arXiv:2304.04270v1 [cond-mat.mes-hall] 9 Apr 2023

通过量子点对两个马约拉纳零模进行编织的动力学模拟

Luting Xu，* Jing Bai、Wei Feng 和 Xin-Qi Li†联合量子研究中心和物理系，理学院，天津大学，中国天津 300072（日期：2023年4月11日）

在本工作中，我们在纯一维实现的最简设置下，对通过量子点编织一对马约拉纳零模（MZMs）的动力学进行了实时模拟。我们揭示了这样一种强烈的非绝热效应：为获得马约拉纳零模之间完全交换所需的几何相位 $\pi/4$，量子点能级趋近于零。与根据绝热条件对系统进行非均匀操控以及采用绝热捷径的策略不同，我们提出并阐明了一种更可行的方案，用于抑制非绝热跃迁，同时实现马约拉纳模之间的完全交换。

引言。——马约拉纳零模（MZMs）的非局域性及其所遵循的非阿贝尔交换统计，为拓扑量子计算（TQC）提供了一个优雅的范式 [1–6]。实空间中的交换（编织）操作能够在基态的简并子空间中引发幺正旋转，这构成了所需的量子信息处理，并在TQC中实现逻辑门。过去十年间，经过不懈努力，在各种实验-平台中实现马约拉纳零模方面已经取得了相当大的进展。然而，主要的实验证据都与零偏压电导峰相关，而这些证据最终无法确认马约拉纳零模的实现。进一步证明马约拉纳零模的存在，以及迈向TQC的关键步骤，是展示新颖的非阿贝尔统计。

鉴于半导体-超导体混合器件（例如，s 波超导体近邻耦合的纳米线）一直是产生马约拉纳零模[7–9], 的领先平台，因此显而易见的难题是，无法直接交换（编织）在一维纳米线中实现的马约拉纳零模，因为在一维情况下，编织过程中无法避免马约拉纳零模之间发生碰撞。已有研究提出将一维导线组合成二维网络（通过 T 形结或 Y 形结），以通过栅极电压控制马约拉纳零模的移动和交换 [10–16], ，然而，解决巨大技术挑战（必要的控制）方面进展缓慢。其他编织马约拉纳零模的方案包括：通过电栅极直接调节马约拉纳模之间的局域耦合 [17–20]；通过调节充电能在马约拉纳岛上的作用进行间接调节 [21–24] ；通过量子点 [25–27], ；仅测量方案 [28–31], ；以及其他方案 [32]。

就在最近，继通过超导Y 形结实现编织协议 [33–38] , 之后，有人提出了一种基于更传统元件的替代方案，即将与超导体邻近诱导耦合的纳米线连接到量子点（QD）上，用于在一维情况下编织一对马约拉纳零模（MZMs），其示意图如图1(a)所示。在最初的 Y 形结方案中，三个库珀对盒通过三个相互重叠的马约拉纳费米子连接在一个Y 形结上（它们在中心处有效地产生一个单一零模）。这被认为是最小的

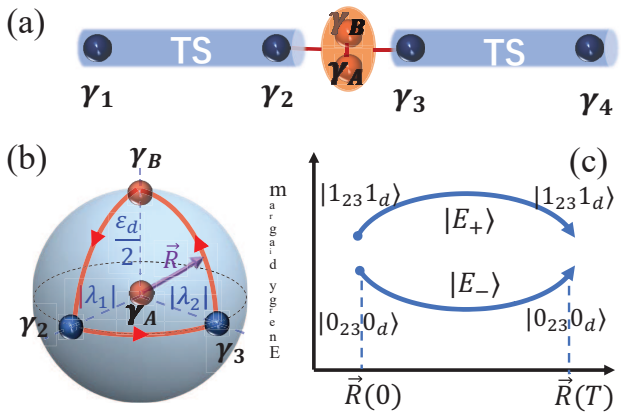

图 1：（a）提出用于在一维情况下编织一对马约拉纳零模的拓扑超导体（TS）纳米线与量子点连接装置示意图。（b）将量子点电子分裂为一对马约拉纳费米子（γ_A 和 γ_B）后，马约拉纳零模 γ_2 和γ_3 以及量子点可以映射为一个 Y 形结，该结构支持几何贝里相位的形成，用于编织（交换）马约拉纳模 γ_2 和 γ_3。（c）偶费米子宇称子空间中瞬时本征态 $|E_\pm\rangle$ 的能量图。这里使用了占据态 $|n_{23}n_d\rangle$，其中 n_{23} 和 n_d分别是与马约拉纳零模 γ_2 和 γ_3 以及量子点相关的普通费米子的占据数。

通过三个约瑟夫森结中的磁通来控制一对马约拉纳零模编织所需的装置，这些约瑟夫森结连接到体超导体。在文献 [39], 中，该装置被简化为一个单一的一维约瑟夫森结，如图 1(a) 所示，其中两根近邻诱导超导的纳米线通过一个量子点相连。通过栅极电压调节马约拉纳零模与量子点之间的耦合强度，可借助量子点交换马约拉纳零模 γ_2 和 γ_3。在本研究中，我们针对这一理想的一维装置，对马约拉纳零模的编织动力学进行实时模拟。特别是，为获得几何相位 $\pi/4$（这是实现马约拉纳零模完全交换所必需的），我们将揭示量子点能级趋近于零时显著的非绝热效应。我们还将模拟并比较多种操控方案，以找出恰当的策略来抑制非绝热跃迁，实现马约拉纳模的完全交换。

*电子邮箱：xuluting@tju.edu.cn
†电子邮箱：xinqi.li@tju.edu.cn

基本思路与问题。— 考虑图 1(a) 示意的装置，其中每根拓扑超导线都可以由一根与 s-波超导体近邻接触的半导体纳米线实现。每根线上，两端各出现一个马约拉纳零模。这里将四个马约拉纳零模记为 γ_1、γ_2、γ_3 和 γ_4。实际上，使用四个马约拉纳零模是构造马约拉纳逻辑量子比特的最简方式，可确保费米子宇称（偶或奇）守恒。对于图 1(a) 中的装置，若将（γ_1、γ_2）组合成一个占据数为 $n_{12}=0$ 或 1 的普通费米子，并将（γ_3、γ_4）组合成另一个占据数为 $n_{34}=0$ 或 1 的普通费米子，那么四马约拉纳零模量子比特（例如具有偶费米子宇称时）的逻辑态为 $|0_{12}0_{34}\rangle$ 和 $|1_{12}1_{34}\rangle$。在图 1(a) 中，插入两根纳米线之间的量子点用于介导马约拉纳零模 γ_2和 γ_3之间的交换。若完成完全交换，即 $\gamma_2\to\gamma_3$ 和$\gamma_3\to-\gamma_2$通过编织算符 $U=e^{\frac{\pi}{4}\gamma_2\gamma_3}$关联，则马约拉纳量子比特态将经历如下旋转

$$|0_{12}0_{34}\rangle\to|\psi_g\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{12}0_{34}\rangle-i|1_{12}1_{34}\rangle)\,, \qquad (1)$$

这对应于一个哈达玛型逻辑门（还需额外的相位偏移 $\pi/2$）。

假设量子点（QD）只有一个能级参与编织动力学，因此其单能级哈密顿量为$H_D=\varepsilon_d d^\dagger d$。量子点（QD）与马约拉纳零模（MZMs） γ_2 和 γ_3耦合，描述为 $H_1'=i(\lambda_1 d+\lambda_1^* d^\dagger)\gamma_2$和 $H_2'=(\lambda_2 d-\lambda_2^* d^\dagger)\gamma_3$。耦合振幅更明确地表示为 $\lambda_1=|\lambda_1|e^{i\phi_1/2}$ 和 $\lambda_2=|\lambda_2|e^{i\phi_2/2}$，其中相位 ϕ_1 和 ϕ_2通过磁通量调制 s波超导体的相位（基于阿哈罗诺夫-玻姆效应），如参考文献 [40–42]所探讨的那样。如果将量子点电子分解为一对马约拉纳费米子 γ_A 和 γ_B，表示为 $d=(\gamma_B-i\gamma_A)/2$，并将相位调制为$\phi_1=\pi$ 和 $\phi_2=0$，我们可以很容易地验证，γ_B 与马约拉纳零模（MZMs） γ_2 和 γ_3解耦，而剩余的耦合可以重新表示为

$$H_M=i\gamma_A(\vec{R}\cdot\vec{\gamma})\,. \qquad (2)$$

这里为简洁起见，引入了 $\vec{R}=(|\lambda_1|,|\lambda_2|,\varepsilon_d/2)$ 和 $\vec{\gamma}=(\gamma_2,-\gamma_3,\gamma_B)$。令人满意的是，通过这种方式，我们已将该装置映射为 Y 形结[33–38]，，如图 1(b) 所示。通过控制耦合强度 $|\lambda_1|$ 和 $|\lambda_2|$，系统可以在参数空间中完成一个循环演化，其描述为$U=e^{\Omega\gamma_2\gamma_3}$。这里的 Ω 是众所周知的贝里相位，即演化轨迹在参数空间中所围成的立体角的一半（$\pi/2$，在 $\varepsilon_d\to0$ 的情况下）。结果 Ω $=\pi/4$ 对应于 γ_2 和 γ_3之间的一次完整交换，以及上文所述四马约拉纳零模量子比特的态旋转。

从图 1(b) 可知，为了精确实现立体角 $\pi/2$，我们应当使 $\varepsilon_d\to0$。然而，如果演化速度不够慢，这会在循环演化的初始和最终阶段引发强烈的非绝热跃迁。其原因可以从图 1(c) 中描绘的瞬时本征态能级图看出。这里使用占据态 $|n_{23}n_d\rangle$，其中

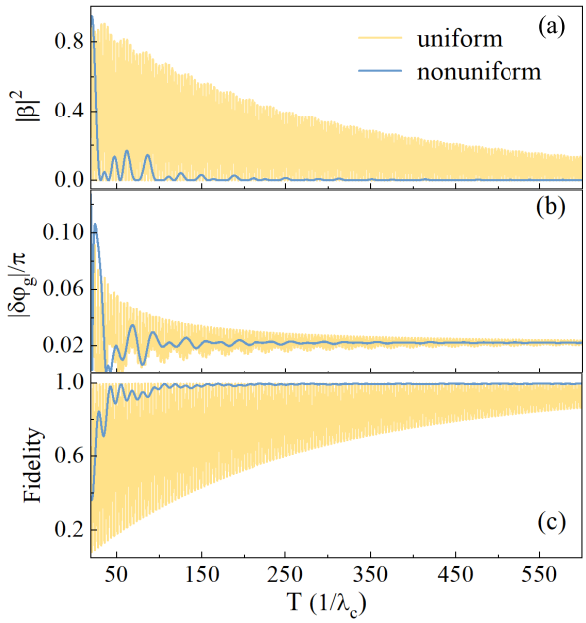

图2：四步均匀（黄色线条）和非均匀（蓝色线条）操控方案的非绝热效应，由总编织时间依赖性表示：(a) 转移概率，(b)相对于贝里相位 $\pi/4$的几何相位误差，以及 (c) 四马约拉纳零模量子比特态旋转的保真度。在本工作的所有模拟中，通过设定最大耦合强度 $\lambda_c=1.0$，假定能量单位为任意单位。在此图中，量子点能级设定为 $\varepsilon_d=0.2\lambda_c$。

n_{23} 和 n_d 与马约拉纳零模 γ_2 和 γ_3 以及量子点分别关联的常规费米子的占据数。我们不失一般性地只考虑偶费米子宇称的子空间，即由基态 $|0_{23}0_d\rangle$ 和 $|1_{23}1_d\rangle$展开的子空间。我们看到，在编织操作开始和结束附近，瞬时本征态 $|E_+\rangle$ 和 $|E_-\rangle$ 的能量差为 ε_d，注意到 γ_2 和 γ_3 之间不存在直接耦合。当 $\varepsilon_d\to0$时，这个近零能隙将使二态系统遭受强烈的非绝热跃迁，除非演化过程无限缓慢。在本文中，我们希望研究由较小的 ε_d引起的非绝热效应。特别是，我们将探索抑制非绝热跃迁的策略，并比较不同方案的结果，包括对耦合参数进行四步均匀和非均匀操控，以及一种改进的六步操控方案。

四步均匀与非均匀方案。——我们先从四步均匀操控方案开始。如图 1(b) 所示，编织的基本思路很明确，即操控参数向量 R。对于处在磁场中的自旋 1/2 粒子，参数空间中的向量恰好对应于自旋态的布洛赫向量，也就是 $\sigma_n=\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$的本征态，其中 $\vec{n}$ 是 R的单位向量。这将产生众所周知的贝里相位，其大小由参数空间中闭合轨迹所围成的立体角决定。对于

对于图 1(b) 所示的马约拉纳编织情形，尽管确实可以通过某种更复杂的处理 [38, 39]得到相同的贝里相位，但要理解类似的结果会更加困难。

此外，为了处理沿图 1(b) 所示参数轨迹演化时的非绝热效应，我们希望用占据数态表象描述状态演化。一般而言，状态可表示为

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|E_-(t)\rangle + \beta(t)|E_+(t)\rangle\,, \tag{3}$$

其中，$|E_-(t)\rangle$ 和 $|E_+(t)\rangle$ 分别是所研究二态系统的瞬时本征态。在绝热情形下，由于没有发生非绝热跃迁，我们总有 $\beta(t) = 0$。系统始终处于与初态相连的瞬时本征态中，此处假设初态为 $|0_{23}0_d\rangle$。因此有 $|\alpha(t)| = \alpha(0) = 1$。编织结束时，$\alpha(T) = e^{i\varphi}\alpha(0)$。最重要的是，相因子 φ 不仅包含预期的动力学相位 $\varphi_{\rm dyn} = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T dtE_-(t)$，还包含几何相位 φ_g，即由图 1(b) 所示立体角决定的贝里相位。因此，总体而言有$\varphi = \varphi_{\rm dyn} + \varphi_g$。存在非绝热跃迁时，除了 $\beta(t) \neq 0$之外，从相位 $\varphi(T)$ 中减去动力学相位 $\varphi_{\rm dyn}(T)$ 后剩余的部分，也会偏离由参数空间中张成的立体角所决定的几何相位 φ_g。我们将说明，这两种误差都会影响编织操作的保真度。

在图2中，我们展示了基于上述考虑进行数值模拟所得的结果。四步耦合强度均匀调制方案可概括为$|d\lambda_{1,2}/dt| = \frac{\lambda_c}{T/4}$，它们依次参与以下调制过程：(i) $|\lambda_1|$ 从零增加到λ_c；(ii) $|\lambda_2|$ 从零增加到 λ_c；(iii) $|\lambda_1|$ 从 λ_c 减小到零；以及(iv) $|\lambda_2|$ 从 λ_c减小到零。在图2(a)和(b)中，我们展示了非绝热跃迁概率 $|\beta|^2$ 以及几何相位误差（相对于贝里相位 $\pi/4$的偏差）随编织时间 T的变化。总体而言，正如预期的那样，随着 T的增加，非绝热跃迁变得不那么显著。图2(a)中观察到的振荡行为源于 $t = 0$ 和 $t = T$附近（能隙较小处）相对较强的非绝热跃迁之间的 Landau-Zener-St¨uckelberg (LZS)干涉 [47–49] 。在图2(b)中，我们发现，从动态（非绝热）演化中提取的几何相位也偏离绝热情形的结果，即几何相位 $\varphi_g = \Omega_c/2$; 同时，立体角数值上取值为 $\Omega_c = \arcsin[4\lambda_c^2/(\varepsilon_d^2 + 4\lambda_c^2)]$, , 这对应于图2(b)中长 T极限下的渐近结果。

图2(a)和(b)所示的两种误差会影响与编织操作相关的逻辑门的保真度。在无误差的理想情况下，编织后四马约拉纳零模量子比特的目标态为 $|\psi_g\rangle$，如公式（1）所示。与该态比较得到的保真度为 $\mathcal{F} = {\rm Tr}_M(|\psi_g\rangle\langle\psi_g|\rho_M)$，其中 $\rho_M = {\rm Tr}_D[|\Psi(T)\rangle\langle\Psi(T)|]$ 是从总态 $|\Psi(T)\rangle$中对量子点自由度进行迹运算后得到的约化密度矩阵，因此剩余的迹${\rm Tr}_M(\cdots)$是对马约拉纳量子比特态进行的。

在图2(c)中，我们展示了保真度的数值结果。我们发现，保真度在很大程度上受到图2(a)所示的非绝热跃迁概率 $|\beta|^2$ 的影响。

我们知道，较强的非绝热跃迁主要发生在 $t = 0$ 和 $t = T$ 附近，此处的能隙较小，如图 1(c) 所示。定性而言，为避免强烈的非绝热跃迁，当能量差 $\Delta E = E_+ - E_-$较小时，应使参数变化得更慢。因此，我们考虑按照$|d\lambda_{1,2}/dt| = \eta(E_+ - E_-)^2/\hbar$，在四步调制方案中对参数进行非均匀变化，其中引入无量纲参数 η 来控制参数调制速度。当 $\eta << 1$时，满足众所周知的绝热条件。相反，当 $\eta > 1$时，将发生显著的非绝热跃迁。对于这种非均匀参数调制方案，可以推导出编织总时间的解析表达式。四个步骤各自所需的时间可表示为

$$\begin{aligned} T_1 &= T_4 = \frac{1}{2\gamma\varepsilon_d}\arctan\frac{2\lambda_c}{\varepsilon_d}\,, \\ T_2 &= T_3 = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\varepsilon_d^2 + 4\lambda_c^2}}\arctan\frac{2\lambda_c}{\sqrt{\varepsilon_d^2 + 4\lambda_c^2}}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

总编织时间是它们的和，$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$。在图2(a)、(b)和(c)中，我们还绘出了非均匀调制方案的结果，并与均匀方案的结果进行了细致比较。我们发现，非绝热跃迁可以得到显著抑制，因此能够大幅缩短编织时间，这是一个重要优势。

在图3中，我们进一步展示了量子点能量 ε_d的具体影响。图3(a)展示了均匀和非均匀调制方案下，最小编织时间 T_m 随量子点能量 ε_d 的变化关系。最小编织时间 T_m 由非绝热跃迁概率 $|\beta(T)|^2 < 0.1$ 的阈值确定，条件为 $T > T_m$。我们再次发现，非均匀调制方案的结果远优于均匀方案。量子点能量越低，这一优势越明显。图3(b)展示了几何相位随量子点能量 ε_d的变化关系，其中，从实时动力学演化中提取的结果（符号）与根据图1(b)所示立体角确定的绝热值（蓝线）进行了比较。

六步方案。—为了避免在编织操作开始和结束附近发生强烈的非绝热跃迁，我们需要较大的量子点能量，例如 $\varepsilon_d = 2\lambda_c$。与此同时，为了实现$\gamma_2$ 和 γ_3之间的完整编织，这要求实现如图1(b) 示意所示的精确立体角$\Omega_c = \pi/2$，我们进一步提出以下六步调制方案：(i)将 $|\lambda_1|$ 从零增加到 λ_c；(ii) 将 ε_d 从$2\lambda_c$ 降低到零；(iii) 将 $|\lambda_2|$ 从零增加到 λ_c；(iv)将$|\lambda_1|$ 从 λ_c 降低到零；(v)将 $|\lambda_2|$ 从λ_c 降低到零；以及(vi)将 ε_d 从零恢复到初始值 $2\lambda_c$。对于每一步，调制速度都可以保持均匀，例如以恒定速率调制能量。

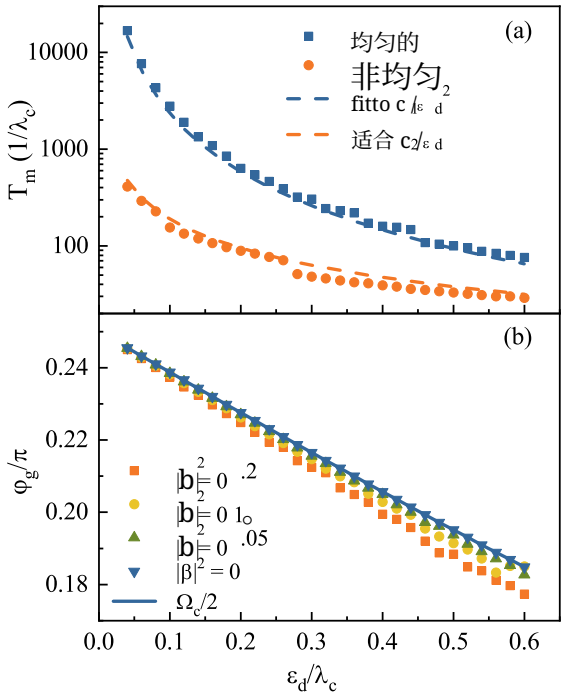

图 3 T_m $|\beta|^2 \leq$ 0.1 ε_d (a) 在该条件下，四步均匀和非均匀操控方案的最小编织时间随量子点能级的变化。数值结果分别使用 c_1/ε_d^2 和 c_2/ε_d 拟合，而 $c_1 = 32\ln 10/\pi$ 是通过朗道–齐纳跃迁概率公式得到的，$c_2 \approx 19$ 则通过数值拟合得到。(b) 在指定阈值条件下，从动态演化中提取的几何相位（以符号表示），对应各自的编织时间 T_m。蓝线表示贝里相位 $\Omega_c/2 = \frac{1}{2}\arcsin[4\lambda_c^2/(\varepsilon_d^2 + 4\lambda_c^2)]$ 的解析结果。

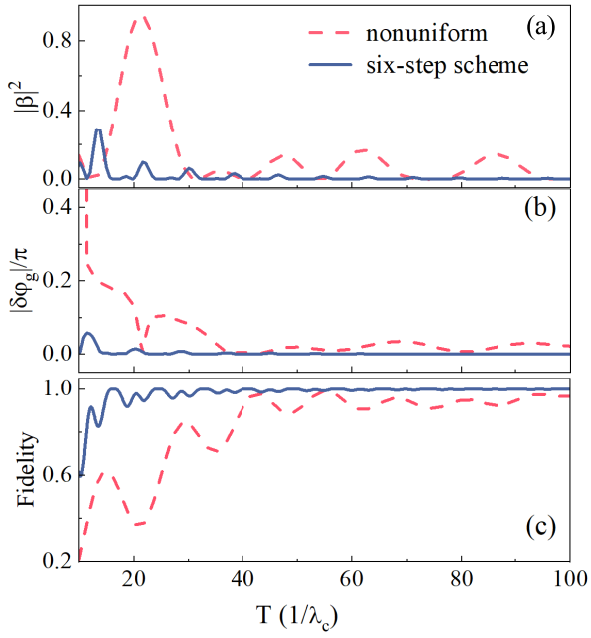

图4：改进六步操作方案的非绝热效应，与图2所示四步非均匀方案相对较好的结果进行比较。图(a)、(b)和(c)分别绘制了编织时间对跃迁概率、来自 $\pi/4$ 的几何相位误差以及四马约拉纳零模量子比特态旋转保真度的依赖关系。在模拟中，我们假设在整个四步操作过程中 $\varepsilon_d =$ $0.2\lambda_c$ $\varepsilon_d =$，并将 $2\lambda_c$ 作为六步方案中量子点能量的初始值和最终值。

在图 4 中，我们将该六步方案的结果与图 2 所示的四步协议结果进行比较。为进行更具挑战性的比较，我们在此仅与非均匀四步方案进行比较，该方案已证明在抑制非绝热跃迁方面效果更佳。在图 4(a) 中，我们发现，即使在较短的编织时间尺度内，非绝热跃迁也能得到大幅抑制；而在图 4(b) 和 (c) 中，我们发现实现了精确的几何相位 $\varphi_g = \pi/4$ 和与目标态 $|\psi_g\rangle$ 的高保真度，这表明马约拉纳零模 γ_2 和 γ_3完成了完整交换。重要的是，与上文分析的由绝热条件指导的非均匀四步方案相比，均匀六步调制在实践中应当更易实现。这里仅额外调制了量子点能量 ε_d。这可以通过电栅控制以类似调制耦合强度的方式实现。

绝热捷径方法。——最后，我们注意到，一种抑制非绝热跃迁的流行方法是所谓的绝热捷径（STA）方法 [43–46]。STA 的基本思想是添加辅助反绝热驱动系统，使其动力学能够遵循绝热演化。对于本文研究的二态系统，如图 1(b) 和 (c) 所示，反绝热驱动哈密顿量可表示为 $H'(t) = i\hbar(\zeta_1\gamma_B\gamma_3 + \zeta_2\gamma_B\gamma_2 + \zeta_3\gamma_2\gamma_3)/\Delta^2$，其中 $\Delta^2 = \varepsilon_d^2 + 4|\lambda_1|^2 + 4|\lambda_2|^2$, $\zeta_j = (-1)^j(|\dot{\lambda}_j|\varepsilon_d - \dot{\varepsilon}_d|\lambda_j|)$ 适用于 ζ_1 和 ζ_2，而 $\zeta_3 = 2(|\lambda_1\lambda_2| - |\lambda_1\lambda_2|)$。随后，影响系统演化的总哈密顿量为 $H(t) = H_M(t) + \kappa H'(t)$。这里，我们为反绝热驱动引入整体强度参数 κ，以展示快捷绝热（STA）方法的效果。图 5 分别在 (a)、(b) 和 (c) 中展示了基于先前激发结果，在不同时间尺度下，STA 反绝热驱动对均匀四步、非均匀四步和均匀六步方案中非绝热跃迁概率的影响。对于每种情况，我们考虑的反绝热驱动强度为 $\kappa = 0$、0.5、0.7 和 1。正如预期的那样，只要以 $\kappa = 1$实施完全控制，就能抑制所有情况下的非绝热跃迁。图 5 所示结果确实令人满意。然而，很容易发现，反绝热驱动哈密顿量在实践中很难实现。除了开启 γ_B 与 (γ_2, γ_3) 之间的耦合外，我们还需要建立 γ_2 与 γ_3之间的耦合。所有这些耦合都超出了图 1(b) 所示的原有操控耦合。此外，最棘手的困难在于，要精确实现这些

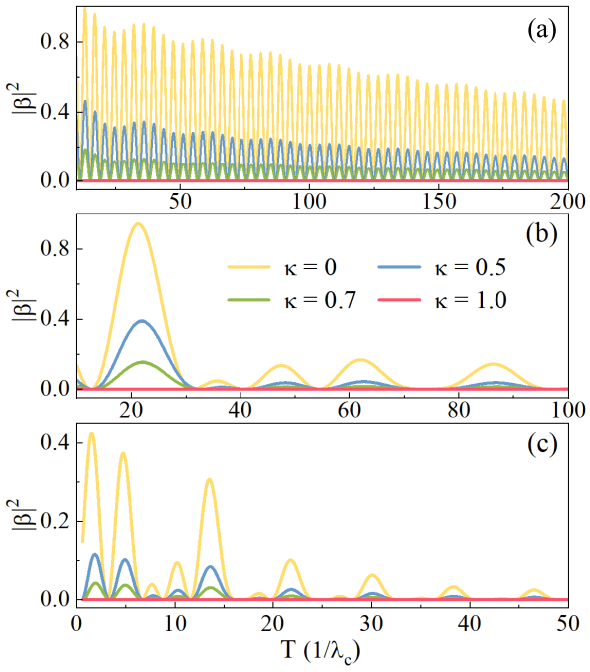

图 5：基于绝热捷径方法，通过改变反绝热驱动的作用强度 κ，研究其影响。(a)、(b)和(c) 中所示的非绝热跃迁概率分别对应四步均匀、四步非均匀和六步操控方案。假设量子点能级 ε_d 与图 4 图注中的说明相同。

随时间变化的耦合强度在实践中似乎不可能。与数学设计的耦合强度存在偏差，就会导致方案无法成功，大致如图 5 所示。

总结与讨论。——通过模拟经由量子点编织一对马约拉纳零模的实时动力学，我们揭示了当量子点能级趋近于零时，强烈的非绝热效应会随之出现，而这是 MZMs 完全交换所必需的。我们对不同方案进行了模拟并比较了结果。我们没有根据绝热条件和绝热捷径策略对系统进行不均匀操控，而是提出了一种更简单、更可行的六步操控方案，以抑制非绝热跃迁，同时实现马约拉纳模的完全交换。

本文分析的马约拉纳编织协议（借助量子点）与当今的混合半导体—超导实验平台相当兼容。这也是对一对马约拉纳零模进行编织的最简 1D 实现。我们要强调的是，与非均匀的四步方案和绝热捷径方法相比，六步操控方案具有明显优势，因为在实践中，后两种方案所要求的精确时变控制应当很难实现。非绝热跃迁可通过量子点的电子占据数推断，并可进一步用附近的电荷灵敏探测器（如量子点接触器件）进行检测。此外，可通过移动（借助栅极电压控制）马约拉纳模 γ_2 和 γ_3 至导线的另一端，使其与 γ_1 和 γ_4 融合，从而验证式 (1) 给出的编织后状态及其偏差。随后，可按照参考文献 [50] 中初始化马约拉纳对、以展示马约拉纳费米子非平庸融合的方案，将融合后的常规费米子耦合到各自的量子点和量子点接触探测器，测量其占据数 n_{12} 和 n_{34}。我们相信，沿着这一思路，基于量子点耦合马约拉纳导线的平台来展示马约拉纳零模的非阿贝尔统计，应当是一个很有吸引力的研究方向。

致谢。——本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：11974011 和 11904261）的资助。

[1] A. Y. Kitaev, 《量子线中的未配对马约拉纳费米子》, Phys. Usp. 44, 131 (2001). [2] A. Y. Kitaev, 《基于任意子的容错量子计算》, Ann. Phys. 303, 2-30 (2003). [3] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. D. Sarma, 《非阿贝尔任意子与拓扑量子计-算》, Rev. Mod. Phys. 80, 1083 (2008). [4] B. M. Terhal, 《量子存储器的量子纠错》, Rev. Mod. Phys. 87, 307-346 (2015). [5] S. D. Sarma, M. Freedman, and C. Nayak, 《马约拉纳零模与拓扑量子计算》, Quantum Inf. 1, 15001 2015( ). [6] Y. Oreg and F. von Oppen, 《库珀对盒网络中的马约拉纳零模：拓扑有序态与拓扑量-子计算》, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 11, 397-420 (2020). [7] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers and L. P. Kouwenhoven, 《马约拉纳特征》混合超导体-半导体纳米线器件中的马约拉纳费米子, Science 336,1003 (2012)。[8] S.M. Albrecht、A. P. Higginbotham、M. Madsen、F. Kuemmeth、T. S. Jespersen、J. Nygard、P.Krogstrup 和 C. M.Marcus，马约拉纳岛中零模的指数保护，Nature531, 206 (2016)。[9] M. T. Deng、S. Vaitiekenas、E.B. Hansen、J.Danon、M.Leijnse、K. Flensberg、J. Nygard、P.Krogstrup和C.M. Marcus，耦合量子点-混合纳米线系统中的马约拉纳束缚态，Science354, 1557 (2016)。[10] J. Alicea、Y.Oreg、G. Refael、F.vonOppen 和 M. Fisher，一维线网络中的非阿贝尔统计与拓扑量子信息处理，Nat. Phys. 7, 412-417 (2011)。[11] B. I. Halperin、Y. Oreg、A. Stern、G. Refael、J. Alicea 和 F. von Oppen，量子线三维网络中马约拉纳费米子的绝热操控，物理评论B 85, 144501 (2012)。[12] T. Karzig、G. Refael 和 F. von Oppen，增强马约拉纳

零模，《物理评论X》3，041017（2013）。[13] M. Sekania、S. Plugge、M. Greiter、R. Thomale 和 P.Schmitteckert，《相互作用马约拉纳量子线中的编织误差》，《物理评论B》96，094307（2017）。[14] F.Harper、A.Pushp和R. Roy，《现实纳米线Y形结和音叉中的马约拉纳编织》，《物理评论研究》1，033207 2019( )。[15] C. Tutschku、R. W. Reinthaler、C. Lei、A. H.MacDonald和E. M. Hankiewicz，《纳米线器件中的基于马约拉纳的量子计算》，《物理评论B》102，125407（2020）。[16] L.Xu和 X.Q. Li，《移动马约拉纳零模导致的非绝热跃迁的输运探测》，《物理评论B》105，245410 2022( )。[17] D. J.Clarke、J.D. Sau和S.Tewari，《准一维网络中的马约拉纳费米子交换》，《物理评论B》84，035120 2011( )。[18] J. D. Sau、D.J.Clarke和S. Tewari，《控制半导体纳米线中马约拉纳费米子的非阿贝尔统计》，《物理评论B》84，094505（2011）。[19] C. S.Amorim、K. Ebihara、A.Yamakage、Y.Tanaka 和M.Sato，《纳米线中的马约拉纳编织动力学》，《物理评论B》91，174305（2015）。[20] S. DasSarma、A.Nag 和J.D. Sau，《如何从现实马约拉纳纳米线的隧穿电导性质推断非阿贝尔统计和拓扑可见度》，《物理评论B》94，035143 2016( )。[21] B. VanHeck、A. R. Akhmerov、F. Hassler、M.Burrello 和C.Beenakker，《约瑟夫森结阵列中马约拉纳费米子的库仑辅助编织》，《新物理学杂志》14，035019（2012）。[22] T. Hyart、B.VanHeck、I. Fulga、M. Burrello、A.Akhmerov和 C. Beenakker，《利用马约拉纳费米子进行磁通控制量子计算》，《物理评论B》88，035121（2013）。[23] C. Knapp、M. Zaletel、D. E. Liu、M.Cheng、P.Bonderson 和C. Nayak，《任意子编织中的非绝热误差的本质与校正》，《物理评论X》6，041003（2016）。[24] C.K. McLauchlan 和B. Beri，《基于费米子宇称的计算及其马约拉纳零模实现》，《物理评论快报》128，180504（2022）。[25] K.Flensberg，《通过单电荷控制对马约拉纳费米子执行非阿贝尔操作》，《物理评论快报》106，090503（2011）。[26] C.Malciu、L. Mazza和 C. Mora，《利用量子点编织马约拉纳零模》，《物理评论B》98，165426（2018）。[27] S. Krojer、R.S.Souto和K.Flensberg，《利用快速绝热电荷转移展示马约拉纳的非阿贝尔性质》，《物理评论B》105，045425（2022）。[28] P. Bonderson、M. Freedman 和 C. Nayak，《仅测量拓扑量子计算》，《物理评论快报》101，010501（2008）。[29] S. Hoffman、C. Schrade、J.Klinovaja和 D.Loss，《利用混合自旋 - 马约拉纳量子比特进行通用量子计算》，《物理评论B》94，045316（2016）。[30] T.Karzig、C. Knapp、R. M. Lutchyn、P. Bonderson、M.B. Hastings、C. Nayak、J.Alicea、K. Flensberg、S.Plugge、Y. Oreg、C.M.Marcus和 M.H.Freedman，《利用马约拉纳零模实现具有可扩展性的、受准粒子中毒保护的拓扑量子计算设计》，《物理评论B》95，235305（2017）。

[31] S. Vijay 和 L. Fu，《基于传送的马约拉纳零模量子信息处理》，Phys. Rev. B 94, 235446 (2016)。[32] V. Kornich、X. Huang、E. Repin 和 Y. V. Nazarov，《一维系统中利用马约拉纳模进行编织及所有量子操作》，Phys. Rev. Lett. 126, 117701 (2021)。[33] D. J. Clarke、J. D. Sau 和 S. Das Sarma，《马约拉纳纳米线中的概率与编织统计》，Phys. Rev. B 95, 155451 2017( )。[34] A. Rahmani、B. Seradjeh 和 M. Franz，《基于马约拉纳量子门的最优非绝热动力学》，Phys. Rev. B 96, 075158 (2017) [35] Z. T. Zhang、F. Mei、X. G. Meng、B. L. Liang 和 Z. S. Yang，《退相干对马约拉纳编织中非绝热误差的影响》，Phys. Rev. A 100, 012324(2019)。[36] A. Nag 和 J. D. Sau，《玻色浴中的马约拉纳编织非绝热误差》，Phys. Rev. B 100, 014511(2019)。[37] P. Marra，《拓扑量子计算用马约拉纳纳米线》，J. Appl. Phys. 132, 231101 (2022)。[38] T. Karzig、Y. Oreg、G. Refael 和 M. H. Freedman，《通向稳健马约拉纳魔法门的通用几何路径》，Phys. Rev. X 6, 031019 (2016)。[39] J. Liu、W. Chen、M. Gong、Y. Wu 和 X. C. Xie，《马约拉纳零模非阿贝尔编织的最简装置》，Sci. China-Phys. Mech. Astron 64, 117811 (2021)。[40] S. Hart、H. Ren、M. Kosowsky、G. Ben-Shach、P. Leubner、C. Br¨une、H. Buhmann、L. Molenkamp、B. Halperin 和 A. Yacoby，《邻近效应HgTe量子阱中的受控有限动量配对与空间变化的序参量》，Nat. Phys. 13, 87C93 (2017)。[41] H. Ren、F. Pientka、S. Hart、A. T. Pierce、M. Kosowsky、L. Lunczer、R. Schlereth、B. Scharf、E. M. Hankiewicz、L. W. Molenkamp、B. I. Halperin 和 A. Yacoby，《相位控制约瑟夫森结中的拓扑超导性》，Nature 569, 93C98 (2019)。[42] B. Scharf、F. Pientka、H. Ren、A. Yacoby 和 E. M. Hankiewicz，《利用具有Rashba和Dresselhaus自旋轨道耦合的相位控制约瑟夫森结调控拓扑超导性》，Phys. Rev. B 99, 214503 (2019)。[43] M. Demirplak 和 S. A. Rice，《利用控制场进行绝热布居转移》，J. Phys. Chem. A 107, 9937(2003)。[44] M. V. Berry，《无跃迁量子驱动》，J. Phys. A: Math. Theor. 42, 365303 (2009)。[45] T. Karzig、F. Pientka、G. Refael 和 F. von Oppen，《非阿贝尔编织的捷径》，Phys. Rev. B 91, 201102(R) (2015)。[46] K. Ritland 和 A. Rahmani，《通往绝热性的最优噪声抵消捷径：在噪声马约拉纳量子门中的应用》，新物理学杂志 20, 065005(2018)。[47] L. Landau，《能量转移理论》，Phys. Z. 2, 46 (1932)。[48] C. Zener，《能级的非绝热交叉》，Proc. R. Soc. A 137, 696 (1932)。[49] S. N. Shevchenkoa、S. Ashhab 和 F. Nori，《Landau-Zener-Stückelberg干涉测量》，Phys. Rep. 492, 1-30 (2010)。[50] T. Zhou、M. C. Dartiailh、K. Sardashti、J. E. Han、A. Matos-Abiague、J. Shabani 和 I. Zutic，《二维系统中利用微型栅极控制融合马约拉纳束缚态》，Nat. Commun. 13, 1738 (2022)。