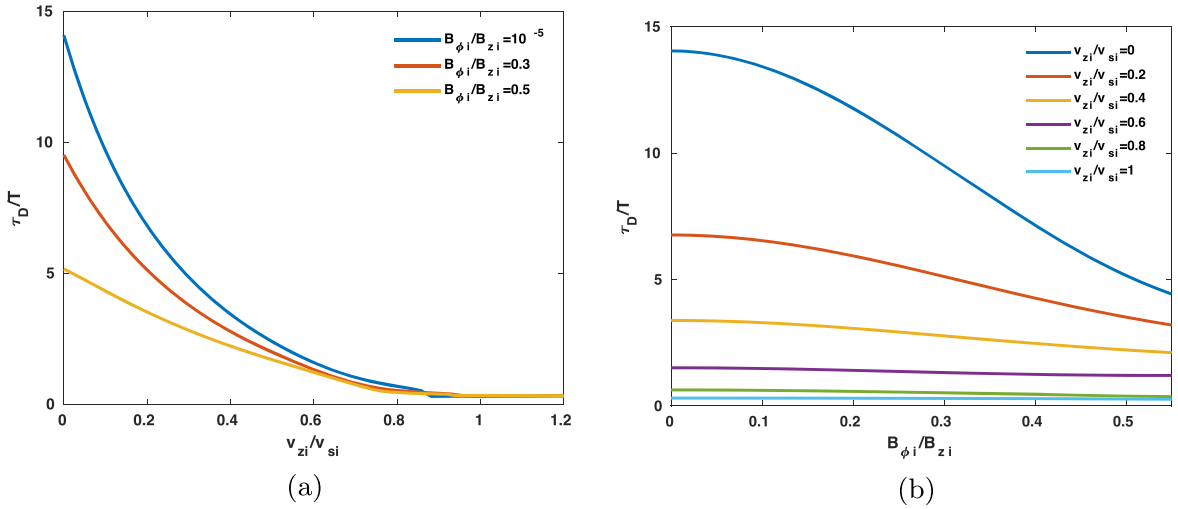

图 7. 慢表面扭曲模的阻尼时间与周期之比的最小值（τ_D/T）与 (a) 流速（v_{zi}/v_{si}）和 (b) 磁场扭曲（$B_{\phi i}/B_{zi}$）的关系，其中 l/R ＝0.1。此处，$k_zR \leqslant 5$，其他参数与图 3 中相同。

波长区域，即，$k_zR \leqslant 5$，被使用。在等离子体流动和磁场扭曲同时存在时，阻尼时间与振荡周期之比可达到约 0.27，这与Sadeghi 等人(2021年)所得的结果并没有太大不同。

5. 结论

本文研究了太阳光球（或磁孔）条件下，磁场扭曲和等离子体流对磁通管中慢速 sausage 波的影响。我们考虑了一个圆柱形磁通管，其中密度，

纵向磁场和等离子体流在磁通管内外均为常数，但密度、磁场的纵向分量和方位分量以及等离子体流在非均匀层中连续变化。利用磁通管核心区域和外部区域的 MHD 方程解以及连接公式，我们得到了色散关系（42），并对其进行了数值求解，计算了磁孔条件下慢表面扭曲模的相速度（或归一化频率）$v/v_{si} \equiv \omega_r/\omega_{si}$、阻尼率与频率之比 $-\gamma/\omega_r$、阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega_r/(2\pi|\gamma|)$，以及多普勒频移后的频率 Ω/ω_{si}。色散关系已通过数值方法求解。数值结果表明：

1. 对于给定的非均匀层厚度 l/R 和扭转参数 fB B$_i$ $_{zi}$/，随着流动参数 v_{zi}/v_{si} 的增加，（i）多普勒频移后的频率 Ω/ω_{si} 和阻尼时间与周期之比 $\tau_D/T = \omega_r/(2\pi|\gamma|)$ 的最小值均减小；（ii）$-\gamma/\omega_r$ 的最大值增大。2. 等离子体流对减小阻尼时间与振荡周期之比的影响在无扭转磁通管中更强，即随着扭转参数增加，等离子体流的影响变得不那么重要。3. 磁场扭曲对减小阻尼时间与振荡周期之比的影响，在流动参数较小的磁通管中更加显著。例如，在流动参数为 $v_{zi}/v_{si} = 0.2$ 的磁通管中，当扭转参数 fB B$_i$ $_{zi}$/ 从 0.1 增加到 0.3 时，τ_D/T 的最小值相对于无扭转磁通管降低 ∼49%。但是，在流动参数为 $v_{zi}/v_{si} = 0.6$ 的磁通管中，当扭转参数 fB B$_i$ $_{zi}$/ 从 0.1 增加到 0.3 时，τ_D/T 的最小值相对于无扭转磁通管降低 ∼17%。4. 对于 l/R = 0.1 的情况，当流动参数 v_{zi}/v_{si} 从 0 变为 1 时，τ_D/T 在 $_{\phi_i}$ $_{zi}$ = 0 3B B ./ 的情况下，其最小值降低 ∼97%。当流动参数 v_{zi}/v_{si} 从 0 变为 1 时，该值在 $_{\phi_i}$ $_{zi}$ = 0B B / 的情况下降低 ∼98%。

作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

附录 A 背景气体压力常数

这里，方程中使用的参数（10）用于控制背景压力的径向变化，具体为

$$
\begin{aligned}
A_1 &= p_0 - \left(1 - \frac{\mu_0 \rho_i A_V^2}{2A^2}\right) A^2 r_i^2/\mu_0 - A_2 r_i - A_3 r_i^2 - A_4 r_i^3,\\
A_2 &\equiv -\frac{3A^2 r_i^2(\zeta_{B_\phi}^2 - 1) + B_{zi}^2(\zeta_{B_z}^2 - 1)}{2\mu_0 l} + \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2}{l^3(\zeta_{B_z}^2 - 1)^3}(-l(\zeta_{V_z} - 1)(\zeta_{B_z}^2 - 1)(2(-l)(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(\zeta_{B_z}^2 - 1)\\
&+ (\zeta_{V_z} - 1)(-l(\zeta_{B_z}^2 - 1) + (\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(l + 2r_i(\zeta_{B_z}^2 - 1))))\\
&+(\zeta_\rho - 1)(l^2(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(\zeta_{B_z}^2 - 1)^2 + 2l(\zeta_{V_z} - 1)(\zeta_{B_z}^2 - 1)(l(\zeta_{B_z}^2 - 1) + (\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(-l - 2r_i(\zeta_{B_z}^2 - 1)))\\
&+(\zeta_{V_z}^2 - 1)^2(-l(\zeta_{B_z}^2 - 1)(l + 2r_i(\zeta_{B_z}^2 - 1)) + (\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(l^2 + 2lr_i(\zeta_{B_z}^2 - 1) + 3r_i^2(\zeta_{B_z}^2 - 1)^2)))),\\
A_3 &\equiv \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2}{2l^3(\zeta_{B_z}^2 - 1)^2}(\zeta_{V_z} - 1)(l(\zeta_{V_z} - 1)(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(\zeta_{B_z}^2 - 1)\\
&+(\zeta_\rho - 1)(2l(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(\zeta_{B_z}^2 - 1) + (\zeta_{V_z} - 1)(l(\zeta_{B_z}^2 - 1) + (\zeta_{B_\phi}^2 - 1)(-l - 3r_i(\zeta_{B_z}^2 - 1))))),\\
A_4 &\equiv \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2(\zeta_\rho - 1)(\zeta_{V_z} - 1)^2(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)}{3l^3(\zeta_{B_z}^2 - 1)},\\
A_5 &\equiv -A^2 r_i^2/\mu_0\left(1 - \frac{r_i(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)}{(r_e - r_i)}\right) + \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2}{l^3(l - r_i(\zeta_{B_z}^2 - 1))}(l - r_i(\zeta_\rho - 1))(-l + r_i(\zeta_{V_z} - 1))^2(l - r_i(\zeta_{B_\phi}^2 - 1)),\\
A_6 &\equiv \rho_i A_V^2 r_i^2 \frac{l((\zeta_\rho - 1) - (\zeta_{B_z}^2 - 1))((\zeta_{V_z} - 1) - (\zeta_{B_z}^2 - 1))^2(-(\zeta_{B_\phi}^2 - 1) + (\zeta_{B_z}^2 - 1))}{(\zeta_{B_z}^2 - 1)^4(-l + r_i(\zeta_{B_z}^2 - 1))},\\
p_1 &= p_0 - \left(1 - \frac{\mu_0 \rho_i A_V^2}{2A^2}\right) A^2 r_i^2/\mu_0 + A_2(r_e - r_i) + A_3(r_e^2 - r_i^2) + A_4(r_e^3 - r_i^3) + A_5 \ln(r_e/r_i) + A_6 \ln(1 + (\zeta_{B_z}^2 - 1)).
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

磁通管边界处总压强的连续性，即磁通管内侧（$\mathrm{r}=\mathrm{r}_i$）和外侧（$\mathrm{r}=\mathrm{r}_e$）半径处的总压强连续性，已被用于将$\mathrm{A_i}$和 $\mathrm{p_1}$ 用其他常数表示。在光球条件下，这些参数可简化为

$$
\begin{aligned}
A_1 &= p_0 - \left(1 - \frac{\mu_0\rho_i A_V^2}{2A^2}\right)A^2 r_i^2/\mu_0 - A_2 r_i - A_3 r_i^2 - A_4 r_i^3,\\
A_2 &\equiv \frac{3A^2 r_i^2 + B_0^2}{2\mu_0 l} - \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2}{l^2}[(2r_i - 2l) - (\zeta_\rho - 1)(l + 4r_i) + 3r_i^2/l],\\
A_3 &\equiv \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2}{2l^3}(l + (\zeta_\rho - 1)(3r_i - 2l)),\\
A_4 &\equiv \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2(\zeta_\rho - 1)}{3l^3},\\
A_5 &\equiv -A^2 r_i^2/\mu_0\left(1 + \frac{r_i}{(r_e - r_i)}\right) + \frac{\rho_i A_V^2 r_i^2 r_e}{l^3}(l - r_i(\zeta_\rho - 1)),\\
A_6 &= 0,\\
p_1 &= p_0 - \left(1 - \frac{\mu_0\rho_i A_V^2}{2A^2}\right)A^2 r_i^2/\mu_0 + A_2(r_e - r_i) + A_3(r_e^2 - r_i^2) + A_4(r_e^3 - r_i^3) + A_5\ln(\quad)
\end{aligned}
\tag{A2}
$$

附录 B 共振位置

方程 (50) 可改写为关于 δ_c 的四阶方程，如下：

$$\mathcal{A}\delta_c^4 + \mathcal{B}\delta_c^3 + \mathcal{C}\delta_c^2 + \mathcal{E}\delta_c + \mathcal{F} = 0. \tag{B1}$$

常数 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 定义如下：

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\gamma A_4 l^3}{v_{Ai}^2 v_{si}^2}(v_c^2(\zeta_\rho - 1) - (\zeta_\rho v_{Ae}^2 - 1)), \tag{B2}$$

$$\mathcal{B} \equiv \frac{\gamma A_4 l^3}{v_{Ai}^2 v_{si}^2}(v_c^2 - 1) + \frac{\gamma}{2v_{Ai}^2 v_{si}^2}(v_c^2(\zeta_\rho - 1) - (\zeta_\rho v_{Ae}^2 - 1))\left(2A_3 l^2 + 6A_4 l^2 r_i - A_5\left(\frac{l}{r_i}\right)^2 - A_6(\zeta_{B_z} - 1)^2\right), \tag{B3}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \equiv{}& 1 + \frac{v_c^2}{v_{ci}^2}(\zeta_\rho - 1) + \zeta_\rho\left[\frac{2v_c^2}{v_{ci}^2} - (v_{sei}^2 + v_{Aei}^2)\right] - \zeta_\rho^2\left(\frac{v_c^2}{v_{ci}^2} - v_{sei}^2 v_{Aei}^2\right)\\
&+ \frac{\gamma}{2v_{Ai}^2 v_{si}^2}\left(\frac{1}{v_{si}} - 1\right)\left(2A_3 l^2 + 6A_4 l^2 r_i - A_5\left(\frac{l}{r_i}\right)^2\right)\\
&+ \frac{\gamma}{v_{Ai}^2 v_{si}^2}(v_c^2(\zeta_\rho - 1) - (\zeta_\rho v_{Ae}^2 - 1))\left(A_3(2lr_i - r_e^2) + A_4(3lr_i^2 - r_e^3) + A_5\left(\frac{l}{r_i} - \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\right)\right),
\end{aligned}
\tag{B4}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} \equiv{}& 2\left(\frac{v_c^2}{v_{ci}^2} - 1\right) - \chi\left[\frac{v_c^2}{v_{ci}^2}\left(1 + \frac{v_{se}^2 + v_{Ae}^2}{v_{si}^2 + v_{Ai}^2}\right) - (v_{sei}^2 + v_{Aei}^2)\right]\\
&+ \frac{\gamma}{v_{Ai}^2 v_{si}^2}\left(\frac{1}{v_{si}} - 1\right)\left(A_3(2lr_i - r_e^2) + A_4(3lr_i^2 - r_e^3) + A_5\left(\frac{l}{r_i} - \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\right)\right)\\
&+ \frac{\gamma}{v_{Ai}^2 v_{si}^2}(v_c^2(\zeta_\rho - 1) - (\zeta_\rho v_{Ae}^2 - 1))(A_3 r_i^2 + A_4 r_i^3),
\end{aligned}
\tag{B5}
$$

$$\mathcal{F} \equiv \frac{v_c^2}{v_{ci}^2} - 1 + \frac{\gamma r_i^2}{v_{Ai}^2 v_{si}^2}\left(\frac{1}{v_{si}} - 1\right), \tag{B6}$$

其中，我们采用了以下近似：

$$\ln(r/r_i) = \ln\left[1 + \left(\frac{r_e - r_i}{r_i}\right)\delta_c\right], \simeq \left(\frac{r_e - r_i}{r_i}\right)\delta_c - \frac{1}{2}\left(\frac{r_e - r_i}{r_i}\right)^2 \delta_c^2, \tag{B7}$$

对于 $\delta < 1$ 并仅考虑截至 δO^2 的各项。经检验，保留更高阶项 δO^3 不会影响结果。该四阶方程已用于在数值计算中获得尖点共振吸收点 (r_c)。

附录 C 表面轴对称模的弱阻尼率

此处采用了方程 (54) 在弱阻尼极限下，推导出了慢表面 sausage 波阻尼率的解析表达式，即 $\gamma \ll \omega_r$。为此，我们首先计算 $\partial D^{AR}/\partial\omega$，由方程 (43) 可得：

$$\frac{\partial D_{AR}}{\partial\omega} = 2\rho_i\omega - 2\rho_e\omega\frac{k_{ri}}{k_{re}}\mathcal{Q} - \rho_e(\omega - \omega_{Ae}^2)\left(\frac{1}{k_{re}}\frac{dk_{ri}}{d\omega} - \frac{k_{ri}}{k_{re}^2}\frac{dk_{re}}{d\omega}\right)\mathcal{Q} - \rho_e(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)\frac{k_{ri}}{k_{re}}\frac{d\mathcal{Q}}{d\omega}. \tag{C1}$$

现在由方程 (36)，可以得到

$$\frac{dk_{ri}}{dw} = \frac{-\omega^3(\omega^2 - 2\omega_{ci}^2)}{(v_{si}^2 + v_{Ai}^2)(\omega^2 - \omega_{ci}^2)^2 k_{ri}}, \tag{C2}$$

$$\frac{dk_{re}}{dw} = \frac{-\omega^3(\omega^2 - 2\omega_{ce}^2)}{(v_{se}^2 + v_{Ae}^2)(\omega^2 - \omega_{ce}^2)^2 k_{re}}. \tag{C3}$$

此外，由方程 (45) 对于 $d\mathcal{Q}/d$，我们得到

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\omega} = \frac{\mathcal{Q}}{x}\frac{dx}{dw} - x\frac{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\mu_0 D_e(1-\nu) - 2B_{\phi e}^2 n_e^2}{\mu_0 D_e y} - \frac{K_{\nu-1}(y)}{K_\nu(y)}\right)}{\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]} + x\frac{\left(\frac{\mu_0 D_e(1-\nu) - 2B_{\phi e}^2 n_e^2}{\mu_0 D_e y} - \frac{K_{\nu-1}(y)}{K_\nu(y)}\right)\frac{d}{d\omega}\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]}{\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]^2}. \tag{C4}$$

经过一些代数运算，该方程可写为

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\omega} = \frac{\mathcal{Q}}{x}\frac{dx}{dw} + x\frac{\left(\frac{1-\nu}{y^2} + \frac{2v_{A\phi_e}^2 n_e^2}{(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)y^2} + \left(\frac{K_{\nu-1}'}{K_\nu} - \frac{K_\nu' K_{\nu-1}}{K_\nu^2}\right)\right)\frac{dy}{d\omega} + \frac{1}{y}\frac{d\nu}{d\omega} - \frac{4v_{A\phi_e}^2}{(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)y}\left(n_e\frac{dn_e}{d\omega} - \frac{\omega n_e^2}{(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)}\right)}{\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]} + x\frac{\left[\frac{s}{k_z}\frac{dn_i}{d\omega} + \frac{n_i + k_z}{k_z}ds - 2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right)\right]\left(\frac{\mu_0 D_e(1-\nu) - 2B_{\phi e}^2 n_e^2}{\mu_0 D_e y} - \frac{K_{\nu-1}(y)}{K_\nu(y)}\right)}{\left[\frac{n_i + k_z}{k_z}s - 2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]^2}, \tag{C5}$$

其中 $x = k_{ri} r_i$ 和 $y = k r_{re}$。用新函数表示，这可简化为

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\omega} = \mathcal{P}\frac{dx}{dw} + \mathcal{S}\frac{dy}{d\omega}, \tag{C6}$$

其中

$$\mathcal{P}=\frac{\mathcal{Q}}{x}+x\frac{\left[\frac{s}{k_z}\frac{dn_i}{d\omega}+\frac{n_i+k_z}{k_z}ds-2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right)\right]\left(\frac{\mu_0 D_e(1-\nu)-2B_{\phi e}^2 n_e^2}{\mu_0 D_e y}-\frac{K_{\nu-1}(y)}{K_\nu(y)}\right)}{\frac{dx}{dw}\left[\frac{n_i+k_z}{k_z}s-2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]^2}, \tag{C7}$$

$$\mathcal{S}=x\frac{\left(\frac{1-\nu}{y^2}+\frac{2v_{A\phi_e}^2 n_e^2}{(\omega^2-\omega_{Ae}^2)y^2}+\left(\frac{K_{\nu-1}'}{K_\nu}-\frac{K_\nu' K_{\nu-1}}{K_\nu^2}\right)\right)\frac{dy}{d\omega}+\frac{1}{y}\frac{d\nu}{d\omega}-\frac{4v_{A\phi_e}^2}{(\omega^2-\omega_{Ae}^2)y}\left(n_e\frac{dn_e}{d\omega}-\frac{\omega n_e^2}{(\omega^2-\omega_{Ae}^2)}\right)}{\frac{dy}{d\omega}\left[\frac{n_i+k_z}{k_z}s-2\frac{M(a,b-1;s)}{M(a,b;s)}\right]}. \tag{C8}$$

此外，由方程 (22) 可得

$$\frac{dn_i}{dw}=\frac{\omega^3(\omega^2-2\omega_{ci}^2)}{(v_{si}^2+v_{Ai}^2)(\omega^2-\omega_{ci}^2)^2 n_i}, \tag{C9}$$

$$\frac{dn_e}{dw}=\frac{\omega^3(\omega^2-2\omega_{ce}^2)}{(v_{se}^2+v_{Ae}^2)(\omega^2-\omega_{ce}^2)^2 n_e}. \tag{C10}$$

借助方程 (C2) 和 (C3)，方程 (C6) 可写为

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\omega}=x\mathcal{P}\frac{\omega^3(\omega^2-2\omega_{ci}^2)}{(\omega_{si}^2-\omega^2)(\omega_{Ai}^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_{ci}^2)}+y\mathcal{S}\frac{\omega^3(\omega^2-2\omega_{ce}^2)}{(\omega_{se}^2-\omega^2)(\omega_{Ae}^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_{ce}^2)}. \tag{C11}$$

将其代入方程 (C1)得到

$$\frac{\partial D_{AR}}{\partial\omega}=2\rho_i\omega-2\rho_e\omega\frac{k_{ri}}{k_{re}}\mathcal{Q}-\rho_e\omega^3(\omega^2-\omega_{Ae}^2)\frac{k_{ri}}{k_{re}}\times\left\{\frac{(\mathcal{Q}+x\mathcal{P})(\omega^2-2\omega_{ci}^2)}{(\omega_{si}^2-\omega^2)(\omega_{Ai}^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_{ci}^2)}-\frac{(\mathcal{Q}-y\mathcal{S})(\omega^2-2\omega_{ce}^2)}{(\omega_{se}^2-\omega^2)(\omega_{Ae}^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_{ce}^2)}\right\}. \tag{C12}$$

最后，利用方程 (44) 和 (C12) 在方程 (54) 可以得到阻尼率 γ 在慢表面扭曲模在尖点连续谱中弱阻尼极限下为

$$\gamma|_{\omega=\omega_r}=-\frac{\frac{\pi\rho_e k_z^2}{k_{re}\rho_c|\Delta_c|}\Big|_{r=r_c}\left(\frac{v_s^2}{v_A^2+v_s^2}\right)^2((\omega^2-\omega_{Ai}^2)+\mathcal{Z})(\omega^2-\omega_{Ae}^2)\mathcal{G}}{2\omega\left(1-\chi\frac{k_{ri}}{k_{re}}Q\right)-\omega\chi\mathcal{T}}, \tag{C13}$$

其中

$$\mathcal{T}=\omega_r^2(\omega_r^2-\omega_{Ae}^2)\frac{k_{ri}}{k_{re}}\left\{\frac{(\mathcal{Q}+x\mathcal{P})(\omega_r^2-2\omega_{ci}^2)}{(\omega_{si}^2-\omega_r^2)(\omega_{Ai}^2-\omega_r^2)(\omega_r^2-\omega_{ci}^2)}-\frac{(\mathcal{Q}-y\mathcal{S})(\omega_r^2-2\omega_{ce}^2)}{(\omega_{se}^2-\omega_r^2)(\omega_{Ae}^2-\omega_r^2)(\omega_r^2-\omega_{ce}^2)}\right\}. \tag{C14}$$

ORCID iD

Mohammad Sadeghi https://orcid.org/0000-0002-6409-7679
Karam Bahari https://orcid.org/0000-0002-4838-5646
Kayoomars Karami https://orcid.org/0000-0003-0008-0090

参考文献

Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 2012，《数学函数手册：公式、图表和数学表》（纽约：Courier Dover）Arregui, I. 2015，英国皇家学会哲学汇刊A辑，373，20140261 Aschwanden, M. J., Fletcher, L., Schrijver, C. J., & Alexander, D. 1999，《天体物理学杂志》，520，880 Aschwanden, M. J., Nakariakov, V. M., & Melnikov, V. F. 2004，《天体物理学杂志》，600，458 Aschwanden, M. J., Nightingale, R. W., Andries, J., Goossens, M., & Van Doorsselaere, T. 2003，《天体物理学杂志》，598，1375 Aschwanden, M. J., & Schrijver, C. J. 2011，《天体物理学杂志》，736，102 Bahari, K. 2018，《天体物理学杂志》，864，2 Bahari, K., & Jahan, Z. 2020，《天体物理学杂志》，901，28 Bahari, K., Petrukhin, N. S., & Ruderman, Z. S. 2020，《皇家天文学会月报》，496，67 Bennett, K., Roberts, B., & Narain, U. 1999，《太阳物理学》，185，41 Bogdan, T. J., Hindman, B. W., Cally, P. S., & Charbonneau, P. 1996，《天体物理学杂志》，465，406 Bondeson, A., Iacono, R., & Bhattacharjee, A. 1987，PhFl，30，2167 Brekke, P., Kjeldseth-Moe, O., & Harrison, R. A. 1997，《太阳物理学》，175，511

De Moortel, I., & Browning, P. 2015, 英国皇家学会哲学汇刊A辑, 373, 20140269 De Moortel, I., & Nakariakov, V. M. 2012, 英国皇家学会哲学汇刊A辑, 370,3193 Dorotovič, I., Erdélyi, R., Freij, N., Karlovský, V., & Márquez, I. 2014, 《天文学与天体物理学》, 563, A12 Dorotovič, I., Erdélyi, R., & Karlovský, V. 2008, 载于国际天文学联合会第247届研讨会《波与振荡》 e 太阳大气：加热与磁震学，编。

R.Erdélyi & C. A. Mendoza-Briceno（剑桥：剑桥大学出版社），351 Doyle, J.G., Taroyan, Y., Ishak, B.,Madjarska,M.S.,& Bradshaw, S. J. 2006，《天文学与天体物理学》，452，1075 Ebrahimi, Z., & Karami, K.2016，《皇家天文学会月报》，462，1002 Erdélyi,R., & Carter, B. K.2006，《天文学与天体物理学》，455，361 Erdélyi, R., & Fedun, V. 2006，《太阳物理学》，238，41 Erdélyi, R., & Fedun,V. 2007，《太阳物理学》，246，101 Erdélyi,R., & Taroyan, Y. 2008，《天文学与天体物理学》，489，L49 Freij, N.,Dorotovič,I., Morton, R. J., 等 2016，《天体物理学杂志》，817，44 Giagkiozis, I.,Fedun, V.,Erdélyi, R., & Verth, G. 2015，《天体物理学杂志》，810，53 Giagkiozis, I., Goossens, M., Verth, G., Fedun, V.,&Van Doorsselaere, T. 2016，《天体物理学杂志》，823，71 Goossens, M.,Andries, J.,&Aschwanden, M. J. 2002，《天文学与天体物理学》，394，L39 Goossens, M., Erdélyi,R., & Ruderman, M. S.2011，《太阳物理学评论》，158，289 Goossens, M., Hollweg,J. V., & Sakurai, T. 1992，《太阳物理学》，138，233 Grant, S. D. T., Jess,D.B., Moreels, M. G.,等 2015，《天体物理学杂志》，806，132 Ionson, J. A. 1978，《天体物理学杂志》，226，650 Jess,D. B., Mathioudakis, M., Erdélyi, R., 等 2009，《科学》，323，1582 Jess, D.B., Van Doorsselaere, T.,Verth, G.,等 2017，《天体物理学杂志》，842，59 Joarder, P. S.,Nakariakov,V. M., & Roberts, B. 1997，《太阳物理学》，176，285Kadomtsev, B. 1966，《等离子体物理学评论》，2，153 Karami, K., & Bahari, K. 2010，《太阳物理学》，263，87Karami, K.,& Bahari, K. 2012，《天体物理学杂志》，757，186 Keys, P. H., Morton,R.J., Jess, D. B.,等 2018，《天体物理学杂志》，857，28 Moreels, M. G., Freij, N., Erdélyi, R., Van Doorsselaere, T., &Verth, G.2015，《天文学与天体物理学》，579，A73 Morton, R. J., Erdélyi,R.,Jess, D.B.,&Mathioudakis, M. 2011，《天体物理学杂志快报》，729，L18 Nakariakov, V. M., Ofman, L., DeLuca,E.E., Roberts, B., & Davila, J.M.1999，《科学》，285，862 Nakariakov, V. M., Pilipenko, V., Heilig, B., 等 2016，《太阳物理学评论》，200，75 Nakariakov, V. M., & Verwichte, E. 2005，《Living Reviews in Solar Physics》，2，3 Ofman, L., & Davila, J. M.1995，《地球物理研究杂志》，100，23427Ofman,L., & Wang, T. J. 2008，《天文学与天体物理学》，482，L9 Pascoe, D. J.,Goddard, C. R.,&Nakariakov, V. M. 2016，《天文学与天体物理学》，593，A53 Ruderman, M. S. 2007，《太阳物理学》，246，119 Ruderman, M. S. 2009，《等离子体物理学》，16，042109 Ruderman,M. S., & Erdélyi, R.2009，《太阳物理学评论》，149，199Ruderman, M. S.,&Petrukhin, N. S. 2019，《天文学与天体物理学》，631，A31 Ruderman,M. S., & Roberts, B. 2002，《天体物理学杂志》，577，475 Sadeghi, M., Bahari, K., & Karami, K.2021年，《天体物理学杂志》，909，202 Sadeghi, M.,& Karami, K. 2019，《天体物理学杂志》，879，121 Sakurai, T., Goossens,M., &Hollweg, J. V. 1991，《太阳物理学》，133，227 Scherrer,B., & McKenzie, D. 2017，《天体物理学杂志》，837，24 Sobotka, M. 2003，《天文学消息》，324，369 Soler, R., Goossens, M., Terradas, J.,& Oliver,R. 2013，《天体物理学杂志》，777，158 Soler,R., Terradas,J., &Goossens, M. 2011，《天体物理学杂志》，734，80 Teriaca, L.,Banerjee, D.,Falchi, A.,Doyle, J. G.,&Madjarska, M. S. 2004，《天文学与天体物理学》，427，1065 Terradas, J., Oliver,R.,& Ballester, J. L. 2006a，《天体物理学杂志》，642，533 Terradas, J., Oliver,R.,& Ballester, J. L. 2006b，《天体物理学杂志快报》，650，L91 Tian,H.,Curdt,W.,Marsch, E., & He, J. 2008，《天体物理学杂志快报》，681，L121 Tian, H., DeLuca, E. E.,Cranmer, S. R., 等 2014，《科学》，346，1255711 Tian,H.,Marsch,E.,Curdt,W., & He, J. 2009，《天体物理学杂志》，704，883 Wang,F.,Deng, H.,Li, B.,等 2018，《天体物理学杂志快报》，856，L16Wang, T., Solanki, S. K., Curdt,W.,Innes,D.E.,& Dammasch, I. E. 2002，《天体物理学杂志快报》，574，L101 Wang, T.J.,& Solanki, S. K. 2004，《天文学与天体物理学》，421，L33 Winebarger, A. R., DeLuca,E. E., &Golub, L. 2001，《天体物理学杂志快报》，553，L81 Winebarger, A. R., Warren, H.,van Ballegooijen, A., DeLuca,E. E., &Golub,L. 2002，《天体物理学杂志快报》，567，L Yu, D. J., VanDoorsselaere,T., & Goossens, M. 2017a，《天文学与天体物理学》，602，A108 Yu, D. J., VanDoorsselaere,T., & Goossens, M. 2017b，《天体物理学杂志》，850，44