arXiv:2304.04316v2 [math.AP] 8 Feb 2025

不敏感控制：扩散系数依赖于状态梯度的拟线性抛物方程

Dany Nina Huaman[1†] 和 Miguel R. Nu˜ñez-Ch´ávez[2*†]

[1]数学系，拉莫利纳国立农业大学，拉莫利纳，利´马，秘鲁。[2*]数学系，马托格罗索联邦大学，库亚´巴，马托格罗索，巴西。

*通讯作者。电子邮箱：miguel.chavez@ufmt.br；贡献作者：danynina3003@gmail.com；

†这些作者对本研究作出了同等贡献。

摘要

本文研究了一个带有狄利克雷边界条件的拟线性抛物方程，其扩散项依赖于状态的梯度。本文旨在证明存在一种控制，使所研究的系统不敏感化；这是徐刘于 2012 年留下的开放问题。众所周知，不敏感化控制问题等价于一个级联系统的零可控性结果，该结果通过对偶论证、Carleman估计和右逆映射定理获得。此外，本文还介绍了关于其他拟线性系统的一些可能拓展和开放问题。

关键词：准线性方程，零可控性，Carleman 不等式，不敏感控制

1 引言

不可感控制问题最初由 J. L. Lions 在 [21, 22], 中提出，此后关于这一主题的研究在双曲型和抛物型方程领域均发表了大量论文。

关于半线性热方程，首个结果是 [3] 针对分布控制获得的，更准确地说

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = \xi + u\chi_\omega & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集； χ_ω 表示开集ω的特征函数， $\omega \subset\Omega$； ξ， $\hat{}y_0$ 属于 X_1， X_0 （某些空间）。状态方程（1）的数据是不完整的，具体来说：

- $\hat{}y_0 \in X_0$ 未知，且 $\|\hat{}y_0\|_{X_0} = 1$。
- $\tau \in \mathbb{R}$ 未知且足够小。

此外，考虑能量泛函：

$$\Phi(y) := \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x,t;\tau,u)|^2 \, dx \, dt, \tag{2}$$

不敏感控制问题大致可表述如下：

- 我们称控制 u 使 Φ 不敏感，如果

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(y(\cdot,\cdot;\tau,u)) \Big|_{\tau=0} \right| = 0, \tag{3}$$

当（3）成立时，泛函 Φ 对扰动 $\tau\hat{}y^0$局部不敏感。

- 给定 $\epsilon > 0$，若控制 u 满足以下条件，则称其为对 Φ 的 ϵ-不敏感控制：

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(y(\cdot,\cdot;\tau,u)) \Big|_{\tau=0} \right| \leq \epsilon. \tag{4}$$

在 [3], 中，作者提出并研究了（ϵ-不敏感控制）(1的近似不敏感控制概念。为去除条件 y_0 =0，作者证明了 ϵ-不敏感控制问题等价于一个级联系统的近似可控性结果，并在文中建立了该结果。

在 [8], 中，线性热方程的条件 $y_0 = 0$ 被移除，取而代之的是以下条件： $\mathcal{O} \subset \omega$ 或 $\mathcal{O}$ =Ω。此外，作者证明，如果不满足这一附加条件，就会出现一些负面结果。在 [7], 中，作者证明了同一半线性热系统存在不敏感控制，并证明存在一个属于 L^2 的初始数据，无法使其不敏感。 [4] 将这一最后的结果推广到了超线性非线性项的情形。

对于源自流体动力学的抛物型系统，首次尝试处理不敏感化问题的是 [10] 针对大尺度海洋环流模型（线性的）所作的研究。在 [15],中，正如我们已经提到的，作者研究了线性斯托克斯系统中哨兵分别由状态的L^2-范数和状态旋度的 L^2-范数给出的两种情形。自从不敏感控制被提出以来，条件 $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ 一直

已被施加。但是，根据 [19] 以及 [24], 我们可以看到，这对于ϵ - 不敏感控制而言并非必要条件。例如，作者在 [24] 中证明了存在ϵ-不敏感控制，适用于 Φ 一维空间中没有相交观测区域和控制区域的线性热方程，并采用了谱理论。此外，正如我们在这个特殊情形中所看到的，不敏感化问题与耦合系统的控制问题直接相关。特别是，人们可以问，是否仅通过作用于一个方程，就能够控制耦合系统的两个状态。在 [15] 以及 [16],中，作者在更一般的框架下分别针对斯托克斯系统和热系统研究了这一问题以及一些不敏感化问题。

随后，在 [28] 中，作者通过将Kakutani 不动点定理与一个相应的Carleman不等式相结合，研究了具有更一般成本泛函的非线性热方程的带控制约束的消敏控制问题。关于拟线性抛物型方程的一些可控性结果已在 [11, 25, 26], 中进行了研究；关于拟线性抛物方程的消敏可控性，XuLiu 在 [23] (2012) 中进行了研究。作者在状态 y 和控制 u方面采用了 H¨older 空间，更确切地说，研究了以下系统

$$\begin{cases} y_t - \sum_{i,j=1}^{N} \left(a^{ij}(y)y_{x_i}\right)_{x_j} + f(y) = \xi + u\chi_\omega & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

以及能量泛函（2）。

当扩散系数取决于状态梯度（$a^{ij}(\nabla y)$）时，Xu Liu 在 [23] 中将这一情形留作未解问题。本文的主要创新在于，我们证明了对于扩散系数依赖于状态梯度的系统（5），不敏感控制的存在性。

2 主要结果的陈述

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N = 1, 2 \text{ 或 } 3)$ 为一个有界区域，其边界 Γ 具有足够的正则性。给定 $T > 0$，考虑柱体 $Q = \Omega \times (0,T)$，其侧边界为 $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$。假设 ω和 $\mathcal{O}$是 Ω 中两个给定的非空开子集。下文中，我们用 χ_ω 表示子集 ω 的特征函数；$(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 Ω 中的 L^2 标量积和范数。符号 C用于表示一个泛正数。

我们将考虑以下系统。

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(\nabla y)\nabla y) + f(y) = \xi + u\chi_\omega & \text{in} \quad Q, \\ y = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ y(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

在系统（1）中， y 和 u 分别为状态变量和控制变量， ξ和 y_0 是两个已知函数， τ 是一个未知的小实数，$\hat{}y_0$ 是一个未知的

函数， $f(\cdot)$ 和 $a(\cdot)$ 分别是 $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 和 $C^3(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ 中的给定函数，满足

$$\begin{cases} 0<a_0\le a(x)\le a_1,\ \forall x\in\mathbb{R}^N \\ \|D_i a(x)\|_{\mathbb{R}^N}+\|D_{ij}^2 a(x)\|_{\mathbb{R}^{N^2}}+\|D_{ijk}^3 a(x)\|_{\mathbb{R}^{N^3}}\le M,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^N, \\ f(0)=0,\ \ |f(r)|+|f'(r)|+|f''(r)|\le M,\ \forall r\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

其中， $D_i a$、 $D_{ij}^2 a$ 和 $D_{ijk}^3 a$ 分别表示函数 $a(\cdot)$ 的一阶、二阶和三阶导数。

此外，我们还将考虑系统（ $\Phi(\cdot)$ 的能量泛函，如（1）所示，参见（2）。
我们定义以下空间。

$$X_0=\Big\{w:\ w\in L^2(0,T;H^2(\Omega)), w_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega)), w|_\Sigma=0\Big\},$$

and

$$X_1=\Big\{w:\ w\in L^2(0,T;H^4(\Omega)),\ w_t\in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ w_{tt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ w|_\Sigma=0\Big\}.$$

那么，如果 $f=f(\cdot)$ 和 $a=a(\cdot)$ 满足 (2)， $\xi, u\chi_\omega\in X_0$, $y_0, \hat{}y_0\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ with$\Delta y_0, \Delta \hat{}y_0\in H_0^1(\Omega)$，且函数 $\xi, u\chi_\omega, y_0, \tau$ 在各自空间中都充分小，那么方程 (1) 存在唯一解 $y(\cdot,\cdot;\tau,u)\in X_1$，满足

$$\|y\|_{X_1}\le C\left(\|\xi\|_{X_0}+\|u\chi_\omega\|_{X_0}+\|y_0+\tau\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)}\right), \tag{3}$$

其中， C 是一个仅依赖于 N、Ω T、 M、 a_0 和 a_1 的正常数。
关于系统（1）适定性的结果见附录。

现在，我们引入以下概念：
定义 1. 对于给定函数 $\xi\in X_0$ 和 $y_0\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，控制函数 $u\in X_0$ 满足 $\text{supp}\ u\subseteq\omega\times[0,T]$ 被称为使泛函 Φ 定义于 (2) 中的函数，若 u满足

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(y(\cdot,\cdot;\tau,u))\Big|_{\tau=0}=0,\ \forall\hat{y}_0\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\quad with\quad \|\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)}=1. \tag{4}$$

我们的主要结果表述如下定理：
定理 1. 假设 $\omega\cap\mathcal{O}\neq\emptyset$ 且 $y_0=0$. 那么，存在两个正˜常数 M 和 δ，它们只依赖于 N、Ω T、 M、 a_0 和 a_1，使得对于满足 $\xi\in X_0$的任意

$$\left\|e^{\frac{\tilde{M}}{t}}\ \xi\right\|_{X_0}\le\delta, \tag{5}$$

可以找到控制函数 $u\in X_0$ 满足 $\text{supp}\ u\subset\omega\times[0,T]$，该函数使泛函 Φ按照定义 1实现不敏感。

本文其余部分的组织结构如下。
在第3节中，我们将证明一些技术性结果，也就是说，首先，我们将把不敏感化问题重新表述为一个最优性拟线性方程的零可控性问题。

系统；其次，我们将应用Carleman估计研究线性化系统（针对最优性拟线性系统）的零可控性，最后我们将为状态找到一些额外的估计。

在第4节中，我们将给出定理 1 的证明，因此，我们将应用柳斯捷尔尼克方法证明最优性准线性系统的零可控性。

第5节将讨论一些补充说明和结果。

在附录中，我们将给出准线性系统（1）适定性的证明。

3 初步结果

3.1 不敏感化问题的重新表述：

Φ 的特殊形式使我们能够将不敏感化问题重新表述为级联系统的可控性问题（有关更多细节，参见 [23], ，例如）。

命题 2。 假设 ξ， $u \in X_0$ 满足 （5） 且 $y_0 = 0$。如果 u 和 ξ 分别在其空间中足够小，且相应的解 （y， h） $\in X_1 \times X_0$ 属于以下非线性系统

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(\nabla y)\nabla y) + f(y) = \xi + u\chi_\omega & in \ Q, \\ -h_t - \nabla \cdot \{Da(\nabla y)(\nabla y \cdot \nabla h) + a(\nabla y)\nabla h\} + f'(y)h = y\chi_{\mathcal{O}} & in \ Q, \\ y = 0,\ h = 0 & on \ \Sigma, \\ y(x,0) = 0,\ h(x,T) = 0 & in \ \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

满足 h（x，0） $= 0$ 在 Ω中，则 u 使泛函 Φ （定义为 （2）不敏感。

证明。 该命题的证明可见附录 C。 □

为了证明系统（1）在时刻 $t = 0$零可控，我们考虑（1）的线性化系统

$$\begin{cases} y_t - a(0)\Delta y + Ay = u\chi_\omega + g_1 & \text{in } Q, \\ -h_t - a(0)\Delta h + Ah = y\chi_{\mathcal{O}} + g_2 & \text{in } Q, \\ y = 0,\ h = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(x,0) = 0,\ h(x,T) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $A = f'$（0）以及（2）的伴随系统

$$\begin{cases} -\varphi_t - a(0)\Delta\varphi + A\varphi = \psi\chi_{\mathcal{O}} + G_1 & \text{in } Q, \\ \psi_t - a(0)\Delta\psi + A\psi = G_2 & \text{in } Q, \\ \varphi = 0,\ \psi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = 0,\ \psi(x,0) = \psi_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

3.2 关于 （3）的Carleman估计

在抛物型系统的零可控性分析中，Carleman 估计是一种非常强大的工具（见 [13, 18]）。为了陈述我们的 Carleman 估计

我们需要定义一些权函数。设 ω_0 是 $\omega \cap \mathcal{O}$ 的一个非空开子集，并令

$$\sigma(x,t) = \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)},\ \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)}, \tag{4}$$

对于某个参数 $\lambda > 0.$，这里，$\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$表示满足以下条件的函数。

$$|\nabla \eta^0| \geq k_0 > 0 \ \text{ in } \Omega \setminus \overline{\omega}_0,\ \eta^0 > 0 \text{ in } \Omega \ \text{ and } \eta^0 = 0 \ \text{ on } \partial\Omega. \tag{5}$$

此类函数存在性的证明 η^0 可见于 [13]。

这类权函数也曾在 [6, 25] 中使用过。我们引入以下记号:

$$I(s,\lambda;\phi) := \iint_Q e^{-2s\sigma}\left[(s\xi)^{-1}(|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2) + \lambda^2 s\xi|\nabla\phi|^2 + \lambda^4(s\xi)^3|\phi|^2\right] dxdt.$$

我们将推导适用于如下类型系统的解的 Carleman 不等式（3）。

命题 3。假设 G_1, $G_2 \in L^2(Q)$。存在正定常数λ_1, s_1 以及 C_1 使得，对于任意 $s \geq s_1$ 和 $\lambda \geq \lambda_1$，任意 $\psi_0 \in L^2(\Omega)$，方程(3)的相应解满足

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\varphi) + I(s,\lambda;\psi) \leq C_1 \Bigg(& \iint_Q e^{-2s\sigma}\left[\lambda^4(s\xi)^3|G_1|^2 + |G_2|^2\right] dxdt \\ & + \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^8(s\xi)^7|\varphi|^2\, dxdt \Bigg). \end{aligned} \tag{6}$$

此外，C_1 和 λ_1 仅依赖于 Ω 和 ω，而且 s_1 可以选为 $s_1 = C(T + T^2)$ 的形式，其中 C 仅依赖于 Ω、ω、$a(0)$ 和 $|A|$。

证明。显然，只需证明存在 λ_1 和 s_1，使得对于任意小的 $\epsilon > 0$、任意 $s \geq s_1$ 和任意 $\lambda \geq \lambda_1$，都有

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\varphi) + I(s,\lambda;\psi) \leq \epsilon I(s,\lambda;\psi) + C_\epsilon \Bigg(& \iint_Q e^{-2s\sigma}\left[\lambda^4(s\xi)^3|G_1|^2 + |G_2|^2\right] dxdt \\ & + \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^8(s\xi)^7|\varphi|^2\, dxdt \Bigg). \end{aligned} \tag{7}$$

由通常的 Carleman 不等式（参见[6, 14]）在（3）中，对于 $s \geq \sigma_1(T + T^2)$ 以及$\lambda \geq \lambda_0$, 我们有

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\varphi) + I(s,\lambda;\psi) \leq C \Bigg(& \iint_Q e^{-2s\sigma}\left[|G_1|^2 + |G_2|^2\right] dxdt \\ & + \iint_{\omega_0\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^4(s\xi)^3\left[|\varphi|^2 + |\psi|^2\right] dxdt \Bigg), \end{aligned} \tag{8}$$

由最后一个不等式可得不等式（7）。为此，我们首先引入一个函数 $\eta \in C_0^\infty(\omega)$，满足 $0 \le \eta \le 1$ 且 $\eta = 1$ 在 ω_0. 则

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_0\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^4(s\xi)^3|\psi|^2\,dxdt &\le \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^4(s\xi)^3\eta|\psi|^2\,dxdt\\ &= \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^4(s\xi)^3\eta\psi(-\varphi_t - a(0)\Delta\varphi + A\varphi - G_1)\,dxdt\\ &:= M_1 + M_2 + M_3 + M_4.\end{aligned}$$

这里，利用函数 α 和 ξ的性质，我们得到

$$M_i \le \epsilon I(s,\lambda;\psi) + C_\epsilon \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\lambda^8(s\xi)^7|\varphi|^2\,dxdt.$$

由这些估计和（8），我们得到不等式（7），证明至此完成。

□

现在，我们将证明一个Carleman估计，其中的函数仅在 $t = 0$处发散；这使我们能够为系统（3）证明一个可观测性不等式。

定义新的权函数

$$\overline{\sigma}(x,t) = \frac{e^{\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{\ell(t)}, \quad \overline{\xi}(x,t) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}}{\ell(t)},$$

$$\sigma^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\overline{\sigma}(x,t), \qquad \xi^*(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}}\overline{\xi}(x,t),$$
$$\hat{\sigma}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}}\overline{\sigma}(x,t), \qquad \hat{\xi}(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\overline{\xi}(x,t),$$

其中，函数 ℓ 由下式给出

$$\ell(t) = \begin{cases} t(T-t) & 0 \le t \le \dfrac{T}{2},\\ \dfrac{T^2}{4} & \dfrac{T}{2} < t \le T.\end{cases}$$

注意，在 $(0$中，$\overline{\sigma} = \sigma$ 和 $\overline{\xi} = \xi$；令 $\frac{T}{2})$，并引入以下记号

$$\overline{I}(s,\lambda;\phi) := \iint_Q e^{-2s\overline{\sigma}}\Big[(s\overline{\xi})^{-1}(|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2) + \lambda^2 s\overline{\xi}|\nabla\phi|^2 + \lambda^4(s\overline{\xi})^3|\phi|^2\Big]\,dxdt.$$

有如下结果:

命题 4. 假设 $G_1, G_2 \in L^2(Q)$。存在正定常数λ_2, s_2，使得对于任意 $s \ge s_2$ 和 $\lambda \ge \lambda_2$，存在常数 $C_2 = C_2(s,\lambda) > 0$

具有以下性质：对于任意 $\psi_0 \in L^2(\Omega)$，与之相关的解 (3) 满足

$$\begin{aligned}\overline{I}(s,\lambda;\varphi)+\overline{I}(s,\lambda;\psi) \le C_2 \left(\iint_Q e^{-2s\overline{\sigma}} \left[\lambda^4 (s\overline{\xi})^3 |G_1|^2 + |G_2|^2 \right] dxdt \right. \\ \left. + \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\overline{\sigma}} \lambda^8 (s\overline{\xi})^7 |\varphi|^2 \, dxdt \right).\end{aligned} \tag{9}$$

此外，λ_2 和 s_2 仅依赖于 Ω、ω、T、$a(0)$ 和 $|A|_\infty$。

证明。我们可以将 $\overline{I}(s,\lambda;\varphi)$ 中的所有积分分解为以下形式 $\iint_Q = \iint_{\Omega\times(0,\frac{T}{2})} + \iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)}$.

让我们将 $\overline{I}_1(s,\lambda;\varphi)$ 中 $\Omega \times \left(0,\frac{T}{2}\right)$ 内的所有积分（分别将 $\overline{I}_2(s,\lambda;\varphi)$ 中 $\Omega \times \left(\frac{T}{2},T\right)$ 内的所有积分）汇总起来。于是，$\overline{I}(s,\lambda;\varphi) = \overline{I}_1(s,\lambda;\varphi) + \overline{I}_2(s,\lambda;\varphi)$，而 $\overline{I}(s,\lambda;\psi)$ 也有类似的分解。

根据命题 3中的 Carleman 不等式，取 $s \ge s_1$ 和 $\lambda \ge \lambda_1$，可得

$$\overline{I}_1(s,\lambda;\varphi)+\overline{I}_1(s,\lambda;\psi) \le C(\overline{RS}), \tag{10}$$

其中，$(\overline{RS})$ 是 (9) 的右端。

为了证明 $\overline{I}_2(s,\lambda;\varphi) + \overline{I}_2(s,\lambda;\psi) \le C(\overline{RS})$，令函数$\eta \in C^2([0,T])$满足

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0,\dfrac{T}{4}\right], \\ 0<\eta(t)<1 & t \in \left(\dfrac{T}{4},\dfrac{T}{2}\right), \\ 1, & t \in \left[\dfrac{T}{2},T\right]. \end{cases}$$

那么，如果（φ，ψ）是（3）的解，不难看出（$\eta\varphi$，$\eta\psi$）满足系统

$$\begin{cases} -(\eta\varphi)_t - a(0)\Delta(\eta\varphi) + A(\eta\varphi) = (\eta\psi)\chi_{\mathcal{O}} + (\eta G_1) - \eta_t\varphi & \text{in } Q, \\ (\eta\psi)_t - a(0)\Delta(\eta\psi) + A(\eta\psi) = (\eta G_2) + \eta_t\psi & \text{in } Q, \\ \eta\varphi = 0,\ \eta\psi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \eta\varphi(T) = 0,\ \eta\psi(0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

方程（11）的经典能量估计[2]，我们有

$$\int_\Omega |\eta\psi|^2 \, dx + \iint_Q |\eta\nabla\psi|^2 \, dxdt \le C \left(\iint_Q |\eta G_2|^2 \, dxdt + \iint_Q |\eta_t\psi|^2 \, dxdt \right). \tag{12}$$

将 $\eta\varphi$ 乘以（11）中的第一个方程，并对 Q积分

$$\iint_Q |\eta\varphi|^2\,dxdt+\iint_Q |\eta\nabla\varphi|^2\,dxdt \le C\left(\iint_Q |\eta G_1|^2\,dxdt+\iint_Q |\eta_t\varphi|^2\,dxdt\right)+\epsilon\iint_Q |\eta\psi|^2\,dxdt.$$

当 $\epsilon>0$ 充分小时，将此结果与最后一个不等式结合起来，并结合（12），可得

$$\begin{aligned}&\iint_Q |\eta|^2\Big[|\varphi|^2+|\psi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\nabla\psi|^2\Big]\,dxdt\\ &\qquad\le C\left(\iint_Q |\eta|^2\Big[|G_1|^2+|G_2|^2\Big]\,dxdt+\iint_Q |\eta_t|^2\Big[|\varphi|^2+|\psi|^2\Big]\,dxdt\right).\end{aligned}\tag{13}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}&\iint_Q \left(|\eta\varphi_t|^2+|\eta\psi_t|^2+|\eta\Delta\varphi|^2+|\eta\Delta\psi|^2\right)\,dxdt\\ &\qquad\le C\left(\iint_Q |\eta|^2\Big[|G_1|^2+|G_2|^2\Big]\,dxdt\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\iint_Q |\eta_t|^2\Big[|\Delta\varphi|^2+|\Delta\psi|^2+|\varphi_t|^2+|\psi_t|^2\Big]\,dxdt\right).\end{aligned}\tag{14}$$

由方程（12）–（14）以及 η 的性质，可推得

$$\begin{aligned}&\overline{I}_2(s,\lambda;\varphi)+\overline{I}_2(s,\lambda;\psi)\\ &\qquad\le C\left(\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{T}{2})}\Big[|\Delta\varphi|^2+|\Delta\psi|^2+|\varphi_t|^2+|\psi_t|^2\Big]\,dxdt\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)}\Big[|G_1|^2+|G_2|^2\Big]\,dxdt\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\overline{I}_2(s,\lambda;\varphi)+\overline{I}_2(s,\lambda;\psi)\le C(\overline{RS}).$$

将此结果与（10）结合，即可得到不等式（9）。

证明至此完成。□

注 **1.** 若 $\lambda>\dfrac{1}{\|\eta^0\|_\infty}$ 足够大，并记为

$$\beta(x,t)=\frac{2}{5}\overline{\sigma}(x,t),\ \beta^*(t)=\max_{x\in\overline{\Omega}}\beta(x,t)\quad and\quad \hat{\beta}(t)=\min_{x\in\overline{\Omega}}\beta(x,t),$$

我们有

$$\hat{\beta}(t)\le\beta(x,t)\le\frac{5}{4}\hat{\beta}(t)\quad and\quad \frac{4}{5}\beta^*(t)\le\beta(x,t)\le\beta^*(t).$$

因此，由命题 *4* 可得

$$I_*(s,\lambda;\varphi)+I_*(s,\lambda;\psi)\le C\left(\iint_Q e^{-4s\beta^*}\left[\lambda^4(s\hat{\xi})^3|G_1|^2+|G_2|^2\right]\,dxdt\right.$$
$$\left.+\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-4s\beta^*}\lambda^8(s\hat{\xi})^7|\varphi|^2\,dxdt\right), \tag{15}$$

其中

$$I_*(s,\lambda;\varphi)=\iint_Q e^{-5s\beta^*}\left[(s\hat{\xi})^{-1}(|\phi_t|^2+|\Delta\phi|^2)+\lambda^2 s\xi^*|\nabla\phi|^2+\lambda^4(s\xi^*)^3|\phi|^2\right]\,dxdt.$$

˜备注 2。新的权函数 $\tilde{\sigma}(x,t)$ 和 $\xi(x,t)$ 实际上并非必要，因为由于权函数 $\sigma(x,t)$ 和 $\xi(x,t)$ 的指数爆炸，我们将证明 $h(x,0)=y(x,T)=0$，此外， $h(x,T)=y(x,0)=0$，但这就是初始条件（在这种情况下，与初始值并不矛盾），因此可以假设通常的权函数 $\sigma(x,t)$ 和 $\xi(x,t)$。

备注 3。实际上没有必要使用权函数 $\sigma^*(t)$、$\hat{}\sigma(t)$、$\hat{}\xi^*(t)$ 和 $\xi(t)$，我们可以应用通常的权函数 $\sigma(x,t)$ 和 $\xi(x,t)$ 来得出所需结果，但在这种情况下，估计将会很繁琐且篇幅更大，因此，为简单起见，我们将关于空间变量的这些权函数取最大值和最小值。

3.3 线性系统的零可控性（2）

假设备注1 中的记号和假设成立。于是，为简化记号，我们将用

$$\rho_0:=e^{2s\beta^*}\xi^{*-\frac{3}{2}},\quad \rho_1:=e^{2s\beta^*}\xi^{*-\frac{7}{2}},\quad \rho:=e^{\frac{5}{2}s\beta^*},$$
$$\hat{\rho}_0:=e^{\frac{3}{2}s\beta^*}\xi^{*-\frac{9}{2}},\quad \hat{\rho}_k:=e^{\frac{3}{2}s\beta^*}\xi^{*-\frac{15+2k}{2}},\ k\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

借助命题4，我们将能够证明（2）的零可控性，其中右端项 f 和 g 当 $t\to 0^+$. 时充分快地衰减至零。事实上，有如下结论：

命题5. 假设命题 4 的假设成立，并令 g_1,g_2 满足$\rho g_1\,\rho_0 g_2\in L^2(Q)$。那么，系统 (2) 在时间 $t=0$ 可零控制。更准确地说，存在 $u\in L^2(\omega\times(0,T))$，其支集满足supp $u\subset\omega\times[0,T]$，使得若 (y,h) 是 (2) 的解，则有：

a)

$$\iint_{\omega\times(0,T)}\left[\hat{\rho}_1^2|u_t|^2+\hat{\rho}_1^2|\Delta u|^2+\hat{\rho}_1^2|u|^2\right]dxdt\le C\iint_Q\left[\rho^2|g_1|^2+\rho_0^2|g_2|^2\right]dxdt,$$
$$\iint_Q\left(\rho_0^2|y|^2+\rho_0^2|h|^2\right)\,dxdt<+\infty, \tag{17}$$

b)

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat\rho_0^2(t)\int_\Omega|y(t)|^2\,dx\right)+\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat\rho_0^2(t)\int_\Omega|h(t)|^2\,dx\right)\\&+\iint_Q\hat\rho_0^2(|\nabla y|^2+|\nabla h|^2)\,dxdt\le C\left(\iint_Q\left(\rho^2|y|^2+\rho_0^2|h|^2\right)\,dx\,dt\right.\\&\qquad\left.+\iint_Q\left(\rho^2|g_1|^2+\rho_0^2|g_2|^2\right)\,dx\,dt+\iint_{\omega\times(0,T)}\rho_1^2|u|^2\,dx\,dt\right),\end{aligned}\tag{18}$$

c)

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat\rho_1^2(t)\int_\Omega|\nabla y(t)|^2\,dx\right)+\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat\rho_1^2(t)\int_\Omega|\nabla h(t)|^2\,dx\right)\\&+\iint_Q\hat\rho_1^2(|\Delta y|^2+|\Delta h|^2)\,dxdt+\int_Q\hat\rho_1^2(|y_t|^2+|h_t|^2)\,dx\,dt\\&\qquad\le C\left(\iint_Q\left(\rho^2|y|^2+\rho_0^2|h|^2\right)\,dx\,dt+\iint_{\omega\times(0,T)}\rho_1^2|u|^2\,dx\,dt\right.\\&\qquad\qquad\left.+\iint_Q\left(\rho^2|g_1|^2+\rho_0^2|g_2|^2\right)\,dx\,dt\right).\end{aligned}\tag{19}$$

证明。我们引入以下约束极值问题:

$$\begin{cases}\inf\left\{\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\iint_Q\rho_0^2(|y|^2+|h|^2)\,dxdt+\iint_{\omega\times(0,T)}\rho_1^2|u|^2\,dxdt\right)\right\},\\ \text{subject to } u\in L^2(Q),\ \text{supp } u\subset\omega\times[0,T]\ \text{ and}\\ \begin{cases}y_t-a(0)\Delta y+Ay=u\chi_\omega+g_1 & \text{in } Q,\\ -h_t-a(0)\Delta h+Ah=y\chi_{\mathcal O}+g_2 & \text{in } Q,\\ y=0,\ h=0 & \text{on } \Sigma,\\ y(x,0)=0,\ h(x,T)=0 & \text{in } \Omega.\end{cases}\end{cases}\tag{20}$$

ˆ 假设该问题存在唯一解 $(\hat y,\hat h)$。那么，根据拉格朗日原理，存在对偶变量 $(\overline{y},\overline{h})$，使得:

$$\begin{cases}\hat y=\rho_0^{-2}\left(\bar y_t-a(0)\Delta\bar y+A\bar y-\bar h\chi_{\mathcal O}\right) & \text{in } Q,\\ \hat h=\rho_0^{-2}\left(-\bar h_t-a(0)\Delta\bar h+A\bar h\right) & \text{in } Q,\\ \hat u=-\rho_1^{-2}\bar y & \text{in } \omega\times(0,T),\\ \hat y=\hat h=0 & \text{on } \Sigma.\end{cases}\tag{21}$$

令 $\chi\in C_0^\infty(\omega)$ $0\le\chi\le1$，其中 $\chi|_{\omega_0}=1$，我们定义

$$\mathcal{P}_0=\left\{(y,h)\in[C^\infty(\overline{Q})]^2;\ y=0,\ h=0\ \text{on }\Sigma,\ y(0)=0,\ h(T)=0\ \text{in }\Omega\right\},$$

and

$$a\left((\bar{y},\bar{h});(y,h)\right)=\iint_Q \rho_0^{-2}(L^*\bar{y}-\bar{h}\chi_{\mathcal{O}})(L^*y-h\chi_{\mathcal{O}})\,dxdt + \iint_Q \rho_0^{-2}\tilde{L}\bar{h}\tilde{L}h\,dxdt+\iint_{\omega\times(0,T)}\chi^2\rho_1^{-2}\bar{y}y\,dxdt, \quad \forall\,(y,h)\in\mathcal{P}_0, \tag{22}$$

~其中 $L^*y:=-y_t-a(0)\Delta y+Ay$ 且 $Lh:=h_t-a(0)\Delta h+Ah$。

^根据定义（22），可以看出，若函数 ^y、 h 满足（20），则必有

$$a\left((\bar{y},\bar{h});(y,h)\right)=\mathcal{G}(y,h),\ \ \forall\,(y,h)\in\mathcal{P}_0, \tag{23}$$

其中

$$\mathcal{G}(y,h)=\iint_Q g_1 y\,dxdt+\iint_Q g_2 h\,dxdt. \tag{24}$$

~主要思想是证明恰好存在一个（$\bar{y}$， h）满足（23）。然后^我们将利用（^y， h）和（22）来定义它，并检验其满足所需的性质。事实上，注意到不等式（15）对（y， h）成立 $\in\mathcal{P}_0$,

$$\iint_Q \rho_0^{-2}|y|^2\,dxdt+\iint_Q \rho_0^{-2}|h|^2\,dxdt\le Ca\left((y,h);(y,h)\right),\ \ \forall\,(y,h)\in\mathcal{P}_0. \tag{25}$$

在线性空间 $\mathcal{P}_0$ 中，我们考虑由 (22) 给出的双线性型 $a(\cdot,\cdot)$；由 (9) 中给出的唯一延拓性质，我们推得 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{P}_0$. 上的内积。现在考虑空间 $\mathcal{P}$，它是 $\mathcal{P}_0$ 关于与 $a(\cdot,\cdot)$ 相关联的范数完备化所得。该空间是一个希尔伯特空间，且 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{P}$. 上的连续强制双线性型。

我们转而考虑线性算子 $\mathcal{G}$，由（24）给出，对所有（y， h） $\in\mathcal{P}$，经过简单计算可得

$$\mathcal{G}(y,h)\le\|\rho_0 g_1\|_{L^2(Q)}\|\rho_0^{-1}y\|_{L^2(Q)}+\|\rho_0 g_2\|_{L^2(Q)}\|\rho^{-1}h\|_{L^2(Q)}.$$

然后，利用（25）以及 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{P}_0$中的稠密性，我们有

$$\mathcal{G}(y,h)\le C\left(\|\rho_0 g_1\|_{L^2(Q)}+\|\rho_0 g_2\|_{L^2(Q)}\right)\|(y,h)\|_{\mathcal{P}},\ \forall\,(y,h)\in\mathcal{P}.$$

因此， $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{P}$. 上的有界线性算子。于是，根据拉克斯–米尔格拉姆~引理，存在唯一一个（$\bar{y}$， h）满足

$$\begin{cases} a\left((\bar{y},\bar{h});(y,h)\right)=\mathcal{G}(y,h),\ \forall\,(y,h)\in\mathcal{P},\\ (\bar{y},\bar{h})\in\mathcal{P}. \end{cases} \tag{26}$$

^ 最后，只需令.....即可得到 $(\hat{y},h)$ 的存在性

$$\hat{y}=\rho_0^{-2}\left(L^*\bar{y}-\bar{h}\chi_{\mathcal{O}}\right),\ \hat{h}=\rho_0^{-2}\tilde{L}\bar{h}\ \text{and}\ \hat{u}=\chi\rho_1^{-2}\bar{y}.$$

ˆ ˆ我们看到 (ˆy, ˆh) 是方程 (2) 的解，并且由于 (ˆy, ˆh) ∈ P我们有

$$\begin{aligned}\iint_Q \rho_0^2|\hat{y}|^2\,dxdt + \iint_Q \rho_0^2|\hat{h}|^2\,dxdt + \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1^2|\hat{u}|^2\,dxdt \\ = a\left((\bar{y},\bar{h});(\bar{y},\bar{h})\right) \le C\iint_Q \left[\rho^2|g_1|^2 + \rho_0^2|g_2|^2\right]dxdt < \infty.\end{aligned} \tag{27}$$

现在，让我们证明项目 $a)$ $b)$ 和 $c)$。

证明 $a)$ ：

首先，我们将函数 y^*、 h^*、 F_1^* 和 F_2^* 定义如下： $y^* = \hat{}\rho_1\rho_1^{-2}\bar{y}$、 $h^* = -\hat{}\rho_1\rho_1^{-2}\bar{h}$、 $F_1^* = -\hat{}\rho\rho_1^{-2}(L^*\bar{y} - \bar{h}\chi_{\mathcal{O}}) - (\hat{}\rho_1\rho_1^{-2})_t\bar{y}$ 和 $F_2^* = \hat{}\rho_1\rho_1^{-2}\check{L}\bar{h} + (\hat{}\rho_1\rho_1^{-2})_t\bar{h}$。根据方程 (3)，我们有 (y^*, h^*) 满足以下系统。

$$\begin{cases} -y_t^* - a(0)\Delta y^* + Ay^* = h^*\chi_{\mathcal{O}} + F_1^* & \text{in } Q, \\ h_t^* - a(0)\Delta h^* + Ah^* = F_2^* & \text{in } Q, \\ y^* = 0,\ h^* = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y^*(x,T) = 0,\ h^*(x,0) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{28}$$

由于（27）我们有

$$\|F_1^*\|^2_{L^2(Q)} + \|F_2^*\|^2_{L^2(Q)} \le a\left((\bar{y},\bar{h});(\bar{y},\bar{h})\right).$$

然后，

$$y^* \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \text{ and } y_t^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

由ˆu的定义，我们有

$$\hat{\rho}_1\hat{u} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \hat{\rho}_1\hat{u}_t \in L^2(Q),$$

with

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\rho}_1^2\left(|\hat{u}_t|^2 + |\Delta\hat{u}|^2\right)dxdt \le C\iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1^2|\hat{u}|^2\,dxdt.$$

b的证明:

为此，将第一个偏微分方程（2）乘以 ˆρ²y ，并在 Ω 上积分。我们得到:

$$\int_\Omega \hat{\rho}_0^2 y\left(y_t - a(0)\Delta y + Ay\right)dx = \int_\Omega \hat{\rho}_0^2 y(u\chi_\omega + g_1)\,dx.$$

注意到

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\rho}_0^2|y|^2\,dx + \frac{a(0)}{2}\int_\Omega \hat{\rho}_0^2|\nabla y|^2\,dx \le C\left(\int_\Omega \hat{\rho}_0^2|y|^2 + \hat{\rho}_0^2|g_1|^2\,dx + \int_\omega \hat{\rho}_1^2|u|^2\,dx\right),$$

因此，

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_0^2(t)\int_\Omega |y(t)|^2\,dx\right)+\iint_Q \hat{\rho}_0^2|\nabla y|^2\,dxdt \\ \leq C\left(\iint_Q \hat{\rho}_0^2|y|^2+\hat{\rho}_0^2|g_1|^2\,dxdt+\iint_{\omega\times(0,T)}\hat{\rho}_1^2|u|^2\,dxdt\right). \tag{29}$$

同样，将第二个方程（2）乘以 $\hat{\rho}^2 h$ 并在 Q 上积分。我们有

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_0^2(t)\int_\Omega |h(t)|^2\,dx\right)+\iint_Q \hat{\rho}_0^2|\nabla h|^2\,dxdt \\ \leq C\left(\iint_Q \hat{\rho}_0^2|y|^2+\rho_0^2|h|^2\,dxdt+\iint_Q \hat{\rho}_0^2|g_2|^2\,dxdt\right). \tag{30}$$

于是，根据（29）-（30），我们有（18）成立。

证明 *c)*：

沿用前面的步骤，将（2）中的第一、第二个方程分别乘以 $\hat{\rho}_1^2 y_t$ 和 $\hat{\rho}_1^2 h_t$，在 Ω 上积分，并使用上述权函数 $\hat{\rho}_1$、$\hat{\rho}_{1,\ t}$ 的性质。我们得到。

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_1^2(t)\int_\Omega |\nabla y(t)|^2\,dx\right)+\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_1^2(t)\int_\Omega |\nabla h(t)|^2\,dx\right) \\ +\iint_Q \hat{\rho}_1^2\left(|y_t|^2+|h_t|^2\right)\,dxdt\leq C(RS), \tag{31}$$

其中（RS）表示（19）右端的项。

继续，将方程2）乘以 $\hat{\rho}_1^2\Delta y$ 和 $\hat{\rho}_1^2\Delta h$，然后在 Ω 上积分，并根据估计（31，我们得到以下不等式。

$$\iint_Q \hat{\rho}_1^2\left(|\Delta y|^2+|\Delta h|^2\right)\,dxdt\leq C(RS). \tag{32}$$

根据估计（29）-（32），不等式（19）成立。

□

3.4 关于状态的一些额外估计

下述结果给出了在命题5中找到的状态的其他性质。下文第4节将需要这些性质。

命题 6. 设命题 *5* 中的假设成立，且状态-控制 $(y,\ h,\ u)$ 满足 (2) 和 (17)。则

a) If $\hat{\rho}_1 g_{1,t}\in L^2(Q)$, *we have*

$$\iint_Q \hat{\rho}_3^2(|y_{tt}|^2+|\Delta y_t|^2+|\nabla y_t|^2)\,dx\,dt+\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_2^2(t)\int_\Omega|\Delta y(t)|^2\,dx\right)$$
$$+\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_3^2(t)\int_\Omega|\nabla y_t(t)|^2\,dx\right)\le C\left(\iint_Q(\rho^2|g_1|^2+\rho_0^2|g_2|^2+\hat{\rho}_1^2|g_{1,t}|^2)\,dx\,dt\right.$$
$$\left.+\iint_{\omega\times(0,T)}\rho_1^2|u|^2+\rho_1^2|u_t|^2\,dx\,dt+\iint_Q\rho_0^2|y|^2+\rho_0^2|h|^2\,dx\,dt\right), \tag{33}$$

b) 若 $\hat{\rho}_1 g_{1,\,t}\in L^2(Q)$ 和 $\hat{\rho}_4 g_1\in L^2(0,T;\,H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$，则有

$$\iint_Q \hat{\rho}_4^2(|\Delta^2 y|^2+|\nabla\Delta y|^2)\,dxdt+\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_5^2(t)\int_\Omega|\nabla\Delta y(t)|^2\,dx\right)$$
$$\le C\left(\iint_Q(\rho^2|g_1|^2+\rho_0^2|g_2|^2)\,dx\,dt+\iint_{\omega\times(0,T)}\rho_1^2|u|^2+\rho_1^2|u_t|^2\,dx\,dt\right. \tag{34}$$
$$\left.+\iint_Q\hat{\rho}_1^2|g_{1,t}|^2+\hat{\rho}_4^2|\Delta g_1|^2\,dx\,dt+\iint_Q\rho_0^2|y|^2+\rho_0^2|h|^2\,dx\,dt\right).$$

证明。 由于命题 5，我们有一个满足y、 h、 u）的状态-控制（2），满足17、18）和19）。因此，接下来我们将证明，这个解y、 h、 u 也满足估计式 a）和 b）。

a) 的证明：为了证明估计 (33)，让我们对 (2) 中的第一个方程关于时间变量求导。

$$y_{tt}-a(0)\Delta y_t+Ay_t=u_t\chi_\omega+g_{1,t}\text{ in }Q. \tag{35}$$

接下来，我们来证明与命题5类似的估计。

- 将（35）两边乘以 $\hat{\rho}^2 y_t$ 并在 Q 上积分，根据命题5 可得</style}

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_2^2(t)\int_\Omega|y_t(t)|^2\,dx\right)+\iint_Q\hat{\rho}_2^2|\nabla y_t|^2\,dxdt\le C(RS)_1, \tag{36}$$

此处（RS）$_1$ 是（33）中的右端。

- 让我们乘以 $\hat{\rho}_2^2\Delta y$ 在（2）中的第一个方程并在其中积分 Q。得益于估计（36），我们有

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_2^2(t)\int_\Omega|\Delta y(t)|^2\,dx\right)\le C(RS)_1. \tag{37}$$

• 乘以 $\hat{\rho}_3^2 y_{tt}$ 在（35）中并在 Q。

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_3^2(t)\int_\Omega |\nabla y_t(t)|^2\,dx\right)+\iint_Q \hat{\rho}_3^2|y_{tt}|^2\,dxdt\le C(RS)_1. \tag{38}$$

• 将（35）式两边乘以 $-\hat{\rho}_3^2\Delta y_t$，并在35上积分 Q。

$$\iint_Q \hat{\rho}_3^2|\Delta y_t|^2\,dxdt\le C(RS)_1. \tag{39}$$

因此，根据前面的估计（36）-（39），可得（18）成立。

Proof of b):

为证明这一点，我们对系统（ Δ 2）应用拉普拉斯算子，并得到以下新系统：

$$\begin{cases} \hat{y}_t-a(0)\Delta\hat{y}+A\hat{y}=\Delta(u\chi_\omega)+\Delta g_1 & \text{in } Q,\\ \hat{y}=0 & \text{on } \Sigma,\\ \hat{y}(x,0)=0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{40}$$

其中 $\hat{y}=\Delta y$，其处理方式与估计部分类似 *a)*

• 乘以 $\hat{\rho}_4^2\hat{y}$，在 Q 上积分，并利用 *a)* 的先前估计。我们得到

$$\iint_Q \hat{\rho}_4^2|\nabla\hat{y}|^2\,dxdt\le C(RS)_2, \tag{41}$$

其中（RS）$_2$ 是（34）式的右端。

• 乘以 $-\hat{\rho}_4^2\Delta\hat{y}$，对 Q 积分并利用 a）的先前估计。我们有

$$\iint_Q \hat{\rho}_4^2|\Delta\hat{y}|^2\,dxdt\le C(RS)_2. \tag{42}$$

• 乘以 $\hat{\rho}_5^2\hat{y}_t$，在 Q 上积分，并使用此前对 a 的估计，将其与（41）—（42）结合。我们得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\hat{\rho}_5^2(t)\int_\Omega |\nabla\hat{y}(t)|^2\,dx\right)\le C(RS)_2. \tag{43}$$

因此，估计（41）-（43）项目 b）成立。

因此，我们完成了证明。 □

4 主要结果的证明

4.1最优系统的局部零可控性(1)

本小节中，我们利用李乌斯特尼克定理证明最优系统的零可控性。

定理 7（李乌斯特尼克定理）。设 E 和 F 是巴拿赫空间，且 $\mathcal{A}$:$B_r(0) \subset E \to F$ 是一个 C^1 映射。假设导数 $\mathcal{A}'(0): E \to F$ 是满射，并记集合 $\xi_0 = \mathcal{A}(0)$。那么，存在 $\epsilon > 0$、一个映射 $W: B_\epsilon(\xi_0) \subset F \to E$ 以及一个满足条件的常数 $K > 0$

$$W(z) \in B_r(0) \ and \ \mathcal{A}(W(z)) = z, \quad \forall z \in B_\epsilon(\xi_0),$$

$$\|W(z)\|_E \le K\|z - \xi_0\|_F \quad \forall z \in B_\epsilon(\xi_0).$$

该定理的证明可见于 [1]。

现在，让我们引入这个空间。

$$\begin{aligned} E = \Big\{ & (y,h,u): \rho_0 y,\, \rho_0 h,\, y_{x_i},\, y_{x_i x_j} \in L^2(Q);\, \rho u,\, \hat{\rho}_1 u_t,\, \hat{\rho}_3 \Delta u \in L^2(\omega \times (0,T)), \\ & \rho(\mathcal{L}_1 y - u\chi_\omega),\, \hat{\rho}_1(\mathcal{L}_1 y_t - u_t\chi_\omega),\, \hat{\rho}_3(\mathcal{L}_1 \Delta y - \Delta(u\chi_\omega)),\, \rho(\mathcal{L}_2 h - y\chi_{\mathcal{O}}) \in L^2(Q), \\ & y|_\Sigma = 0,\, h|_\Sigma = 0,\, h(T) = 0 \Big\}, \end{aligned}$$

其中， $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 表示以下表达式:

$$\mathcal{L}_1 y = y_t - a(0)\Delta y + Ay, \ \mathcal{L}_2 h = -h_t - a(0)\Delta h + Ah,$$

且 E 中的范数为

$$\begin{aligned} \|(y,h,u)\|_E^2 = & \|\rho_0 y\|_{L^2(Q)}^2 + \|\rho_0 h\|_{L^2(Q)}^2 + \|\hat{\rho} u\|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2 \\ & + \|\rho(\mathcal{L}_1 y - u\chi_\omega)\|_{L^2(Q)}^2 + \|\hat{\rho}(\mathcal{L}_1 y_t - u_t\chi_\omega)\|_{L^2(Q)}^2 \\ & + \|\hat{\rho}_3(\mathcal{L}_1 \Delta y - \Delta(u\chi_\omega))\|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2 + \|\rho(\mathcal{L}_2 h - y\chi_{\mathcal{O}})\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

显然， E 是范数 $\|\cdot\|_E$ 下的巴拿赫空间。

注 4。 注意，如果 $(y,\ h,\ u) \in E$，根据命题 5和 6，可得

$$\|\hat{\rho}_4 \Delta y\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\hat{\rho}_1 h\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\hat{\rho}_4 y\|_{X_1}^2 + \|\hat{\rho}_1 h_t\|_{X_0}^2 \le C\|(y,h,u)\|_E^2.$$

此外，我们定义以下空间

$$\begin{aligned} F_1 &= \Big\{ g: \rho g,\, \hat{\rho}_1 g_t \in L^2(Q);\, \hat{\rho}_3 g \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \Big\}, \\ F_2 &= \Big\{ g: \rho g \in L^2(Q) \Big\}, \end{aligned}$$

并记为 $F = F_1 \times F_2$，其范数为

$$\|(g_1,g_2)\|_F^2 := \iint_Q \Big[|\rho g_1|^2 + |\hat{\rho}_1 g_{1,t}|^2 + |\hat{\rho}_3 \Delta g_1|^2 \Big]\, dxdt + \iint_Q |\rho g_2|^2\, dxdt.$$

显然， F 是带有此范数的巴拿赫空间。

现在，让我们定义映射 $\mathcal{A}:\ E \mapsto F$，其由 $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)$ 给出，其中

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(y,h,u) = y_t - \nabla\cdot(a(\nabla y)\nabla y) + f(y) - u\chi_\omega, \\ \mathcal{A}_2(y,h,u) = -h_t - \nabla\cdot[Da(\nabla y)(\nabla y\cdot\nabla h) + a(\nabla y)\nabla h] + f'(y)h - y\chi_{\mathcal{O}}. \end{cases} \tag{1}$$

我们将证明存在 $\epsilon>0$，使得若 $(g_1,g_2)\in F$ 且 $\|(g_1,g_2)\|_F\le\epsilon$，则该方程

$$\mathcal{A}(y,h,u)=(g_1,g_2),\quad \text{where}\quad (y,h,u)\in E, \tag{2}$$

至少存在一个解。

特别地，这表明（1）在时刻 $t=0$ 局部零可控，而且状态-控制三元组可以取自 E。我们将应用定理 7。

为了说明在此情形下可以应用定理7，我们将使用若干引理。

引理 1. 令 $\mathcal{A}:\ E\to F$ 为由 (1) 定义的映射。则 $\mathcal{A}$ 定义良好且连续。

证明。为了证明 $\mathcal{A}$ 定义良好，我们将证明

i) $\mathcal{A}_1(y,h,u)\in F_1,\ \forall(y,h,u)\in E$。

设 $(y,h,u)\in E$，则有

$$\begin{aligned} &\iint_Q \rho^2|\mathcal{A}_1(y,h,u)|^2\,dxdt \\ &\qquad = \iint_Q \rho^2|y_t - \nabla\cdot(a(\nabla y)\nabla y) + f(y) - u\chi_\omega|^2\,dxdt \\ &\qquad \le C\iint_Q \rho^2|\mathcal{L}_1 y - u\chi_\omega|^2\,dxdt + C\iint_Q \rho^2|y|^2\,dxdt \\ &\qquad + C\iint_Q \rho^2|\nabla\cdot[(a(\nabla y)-a(0))\nabla y]\,|^2\,dxdt \\ &\qquad = I_1+I_2+I_3. \end{aligned}$$

根据命题6 和注记 4，可知

$$I_1\le C\|(y,h,u)\|_E^2 \quad\text{and}\quad I_2\le C\|(y,h,u)\|_E^2.$$

另一方面，由于 $a\in C^3(\mathbb{R}^N)$ 且是（全局）利普希茨连续的，因此有玄机图

$$\begin{aligned} I_3 &\le C\iint_Q \rho^2|a(\nabla y)-a(0)|^2|\Delta y|^2\,dxdt + C\iint_Q \rho^2|D_i a(\nabla y)|^2|\nabla y|^2|\Delta y|^2\,dxdt \\ &\le C\iint_Q \rho^2|\nabla y|^2|\Delta y|^2\,dxdt. \end{aligned}$$

根据 ρ 的定义，有 $\rho \le C\hat{}\rho_i\hat{}\rho_j$ 且$\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$. 然后，

$$\begin{aligned} I_3 &\le C\left(\iint_Q \hat{\rho}_4^2|\nabla\Delta y|^2\,dxdt\right)\left(\sup_{t\in[0,T]}(\hat{\rho}_3^2(t)\int_\Omega|\Delta y(t)|^2\,dx)\right)\\ &\le C\|(y,h,u)\|_E^4. \end{aligned}$$

对于所有这些估计，我们有

$$\iint_Q \rho^2|\mathcal{A}_1(y,h,u)|^2\,dxdt \le C\left(\|(y,h,u)\|_E^2+\|(y,h,u)\|_E^4\right). \tag{3}$$

继续，令 $(y,h,u)\in E$

$$\begin{aligned} &\iint_Q \hat{\rho}_1^2|\mathcal{A}_{1t}(y,h,u)|^2\,dxdt\\ &\qquad= \iint_Q \hat{\rho}_1^2|y_{tt}-\nabla\cdot(a(\nabla y)\nabla y)_t+f'(y)y_t-u_t\chi_\omega|^2\,dxdt\\ &\qquad\le C\iint_Q \hat{\rho}_1^2|\mathcal{L}_1y_t-u_t\chi_\omega|^2\,dxdt+C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|y_t|^2\,dxdt\\ &\qquad\quad+C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|\nabla\cdot[(a(\nabla y)\nabla y)_t-a(0)\nabla y_t]\,|^2\,dxdt\\ &\qquad\quad= J_1+J_2+J_3. \end{aligned}$$

根据命题6 和备注 4，我们有

$$J_1\le C\|(y,h,u)\|_E^2 \quad\text{and}\quad J_2\le C\|(y,h,u)\|_E^2,\ \forall(y,h,u)\in E.$$

另一方面

$$\begin{aligned} J_3 &\le C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|a(\nabla y)-a(0)|^2|\Delta y_t|^2\,dxdt+C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|D_{ij}^2a(\nabla y)|^2|\nabla y_t|^2|\nabla y|^2|\Delta y|^2\,dxdt\\ &\quad+C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|D_ia(\nabla y)|^2|\Delta y|^2|\nabla y_t|^2\,dxdt+C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|D_ia(\nabla y)|^2|\Delta y_t|^2|\nabla y|^2\,dxdt\\ &\quad= J_3^1+J_3^2+J_3^3+J_3^4. \end{aligned}$$

现在，让我们估计每一项 J_3^i，这是

$$\begin{aligned} J_3^1 &\le C\iint_Q\hat{\rho}_1^2|\nabla y|^2\,dxdt\\ &\le C\left(\sup_{t\in[0,T]}(\hat{\rho}_1^2(t)\int_\Omega|\nabla y(t)|^2\,dx)\right)\left(\iint_Q\hat{\rho}_5^2|\Delta y_t|^2\,dxdt\right)\\ &\le C\|(y,h,u)\|_E^4, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_3^2 &\le C\left(\sup_{t\in[0,T]}(\hat{\rho}_5^2(t)\int_\Omega|\nabla\Delta y(t)|^2\,dx)\right)\left(\iint_Q\hat{\rho}_3^2|\nabla y_t|^2\,dxdt\right)\\
&\le C\|(y,h,u)\|_E^4,\\
J_3^3 &\le C\left(\iint_Q\hat{\rho}_4^2|\Delta^2 y|^2\,dxdt\right)\left(\sup_{t\in[0,T]}(\hat{\rho}_3^2(t)\int_\Omega|\nabla y_t(t)|^2\,dx)\right)\\
&\le C\|(y,h,u)\|_E^4,\\
J_3^4 &\le C\left(\iint_Q\hat{\rho}_3^2|\Delta y_t|^2\,dxdt\right)\left(\sup_{t\in[0,T]}(\hat{\rho}_5^2(t)\int_\Omega|\nabla\Delta y(t)|^2\,dx)\right)\\
&\le C\|(y,h,u)\|_E^2.
\end{aligned}
$$

结合 J_3^i 的四个估计，我们得到

$$
J_3 \le C\|(y,h,u)\|_E^4,\ \forall (y,h,u)\in E.
$$

这就得出结论：

$$
\iint_Q\hat{\rho}_1^2|A_{1,t}(y,h,u)|^2\,dxdt \le C\left(\|(y,h,u)\|_E^2+\|(y,h,u)\|_E^4\right).
$$

现在，让我们证明 $\hat{}\rho_3\Delta\mathcal{A}_1(y,h,u)\in L^2(Q)\ \ \forall(y,h,u)\in E$. 事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q\hat{\rho}_3^2|\Delta\mathcal{A}_1(y,h,u)|^2\,dxdt\\
&\quad=\iint_Q\hat{\rho}_3^2|\Delta y_t-\Delta\nabla\cdot(a(\nabla y)\nabla y)+\Delta(f(y))-\Delta(u\chi_\omega)|^2\,dxdt\\
&\quad\le C\iint_Q\hat{\rho}_3^2|\mathcal{L}_1\Delta y-\Delta(u\chi_\omega)|^2\,dxdt+C\iint_Q\hat{\rho}_3^2\left(|\nabla y|^2+|\Delta y|^2\right)\,dxdt\\
&\qquad+C\iint_Q\hat{\rho}_3^2|\Delta\left[\nabla\cdot(a(\nabla y)\nabla y)-a(0)\Delta y\right]|^2\,dxdt\\
&\quad=K_1+K_2+K_3.
\end{aligned}
$$

根据巴拿赫空间的定义 E 和命题 6，我们有

$$
K_1\le C\|(y,h,u)\|_E^2 \text{ and } K_2\le C\|(y,h,u)\|_E^2.
$$

现在，我们来估计项 K_3,

$$
\begin{aligned}
K_3 &\le C\sum_{i,j=1}^N\iint_Q\hat{\rho}_3^2\left|\left[(a(\nabla y)-a(0))\,\Delta y\right]_{x_ix_j}\right|^2\,dxdt\\
&\qquad+C\sum_{i,j=1}^N\iint_Q\hat{\rho}_3^2\left|\left[Da(\nabla y)\cdot\nabla y\Delta y\right]_{x_ix_j}\right|^2\,dxdt\\
&=K_3^1+K_3^2.
\end{aligned}
$$

令.....表示

$$\tilde{K}_3^1 = \left[(a(\nabla y) - a(0))\,\Delta y\right]_{x_i x_j} \text{ and } \tilde{K}_3^2 = \left[Da(\nabla y)\cdot\nabla y \Delta y\right]_{x_i x_j}.$$

让我们计算 $\tilde{K}_3^1$ 和 $\tilde{K}_3^2$中的每一项

$$\begin{aligned}\tilde{K}_3^1 = {} & Da(\nabla y)\cdot\nabla y_{x_j}\Delta y_{x_i} + (a(\nabla y) - a(0))\,\Delta y_{x_i x_j} + \sum_{m,k=1}^{N} D^2_{mk}a(\nabla y) y_{x_m,x_i} y_{x_k,x_j}\Delta y \\ & + Da(\nabla y)\Delta y_{x_j}\cdot\nabla y_{x_i} + Da(\nabla y)\Delta y\cdot\nabla y_{x_i x_j},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{K}_3^2 = {} & \left(Da(\nabla y)\right)_{x_i,x_j}\cdot\nabla y\Delta y + \left(Da(\nabla y)\right)_{x_i}\cdot\nabla y_{x_j}\Delta y + \left(Da(\nabla y)\right)_{x_i}\Delta y_{x_j} \\ & + \left(Da(\nabla y)\right)_{x_j}\cdot\nabla y_{x_i}\Delta y + Da(\nabla y)\cdot\nabla y_{x_i x_j}\Delta y + Da(\nabla y)\cdot\nabla y_{x_i}\Delta y_{x_j} \\ & + \left(Da(\nabla y)\right)_{x_j}\cdot\nabla y\Delta y_{x_i} + Da(\nabla y)\cdot\nabla y_{x_j}\Delta y_{x_i} + Da(\nabla y)\cdot\nabla y\Delta y_{x_i x_j}.\end{aligned}$$

由此，我们得到

$$K_3^1 = \iint_Q \hat{\rho}_3^2 |\tilde{K}_3^1|^2\,dxdt \le K_{1,3}^1 + \cdots + K_{5,3}^1,$$

and

$$K_3^2 = \iint_Q \hat{\rho}_3^2 |\tilde{K}_3^2|^2\,dxdt \le K_{1,3}^2 + \cdots + K_{9,3}^2.$$

使用命题6 以及注记4，我们有以下估计

$$\sum_{i=1}^{5} K_{i,3}^1 + \sum_{j=1}^{9} K_{j,3}^2 \le C\left(\|(y,h,u)\|_E^2 + \|(y,h,u)\|_E^4 + \|(y,h,u)\|_E^6\right),$$

因此,

$$K_3 \le C\left(\|(y,h,u)\|_E^2 + \|(y,h,u)\|_E^4 + \|(y,h,u)\|_E^6\right).$$

综上所述，我们得出结论:

$$\hat{\rho}_3\Delta\mathcal{A}_1(y,h,u) \in L^2(Q).$$

ii) $\mathcal{A}_2(y,h,u) \in F_2,\ \forall (y,h,u) \in E.$

为证明这一点，我们采用上述论证，即

$$\begin{aligned}\iint_Q \rho^2|\mathcal{A}_2(y,h,u)|^2\,dxdt \le & \iint_Q \rho^2|\mathcal{L}_2 h - y\chi_\omega|^2\,dxdt + C\iint_Q \rho^2|h|^2\,dxdt \\ & + C\iint_Q \rho^2|\nabla\cdot[Da(\nabla y)(\nabla y\cdot\nabla h) + a(\nabla y)\nabla h - a(0)\nabla h]\,|^2\,dxdt \\ & = L_1 + L_2 + L_3.\end{aligned}$$

与第 i 项中的估计类似，我们将使用命题6 和注 4，使得

$$L_j \le C\left(\|(y,h,u)\|_E^2 + \|(y,h,u)\|_E^4 + \|(y,h,u)\|_E^6\right),\ \ j=1,2,3.$$

于是， $\mathcal{A}_2(y,h,u) \in F_2,\ \forall (y,h,u) \in E$ 成立。

因此， $\mathcal{A}$ 是良定义的。

此外，利用类似的论证，容易验证 $\mathcal{A}$ 是连续的。 □

引理 2. 映射 $\mathcal{A}$: $E \to F$ 是连续可微的。

证明. 首先证明 $\mathcal{A}$ 在任意$(y,h,u) \in E$处盖托可微，并计算 G阶导数 $\mathcal{A}'(y,h,u)$。

为此，我们引入线性映射

$$D\mathcal{A} : E \mapsto F, \quad \text{with} \quad D\mathcal{A}(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}) = \Big(D\mathcal{A}_1(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}), D\mathcal{A}_2(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\Big),$$

$$\begin{cases} D\mathcal{A}_1(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}) = \tilde{y}_t - \nabla\cdot[(Da(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y})\,\nabla y - a(\nabla y)\nabla\tilde{y}] - \tilde{u}\chi_\omega + f'(y)\tilde{y}, \\ D\mathcal{A}_2(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}) = \tilde{h}_t - \nabla\cdot\big[(D^2a(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y})(\nabla\tilde{y}\cdot\nabla h) + Da(\nabla y)(\nabla\tilde{y}\cdot\nabla h) \\ \qquad\qquad + Da(\nabla y)(\nabla y\cdot\nabla h) + (Da(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y})\nabla h + a(\nabla y)\nabla\tilde{h}\big] \\ \qquad\qquad + f''(y)\tilde{y}h + f'(y)\tilde{h} - \tilde{y}\chi_{\mathcal{O}}. \end{cases}$$

为了证明 $D\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 (y,h,u) 中关于 G 的导数，我们将证明

$$\frac{1}{\lambda}\Big[\mathcal{A}_i\Big((y,h,u)+\lambda(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\Big) - \mathcal{A}_i(y,h,u)\Big] \to D\mathcal{A}_i(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}), \tag{4}$$

当 $\lambda \to 0.$ 趋于 2 时， F_i 在 $i=1$ 中强收敛。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\Big[\mathcal{A}_1\Big((y,h,u)+\lambda(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\Big) - \mathcal{A}_1(y,h,u)\Big] - D\mathcal{A}_1(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}) & \\ = -\nabla\cdot\left[\left(\frac{a(\nabla y+\lambda\nabla\tilde{y}) - a(\nabla y)}{\lambda} - Da(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\right)\nabla y\right] & \\ - \nabla\cdot[(a(\nabla y+\lambda\nabla\tilde{y}) - a(\nabla y))\,\nabla\tilde{y}] & \\ = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2. & \end{aligned}$$

与引理 1 的证明类似，我们有

$$\|\tilde{J}_1\|_{F_1} \to 0 \quad \text{as } \lambda \to 0,$$

and

$$\|\tilde{J}_2\|_{F_1} \to 0 \quad \text{as } \lambda \to 0.$$

于是，式（4）对 $i = 1.$成立

现在，我们来计算以下项。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left[\mathcal{A}_2\left((y,h,u)+\lambda(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\right)-\mathcal{A}_2\left(y,h,u\right)\right]-D\mathcal{A}_2(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\\
&\quad=-\nabla\cdot\left[\left(\frac{Da(\nabla y+\lambda\nabla\tilde{y})-Da(\nabla y)}{\lambda}\nabla\tilde{y}-D^2a(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\right)(\nabla y\cdot\nabla h)\right]\\
&\quad\quad-\nabla\cdot\left[\left(\frac{a(\nabla y+\lambda\nabla\tilde{y})-a(\nabla y)}{\lambda}-Da(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\right)\nabla h\right]\\
&\quad\quad-\nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla y+\lambda\nabla y)-Da(\nabla y)\right)\nabla\tilde{y}\cdot\nabla h\right]+\nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla+\lambda\nabla\tilde{y})-Da(\nabla y)\right)\nabla y\cdot\nabla\tilde{h}\right]\\
&\quad\quad-\nabla\cdot\left[\left(a(\nabla y+\lambda\nabla\tilde{y})-a(\nabla y)\right)\nabla\tilde{h}\right]-\lambda\nabla\cdot\left[Da(\nabla y+\lambda\nabla\tilde{y})(\nabla\tilde{y}\cdot\nabla\tilde{h})\right]\\
&\quad\quad+\left(f'(y+\lambda\tilde{y})-f'(y)\right)\tilde{h}+\left(\frac{f'(y+\lambda\tilde{y})-f'(y)}{\lambda}-f''(y)\tilde{y}\right)h\\
&\quad\quad=\tilde{N}_1+\cdots+\tilde{N}_8.
\end{aligned}$$

利用命题6 和备注 4，可得

$$\|\tilde{N}_j\|_{F_2} \to 0 \text{ as } \lambda \to 0, \text{ for } j = 1, ..., 8.$$

那么 (4) 对 $i = 2.$成立

因此， $\mathcal{A}$ 是盖托可微的。

现在，让我们检查一下 $\mathcal{A} \in C^1(E;\ F)$ 在 $\mathcal{A}'(y,h,u) = D_G\mathcal{A}(y,h,u)$，即

$$\mathcal{A}'(y,h,u)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}) = D_G\mathcal{A}(y,h,u)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u}).$$

但最后这个等式等价于证明存在 $\epsilon_n(y,h,u)$，使得

$$\|\left(D_G\mathcal{A}(y^n,h^n,u^n)-D_G\mathcal{A}(y,h,u)\right)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_F^2 \le \epsilon_n\|(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_E^2, \tag{5}$$

˜对所有 $(\tilde{y},h,\tilde{u}) \in E$ 且 $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0.$

让我们证明（5），

$$\begin{aligned}
&D_G\mathcal{A}_1(y^n,h^n,u^n)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})-D_G\mathcal{A}_1(y,h,u)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\\
&\quad=-\nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\right)(\nabla y^n-\nabla y)\right]-\nabla\cdot\left[\left(\left(Da(\nabla y^n)-Da(\nabla y)\right)\cdot\nabla\tilde{y}\right)\nabla y\right]\\
&\quad\quad+\nabla\cdot\left[\left(a(\nabla y^n)-a(\nabla y)\right)\nabla\tilde{y}\right]+\left(f'(y^n)-f'(y)\right)\tilde{y}\\
&\quad=\tilde{O}_{1,n}+\tilde{O}_{2,n}+\tilde{O}_{3,n}+\tilde{O}_{4,n}.
\end{aligned}$$

根据函数的性质 $a(\cdot)$， $f(\cdot)$，命题 6 和注记 4，我们有

$$\|\tilde{O}_{j,n}\|_{F_1} \le \epsilon^1_{j,n}\|(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_E, \text{ with } \lim_{n\to\infty}\epsilon^1_{j,n} = 0,\ j = 1, .., 4.$$

这一切都意味着

$$\| \left(D_G\mathcal{A}_1(y^n,h^n,u^n) - D_G\mathcal{A}_1(y,h,u)\right)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_{F_1} \leq \left(\sum_{j=1}^{4}\epsilon_{j,n}^1\right)\|(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_E. \quad (6)$$

继续，我们来计算 $\mathcal{A}_2$ 的类似表达式，

$$\begin{aligned}
&\left(D_G\mathcal{A}_2(y^n,h^n,u^n) - D_G\mathcal{A}_2(y,h,u)\right)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\\
&\quad = -\nabla\cdot\left[\left(\left(D^2a(\nabla y^n) - D^2a(\nabla y)\right)\cdot\nabla\tilde{y}\right)(\nabla y^n\cdot\nabla h^n)\right]\\
&\quad\quad -\nabla\cdot\left[D^2a(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\,(\nabla y^n-\nabla y)\cdot\nabla h^n\right] - \nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla y^n)-Da(\nabla y)\right)(\nabla\tilde{y}\cdot\nabla h^n)\right]\\
&\quad\quad -\nabla\cdot\left[\left(D^2a(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\right)(\nabla y\cdot(\nabla h^n-\nabla h))\right] - \nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla y^n)-Da(\nabla y)\right)\left(\nabla y^n\cdot\nabla\tilde{h}\right)\right]\\
&\quad\quad -\nabla\cdot\left[Da(\nabla y)\left((\nabla y^n-\nabla y)\cdot\nabla\tilde{h}\right)\right] - \nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla y^n)-Da(\nabla y)\right)\nabla\tilde{y}\cdot\nabla h^n\right]\\
&\quad\quad -\nabla\cdot\left[Da(\nabla y)\,(\nabla\tilde{y}\cdot\nabla(h^n-h))\right] - \nabla\cdot\left[\left(a(\nabla y^n)-a(\nabla y)\right)\nabla\tilde{h}\right]\\
&\quad\quad -\nabla\cdot\left[\left(Da(\nabla y)\cdot\nabla\tilde{y}\right)\nabla(h^n-h)\right] + \left(f''(y^n)-f''(y)\right)\tilde{y}h^n\\
&\quad\quad + f''(y)\tilde{y}\,(h^n-h) + \left(f'(y^n)-f'(y)\right)\tilde{h}\\
&\quad = \tilde{P}_{1,n}+\cdots+\tilde{P}_{13,n}.
\end{aligned}$$

感谢命题6 和备注 4，我们有

$$\|\tilde{P}_{j,n}\|_{F_2} \leq \epsilon_{j,n}^2\|(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_E,\ j=1,...,13 \text{ with } \lim_{n\to\infty}\epsilon_{j,n}^2 = 0.$$

Then

$$\| \left(D_G\mathcal{A}_2(y^n,h^n,u^n) - D_G\mathcal{A}_2(y,h,u)\right)(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_{F_2} \leq \left(\sum_{j=1}^{13}\epsilon_{j,n}^2\right)\|(\tilde{y},\tilde{h},\tilde{u})\|_E. \quad (7)$$

由 (6)-(7)可知 (5)成立。

证明到此结束。 □

引理3。 设 $\mathcal{A}$ 为由 (1)定义的映射。那么 $\mathcal{A}'(0,0,0)$ 是满射。

证明。令 $(g_1,g_2) \in F$。根据命题5，我们知道存在满足 (2)、(17)、(18) 和 (19) 的 (y,h,u)。另一方面，根据命题 6，我们有 y 满足 (33) 和 (34)。因此，找到的这个 (y,h,u) 属于空间 E，因而 $\mathcal{A}'(0,0,0)(y,h,u) = (g_1,g_2)$。

证明到此结束。 □

根据引理 1、2 和 3，我们可以应用李乌斯特尼克定理（定理 7），并推得存在 $\epsilon>0$，一个映射 $W:\ B_\epsilon(0) \subset F \to E$ 使得

$$W(g_1,g_2)\in B_r(0) \ \text{ and } \ \mathcal{A}(W(g_1,g_2)) = (g_1,g_2), \quad \forall (g_1,g_2)\in B_\epsilon(0).$$

特别地，取 $\epsilon_0 < \epsilon$ 充分小，且 $(\xi, 0) \in B_{\epsilon_0}(0)$，则存在 $(y, h, u) \in E$ 使得 $(y, h, u) = W(\xi, 0) \in E$，我们有

$$\mathcal{A}((y, h, u)) = (\xi, 0),$$

因此，我们证明（1）在时间 $t = 0$。

4.2 定理的证明 1

由系统 (1的局部零可控性可知，存在 $\delta > 0$~足够小的 M 使得如果

$$\left\| e^{\frac{\tilde{M}}{t}} \xi \right\|_{X_0} < \delta, \tag{8}$$

那么可以找到一个控制 u，其支集 $u \subset \omega \times [0, T]$ 使得与之对应的状态 (y, h) 满足 $h(x, 0) = 0$ 在 Ω 中成立。由 (17)、(8) 和命题 2，可知控制 u 使泛函 Φ 在定义 1的意义下不敏感。

证明到此结束。

5 一些补充意见和问题

5.1 一维情形下扩散系数依赖于状态梯度的拟线性抛物方程的不敏感控制

当 $N = 1$时，系统（1）可改写为以下形式

$$\begin{cases} y_t - (a(y_x)y_x)_x + f(y) = \xi + u\chi_\omega & \text{in} \quad I \times (0, T), \\ y(0, t) = 0,\ y(1, t) = 0 & \text{on} \quad (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x) + \tau \hat{y}_0(x) & \text{in} \quad I, \end{cases} \tag{1}$$

这里，$I = (0, 1)$ $a \in C^2(\mathbb{R})$，且 $f \in C^2(\mathbb{R})$，其中 $f(0) = 0$ 满足

$$a_0 \le a(r) \le a_1,\ |a'(r)| + |a''(r)| + |f'(r)| + f''(r)| \le M,\ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

我们有如下结果：

定理 8. 假设 $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ 和 $y_0 = 0$. 那么，存在两个正定常数$\tilde{M}$和 δ，它们仅依赖于 I、T、M、a_0和 a_1，使得对于任意满足以下条件的 $\xi \in H^1(0, T; L^2(I))$，

$$\left\| e^{\frac{\tilde{M}}{t}} \xi \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \le \delta,$$

可以找到一个控制函数 $u \in H^1(0, T; L^2(\omega))$，使泛函$\Phi$不敏感。

证明可以按照第3节中的方法进行。事实上，不敏感化问题等价于以下系统的零可控性

$$\begin{cases} y_t - (a(y_x)y_x)_x + f(y) = \xi + u\chi_\omega & \text{in } I \times (0,T), \\ -h_t - [(a'(y_x)y_x)\, h_x + a(y_x)h_x]_x + f'(y)h = y\chi_{\mathcal{O}} & \text{in } I \times (0,T), \\ y(0,t) = y(1,t) = 0,\ h(0,t) = h(1,t) = 0 & \text{on } (0,T), \\ y(x,0) = 0,\ h(x,T) = 0 & \text{in } I, \end{cases} \tag{3}$$

并且为了保证系统（3）是零可控的（例如，参见 [26]），我们考虑线性化系统。

$$\begin{cases} y_t - a(0)y_{xx} + Ay = u\chi_\omega + F_1 & \text{in } I \times (0,T), \\ -h_t - a(0)h_{xx} + Ah = y\chi_{\mathcal{O}} + F_2 & \text{in } I \times (0,T), \\ y(0,t) = y(1,t) = 0,\ h(0,t) = h(1,t) = 0 & \text{on } (0,T), \\ y(x,0) = 0,\ h(x,T) = 0 & \text{in } I. \end{cases} \tag{4}$$

按照第4节，我们可以建立（y， h， u）的零可控性，其状态-控制（18）满足（33）。然后，我们可以引入巴拿赫空间

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \Big\{ & (y,h,u) : \rho y,\ \rho h,\ y_x,\ y_{xx} \in L^2(Q);\ \rho u,\ \hat{\rho}_1 u_t \in L^2(\omega \times (0,T)), \\ & \rho(\mathcal{L}_1 y - u\chi_\omega),\ \hat{\rho}_1(\mathcal{L}_1 y_t - u_t\chi_\omega),\ \rho(\mathcal{L}_2 h - y\chi_{\mathcal{O}}) \in L^2(Q), \\ & y|_\Sigma = 0,\ h|_\Sigma = 0,\ h(T) = 0 \Big\}, \end{aligned}$$

˜以及 E 中的范数是

$$\begin{aligned} & \|(y,h,u)\|^2_{\tilde{E}} \\ & \quad = \|\rho y\|^2_{L^2(Q)} + \|\rho h\|^2_{L^2(Q)} + \|\hat{\rho} u\|^2_{L^2(Q)} + \|\rho\left(\mathcal{L}_1 y - u\chi_\omega\right)\|^2_{L^2(Q)} \\ & \quad + \|\hat{\rho}\left(\mathcal{L}_1 y_t - u_t\chi_\omega\right)\|^2_{L^2(Q)} + \|\hat{\rho}\left(\mathcal{L}_2 h - y\chi_{\mathcal{O}}\right)\|^2_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

此外，让我们定义以下巴拿赫空间

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= \Big\{ w :\ \rho w,\ \hat{\rho}_1 w_t \in L^2(Q) \Big\}, \\ \tilde{F}_2 &= \Big\{ w :\ \rho w \in L^2(Q) \Big\}, \\ \tilde{F} &= \tilde{F}_1 \times \tilde{F}_2, \end{aligned}$$

及其范数

$$\|(f,g)\|^2_{\tilde{F}} = \|\rho f\|^2_{L^2(Q)} + \|\hat{\rho}_1 f_t\|^2_{L^2(Q)} + \|\rho g\|^2_{L^2(Q)},$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$以及非线性映射 $\mathcal{A}$: $E \mapsto F$，其中 $A(y,h,u) = (\mathcal{A}_1(y,h,u)\ \mathcal{A}_2(y,h,u))$

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_1(y,h,u) = y_t - (a(y_x)y_x)_x + f(y) - u\chi_\omega, \\ \tilde{\mathcal{A}}_2(y,h,u) = -h_t - [(a'(y_x)y_x + a(y_x))\,h_x]_x + f'(y)h - y\chi_{\mathcal{O}}. \end{cases} \tag{5}$$

接下来，我们可以证明引理 1、2 和 3 成立。这些结论均可通过与第 4 节类似的论证，并借助 $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ 得出。因此， $\tilde{\mathcal{A}}$ 是 C^1 关于 $\tilde{\mathcal{A}}'(0,0,0)$ 的满射。特别地，该方程

$$\tilde{\mathcal{A}}(y,h,u) = (\xi,0),\ (y,h,u) \in \tilde{E},$$

有解，且（3）是局部零可控的。

注 5. 在一维情形下，我们可以证明与定理 1相同的结果，但对初始条件 ξ的正则性要求更低。当 $N = 1$时，有 $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$，因此容易得到不等式

$$\| [(a(y_x) - a(0))\, y_x]_x \|_{\tilde{F}_1} \le C \|(y,h,u)\|_{\tilde{E}}, \tag{6}$$

其中 C 是一个正数，并且，

$$\tilde{\mathcal{A}} \quad \textit{satisfies the hypothesis of Liusternik's Theorem.} \tag{7}$$

估计 (6) 对于证明定理 8非常重要。

5.2 当 $N \ge 4$时，系统 (1) 的不敏感控制

当 $N \ge 4$ 时，如果我们应用相同的技术，就需要估计以下项

$$\left\| \nabla \cdot \left[(a(\nabla y) - a(0))\, \nabla y \right] \right\|_{F_1} \le C \|(y,h,u)\|_E,$$

对于函数 $\mathcal{A}$ 是良定义的，并可证明系统（1）具有零可控性，但这非常困难，因为在定理1 的证明中，我们使用了嵌入$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$，而这仅在 $N = 1$ 时成立，即 2 或 3。因此，这个问题仍未解决。

5.3 数值结果

我们在证明定理 1 中所采用的策略为数值求解 Φ （1）的零可控性问题开辟了可能性。事实上，引入准牛顿型算法来计算（在时间和空间上的近似）一个解，以实现（1）的零可控性，是完全自然的。这样便可求解 Φ （1）的可观测控制问题。

这些思想已应用于 [5] 和 [11] （以及其他文献），用于研究其他方程和系统的可控性。

附录A 适定性对于系统 (1)

考虑以下系统:

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(\nabla y)\nabla y) + f(y) = g \text{ in } Q, \\ y(x,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{on } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{A1}$$

为了证明系统 (1) 的解的存在性，我们首先研究系统 (A1) 的适定性。我们有如下结论。

引理4. 存在 $r > 0$，使得对于每个 $y_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，满足 $\Delta y_0 \in H_0^1(\Omega)$，且 $g \in X_0$ 满足

$$\|y_0\|_{H^3(\Omega)} + \|g\|_{X_0} \leq r,$$

该问题 (A1) 有唯一解 y 属于 X_1 且满足

$$\|y\|_{X_1} \leq C\left(\|y_0\|_{H^3(\Omega)} + \|g\|_{X_0}\right), \tag{A2}$$

其中 C 是一个仅依赖于 Ω T、M、a_0 和 a_1. 的常数

证明。我们采用 Faedo-Galerkin 方法，其希尔伯特基来自 $H_0^1(\Omega)$，由谱问题 $((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v)$ 的特征向量 (w_j) 给出，对所有 $v \in V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 和 $j = 1, 2, 3,$ .....我们用 V_m 表示由向量 $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$. 生成的 V 子空间。我们提出如下近似问题:

$$\begin{cases} (y_m', v) + (a(\nabla y_m)\nabla y_m, \nabla v) + (f(y_m), v) = (g, v), \ \forall\, v \in V_m, \\ y_m(0) = y_{0m} \to y_0 \text{ in } H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{A3}$$

方程组 (A3) 的（局部时间）解的存在性和唯一性由经典常微分方程理论保证。以下估计表明，事实上，它们对所有 t 均有定义。我们可以用通常的方法得到 y_m 的一致估计:

估计 I: 将 $v = y_m$（t）代入方程 (A3)，可推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m(t)\|^2 + \frac{a_0}{2}\|\nabla y_m(t)\|^2 \leq \tilde{C}_1\left(\|y_m(t)\|^2 + \|g(t)\|^2\right), \tag{A4}$$

and

$$\|y_m(t)\|^2 + \|\nabla y_m\|_{L^2(Q)}^2 \leq \tilde{C}_2\left(\|y_0\|^2 + \|g\|_{L^2(Q)}^2\right). \tag{A5}$$

˜下文中，符号 C_k 表示一个常数，它仅依赖于 a_0、a_1、M 和 Ω，其中$k = 1,$ ....., 17。

注意，(A5) 中右侧的项不依赖于 m，因此，我们可以将解 (y_m) 延拓到区间 $[0, T]$.

估计 II: 取 $v = -\Delta y_m(t)$ 在 (A3) 中，我们看到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla y_m\|^2 + \int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta y_m|^2\,dx + \sum_{j=1}^N \int_\Omega Da(\nabla y_m)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla y_m)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\Delta y_m dx$$
$$-\int_\Omega f(y_m)\Delta y_m\,dx = -\int_\Omega g\Delta y_m\,dx.$$

将最后两项从左端移到右端，并利用绝对值不等式，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla y_m\|^2 + \int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta y_m|^2\,dx$$
$$\le \left|\sum_{j=1}^N \int_\Omega Da(\nabla y_m)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla y_m)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\Delta y_m dx\right| + \left|\int_\Omega f(y_m)\Delta y_m\,dx\right| + \left|\int_\Omega g\Delta y_m\,dx\right|.$$

利用 H¨older's 不等式、函数的性质 $a(\cdot)$和 $f(\cdot)$、杨氏不等式，以及当 $N = 1$、2 或 3 时 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 这一事实；我们有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla y_m\|^2 + \frac{a_0}{2}\|\Delta y_m\|^2 \le \tilde{C}_3\|y_m\|^2 + \tilde{C}_3\|\Delta y_m\|^2\|\nabla\Delta y_m\|^2 + \tilde{C}_3\|g\|^2. \tag{A6}$$

估计 III: 取 $v = -\Delta y_m'(t)$ 于 (A3，我们有

$$\frac{1}{2}\|\nabla y_m'\|^2 + \int_\Omega a(\nabla y_m)\Delta y_m\Delta y_m'\,dx + \sum_{j=1}^N \int_\Omega Da(\nabla y_m)\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla y_m)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\Delta y_m'\,dx$$
$$-\int_\Omega f(y_m)\Delta y_m'\,dx = -\int_\Omega g\Delta y_m'\,dx.$$

将左侧第二项以适当的方式表示，我们有

$$\frac{1}{2}\|\nabla y_m'\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta y_m|^2\,dx\right) - \frac{1}{2}\int_\Omega Da(\nabla y_m)\cdot\nabla y_m'|\Delta y_m|^2\,dx$$
$$+\sum_{j=1}^N \int_\Omega Da(\nabla y_m)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla y_m)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\Delta y_m'\,dx - \int_\Omega f(y_m)\Delta y_m'\,dx = -\int_\Omega g\Delta y_m'\,dx.$$

将左端的最后两项移至右端；并利用不等式的Hölder不等式、 $a(\cdot)$和 $f(\cdot)$的性质、不等式的Young不等式，以及当 $N = 1$、2或3时 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$这一事实；可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla y_m'\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta y_m|^2\,dx\right)&\\ \le \tilde{C}_4\left(\|\Delta y_m\|^2\|\nabla\Delta y_m\|^2 + \|g\|^2 + \|y_m\|^2\right)&\\ +\epsilon\left(\|\Delta y_m\|^2 + \|\Delta y_m'\|^2\right).&\end{aligned} \tag{A7}$$

估计 IV： 对时间求导 t 在方程（A3）$_1$ 并令 $v=-\Delta y_m'(t)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega y_m''\Delta y_m'\,dx+\int_\Omega \nabla\cdot\Big[(Da(\nabla y_m)\cdot\nabla y_m')\nabla y_m\Big]\Delta y_m'\,dx\\
&\quad+\int_\Omega \nabla\cdot(a(\nabla y_m)\nabla y_m')\,\Delta y_m'\,dx-\int_\Omega f'(y_m)y_m'\Delta y_m'\,dx\\
&\quad=-\int_\Omega g'\Delta y_m'\,dx.
\end{aligned}
$$

对左侧第三项进行一些运算，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla y_m'\|^2+\int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta y_m'|^2\,dx\\
&\quad=-\int_\Omega \nabla\cdot\Big[\,(Da(\nabla y_m)\cdot\nabla y_m')\,\nabla y_m\Big]\Delta y_m'\,dx\\
&\qquad-\sum_{j=1}^N\int_\Omega Da(\nabla y_m)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla y_m)\frac{\partial y_m'}{\partial x_j}\Delta y_m'\,dx\\
&\qquad-\int_\Omega f'(y_m)y_m'\Delta y_m'\,dx-\int_\Omega g'\Delta y_m'\,dx.
\end{aligned}
$$

按照估计 III 中的方法进行一些运算，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla y_m'\|^2+\frac{a_0}{2}\|\Delta y_m\|^2\\
&\qquad\le\tilde{C}_5\left(\|\Delta y_m'\|^2\|\nabla\Delta y_m\|^2+\|\nabla y_m'\|^2+\|g'\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{A8}
$$

注意到，由于函数 $a(\cdot)$ 的性质，我们有 $\Delta y_m\in H_0^1(\Omega)$。因此，可以处理以下方程

$$
\begin{cases}
(\Delta y_m',v)+(a(\nabla y_m)\nabla\Delta y_m+\Delta(a(\nabla y_m))\nabla y_m,\nabla v)\\
\qquad+(2\nabla\left(a(\nabla y_m)\right)\Delta y_m,\nabla v)+(\Delta\left(f(y_m)\right),v)=(\Delta g,v),\ \forall\, v\in V,\\
\Delta y_m(0)=\Delta y_{0m}\to y_0\ \text{in}\ H_0^1(\Omega).
\end{cases}
\tag{A9}
$$

与估计 I、II、III 和 IV 中的推导类似，我们将得到关于 y_m 以及由式（A9）

估计 V： 取 $v=\Delta y_m(t)$ 在（A9中，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta y_m\|^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla\Delta y_m\|^2\\
&\qquad\le\tilde{C}_6\left(\|\nabla y_m\|^2+\|\Delta g\|^2+\|\Delta y_m\|^4\|\nabla\Delta y_m\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{A10}
$$

估计 VI： 取 $v=\Delta^2 y_m(t)$ 于 (A9)，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta y_m\|^2+\frac{a_0}{2}\|\Delta^2 y_m\|^2\\&\qquad\leq \tilde{C}_7\left(\|\Delta y_m\|^2+\|\Delta g\|^2+\|\Delta y_m\|^4\|\Delta^2 y_m\|^2\right).\end{aligned}\tag{A11}$$

估计 VII： 对 t 在（A9 中求导，并取 $v=y_m''(t)$），可得

$$\begin{aligned}&\|y_m''\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega a(\nabla y_m)|\nabla y_m'|^2\,dx\right)\\&\qquad\leq \tilde{C}_8\left(\|\Delta y_m'\|^2+\|g'\|^2+\|\Delta y_m'\|^2\|\nabla\Delta y_m\|^2\right).\end{aligned}\tag{A12}$$

根据以上所有估计，并在（$\epsilon=\dfrac{a_0}{16\tilde{C}_5}$（A7）中取

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tilde{C}_9\|\Delta y_m\|^2+\tilde{C}_{10}\|\nabla\Delta y_m\|^2+\tilde{C}_{11}\int_\Omega a(\nabla y_m)|\nabla y_m'|^2\,dx\right.\\&\quad\left.+3\tilde{C}_5\int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta y_m|^2\,dx+\|y_m\|^2+\|\nabla y_m\|^2+\|\nabla y_m'\|^2\right)\\&\quad+\tilde{C}_9\left(\frac{a_0}{8}-\tilde{C}_6\|\nabla\Delta y_m\|^4\right)\|\nabla\Delta y_m\|^2+\tilde{C}_{10}\left(\frac{a_0}{8}-\tilde{C}_7\|\nabla\Delta y_m\|^4\right)\|\Delta^2 y_m\|^2\\&\quad+\left(\frac{a_0}{8}-\tilde{C}_{12}\|\nabla\Delta y_m\|^4\right)\|\Delta y_m\|^2+\left(\frac{a_0}{8}-\tilde{C}_{13}\|\nabla\Delta y_m\|^4\right)\|\Delta y_m'\|^2\\&\quad+\tilde{C}_{11}\|y_m''\|^2+\frac{a_0}{4}\|\nabla y_m\|^2+\frac{\tilde{C}_5}{2}\|\nabla y_m'\|^2\leq\tilde{C}_{13}\|\Delta g\|^2+\tilde{C}_{14}\|g'\|^2\\&\quad+\tilde{C}_{15}\left(\|y_0\|^2+\|g\|^2_{L^2(Q)}\right),\end{aligned}\tag{A13}$$

其中,

$$\tilde{C}_9=\frac{a_0}{16\tilde{C}_6},\ \tilde{C}_{10}=\frac{a_0}{16\tilde{C}_7},\ \tilde{C}_{11}=\frac{a_0}{16\tilde{C}_8},\ \tilde{C}_{12}=\frac{2(3\tilde{C}_4\tilde{C}_5+\tilde{C}_3)^2}{a_0},\ \tilde{C}_{13}=\frac{2(\tilde{C}_5+\frac{a_0}{16})^2}{a_0},$$
$$\tilde{C}_{14}=\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_3+\tilde{C}_4+\tilde{C}_5+3\tilde{C}_4\tilde{C}_5\right)C(\Omega)+\frac{a_0}{8},\ \tilde{C}_{15}=\tilde{C}_1+\tilde{C}_3,\ \tilde{C}_{16}=\frac{a_0}{16}+\tilde{C}_5.$$

此外，由（A3）取 $v=-\Delta y_m$（t）。可得

$$\|\nabla y_m'(0)\|^2\leq\tilde{C}_{17}\left(\|\nabla\Delta y_0\|^2+\|\nabla g(0)\|^2\right).$$

存在 $\epsilon_0>0$，使得对于

$$\|y_0\|_{H^3(\Omega)}+\|g\|_{X_0}<\epsilon_0,$$

我们有

$$\|\nabla\Delta y_0\|^4<\frac{a_0}{8\left(\tilde{C}_6+\tilde{C}_7+\tilde{C}_{12}+\tilde{C}_{13}\right)},\tag{A14}$$

and

$$\begin{cases} (\tilde{C}_9 + 3\tilde{C}_5 a_1)\|\Delta y_0\|^2 + \tilde{C}_{10}\|\nabla\Delta y_0\|^2 + (1 + a_1\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{16})\left(\|\nabla\Delta y_0\|^2 + \|\nabla g(0)\|^2\right) \\ +\|y_0\|^2 + \|\nabla y_0\|^2 + 2\tilde{C}_{15}T\left(\|y_0\|^2 + \|g\|^2\right) + 2\tilde{C}_{13}\|\Delta g\|^2 \\ +2\tilde{C}_{14}\|g'\|^2_{L^2(Q)} < \dfrac{\tilde{C}_{10}\ a_0^{\frac{1}{2}}}{4\left(\tilde{C}_6 + \tilde{C}_7 + \tilde{C}_{12} + \tilde{C}_{13}\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \tag{A15}$$

借助这些不等式，我们可以通过反证法证明，以下估计成立

$$\|\nabla\Delta y_m(t)\|^4 < \frac{a_0}{8\left(\tilde{C}_6 + \tilde{C}_7 + \tilde{C}_{12} + \tilde{C}_{13}\right)},\ \forall t \geq 0.$$

现在，我们可以由估计（A13）

$$\begin{cases} (y_m) \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^4(\Omega)), \\ (y'_m) \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ (y''_m) \text{ is bounded in } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

所有这些一致有界性使得我们可以在（A3）中取极限（至少对一个子列而言），当 $m \to \infty$时。事实上，唯一微妙之处在于 $a(\nabla y_m)$ 几乎处处收敛。但这是因为序列（y_m）在 $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ 中预紧，且 $a \in C^3(\mathbb{R}^N)$。

（A1）的强解的唯一性可以通过标准论证证明（参见 [27]）。

□

引理的一个推论是4 以下结果，它保证系统（1）具有适定性：

引理5. 存在 $r > 0$，使得对于每个 $y_0, \hat{y}_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ with $\Delta y_0, \Delta\hat{y}_0 \in H_0^1(\Omega)$ and $\xi, u \in X_0$ with supp $u \subset \omega \times (0,T)$ 满足

$$\|y_0 + \tau\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)} + \|\xi\|_{X_0} + \|u\|_{X_0} \leq r,$$

该问题（1）有一个唯一解 y 在 X_1 满足

$$\|y\|_{X_1} \leq C\left(\|y_0 + \tau\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)} + \|\xi\|_{X_0} + \|u\|_{X_0}\right). \tag{A16}$$

证明。 注意，根据估计（A2），我们有（A16）成立。 □

附录B 适定性 系统 (1)

引理 6. 存在 $\tilde{r}>0$，使得对于每个 ξ、 $u \in X_0$，满足 supp $u \subset \omega \times (0,T)$

$$\|\xi\|_{X_0}+\|u\|_{X_0} \leq \tilde{r},$$

该问题 (2) 具有唯一解 (y,h) 在 $X_1 \times X_0$ 满足

$$\|y\|_{X_1}+\|h\|_{X_0} \leq C\left(\|\xi\|_{X_0}+\|u\|_{X_0}\right). \tag{B17}$$

证明。我们采用 Faedo-Galerkin 方法，使用来自 $H_0^1(\Omega)$的希尔伯特基，该基由谱问题$((w_j,v))$ $=\lambda_j(w_j,v)$ 的特征向量 (w_j) 给出，对于所有 $v \in V$ $=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 以及 $j=1$、 2、 3、 .....我们用 V_m 表示由向量 $\{w_1,w_2,...,w_m\}$. 生成的 V 子空间。我们提出如下近似问题:

$$\begin{cases} (y_m',v)+(a(\nabla y_m)\nabla y_m,\nabla v)+(f(y_m),v)=(g,v), \ \forall\, v \in V_m, \\ (-h_m',w)+(Da(\nabla y_m)\left(\nabla y_m \cdot \nabla h_m\right)+a(\nabla y_m)\nabla h_m,\nabla w) \\ \qquad\qquad +(f'(y_m)h_m,w)=(y_m\chi_{\mathcal{O}},w), \ \forall\, w \in V_m, \\ y_m(0)=y_{0m} \to 0 \text{ in } H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \\ h_m(T)=h_{0m} \to 0 \text{ in } H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{B18}$$

从引理 4的证明中，我们有

$$\begin{aligned} &\|\Delta y_m(t)\|^2+\|\nabla\Delta y_m(t)\|^2+\|\nabla y_m'(t)\|^2 \\ &\qquad +\|y_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \hat{C}_1\left(\|\xi\|^2_{X_0}+\|u\|^2_{X_0}\right). \end{aligned} \tag{B19}$$

（B18）的（局部时间）解的存在性和唯一性由经典常微分方程理论保证。为了延拓解 h_m 对于 $[0,T]$，我们将获得 h_m的估计

估计 I: 取 $w=h_m$（t）于 B18，我们有

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}\|h_m\|^2+\int_\Omega a(\nabla y_m)|\nabla h_m|^2\,dx+\int_\Omega Da(\nabla y_m)(\nabla y_m\cdot\nabla h_m)\cdot\nabla h_m\,dx \\ &\qquad =\int_\Omega y_m\chi_{\mathcal{O}}h_m\,dx. \end{aligned}$$

ˆ 在下文中，符号 C_k 表示一个仅依赖于 a_0、 a_1、 M 和 Ω（当 $k=1$, ..., 10 时）的常数。将最后两项从左端移至右端，并结合一些运算以及 H¨older 不等式和杨氏不等式，我们有

$$-\frac{d}{dt}\|h_m\|^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla h_m\|^2 \leq \hat{C}_2\left(\|\nabla\Delta y_m\|^2\|\nabla h_m\|^2+\|h_m\|^2+\|y_m\|^2\right). \tag{B20}$$

注意，在引理4的证明中，当 ξ 和 u 足够小时，我们有

$$\hat{C}_2\|\Delta y_m\|^2 \leq \frac{a_0}{4},$$

利用这一点并根据 B20，我们有

$$-\frac{d}{dt}\|h_m\|^2+\frac{3a_0}{4}\|\nabla h_m\|^2\le \hat{C}_2\left(\|h_m\|^2+\|y_m\|^2\right), \tag{B21}$$

由格朗沃尔不等式并利用 B19，可得

$$\|h_m\|^2+\|\nabla h_m\|^2_{L^2(Q)}\le \hat{C}_3\left(\|\xi\|^2_{X_0}+\|u\|^2_{X_0}\right). \tag{B22}$$

注意到 B22 中的右端项不依赖于 m，因此我们可以将解（h_m）延拓到区间 $[0,T]$。

估计 II：在（$w=-\Delta h_m$ （B19）中取值，可得

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\|h_m\|^2+\int_\Omega \nabla\cdot\Big(Da(\nabla y_m)\left(\nabla y_m\cdot\nabla h_m\right)\Big)\Delta h_m\,dx\\ +\int_\Omega a(\nabla y_m)|\Delta h_m|^2\,dx+\int_\Omega Da(\nabla y_m)\Delta y_m\nabla y_m\Delta h_m\,dx\\ -\int_\Omega f'(y_m)h_m\Delta h_m\,dx=-\int_\Omega y_m\chi_{\mathcal{O}}\Delta h_m\,dx.\end{aligned}$$

将最后三项从左端移至右端，并结合 Hölder 不等式、杨氏不等式及一些运算，可得

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\|h_m\|^2+a_0\|\Delta h_m\|^2\le\\ \hat{C}_4\left(\|\nabla\Delta y_m\|^2\|\Delta y_m\|^2+\|\nabla y_m\|^2\right)\|\Delta h_m\|^2\\ +\hat{C}_4\|\Delta y_m\|^2\|\nabla\Delta y_m\|^2\|\nabla h_m\|^2+\frac{a_0}{4}\|\Delta h_m\|^2.\end{aligned} \tag{B23}$$

注意，在引理 4的证明中，当 ξ 和 u 充分小时，可得

$$\hat{C}_5\|\Delta y_m\|^2\|\nabla\Delta y_m\|^2\le\frac{a_0}{4}$$

and

$$\hat{C}_5\|\nabla\Delta y_m\|^2\le\frac{a_0}{4}.$$

由后两个不等式以及（B22）中的不等式（B23），可得

$$-\frac{d}{dt}\|\nabla h_m\|^2+\frac{a_0}{4}\|\Delta y_m\|^2\le\hat{C}_6\left(\|u\|^2_{X_0}+\|\xi\|^2_{X_0}+\|\nabla h_m\|^2\right).$$

利用格朗沃尔不等式，我们有

$$\|\nabla h_m\|^2+\frac{a_0}{4}\|\Delta h_m\|^2_{L^2(Q)}\le\hat{C}_7\left(\|u\|^2_{X_0}+\|\xi\|^2_{X_0}\right). \tag{B24}$$

估计 III： 将 $w = h'_m$ 代入（B19），我们有

$$\|h'_m\|^2 + \int_\Omega \nabla \cdot \Big(Da(\nabla y_m)\,(\nabla y \cdot \nabla h_m) + a(\nabla y_m)\nabla h_m \Big) h'_m \, dx \\ - \int_\Omega f'(y_m) h_m h'_m \, dx = - \int_\Omega y_m \chi_{\mathcal{O}} h'_m \, dx.$$

将最后两项从左端移到右端，并结合一些运算以及 H¨older 不等式和杨氏不等式，可得

$$\|h'_m\|^2 \le \frac{\|h'_m\|^2}{2} + \hat{C}_8 \left(\|\Delta h_m\|^2 + \|\nabla \Delta y_m\|^2 \|\Delta h_m\|^2 \right).$$

由（B19）并在（0， T）

$$\|h'_m\|^2 \le \hat{C}_9 \|\Delta h_m\|^2,$$

并利用（B24），我们有

$$\|h'_m\|^2_{L^2(Q)} \le \hat{C}_{10} \left(\|u\|^2_{X_0} + \|\xi\|^2_{X_0} \right). \tag{B25}$$

现在，我们可以从估计式（B19）、（B22）、（B24）和（B25）得到以下结果

$$\begin{cases} (y_m) \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^4(\Omega)), \\ (y'_m) \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ (y''_m) \text{ is bounded in } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ (h_m) \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ (h'_m) \text{ is bounded in } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

所有这些一致有界性允许我们在B18中取极限（至少对于一个子列）当$m \to \infty$时。事实上，唯一微妙之处是 a（∇y_m）的几乎处处收敛。但这是由于序列（y_m）在 L^2（0， T； H^2（Ω）中预紧）以及 $a \in C^3$（$\mathbb{R}^N$）这一事实的结果。

（A1）的强解唯一性可通过标准论证证明（见 [27]）。

□

附录 C 命题2

对于任意$y_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足 $\|\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)} = 1$ 以及 $|\tau| < \tau_0$，记y_τ 为与 1式相关的解，其中 τ 和 $u_\circ$ 为证明（4），我们首先证明

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(y_\tau)\Big|_{\tau=0} = \int_\Omega h(0)\hat{y}_0 \, dx, \quad \forall\, \hat{y}_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ with } \|\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)} = 1, \tag{C26}$$

and

$$y_\tau \to y \text{ in } L^2(Q) \text{ as } \tau \to 0. \tag{C27}$$

记为 $w_\tau = y_\tau - y_\circ$ 那么， w_τ 满足

$$\begin{cases} w_{\tau,t} - \nabla \cdot \Big(a(\nabla y_\tau)\nabla y_\tau - a(\nabla y)\nabla y\Big) + f(y_\tau) - f(y) = 0 \text{ in } Q, \\ w_\tau = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \Sigma, \\ w_\tau(0) = \tau \hat{y}_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{C28}$$

将C28式1 两边乘以 w_τ 并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |w_\tau|^2\,dx\right) + \int_\Omega a(\nabla y_\tau)|\nabla w_\tau|^2\,dx \\ &+ \int_\Omega \Big(a(\nabla y_\tau) - a(\nabla y)\Big)\nabla y \cdot \nabla w_\tau\,dx + \int_\Omega \Big(f(y_\tau) - f(y)\Big)w_\tau\,dx = 0. \end{aligned}$$

利用 $a(\cdot)$、 $f(\cdot)$ 的性质，以及庞加莱不等式和杨氏不等式，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_\tau\|^2 + \frac{a_0}{2}\|\nabla w_\tau\|^2 \le C\|w_\tau\|^2.$$

由格朗沃尔不等式可得

$$\|w_\tau\|^2 \le C\|w_\tau(0)\|^2.$$

由于 $w_\tau(0) \to 0$ 属于 $L^2(\Omega)$（由 $\tau \to 0$ 可知），我们得到

$$w_\tau \to 0 \text{ in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

因此，

$$y_\tau \to y \text{ in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \text{ as } \tau \to 0.$$

这就得到了C27式

为了证明（C26），我们需要证明

$$\frac{y_\tau - y}{\tau} \to p \text{ in } L^2(Q) \text{ as } \tau \to 0,$$

其中 p 满足以下方程

$$\begin{cases} p_t - \nabla \cdot \Big(a(\nabla y)\nabla p + (Da(\nabla y)\cdot\nabla p)\nabla y\Big) + f'(y)p = 0 \text{ in } Q, \\ p = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \Sigma, \\ p(0) = \hat{y}_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{C29}$$

我们记为 $p_\tau = \dfrac{y_\tau - y}{} - p$，则容易验证 p_τ 满足 τ

$$
\begin{cases}
p_{\tau,t} - \nabla \cdot \Big(a(\nabla y_\tau)\nabla p_\tau\Big) + \nabla \cdot \Big((a(\nabla y)) - a(\nabla y_\tau)\nabla p\Big) \\
\quad - \nabla \cdot \left[\left(\dfrac{a(\nabla y_\tau) - a(\nabla y)}{\tau} - Da(\nabla y)\cdot\nabla p\right)\nabla y\right] \quad \text{in } Q, \\
\quad + \left(\dfrac{f(y_\tau) - f(y)}{\tau} - f'(y)p\right) = 0 \\
p_\tau = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\
p_\tau(0) = 0 \quad \text{in } \Omega.
\end{cases} \tag{C30}
$$

将（C30）的第一个方程两边乘以 p_τ，并在 Ω 上对其积分，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |p_\tau|^2\,dx + \int_\Omega a(\nabla y_\tau)|\nabla p_\tau|^2\,dx \\
&\qquad = \int_\Omega \Big(a(\nabla y) - a(\nabla y_\tau)\Big)\nabla p\nabla p_\tau\,dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(\frac{a(\nabla y_\tau) - a(\nabla y)}{\tau} - Da(\nabla y)\cdot\nabla p\right)\nabla y\nabla p_\tau\,dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(\frac{f(y_\tau) - f(y)}{\tau} - f'(y)p\right)p_\tau\,dx \\
&\qquad = J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned} \tag{C31}
$$

利用 $a(\cdot)$ 的性质和 H¨older 不等式，我们得到

$$
|J_1| \le \epsilon\int_\Omega |\nabla p_\tau|^2\,dx + C\int_\Omega |w_\tau|^2\,dx. \tag{C32}
$$

类似地，对于某个 $\lambda_* \in [0,1]$，我们有

$$
\begin{aligned}
|J_2| &\le \left|\int_\Omega \Big(Da(\lambda_*\nabla y_\tau + (1-\lambda_*)\nabla y)\cdot(\nabla\frac{w_\tau}{\tau}) - Da(\nabla y)\cdot\nabla p\Big)\nabla y\nabla p_\tau\,dx\right| \\
&\le \int_\Omega |Da(\lambda_*\nabla y_\tau + (1-\lambda_*)\nabla y) - Da(\nabla y)|\cdot|\nabla p|\cdot|\nabla y|\cdot|\nabla p_\tau|\,dx \\
&+ \int_\Omega |Da(\lambda_*\nabla y_\tau + (1-\lambda_*)\nabla y)|\cdot|\nabla y|\cdot|\nabla p_\tau|^2\,dx \\
&\le C\int_\Omega |\nabla w_\tau|\cdot|\nabla p|\cdot|\nabla y|\cdot|\nabla p_\tau|\,dx + C\int_\Omega |\nabla y|\cdot|\nabla p_\tau|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{C33}
$$

对于 ξ 和 u 充分小且根据引理 6，有

$$
\|\nabla y\|_{C(0,T;L^\infty(\Omega))} \le C\left(\|\xi\|_{X_0} + \|u\|_{X_0}\right),
$$

and

$$
\|\nabla p\|_{C(0,T;L^\infty(\Omega))} \le C\left(\|\xi\|_{X_0} + \|u\|_{X_0} + \|\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)}\right).
$$

在 (¨C33) 中使用older 不等式，并结合最后一个不等式，可得，

$$|J_2| \leq \epsilon \int_\Omega |\nabla p_\tau|^2 \, dx + C \int_\Omega |\nabla w_\tau|^2 \, dx. \tag{C34}$$

此外，

$$\begin{aligned} |J_3| &= \left| \int_\Omega \left(\frac{f(y_\tau) - f(y)}{\tau} - f'(y)p \right) p_\tau \, dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega \left[f'(\tilde{\lambda}_* y_\tau - (1-\tilde{\lambda}_*))p_\tau - \Big(f'(\tilde{\lambda}_* y_\tau + (1-\tilde{\lambda}_*)y) - f'(y) \Big) p \right] p_\tau \, dx \right|, \end{aligned}$$

¯对某个 $\lambda_* \in [0,1]$成立。

现在，利用 f'' 有界这一事实以及杨氏不等式，

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq C \int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx + \int_\Omega |w_\tau| \cdot |p| \cdot |p_\tau| \, dx \\ &\leq C \int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx + \int_\Omega |w_\tau|^2 \cdot |p|^2 \, dx \\ &\leq C \int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx + \|p\|^2_{C(0,T;L^\infty(\Omega))} \int_\Omega |w_\tau|^2 \, dx, \end{aligned}$$

并且我们有，

$$|J_3| \leq C \int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx + C \int_\Omega |w_\tau|^2 \, dx. \tag{C35}$$

由（C32）、（C34）和（C35），我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx + \frac{a_0}{2} \int_\Omega |\nabla p_\tau|^2 \, dx \\ \leq C \int_\Omega |w_\tau|^2 \, dx + C \int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx. \end{aligned}$$

利用格朗沃尔不等式，我们得到

$$\int_\Omega |p_\tau|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |w_\tau|^2 \, dx.$$

由最后一个不等式可知，由于

$$w_\tau \to 0 \quad \text{as} \quad \tau \to 0,$$

我们有，

$$p_\tau \to 0 \quad \text{as} \quad \tau \to 0.$$

因此，

$$\frac{y_\tau - y}{\tau} \to p \quad \text{in} \quad L^2(Q) \quad \text{as} \quad \tau \to 0.$$

我们知道，

$$\left.\frac{\partial \Phi(y_\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}(y_\tau + y)\left(\frac{y_\tau - y}{\tau}\right)dxdt,$$

其中 y 是方程（1）的解，则

$$\left.\frac{\partial \Phi(y_\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} py\,dxdt, \tag{C36}$$

其中 p 是（C29）中的解。

现在，在（C29）两边乘以 h 并在 Q上积分，得到

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} py\,dxdt = \int_\Omega h(0)\hat{y}\,dx,\ \ \forall\,\hat{y}_0 \in H^3(\Omega)\ \text{ with }\ \|\hat{y}_0\|_{H^3(\Omega)} = 1, \tag{C37}$$

由（C36）和（C37），得到

$$\left.\frac{\partial \Phi(y_\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0\ \ \text{if and only if}\ \ \ h(0) = 0.$$

至此，命题2的证明

参考文献

[1] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomorov, S. V. Formin，《最优控制》，Consultants Bureau，纽约，1987。[2] M. Beceanu，一维扩散方程的局部精确可控性，《抽象与应用分析》，第 2003 卷（14），第 793–811 页，2003。[3]O. Bodart, C. Fabre，使半线性热方程解的范数不敏感的控制，《数学分析与应用杂志》，第 195 卷（3），第 658–683 页，1995。[4] O. Bodart, M. Gonz´alez-Burgos, R. P´erez-Garcia，具有超线性非线性的半线性热方程不敏感控制的存在性，《偏微分方程通讯》，第 29 卷（7–9），第 1017–1050 页，2004。[5] F. Boyer, V. Hern´andez-Santamar´ıa, L. de Teresa，半线性抛物方程的不敏感控制：一种数值方法，《数学控制与相关领域》，第 9 卷，第 1 期，第 117–158 页，2019。[6] H. R. Clark, E. Fern´andez-Cara, J. L´ımaco, L. A. Medeiros，具有局部和非局部非线性的抛物系统的理论与数值局部零可控性，《应用数学与计算》，第 223 卷，第 483–505 页，2013。

[7] L. De Teresa，《半线性热方程的不敏感控制》，《偏微分方程通讯》，第25卷（1-2），第39-72页，2000年。[8] L. DeTeresa，E. Zuazua，《热方程不敏感控制初始数据类的识别》，《纯粹与应用分析通讯》，第8卷（1），第457-471页，2009年。[9] C.Fabre，J-PPuel，E.Zuazua，《半线性热方程的近似可控性》，《爱丁堡数学学会学报》，第125A卷，第31-65页，1995年。[10] E. Fern´andez-Cara，C. Galina，A. Osses，《大尺度海洋环流模型的不敏感控制》，《数学报告：法国科学院科学报告》，第337卷（4），第265-270页，2003年。[11] E. Fern´andez-Cara，J. L´ımaco，I. Mar´ın-Gayte，《二维和三维拟线性抛物方程的理论与数值局部零可控性》，《富兰克林研究所学报》，第358卷，第2846-2871页，2021年。[12] E. Fern´andez-Cara，D.Nina-Huaman，M. R. Nu˜nez-Ch´avez，F. B.Vieira，《一维非线性抛物型偏微分方程的理论与数值控制》，《优化理论与应用学报》，第175卷（3），第652-682页，2017年。[13] A.V.Fursikov，O. Y. Imanuvilov，《演化方程的可控性》，《讲义系列：数学研究所》，首尔国立大学，1996年。[14] M. Gonz´alez-Burgos，L. DeTeresa，《通过一个控制力实现耦合抛物型偏微分方程级联系统的可控性结果》，《葡萄牙数学》，第67卷，第1期，第91-113页，2010年。[15] S.Guerrero，《一个控制力作用下斯托克斯方程系统的可控性：不敏感控制的存在性》，《亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊》，第24卷（6），第1029-1054页，2007年。[16] S.Guerrero，《一个控制力作用下某些两个抛物方程系统的零可控性》，《SIAM控制与优化杂志》，第46卷（2），第379-394页，2007年。[17] M. Gueye，《纳维-斯托克斯方程的不敏感控制》，《亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊》，第30卷，第825-844页，2013年。[18] O.Y. Imanuvilov，M. Yamamoto，《负阶索伯列夫空间中抛物方程的 Carleman不等式与半线性抛物方程的精确可控性》，《京都大学数理科学研究所刊物》，第39卷，第227-274页，2003年。[19] O.Kavian，L. DeTeresa。《抛物方程系统的唯一延拓原理》，《ESAIM 控制、优化与变分法》，第16卷，第2期，第247-274页，2010年。[20] J. L.Lions，《层级控制》，《印度科学院数学科学学报》，第104卷（1），第295-304页，1994年。

[21] J. L. Lions, 《分析与控制中的若干概念：具有不完整数据的系统》，载于：第十一届应用数学大会论文集（西班牙语）（马拉加，1989），第43–54页，1990年。[22] J. L. Lions, 《分布参数系统不完整数据的哨兵》，Masson，巴黎，第21卷，1992年。[23] X. Liu, 《一类拟线性抛物方程的不敏感控制》，J. Diff. Eq，第253卷，第1287–1316页，2012年。[24] S. Micu，J. H. Ortega，L. De Teresa, 《一种热方程的 ϵ-不敏感控制实例：观测区域与控制区域不相交》，Appl. Math. Lett.，第17卷（8），第927–932页，2004年。[25]D. Nina-Huaman, 《一维、二维或三维拟线性抛物方程的Stackelberg-Nash可控性》，Journal of Dynamical and Control Systems，第27卷，第1–27页，2021年。[26]M. R. Nu˜nez-Ch´avez，J. L´ımaco, 《一维非线性抛物方程的层级可控性》，Journal of Optimization Theory and Applications，第198卷，第1–48页，2023年。[27]M. A. Rincon，J. L´ımaco，I-Shih. Liu, 《一类温度相关参数的非线性热方程》，Mathematical Physics Electronic Journal，第12卷，2006年。[28] Y. Simpor´e，O. Traor´e, 《具有更一般代价泛函的半线性热方程控制约束不敏感控制》，J. N. E. E. A，第1卷，第1–12页，2017年。