arXiv:2304.04322v1 [math.GR] 9 Apr 2023

关于 Thompson 群 F 的零测子集

Victor Guba*

俄罗斯沃洛格达列宁
街15号沃洛格达州立大学,
邮编160600 电子邮件:
gubavs@vogu35.ru

摘要

当且仅当一个（离散）群上存在有限可加的右不变概率测度时，称该群为可 amenable 的。对于 Thompson 群 F，它是否可 amenable 是一个长期未解的问题。我们用非球面半群图来表示 F。利用这些图，可以将 F 自然划分为 7 个部分。我们证明，对于 F上具有上述性质的任意测度，这些集合中除一个之外，其余集合的测度均为零。如果该群可 amenable，这有助于阐明 F 中 Følner集的结构。

He这是论文的大纲。基本定义包含在下面的 tex 中 t.

在第 1 节中，我们讨论可和群的定义，并引入零测子集的概念。我们证明，可以将此类子集中的元素排除在 Følner集之外。在第 2 节中，我们回顾有关 Thompson 群 F 及其可和性问题的一些基本事实。我们指出，Belk 和 Brown 提出的构造并未给出其中有限子图密度的最优估计。因此，F 可能是可 amenable 的这一假设变得更为可信。这使得为 F构造 Følner集的方法具有现实意义。在这种情况下，了解 F 中的哪些子集是零测的将会很有用。

我们根据元素的标准形式，用典范半群图表示 F 的元素。根据这一结构，我们将 F 划分为 7 个子集。在第 3 节中，我们证明这些子集中除一个以外，其余都是零测度的。因此，在构造 Følner集的过程中，可以将它们从 Følner集序列中排除。

*本研究得到俄罗斯科学基金会项目 23-21-00289 的资助。

1 A可 amen 性、Følner集和零测集

一个（离散）群 G 被称为可amenable，当存在一个定义在 G 上的有限可加右不变概率测度时。形式上，这是一个映射 μ: $\mathcal{P}(G) \to [0,1]$，满足以下性质:

- $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ 对于任意不相交的子集 A、$B \subseteq G$,
- $\mu(Ag) = \mu(A)$ 对于任意 $A \subseteq G$、$g \in G$,
- $\mu(G) = 1$。

如果我们要求测度具有左不变性或双侧不变性，即条件 $\mu(gA) = \mu(A)$ 或 $\mu(Ag) = \mu(gA) = \mu(A)$（对于所有$A \subseteq G$、$g \in G$），就可以得到可 amen 性的等价定义。证明见 [11]。本文将采用右不变测度。

如果群 G 的子集 A 对于任意定义在 G 上的有限可加右不变概率测度 μ 都满足 $\mu(A) = 0$，则称其为零测度的。

无限群中零测集的平凡例子是有限子集。还要指出，如果群 G 是非可 amen 的，那么该群上不存在具有上述性质的测度。在这种情况下，形式上所有子集（包括 G 本身）都是零测度的。

可 amen 性质也可以用群的凯莱图来表述。这里我们只讨论群 G是有限生成的情形。

我们将有限图的密度定义为其顶点度的平均值。更准确地说，设 v_1、...、v_k是图 Γ的所有顶点。用 $\deg_\Gamma(v)$ 表示图 Γ中顶点 v的度，也就是从 v出发的 Γ 的有向边数。那么

$$\delta(\Gamma) = \frac{\deg_\Gamma(v_1) + \cdots + \deg_\Gamma(v_k)}{k} \tag{1}$$

称为 Γ的密度。

对于具有 m 个生成元的群 G 的凯莱图，已知 G 是可 amenable 的，当且仅当其有限子图的密度上确界达到其最大值$2m$。这本质上是源自 [8]的可 amen 性 Folner 判据。该性质不依赖于有限生成集的选择。

设 A_n ($n \geq 1$)是 G中的有限非空子集序列。我们假设存在一个关于 G 的有限m生成集。现在，这些集合可以被视为关于这些生成元的 G 的凯莱图中的子图。令 δ 表示有限图的密度。当$\{A_n \mid n \geq 1\}$ 时，该族被称为 Følner序列。

$$\sup_n \delta(A_n) = 2m. \tag{2}$$

必要时，可以将 sup 替换为 lim。该序列中的元素简称为$n\to\infty$Følner集。

给定 G上的 Følner序列，很容易按以下方式在 G 上构造一个有限可加的右不变概率测度 μ 。令 $Z \subseteq G$ 为任意子集。选取 $\mathbb{N}$上的任意非主超滤子 $\mathcal{U}$ 。然后将 $\mu(Z)$定义为商 $\frac{|A_n \cap Z|}{|A_n|}$ 沿该超滤子的极限，其中 $|\cdot|$ 表示有限集的基数:

$$\mu(Z) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{|A_n \cap Z|}{|A_n|}. \tag{3}$$

容易验证， μ 将是一个有限可加的右不变概率测度。注意，只需对该群的生成元检查不变性。根据 Følner集的定义，它们相对于生成元的右平移是“几乎不变的”。这意味着，对于任意群生成元 x，对称差集 $|A_n x \,\Delta\, A_n|$ 的基数相对于 $|A_n|$ 来说是“很小的”，因为 $n \to \infty$。这就意味着，(3) 中 Zx 的极限将保持不变。

现在设 A_n ($n \geq 1$)为一个 Følner序列，且 A是 G中的一个零测子集。我们将从 Følner集中移除 A 中的元素。这会得到一个新序列$B_n = A_n \setminus A$。其中可能包含一些空集。如果将这些空集从序列中移除，就得到一个新的由非空有限子集组成的无限族。我们声称，新序列仍然是 Følner序列。简述如下。

命题 1 从 Følner 集中移除零测集的元素，可得到一个新的 Følner 集序列。

首先，我们需要以下这个初等的

引理 1 设 Γ是一个密度为 δ 、有 n 个顶点的有限图，其中每个顶点的度数都不超过 $2m$。假设我们从 Γ 中删除 $k < \lambda n$ 个顶点，以及与它们相连的边，其中 $\lambda < 1$。那么，由此得到的图 Γ' 的密度至少为 $\delta - 2m\lambda$。

证明。令 S 为 Γ中各顶点度数之和。根据定义，有 $\delta = \frac{S}{n}$。删除一个顶点及与其相连的边时，其余顶点的度数之和至多减少 $2m$。因此， Γ' 中各顶点的度数之和为 $S' \geq S - 2mk$。对于 Γ' 的密度 δ'，有 $\delta' = \frac{S'}{n-k} \geq \frac{S'}{n} \geq \frac{S-2mk}{n} = \delta - 2m\frac{k}{n} > \delta - 2m\lambda$。证毕。

命题 1 的证明。设 A 是零测度的。首先，我们证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n \cap A|}{|A_n|} = 0$。事实上，若情况并非如此，则 $\limsup_{n\to\infty} \frac{|A_n \cap A|}{|A_n|} > 0$。于是存在一个递增的无限子序列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，使得 $\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{|A_{n_k} \cap A|}{|A_{n_k}|} > 0$。选取一个定义在 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$，使集合 $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 属于该超滤子。令 μ 为依据 (3) 构造在 G 上的有限可加右不变概率测度。根据定义，有 $\mu(A) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{|A_n \cap A|}{|A_n|} = \alpha > 0$。这就产生了矛盾。

令 $\varepsilon > 0$。找一个数 n_0，使得对于 $n \geq n_0$，有 $|A_n \cap A| < \frac{\varepsilon}{4m}|A_n|$。由于对于一个 Følner序列，$\sup \delta(A_n) = 2m$，因此可以找到一个数 $n > n_0$，使得 $\delta(A_n) >_n$

$2m - \frac{\varepsilon}{2}$（注意，由于群是无限的，密度永远不会等于 $2m$ ）。令 $B_n = A_n \setminus A$。为了从 A_n得到 B_n，我们从 A_n中至多删除 $\lambda|A_n|$ 个顶点，其中 $\lambda = \frac{\varepsilon}{4m}$。根据引理 1，我们有 $\delta(B_n) > \delta(A_n) - 2m\lambda > 2m - \frac{\varepsilon}{2} - 2m\frac{\varepsilon}{4m} = 2m - \varepsilon$。因此，$\sup_n \delta(B_n) = 2m$ 因此 B_n 是一个 Følner序列。

证明完成。

命题 1 的作用如下：如果我们要为群 G 构造一个 Følner序列，并且知道某个集合 $A \subset G$ 是零测度的，那么我们就可以避免将 A 中的元素作为 Følner集的成员。

2 Thompson 群 F 和标准图 s

R. Thompson 的群 F 由以下无限群表示给出：

$$\langle\, x_0, x_1, x_2, \ldots \mid x_j x_i = x_i x_{j+1}\ (i < j)\,\rangle. \tag{4}$$

在许多论文中，同一个群是用分段线性函数来定义的。定义方式有很多种。这些定义都是等价的。关于这个群的性质，基础参考文献之一是 [7]。另请参阅我们最近的综述 [14]。

这个群由 Richard J. Thompson 于 60 年代发现。该群的一些重要性质已在 [4, 5] 中得到。在 [3] 中证明了 F 没有自由非阿贝尔子群。容易看出，对于任意 $n \geq 2$，都有 $x_n = x_0^{-(n-1)} x_1 x_0^{n-1}$，因此该群由 x_0、x_1 生成。该群的这一生成集称为标准生成集。用这些生成元，该群可由以下两个定义关系给出表示：

$$\langle\, x_0, x_1 \mid x_1^{x_0^2} = x_1^{x_0 x_1}, x_1^{x_0^3} = x_1^{x_0^2 x_1}\,\rangle, \tag{5}$$

其中 $a^b \leftrightharpoons b^{-1}ab$。

关于 F 的可 amen 性这一著名问题仍未解决。F 是否可 amenable这一问题由 Ross Geoghegan 于1979年提出；参见 [9, 10]。对于答案，人们尚未形成共识：该领域的一些专家认为其具有不可和性，另一些专家则认为该群是可 amenable的。已有许多论文尝试从两个方向解决这一问题。作者一直相信 F 具有不可和性，并试图证明这一性质。如今，这一信念已不再那么坚定。让我们解释一下原因。

一个自然的问题是：关于 F 的标准生成元 $\{x_0, x_1\}$的凯莱图中的有限子图密度，目前已知的最佳估计是什么？在 [13] 中，已证明该密度趋近于 3；在同一篇论文的附录中，证明了密度严格超过这一数值。Belk 和 Brown [1, 2]取得了一项重要改进。他们构造了一族有限子图，其密度趋近于 3.5。许多作者都曾尝试改进这一估计。有几位作者猜想，这一构造已达到最优，这将意味着 F不是 amenable 的。参见 [6] 以及我们论文 [15]中的猜想 1。

然而，事实证明这个猜想是错误的。最近我们在 [16] 中证明了，在以 x_0、x_1 为生成元的 F 的凯莱图中，存在密度为

严格超过3.5。这使得 F 的可 amen性更加可信。因此，在本文中，我们讨论 F 中可能的 Følner集的一些性质。

注意，如果 F 是可 amenable 的，且存在 Følner集，那么已知这些集合的规模非常庞大。在 [17] 中证明了，它们的规模会像指数塔一样增长。

回顾一下，无限生成集中的任意元素 F 都有唯一的标准形式。具体来说，它可以表示为以下表达式：

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s}x_{j_t}^{-1}\cdots x_{j_2}^{-1}x_{j_1}^{-1}, \tag{6}$$

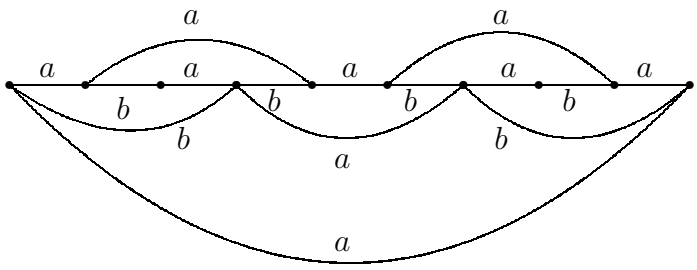
其中 s、$t \geq 0$、$0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_s$、$0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_t$，并且以下结论成立：如果（6）同时包含某个 $i \geq 0$对应的 x_i 和 x_i^{-1}，那么它也包含 x_{i+1} 或 x_{i+1}^{-1}（特别是 $i_s \neq j_t$）。

另已知，F 是基于最简单半群表示$\langle x \mid x^2 = x \rangle$的图群。关于图群的详细信息可参见 [12]。这里我们需要描述这一思想的一个修改版本，该版本基于用非球面图表表示 F。更详细的解释见 [13, 第 3]节。

首先，我们回顾半群图的概念，并介绍一些记号。让我们考虑以下示例。设 $\mathcal{P} = \langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle$ 为半群表示。通过以下代数计算很容易看出

$$a^5 = a(bab)a(bab)a = (aba)(bab)(aba) = bab = a$$

即 words a^5 和 a 模 $\mathcal{P}$ 相等。这一点也可以从下面的图中看出。



这个对象被称为图 Δ，它位于半群表示 $\mathcal{P}$之上。这是一张平面图，具有 10个顶点、15 条（几何）边和6 个单元。每个单元对应于一个字的初等变换，也就是形如 $p{\cdot}u{\cdot}q \to p{\cdot}v{\cdot}q$的变换，其中 p、q 是字（可以为空），且 $u = v$ 或 $v = u$ 属于定义关系集合。图 Δ 的最左顶点记为 $\iota(\Delta)$，最右顶点记为 $\tau(\Delta)$。它还具有从 $\iota(\Delta)$ 到 $\tau(\Delta)$ 的顶部路径top(Δ) 和底部路径bot(Δ)。图中的每个单元 π 都可以看作图本身。上述函数 ι、τ、top、bot 也可以应用于 π。我们不区分同位图。

如果 Δ 的顶路径标签是 w_1 且其底路径标签是 w_2，我们就称 Δ 为一个（w_1，w_2）-图。在我们的例子中，我们处理的是一个（a^5，a）-图。

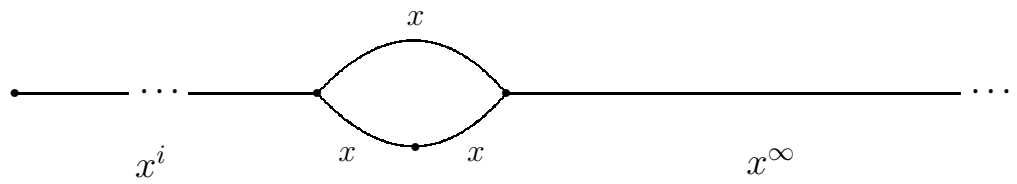
如果有两个图，使得第一个图的底路径与第二个图的顶路径具有相同的标签，那么我们可以通过将第一个图的底路径与第二个图的顶路径识别起来，自然地拼接这两个图。一个（w_1，w_2）-图与一个（w_2，w_3）-图拼接后的结果显然是一个（w_1，w_3）-图。我们用符号 $\circ$ 表示拼接运算。对于任意一个在 $\mathcal{P}$ 上的图 Δ，都可以考虑其关于水平轴的镜像 Δ^{-1}。一个图可能含有偶极子，即形如 $\pi \circ \pi^{-1}$的子图，其中 π 是一个单元。消去（或约化）偶极子，是指移除 π 和 π^{-1} 的公共边界，然后将 top(π) 与 bot(π^{-1}) 识别起来。在任意图中，我们都可以逐步消去其中的所有偶极子。所得结果与消去的顺序无关。当一个图不含偶极子时，我们称其为约化图。消去偶极子的运算有一个逆运算，称为插入偶极子。这些运算在图的集合上诱导出一个等价关系（如果可以通过有限次消去/插入偶极子从一个图得到另一个图，则称这两个图等价）。每个等价类恰好包含一个约化图。

对于任意非空字 w，所有 (w, w)-图构成一个幺半群，其单位元素为 $\varepsilon(w)$（即不含任何单元的图）。运算 $\circ$ 自然地在图的等价类集合上诱导出某种运算。该运算称为乘积，等价的图称为相等。（符号 $\equiv$ 将用于表示两个图是同位的。）因此，所有 (w, w)-图的等价类构成一个群，称为以 w 为基于 $\mathcal{P}$ 的图群。我们将此群记作 $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$。我们可以将该群视为所有约化的 (w, w)-图构成的集合。群运算是拼接，并消去结果中的所有偶极子。图的逆元素是它的镜像。我们还需要在图的集合上定义另一种自然运算。两个图的和是指将第一个加项的最右顶点与第二个加项的最左顶点识别后得到的图。该运算也满足结合律。图 Δ_1、Δ_2 的和记作 $\Delta_1 + \Delta_2$。

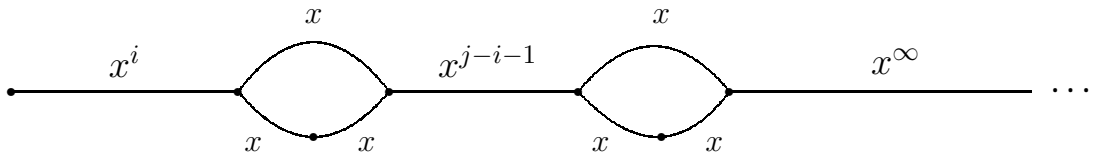
我们已经注意到，群 F 是基于最简单的半群表示 $\mathcal{P} = \langle x \mid x^2 = x \rangle$、以 x 为基的图群（对于任意基 x^k 且 $k \geq 1$ 也成立）。所有这些图都是球面的，也就是说，它们是某个字 w 的 (w, w)-图。现在我们来描述如下修改。

设 Δ 是 $\mathcal{P} = \langle x \mid x^2 = x \rangle$ 上的任意一个图，不一定是球面的。在 Δ 的右侧添加一列无限的边，每条边都标记为 x。这个对象称为 $\mathcal{P}$ 上的无限图。注意，它只有有限多个单元。与 Δ 对应的无限图记作 Δ。它有最左顶点 $\iota(\Delta)$，以及两条从 $\iota(\Delta)$ 出发的特殊无限路径，这两条路径都标记为 x 的无限次幂。这两条路径分别记作 top(Δ) 和 bot(Δ)。无限图中偶极的概念定义如上。删除／插入偶极的操作、由这些操作诱导的等价关系等也同样如此。任意两个无限图都可以自然地进行拼接（第一个因子的底部路径与第二个因子的顶部路径相重合）。我们用相同的符号 $\circ$ 表示这种拼接。运算 $\circ$ 使所有无限图的集合具有幺半群结构。其单位元是没有单元的无限图，记作 ε。与

球面图表一样，拼接运算在所有无限图的等价类集合上诱导出一个群运算。因此我们得到一个群。我们将其记作 $\mathcal{D}(\mathcal{P},\ x)$。（对于字母表仅含一个字母的任意半群表示 $\mathcal{P}$，这都有意义。注意，在处理单字母字母表时，我们可以忽略标记。）很容易看出，我们得到的群同构于 F。事实上，设 X_i 为无限图



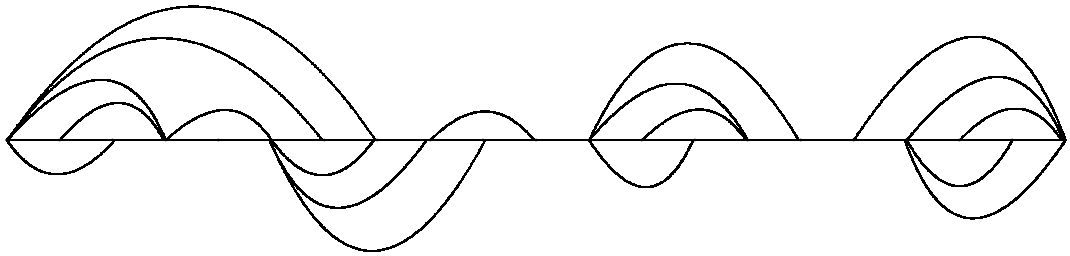
它由一个 (x, x^2)-胞腔、其左侧标记为 x^i 的有限路径，以及其右侧标记为 x 的无限次幂的无限路径组成。我们用 X_i^{-1} 表示 X_i 关于水平轴对称后的镜像。形如 $X_i^{\pm 1}$ $(i \geq 0)$ 的无限图称为原子图。对于任意整数 $j > i \geq 0$，图



既等于 $X_j \circ X_i$，也等于 $X_i \circ X_{j+1}$。这意味着我们有一个从 F 到无限图群的同态。这个同态是满射，因为任意无限图都是原子图的拼接。这个同态必定是单射，因为 F 的所有真同态像都是阿贝尔群 [7]。然而，无限图群不是阿贝尔群，因为 $X_1X_0 = X_0X_2 \neq X_0X_1$。

处理无限图时，去掉每个无限图右侧的无限“尾部”会很方便。若一个普通的 $\mathcal{P}$ 上的图没有偶极子，且不是某个图与一条边的和，则称其为标准图。显然，无偶极子的无限图集合与标准图集合之间存在一一对应关系。因此，我们可以假设 F 的每个元素都有唯一的标准代表。所有 $\mathcal{P}$ 上的标准图构成一个群。给定一个 (x^p, x^q)-图 Δ_1 和一个 (x^s, x^t)-图 Δ_2，按如下方式将它们相乘。若 $q = s$，则将它们拼接。若 $q < s$，则将 $\Delta_1 + \varepsilon(x^{s-q})$ 与 Δ_2 拼接。若 $q > s$，则将 Δ_1 与 $\Delta_2 + \varepsilon(x^{q-s})$ 拼接。拼接后，将结果中的所有偶极子约简。然后需要将该图化为标准图。这意味着必须删除所得图的顶路径和底路径的最右公共后缀。唯一的例外是图 $\varepsilon(x)$，即群的单位元素。该图已经是标准图，因此保持原样。

给定一个标准形式，很容易画出对应的图，反之亦然。下面的例子展示了元素 $g = x_0^3 x_1 x_3 x_8 x_{11}^2 x_{12} x_{16} x_{17} x_{18} x_{17}^{-2} x_{11}^{-1} x_5^{-3} x_0^{-1}$ 的标准形式所表示的图：



3 将 F 划分为7个集合

我们根据表示这些元素的标准图的结构，将 F 划分为 7 个集合。

设 g 是由其标准图 Δ表示的 F 元素。对于 $i \geq 0$ 和 $\epsilon = \pm 1$，当 Δ 是某个图 Δ' 与 X_i^{ϵ}的拼接时，我们称 Δ 可被 X_i^{ϵ}右可除。等价地，也可以说图 $\Delta \circ X_i^{-\epsilon}$ 含有一个偶极。在这种情况下，表示 $gx_i^{-\epsilon}$ 的标准图将是 Δ'。

我们用 $D(\Delta)$ 表示集合 $\{X_0, X_0^{-1}, X_1, X_1^{-1}\}$ 中 Δ 的右因子集合。对此有 7 种情况。我们用 $\mathcal{M}_i$ 表示 F 中满足第 i 种情况（$1 \leq i \leq 7$）条件的标准图的元素集合。对于元素 $g \in F$，我们始终用 $\Delta = \Delta(g)$ 表示其标准图。

1) $\mathcal{M}_1 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \emptyset\}$。此集合中的元素示例：$e$、$x_2$、$x_1x_2^{-1}$。

2) $\mathcal{M}_2 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \{X_0^{-1}\}\}$。该集合中的元素示例：$x_0^{-1}$、$x_0x_1x_0^{-1}$、$x_2x_1^{-1}x_0^{-1}$。

3) $\mathcal{M}_3 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \{X_0\}\}$。此集合中的元素示例：$x_0$、$x_0x_3^{-1}$、$x_0^3x_2^{-1}$。注意，如果 Δ 是 X_0 右可除的，则该集合中的其他右因子$\{X_0^{-1}, X_1, X_1^{-1}\}$ 无法出现。

4) $\mathcal{M}_4 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \{X_1^{-1}\}\}$。此集合中的元素示例：$x_1^{-1}$、$x_0x_1^{-2}$、$x_3x_4x_1^{-1}$。

5) $\mathcal{M}_5 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \{X_1\}\}$。该集合中的元素示例：$x_1$, x_0x_1, $x_1^2x^{-}$ $_4{}^1$.

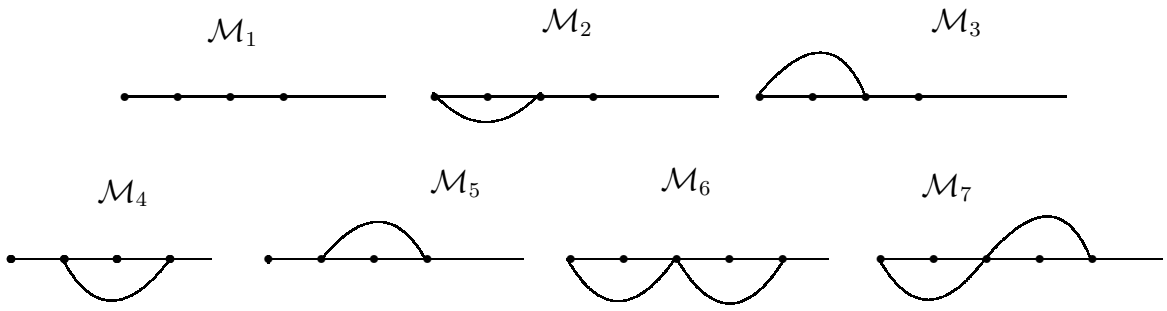
6) $\mathcal{M}_6 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \{X_0^{-1}, X_1^{-1}\}\}$。该集合中的元素示例：$x_2^{-1}x_0^{-1}$,$x_1x_4^{-1}x_0^{-3}$, $x_1x_5x_3^{-2}x_0^{-2}$。

7) $\mathcal{M}_7 = \{g \in F \mid D(\Delta) = \{X_0^{-1}, X_1\}\}$。该集合中的元素示例：$x_2x_0^{-1}$,$x_0x_1x_2x_0^{-1}$, $x_1x_3x_0^{-2}$。

它是n 不难看出，任意标准图恰好满足 7 个条件之一。 s,

因此，我们将 F 划分为 7 个子集。我们的目标是证明，如果 μ 是 F 上的有限可加右不变概率测度，那么它完全集中在 $\mathcal{M}_6$ 上。也就是说，其余六个集合均为零测度的。

为使情况更加直观，我们为这些子集添加了一幅图片，展示其标准图的典型单元结构 Δ。当且仅当一个单元属于 $D(\Delta)$ 时，才显示与 $X_0^{\pm 1}$、 $X_1^{\pm 1}$对应的单元。



下面的引理说明，对形如 $\mathcal{M}_i$ 的集合右乘某些群生成元 $x_0^{\pm 1}$、 $x_1^{\pm 1}$时会发生什么。

引理 2 a) $(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5)\ x_0 \subseteq \mathcal{M}_3$；b) $(\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_7)\ x_1 \subseteq \mathcal{M}_7$；c) $\mathcal{M}_7 x_0^{-1} \subseteq \mathcal{M}_2$； $\mathcal{M}_3 x_1^{-1} \subseteq \mathcal{M}_4$。

证明。若 Δ 不能被 X_0^{-1}右除，则 $\Delta \circ X_0$ 没有偶极子，并且它可被 X_0右除。在这种情况下， X_0 是该图唯一的右因子，结果属于 $\mathcal{M}_3$。这就推出了 a)。

为证明 b)，取一个来自 $\mathcal{M}_2$ 或 $\mathcal{M}_7$的图 Δ。在右侧乘以 X_1，意味着添加一个形如 $x = x^2$ 的单元，其顶边路径连接到 Δ的第二条底边。在这种情况下不会出现偶极子，因为如果 Δ 属于 $\mathcal{M}_2$，那么它就不能被 X_1^{-1}右可除。因此，我们得到一个来自 $\mathcal{M}_7$的标准图。

为证明 c)，取一个来自 $\mathcal{M}_7$的图 Δ。在右侧乘以 X_0^{-1}，意味着添加一条连接底部第一和第三个顶点的弧。显然，这一操作后不会出现偶极子，所得结果属于 $\mathcal{M}_2$。

至于 d)，若取一个来自 $\mathcal{M}_3$ 的图 Δ，并在右侧乘以 X_1^{-1}，则会添加一条连接底部第二和第四个顶点的弧。显然，我们得到 $\mathcal{M}_4$。

证明完毕。

现在，我们的主要结果几乎可以直接得出。

定理 1如果 μ 是 F 上的有限可加右不变概率测度，那么子集 $\mathcal{M}_i\ (1 \leq i \leq 5)$ 和 $\mathcal{M}_7$ 是零测度的。也就是说，所有测度（如果存在的话）都集中在 $\mathcal{M}_6$ 上。

证明。a）部分意味着 $\mu(\mathcal{M}_1) + \mu(\mathcal{M}_3) + \mu(\mathcal{M}_4) + \mu(\mathcal{M}_5) = \mu(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5) = \mu((\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5)x_0) \leq \mu(\mathcal{M}_3)$。因此 $\mu(\mathcal{M}_1) = \mu(\mathcal{M}_4) = \mu(\mathcal{M}_5) = 0$。

b）部分意味着 $\mu(\mathcal{M}_2) + \mu(\mathcal{M}_7) = \mu(\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_7) = \mu((\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_7)x_1) \leq \mu(\mathcal{M}_7)$。所以 $\mu(\mathcal{M}_2) = 0$。

现在，c) 部分表明 $\mu(\mathcal{M}_7) = \mu(\mathcal{M}_7 x_0^{-1}) \leq \mu(\mathcal{M}_2)$，因此 $\mu(\mathcal{M}_7) = 0$。最后，由 d) 可知 $\mu(\mathcal{M}_3) = \mu(\mathcal{M}_3 x_1^{-1}) \leq \mu(\mathcal{M}_4)$，因此 $\mu(\mathcal{M}_3) = 0$。

因此我们证明了 $\mu(\mathcal{M}_1) = \mu(\mathcal{M}_2) = \mu(\mathcal{M}_3) = \mu(\mathcal{M}_4) = \mu(\mathcal{M}_5) = \mu(\mathcal{M}_7) = 0$，证毕。

由此可以立即得到一个推论。我们称 F 中的子集是1-测度的，当且仅当其补集是零测度的。显然，零测集的有限并是零测集。因此，1-测度集的有限交是1-测度的。集合是1-测度的这一性质在右乘下保持不变。因此，对于任意1-测度子集 $\mathcal{N}$ 以及任意正整数 k，交集 $\bigcap_{|w|\leq k} \mathcal{N}w$ 将是1-测度的，其中交集取遍所有长度为 $\leq k$的字。

集合 $\mathcal{M}_6$ 可以如下刻画。它由这样的元素组成：其标准图可右除以一个由两个单元格组成的图 $X_0^{-1}X_1^{-1}$。取 $\mathcal{N} = \mathcal{M}_6$并选择足够大的 $k \gg 1$，我们看到，其标准图可右除以任何固定的、可右除以$X_0^{-1}X_1^{-1}$的负图的元素集合构成一个 1-测度子集。根据命题1，在不失一般性的情况下，可以假设 Følner集由上述图组成（如果 F 是可 amenable 的）。这有助于澄清 Følner集在存在时的结构。

参考文献

[1] James M. Belk。Thompson 群 F。博士论文，康奈尔大学，2004年。[2] James M. Belk 和 Kenneth S. Brown。Thompson 群 F的森林图。《国际代数与计算杂志》，15，第 5 & 6 期（2005年），815–850。[3] M. G. Brin，C. C. S quier。实直线上的分段线性同胚群。《数学发明》79（1985年），485–498。[4] K. S. Brown。群的有限性性质。《纯粹与应用代数杂志》44（1987年），45–75。[5] K. S. Brown，R. Geoghegan。一个无限维无挠 FP_∞ 群。《数学发明》77（1984年），367–381。[6] Jos´e Burillo。Thompson 群 F 简介（预印本），2016年。[7] J. W. Cannon，W. J. Floyd 和 W. R. Parry。Richard Thomp- son 群导论。《数学教学》第二辑 42（1996年），215–256。[8] E. Følner。关于具有完备 Banach 平均值的群。《斯堪的纳维亚数学杂志》3（1955年），243–254。[9] R. Geoghegan。无限维拓扑学中的公开问题，《拓扑学论文集》4:1（1979年），287—338。

[10] Gersten, S. M. 选题。组合群论与拓扑学（Alta，犹他州，1984年），545—551。《数学年刊研究》，111，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987年。[11] F. P. Greenleaf。拓扑群上的不变均值及其应用。Van Nostrand，1969年。[12] V. S. Guba，M. V. Sapir。图群。《美国数学学会回忆录》130，第 620 号，1997年，1–117。[13] V. Guba。Richard Thompson 群 F的凯莱图的性质。《国际代数与计算杂志》14，第 5 & 6 期（2004年），677–702。[14] V. S. Guba。R. Thompson 群 F 与可和性问题。《俄罗斯数学综述》77:2（2022年），251–300。[15] V. Guba。凯莱图上的疏散方案与群的不可和性。《国际代数与计算杂志》32，第 08 期（2022年），1477–1494。[16] V. S. Guba。R. Thompson 群 F的凯莱图：密度的新估计。《组合代数杂志》（2023年，即将出版）。https://arxiv.org/pdf/2210.12304.pdf [17] Justin Tatch Moore。Thompson 群 F的 Følner函数快速增长。《群、几何与动力学》7(3)（2013年），633—651。