arXiv:2304.04335v1 [math.CA] 10 Apr 2023

具有指数体积增长的某些直积流形上的黎斯变换的弱型 (1,1)

Hong-Quan Li 和 Jie-Xiang Zhu

摘要。本文研究直积流形 $\mathbb{H}^n \times M$上的黎斯变换，其中 $\mathbb{H}^n$是 n维的实双曲空间，而 M是一个满足体积倍增性质以及热核的广义高斯或次高斯上界估计的连通完备非紧黎曼流形。我们证明了其弱型 (1,1)性质。此外，在相同的设置下，我们还得到了热极大算子的弱型(1,1)。我们的方法也适用于一大类具有指数体积增长的直积流形。特别地，对于Li、Sj¨ogren和Wu [27]在其工作中所研究的某些算子，我们给出了弱型 (1, 1) 有界性的一种更简洁的证明。

数学主题分类（2020）：42B20，58J35

关键词和短语：黎斯变换；热核；直积；实双曲空间

1 引言与主要结果

黎斯变换的弱（1, 1）有界性和 L^p 有界性是调和分析中的经典课题之一。过去几十年来，人们在黎曼流形的背景下对这些问题进行了广泛研究。为表述这些问题，我们先列出全文中将用到的术语和记号。设 (M, g) 是一个连通完备非紧黎曼流形。记 $\mathrm{d}\mu_M$ 为黎曼测度， d_M 为测地距离。用 $B(x, R)$ 表示以 x为中心、半径为 $R > 0$的开球。令 $V_M(x, R) = \mu_M(B(x, R))$。令 ∇_M为黎曼梯度， Δ_M为 M上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。记与 Δ_M 相关的热半群为 $(\mathrm{e}^{t\Delta_M})_{t>0}$，热核为 $p_t^M(x, y)$。根据谱分析，

$$(-\Delta_M)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{t\Delta_M} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

于是，黎斯变换 $\mathcal{R}$在 M上定义为 $\nabla_M(-\Delta_M)^{-\frac{1}{2}}$。下文中，如果存在一个普适常数 $C > 0$ 使得 $A \le CB$，其中常数 C 只能取决于底层流形的性质，我们使用记号 $A \lesssim B$ 。如果 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$，我们记作$A \sim B$。我们还使用 $A \lesssim_\varepsilon B$ 表示 $A \le C_\varepsilon B$，其中

常数 C_ε 取决于参数 ε。在本文中，我们将研究黎斯变换在 M 上的弱型 (1,1) 性质，即

$$\mu_M\left(\left\{x;\, |\nabla_M(-\Delta_M)^{-\frac{1}{2}}f(x)|>\lambda\right\}\right)\lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda},\quad \forall\,\lambda>0,\, f\in C_0^\infty(M);\tag{1.1}$$

及其 L^p 有界性，即对于哪些 $1<p<+\infty$,

$$\|\nabla_M(-\Delta_M)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\lesssim \|f\|_p,\quad \forall\, f\in C_0^\infty(M).\tag{1.2}$$

由于 $p=2$ 的情形是分部积分的直接结果，因此 $1<p<2$ 的(1.2) 可由(1.1) 通过插值法得到。经典的奇异积分算子理论表明，在欧几里得空间上，对于所有 $1<p<+\infty$ ，(1.1) 和 (1.2) 都成立（例如参见 [32, 第三章]）。与经典结果不同的是，对于任意给定的 $p_0>2$，都存在随机完备的黎曼流形，在这些流形上，(1.2) 成立当且仅当 $1<p<p_0$，甚至当且仅当 $1<p\le 2$ （更多细节见例如 [13, 24] ）。值得一提的是，文献中近年来出现了各种反例。下面的附录简要讨论了在我们的设定下 $p>2$ 的 (1.2)。本文主要关注 (1.1)。

1.1 Volu热核上界估计与倍增性质

出于进一步研究的目的，值得讨论关于 M 和p_t^M的一些基本假设。若存在 $D>0$使得 M 满足体积倍增性质，则称 M 满足体积倍增性质。

$$V_M(x,2R)\le D\,V_M(x,R),\qquad \forall\, x\in M,\, R>0.\tag{D}$$

给定 $m\ge 2$。假设存在某个 $c\in(0,1)$，对所有 x、 $y\in M$,

$$p_t^M(x,y)\le c^{-1}\begin{cases}\frac{1}{V_M\left(x,\sqrt{t}\right)}\exp\left(-c\,\frac{d_M(x,y)^2}{t}\right), & \text{if}\quad 0<t<1;\\[2ex] \frac{1}{V_M\left(x,t^{\frac{1}{m}}\right)}\exp\left(-c\,\left(\frac{d_M(x,y)^m}{t}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right), & \text{if}\quad t\ge 1.\end{cases}\tag{UE_m}$$

热核估计（UE_2）（对于 $m>2$，分别为（UE_m））称为高斯上界估计（对于指数为 m 的情形，则称为次高斯上界估计）。(UE_2)也称为李-丘上界估计。若 M 满足（D），则（UE_2）等价于相对法贝尔-克拉恩不等式（更多详情见例如 [22, 第 15] 章）。而（UE_m）对于 $m>2$ 则在某些类分形流形上成立（见 [11]）。

其他作者已经研究了 (UE_m)的几种不同推广形式（例如，参见 [19, 8, 9]）。然而，在我们的语境中，我们需要引入一种新的推广形式。众所周知，(UE_m) 遗憾的是并不具有乘积稳定性，即，若 M_1 和 M_2 是满足 (UE_{m_1})和 (UE_{m_2}) 的连通完备非紧黎曼流形，且分别具有 $m_1\neq m_2$，那么一般而言，对于 $M_1\times M_2$ 上的任意 $m\ge 2$，(UE_m)并不成立（参见 [28, §2]）。另一方面，当我们研究乘积流形上的黎斯变换时，有时测地距离并不直接发挥作用，因此我们有

以定义其他距离（甚至拟距离），并在新的框架~中开展工作（见 [28]）。令 d 表示 M 上的Coifman-Weiss意义下的拟距离（见 [12]）。~此外，我们假设 d 诱导 M的拓扑。设

$$\widetilde{B}(x,R)=\{y\in M;\,\widetilde{d}(x,y)<R\},\qquad \widetilde{V}_M(x,R)=\mu_M\big(\widetilde{B}(x,R)\big),\qquad \forall\, x\in M,\,R>0.$$

~我们自然希望这一推广与 d相容。这些事实引出了如下定义。给定 $0<\theta\le 1$, 如果存在常数 $c\in(0,1)$，使得 M 满足关于拟距离 d、指数为 θ 的（所谓）广义~热核上界估计，则称其满足该条件。

$$p_t^M(x,y)\le c^{-1}\frac{1}{\widetilde{V}_M\left(x,\sqrt{t}\right)}\exp\left(-c\left(\frac{\widetilde{d}(x,y)^2}{t}\right)^{\theta}\right),\quad \forall\, t>0,\,x,y\in M. \tag{GUE_θ}$$

在下文中，为避免符号混淆，我们将 $(M,d,\mathrm{d}\mu_M)$ 的体积倍增性质
~ ~重写为（对某个常数 $D>0$）

$$\widetilde{V}_M(x,2R)\le \widetilde{D}\,\widetilde{V}_M(x,R),\qquad \forall\, x\in M,\,R>0. \tag{ND}$$

注意，(ND) 蕴含如下更强的性质：存在正常数D' 和 υ，使得

$$\widetilde{V}_M(x,R_1)\le D'\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^{\upsilon}\widetilde{V}_M(x,R_2),\qquad \forall\, x\in M,\,R_1,R_2>0. \tag{1.3}$$

此外，还需要对 $\nabla_M p_t^M(x,y)$ [1]的加权估计作出如下假设。给定 $1\le q\le 2$ 和 $0<\theta\le 1$，如果 M 满足关于 d、指数为 (q,θ) 的热核加权梯度~积分估计，则称其满足该条件；如果存在常数 $c,c'>0$，使得对所有 $t>0,\,y\in M$,

$$\int_M|\nabla_M p_t^M(x,y)|^q\exp\left(c\left(\frac{\widetilde{d}(x,y)^2}{t}\right)^{\theta}\right)\mathrm{d}\mu_M(x)\le\frac{c'}{t^{\frac{q}{2}}\widetilde{V}_M\left(y,\sqrt{t}\right)^{q-1}}. \tag{$WGE_{q,\theta}$}$$

~值得注意的是，在 $d=d_M$ 的情形下，$(WGE_{2,1})$可由(ND) 和(GUE_1)推出，参见例如[13]。 [11] 最近有人含蓄地指出，当~ ${}_m d=\max\{d_M,d_M^{\frac{2}{m}}\}$ 对某个 $m>2$ 成立时，那么$(WGE_{q,\frac{1}{m-1}})$ $(q\in(1,2))$是(ND) 和 $(GUE_{\frac{1}{m-1}})$的推论。但上述两个结论都基于以下事实：$|\nabla_M d_M|\le 1$,~，而这对于一般的拟距离 d 显然并不成立。合理的猜想是，一般而言，$(WGE_{q,\theta})$ 并不是 (ND)和(GUE_θ)的合取的直接推论。这就是我们将其作为一个独立假设列于此处的原因。第 2 节详细讨论了(GUE_θ) 和$(WGE_{q,\theta})$。

[1]此后，对于定义在 $M\times M$ 上的任意光滑函数 $u(x,y)$，我们采用简写记号$\nabla_M u(x,y):=\nabla_{M,x}u(x,y)$。

1.2 黎斯变换的若干密切相关的已知结果

在过去几十年中，数学界投入了大量精力研究各种流形上的(1.1)和 (1.2)。这里我们只提及几项较早的工作 [35, 29, 5, 6, 30,2, 1]。与此同时，人们试图在尽可能少的假设下建立 (1.1)，而体积倍增性质 (D) 是其中最重要的假设之一。由于 (D)蕴含 Hardy-Littlewood 极大算子的弱 (1, 1) 估计以及 L^1 函数的 Calder´on-Zygmund 分解，而这些都是调和分析中的便利工具。在这方面，T. Coulhon 和 X. T.Duong运用 [19]中发展起来的奇异积分理论，在 [13], 中取得了一项开创性成果。更确切地说，他们在 (D) 和(UE_2) 的条件下建立了(1.1)。近期进展可见于 [11] 和 [28]。更准确地说，在 [11], 中，已在(D)和 (UE_m) 的假设下证明了 (1.1)；在 [28]中，还在较弱的假设 (ND)、(GUE_θ) 和($WGE_{1,\ \theta}$) 下证明了该结论。

然而，许多流形并不满足体积倍增性质。例如，具有指数体积增长和正谱底的流形就是如此，本文将重点研究这类流形。与满足倍增性质的流形相比，这种情形下的主要问题是缺乏适当的奇异积分理论。尽管如此，在以下几种情形中，式 (1.1) 已经得到证明：非紧对称空间（见[2]）、调和 AN 群（见 [3]）、欧几里得空间上的带漂移的拉普拉斯算子（见 [27]），以及按照 [25], 的意义定义的实双曲空间上的带漂移的拉普拉斯算子；此外，还有 [26]背景下海森堡群上的带漂移次拉普拉斯算子。

1.3 实双曲空间

维数为 $n \geq 2$ 的实双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 是具有指数体积增长和正谱底的典型流形。下文采用上半空间表示（例如参见 [16, §5.7]）：即赋予度量 $g_{\mathbb{H}^n} = u_n^{-2}\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}u_i)^2$的 $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+$。相应的黎曼测度为 $\mathrm{d}\mu_{\mathbb{H}^n}(u) = u_n^{-n}\mathrm{d}u$，其中 $\mathrm{d}u$是勒贝格测度。在此表示下，$u=(u_1,\cdots,u_n)$ $v=(v_1,\cdots,v_n)$之间的测地距离 r 可计算为

$$r(u,v) = \operatorname{arccosh}\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(u_i-v_i)^2+u_n^2+v_n^2}{2u_nv_n}.$$

$f\in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ 的梯度记作

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} f = \left(u_n\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,u_n\frac{\partial f}{\partial u_n}\right),$$

而拉普拉斯-贝尔特拉米算子表示为

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} f = u_n^2\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} - (n-2)u_n\frac{\partial f}{\partial u_n}.$$

在黎曼几何中，众所周知，实双曲空间是齐性的，半径 R 的测地球的体积与其中心无关，并且

$$V_{\mathbb{H}^n}(u,R) \sim \begin{cases} R^n & \text{if} \quad 0 < R \le 1, \\ \mathrm{e}^{(n-1)R} & \text{if} \quad R > 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

因此， $\mathbb{H}^n$ 满足以下意义下的局部体积倍增性质：对于任意固定的 $R_0 > 0$，存在一个正常数 D_{R_0}，使得

$$V_{\mathbb{H}^n}(u,2R) \le D_{R_0} V_{\mathbb{H}^n}(u,R), \qquad \forall\, u \in \mathbb{H}^n,\, R \in (0,R_0). \tag{ND_{loc}}$$

至于无穷远处的行为，其体积增长至多为指数型，即存在正常数 C 和 c，使得

$$V_{\mathbb{H}^n}(u,\theta R) \le C\,\mathrm{e}^{c\,\theta}\, V_{\mathbb{H}^n}(u,R), \qquad \forall\, u \in \mathbb{H}^n,\, \theta > 1,\, R \in (0,1]. \tag{VE}$$

显然，性质（ND_{loc}）和（VE）可以在一般的（拟）度量测度空间上定义。

对于 R、】【iesz 变换在 $\mathbb{H}^n$ 上， $1 < p < +\infty$ 的 (1.2) 和 (1.1) 是已知结果 s.

1.4 主要结果

本文将研究一类乘积黎曼流形 $\mathcal{M}$ 。$\mathcal{M}$ 是通过取 $\mathbb{H}^n$ 与一个连通、完备、非紧~黎曼流形 M 的直积得到的，该流形配备了一个拟距离 d。此外，我们始终假设 M~满足 (ND)、(GUE_θ) 和 ($WGE_{q,\theta}$)（带有某些 $1 \le q \le 2$ 和 $0 < \theta \le 1$），关于 d。

众所周知，热核 $p_t^{\mathcal{M}}$在 $\mathcal{M}$ 上由下式给出（例如参见 [22]）

$$p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\, p_t^{M}(x,y), \quad \forall\, t > 0,\ \mathrm{X} = (u,x),\ \mathrm{Y} = (v,y) \in \mathbb{H}^n \times M. \tag{1.5}$$

对于我们的目的，拟距离 d 在 $\mathcal{M}$ 上的定义如下：

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \max\{r(u,v),\, \widetilde{d}(x,y)\}, \quad \mathrm{X} = (u,x),\ \mathrm{Y} = (v,y) \in \mathbb{H}^n \times M. \tag{1.6}$$

注意， d不同于在 $\mathcal{M}$ 上、微分几何中所考虑的测地距离。在下文中，为简便起见，如果距离函数中的点坐标显而易见，我们将省略它们。黎曼测度 $\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}$ 在 $\mathcal{M}$ 上满足 $\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}} = \mathrm{d}\mu_{\mathbb{H}^n} \otimes \mathrm{d}\mu_M$。那么，($ND_{\mathrm{loc}}$) 关于 $\mathbb{H}^n$ 和 (ND) 关于 M 表明，$(\mathcal{M}, d, \mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}})$ 满足 (ND_{loc})。至于 $f \in C^1(\mathcal{M})$ 的梯度，我们有 $\nabla_{\mathcal{M}} f = (\nabla_{\mathbb{H}^n} f, \nabla_M f)$。

这项工作的动机来自两个方面。首先，回顾所有关于谱底为正、具有指数体积增长的流形上的弱型 (1, 1) 结果（见 [2, 3, 27, 25, 26]），其中的方法都需要对热核的空间导数进行精细的逐点估计，而这类估计极具挑战性。因此，自然会想到，在证明 (1.1) 时能否避免使用这些估计。

其次，我们对直积流形上的黎斯变换感兴趣。我们在 [28] 中证明，如果 M 是直积流形 $M_1 \times \cdots \times M_n$，其中 M_i（$1 \le i \le n$）是满足（D）和（UE_{m_i}）（$m_i \ge 2$）的连通完备非紧黎曼流形，那么对于 $1 < p < 2$，(1.1)和(1.2)在 M 上仍然成立。因此，有理由提出这样的问题：相应的结果是否也适用于具有指数体积增长的直积流形情形，例如 $\mathbb{H}^n \times M$，其中 M 是满足（ND）、（GUE_θ）和（$WGE_{q,\theta}$）的连通完备非紧黎曼流形。本文旨在对这一问题给出肯定的回答。

现在我们可以如下陈述主要结果：

定理 1. 设 M 是一个连通完备非紧黎曼流形，关于拟距离 d满足$\sim$(ND)、(GUE_θ)和 ($WGE_{q,\theta}$)（其中 $1 \le q \le 2$、 $0 < \theta \le 1$）。$\sim$此外，假设对于任意给定的 $R_0 > 0$，带有诱导$\sim$拟距离 d 和测度 $\mathrm{d}\mu_M$ 的球 $B(x, R_0)$ 满足(ND)，且倍增常数与其中心无关。那么， $\mathbb{H}^n \times M$ 上的黎斯变换属于弱型 (1, 1)（因此 L^p 对于 $1 < p \le 2$有界）。

$\sim$ $\sim$注 1. 条件 ($B(x, R_0)$ d, $\mathrm{d}\mu_M$) 关于 $x \in M$一致地满足 (ND) 是一项技术性性质，仅在第 3 节的局部化论证中使用。当$\sim d = d_M$ 且 (ND_{loc}) 成立时，如 *[4,* 引理 4*1]* 所示，该条件自动满足（另见 *[24,* 引理 4.3*1]*）。此外，可以观察到，只要为直积流形配备 (1.6) 类型的拟距离，该性质在乘积下仍保持稳定。因此，在定理 1 的假设下，$\mathbb{H}^n \times M$ 具有相同的性质。

这里发展的技术也适用于研究 $\mathcal{M}$上的热极大算子，其定义如下：

$$\mathcal{H}(f)(\mathrm{X}) := \sup_{t>0} |\mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{M}}} f(\mathrm{X})|, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathcal{M},\, f \in L^p(\mathcal{M}),\, 1 \le p \le +\infty.$$

由于热半群 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{M}}})_{t>0}$ 是关于 $\mu_{\mathcal{M}}$对称的扩散半群， $\mathcal{H}$ 的 L^p有界性（$1 < p \le +\infty$）可见 [33, 第3节3] 或 [7, 引理 1.62]。在第5节中，我们建立 $\mathcal{H}$ 的弱型 (1,1) 性质如下：

定理 2. 设 M 是满足（ND）、（GUE_θ）的连通完备非紧黎曼流形，其中所依据的拟距离为 d（且 $0 < \theta \le 1$）。那么， $\mathbb{H}^n \times M$ 上的热极大算子是弱型 (1, 1) 的（因此 L^p 对 $1 < p \le +\infty$有界）。

关于指数体积增长流形背景下 $\mathcal{H}$ 的弱型 (1, 1) 有界性的更多结果，请读者参见 [2, 3, 15, 27, 25, 26]。

第 6 节将上述结果推广到一大类具有指数体积增长的直积流形。作为副产品，我们推广了 [27] 中的主要结果，并给出了一个简洁得多的证明。

2 预备知识

2.1 关于 (GUE_θ) 和 $(WGE_{q,\ \theta})$ 的一些基本事实

为说明 (GUE_θ) 和 $(WGE_{q,\ \theta})$，先回顾一下：若 M满足 (D) 和 (UE_2)，则 (GUE_1) 和 $(WGE_{2,\ 1})$ 关于测地距离成立（例如参见 [13]或 [20]）。

接下来，假设 M 满足体积倍增性质，并且具有指数为 $m>2$ 的次高斯热核上界估计。令

$$\widetilde{d}(x,y)=\max\{d_M(x,y),\, d_M(x,y)^{\frac{m}{2}}\},\quad \forall\, x,y\in M.$$

~ ~容易验证，d在 M上定义了一个拟距离，并且（M，d，$\mathrm{d}\mu_M$）满足（ND）、（$GUE_{\frac{1}{m-1}}$）。由 [11,引理 2.2]可知，对于所有$1<q<2$，关于 d，均可使用 $(WGE_{q,\ \frac{1}{m-1}})$。

在 M 上固定一个拟距离 $\widetilde{d}$。注意，给定 $0<\theta'<\theta$，对所有 $s\geq 0$，$s^{\theta'}\leq 1+s^{\theta}$ 都成立。因此

$$(GUE_\theta)\Longrightarrow(GUE_{\theta'}),\quad (WGE_{q,\theta})\Longrightarrow(WGE_{q,\theta'}). \tag{2.1}$$

现在假设 (ND) 和 (GUE_θ) 有效。标准的环带分解法意味着

$$\begin{aligned}\int_M \exp\left(-\gamma\left(\frac{\widetilde{d}(x,y)^2}{t}\right)^{\theta}\right)\mathrm{d}\mu_M(x)&=\int_{\widetilde{B}(y,\sqrt{t})}+\sum_{i=0}^{+\infty}\int_{2^i\sqrt{t}\leq\widetilde{d}(y,\,x)<2^{i+1}\sqrt{t}}\\&\leq C(\gamma,\theta)\,\widetilde{V}_M(y,\sqrt{t}),\quad \forall\, t>0,\, y\in M,\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中最后一行使用了 (1.3)。结合 H¨older 不等式，我们得到以下关系

$$(WGE_{q,\theta})\Longrightarrow(WGE_{q',\theta}),\quad \forall\, 1\leq q'<q. \tag{2.3}$$

为结束本节，我们指出，(GUE_θ)和 $(WGE_{q,\theta})$ 在以下意义下关于直积具有不变性：

命题 3.假设 M_i $(i=1,2)$ 是满足 (ND)、(GUE_{θ_i})和 $(WGE_{q_i,\ \theta_i})$（其中 $1\leq q_i\leq 2$、$0<\theta_i\leq 1$）的连通完备非紧黎曼流形，~关于拟距离 d_i。令 $\theta=\min\{\theta_1,\theta_2\}$、$q=\min\{q_1,q_2\}$ 且

$$\widetilde{d}(x,y)=\max_{i=1,2}\{\widetilde{d}_i(x_i,y_i)\},\quad \forall\, x=(x_1,x_2),\, y=(y_1,y_2)\in M_1\times M_2.$$

那么在直积流形 $M=M_1\times M_2$ 上，我们有 (ND)、(GUE_θ)和 $(WGE_{q,\theta})$~，关于拟距离 d。

证明。这个证明很容易。只需利用乘积流形的性质和（2.2）即可。因此略去证明。 □

注 2. 如果 M_i 是一个紧致黎曼流形或具有多项式增长的李群，结论仍然成立。

2.2 $\mathbb{H}^n$的其他一些性质

在这一简短章节中，我们汇总 $\mathbb{H}^n$ 的基本性质，这些性质将在全文中使用。我们首先给出热核及其梯度的一些估计，这些估计可见于 [16, 18]:

热核 $p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)$ 仅取决于 t 和 $r = r(u,v)$。更确切地说，已知对于所有 $r \geq 0$ 和 $t > 0$,

$$p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v) = p_t^{\mathbb{H}^n}(r) \sim t^{-\frac{n}{2}} (1+r+t)^{\frac{n-3}{2}} (1+r) \exp\left(-\frac{r^2}{4t} - \frac{n-1}{2} r - \frac{(n-1)^2}{4} t \right). \tag{2.4}$$

特别地，将其与 (1.4) 结合，$p_t^{\mathbb{H}^n}$ 具有以下小时间上界:

$$p_t^{\mathbb{H}^n}(u,u) \leq \frac{C}{V_{\mathbb{H}^n}(u,\sqrt{t})}, \quad \forall\, u \in \mathbb{H}^n,\ 0 < t \leq 1, \tag{2.5}$$

以及以下局部估计：给定 $r_0 > 0$，对于所有满足 $r = r(u,v) \leq r_0$ 的 u、$v \in \mathbb{H}^n$，

$$p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v) \lesssim_{r_0} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{Ct} \right), \quad \forall\, t > 0. \tag{2.6}$$

As 对于 $p_t^{\mathbb{H}^n}$ 的空间导数，已知当 u、$v \in \mathbb{H}^n$ 和 $t > 0$ 时，

$$\left| \nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v) \right| \sim t^{-\frac{n+2}{2}} (1+r+t)^{\frac{n-1}{2}} r \exp\left(-\frac{r^2}{4t} - \frac{n-1}{2} r - \frac{(n-1)^2}{4} t \right). \tag{2.7}$$

我们将使用以下引理，该引理断言，在 $\mathbb{H}^n$ 上，核在无穷远处的特定衰减蕴含相应积分算子的弱型 (1,1) 性质。其证明见 [36]。

引理 4. 定义在 $\mathbb{H}^n$ 上的积分算子，其核为

$$S(u,v) = \mathrm{e}^{-(n-1)\, r}$$

是弱型 (1, 1)。

2.3 乘积测度空间上次线性算子的弱型 (1,1)

现在我们给出一个简单的弱型 (1, 1) 判据，它在我们的证明中发挥作用。

引理 5. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 为测度空间。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是定义在 $L^1(X,\mu)$ 和 $L^1(Y,\nu)$ 上的次线性算子，其形式为

$$\mathcal{A}(f_1)(x_1) = \int_X a(x_1,y_1) |f_1(y_1)|\, \mathrm{d}\mu(y_1) \quad \textit{and} \quad \mathcal{B}(f_2)(x_2) = \int_Y b(x_2,y_2) |f_2(y_2)|\, \mathrm{d}\nu(y_2),$$

其中 a 和 b 为非负可测函数。假设 $\|\mathcal{A}\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \le C$，即有

$$\mu(\{x_1 \in X; |\mathcal{A}(f_1)(x_1)| > \lambda\}) \le C\,\frac{\|f_1\|_1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0,\ f_1 \in L^1(X,\mu).$$

此外，假设存在一个常数 $M > 0$，使得

$$\sup_{y_2\in Y} \int_Y b(x_2, y_2)\,\mathrm{d}\nu(x_2) \le M.$$

那么，对于以下张量积型算子 $\mathcal{T}$，其定义在 $L^1(X\times Y, \mu\otimes\nu)$ 上，

$$\mathcal{T}(f)(x_1,x_2) = \iint_{X\times Y} a(x_1,y_1)\,b(x_2,y_2)\,|f(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\nu(y_2),$$

我们有 $\|\mathcal{T}\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \le C\,M$。

证明。给定 $f \in L^1(X\times Y, \mu\otimes\nu)$，注意到 $\int_Y b(x_2,y_2)\ |f(\cdot,y_2)|\,\mathrm{d}\nu(y_2) \in L^1(X)$对几乎处处的-$\nu$ $x_2 \in Y$成立。因此， $\mathcal{A}$ 的弱型 (1, 1) 估计意味着

$$\mu(\{x_1 \in X; |\mathcal{T}(f)(x_1,x_2)| > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda}\int_X \left(\int_Y b(x_2,y_2)\,|f(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}\nu(y_2)\right)\mathrm{d}\mu(y_1)$$

对几乎处处的-ν $x_2 \in Y$成立。结合 Fubini 定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&(\mu\otimes\nu)(\{(x_1,x_2)\in X\times Y;\ |\mathcal{T}(f)(x_1,x_2)| > \lambda\}) \\
&= \int_Y \mu(\{x_1\in X;\ |\mathcal{T}(f)(x_1,x_2)| > \lambda\})\,\mathrm{d}\nu(x_2) \\
&\le \frac{C}{\lambda}\int_Y \left(\int_X \left(\int_Y b(x_2,y_2)\,|f(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}\nu(y_2)\right)\mathrm{d}\mu(y_1)\right)\mathrm{d}\nu(x_2).
\end{aligned}$$

然后改变　　改变积分次序，根据 b的假设，即可证明此引理。 □

3 黎斯变换的标准局部化方法

在本节中，我们将研究黎斯变换 $\mathcal{R} = \nabla_{\mathcal{M}}(-\Delta_{\mathcal{M}})^{-\frac{1}{2}}$ 的局部部分。首先，我们将 $\mathcal{R}$ 表示为局部部分 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 和无穷远部分$\mathcal{R}_\infty$ 的求和。这一步遵循标准方法，已被其他作者广泛采用。在第 1.2 节末尾提到的先前工作中，Calder´on-Zygmund 理论已被成功应用于分析 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$，这主要得益于 $|\nabla p_t^{\mathcal{M}}|$ 和 $|\nabla\nabla p_t^{\mathcal{M}}|$的逐点上界。然而，在我们的情形下，我们没有 $|\nabla_{\mathcal{M}} p_t^{\mathcal{M}}|$的（完整）逐点上界，因此采用了 [13] 中发展的方法。

3.1 一般加权黎曼流形上 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 的弱型（1,1）

局部化过程可以在一般的非紧致完备加权黎曼流形 $\mathcal{N}$ 上进行，按照 [22] 的意义，该流形满足关于拟距离 ρ 的 (ND_{loc})。根据 ρ 的定义，存在常数 $\omega \geq 1$ 使得：

$$\rho(\mathrm{x},\mathrm{z}) \leq \omega\,(\rho(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \rho(\mathrm{y},\mathrm{z})), \qquad \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

选取 $\frac{1}{4\omega^2}$-极大分离子集 $\mathcal{N}$，我们得到一个可数球族$\{B^j = B(\mathrm{x}^j, \frac{1}{2\omega});\, \mathrm{x}^j \in \mathcal{N},\ j \in \mathbb{N}\}$。由（$ND_{\mathrm{loc}}$）可知，该族满足以下性质：

(a) $\mathcal{N} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^j$;

(b) 球 $B(\mathrm{x}^j, \frac{1}{4\omega^2})$ 两两不相交;

(c)存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{N}$ 中的每个点至多包含在 N 个球 $(2\omega^2+\omega)B^j := B(\mathrm{x}^j, \omega + \frac{1}{2})$。

固定一个 C^∞ 单位分解（φ_j）$_{j\in\mathbb{N}}$ 使得 supp $\varphi_j \subseteq B^j$。给定任意 $1 \leq p < +\infty$，单位分解的定义和性质 (c) 蕴含 $\frac{1}{N^p} \leq \sum_j \varphi_j^p \leq 1$。因此对于所有 $f \in C_0^\infty$（$\mathcal{N}$），

$$\|f\|_p^p \sim \sum_j \|f\varphi_j\|_p^p. \tag{3.2}$$

对于 $f \in C_0^\infty(\mathcal{N})$，我们记作

$$\mathcal{R}(f) = \sum_j \chi_{(2\omega^2+\omega)B^j}\,\mathcal{R}(f\varphi_j) + \sum_j \left(1 - \chi_{(2\omega^2+\omega)B^j}\right)\mathcal{R}(f\varphi_j). \tag{3.3}$$

设 $R(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \nabla_{\mathcal{N}} p_t^{\mathcal{N}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\, \mathrm{d}\frac{t}{\sqrt{t}}$，它是黎斯变换的核。根据构造，对于 $\mathrm{x} \in \mathcal{N}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_j \left(1 - \chi_{(2\omega^2+\omega)B^j}\right)\mathcal{R}(f\varphi_j)(\mathrm{x})\right| &\leq \sum_j \int_{\{\mathrm{y};\,\rho>1\}} |R(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,|f(\mathrm{y})|\,\varphi_j(\mathrm{y})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{y}) \\ &\leq \int_{\{\mathrm{y};\,\rho>1\}} |R(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,|f(\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{y}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们定义黎斯变换的局部部分

$$\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(f)(\mathrm{x}) := \sum_j \chi_{(2\omega^2+\omega)B^j}\,\mathcal{R}(f\varphi_j)(\mathrm{x}), \tag{3.5}$$

以及无穷远部分

$$\mathcal{R}_\infty(f)(\mathrm{x}) := \int_{\{\mathrm{y};\,\rho>1\}} |R(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,|f(\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{y}). \tag{3.6}$$

因此，为了证明 $\mathcal{N}$，只需证明 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 和 $\mathcal{R}_\infty$ 都是弱型 (1, 1)。本节将重点讨论 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$。

关于进一步的发展，我们在此讨论一个关于 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$弱型(1,1)的相当一般的定理。事实上，这是 [13, 定理 1。2] 的类比（另见 [28, 命题 3]）。

定理 6. 设 $\mathcal{N}$ 是一个连通、完备、非紧的加权黎曼流形，它相对于拟距离 ρ 满足 (ND_{loc})。此外，假设对于任意给定的 R_0 >0，赋予诱导拟距离 ρ 和测度 $\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}$ 的球 B (x R_0) 满足 (ND)，且倍增常数与球心无关。假设以下小时间热核上界成立：对于某个 $\theta \in (0,1]$, ，存在一个常数$c \in$ (0, 1)，使得

$$p_t^{\mathcal{N}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \le c^{-1}\frac{1}{V_{\mathcal{N}}\left(\mathrm{x},\sqrt{t}\right)}\exp\left(-c\left(\frac{\rho(\mathrm{x},\mathrm{y})^2}{t}\right)^{\theta}\right), \quad \forall\, 0<t\le 1,\, \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathcal{N}. \tag{GUE'_θ}$$

此外，假设存在某个常数 $a \ge \frac{1}{2}(2\omega^2+\omega+1)$，其中 $\omega \ge 1$ 是 (3.1)中的常数，以及一个有界函数 F：$[0,+\infty) \to (0,+\infty)$，其满足

$$\int_0^1 F\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} < +\infty,$$

使得对于任意 $0<t\le 1$、 $s>0$ 和 y $\in \mathcal{N}$，

$$\int_{\{\mathrm{x};\,\sqrt{t}\le\rho\le a\}} |\nabla_{\mathcal{N}} p_s^{\mathcal{N}}(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x}) \le \frac{1}{\sqrt{s}}F\left(\frac{t}{s}\right), \tag{WGE'_1}$$

此外 我们假设 $\mathcal{R}_\infty$ 是弱型 (1, 1)。那么 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 是弱型 (1, 1) .

备注 3. 在开始证明之前，我们先对要求$a \ge \frac{1}{2}(2\omega^2+\omega+1)$作几点说明。首先，这一要求纯粹是技术性的，可以放宽为 $a>0$。要看出这一点，只需适当修改局部化过程开始时所选取的数值常数（涉及构造中所使用的球的半径以及 $\mathcal{R}_\infty$的定义），以适应 a 的取值即可。然而，证明的其余论证不变。其次，在具体情形下，这一要求通常并不重要。例如，在稍后将要考虑的乘积流形上，我们甚至可以如下达到(WGE'_1) 的更强版本。对于任意固定的 $a>0$，存在一个有界函数 F_a：$[0,+\infty) \to (0,+\infty)$，其依赖于 a，满足

$$\int_0^1 F_a\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} < +\infty,$$

使得对于任意 $0<t\le 1$、 $s>0$ 和 y $\in \mathcal{N}$，

$$\int_{\{\mathrm{x};\,\sqrt{t}\le\rho\le a\}} |\nabla_{\mathcal{N}} p_s^{\mathcal{N}}(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x}) \le \frac{1}{\sqrt{s}}F_a\left(\frac{t}{s}\right).$$

证明。这个证明实际上是对 [13, §4] 中所采用论证的直接改编。为清晰起见，我们不妨假设 $\omega = 1$ （一般情形 $\omega \geq 1$ 也可相应处理，但会带来一些记号上的不便）。

鉴于性质 (c)，对于任意固定的 $\mathrm{x} \in \mathcal{N}$，求和 $\sum_j \chi_{3B^j}\, \mathcal{R}(f\varphi_j)(\mathrm{x})$ 中至多有 N 个非零项。因此，对于 $\lambda > 0$,

$$\mu_{\mathcal{N}}\left(\{\mathrm{x} \in \mathcal{N};\, |\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(f)(\mathrm{x})| > \lambda\}\right) = \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in \mathcal{N};\, |\sum_j \chi_{3B^j} \mathcal{R}(f\varphi_j)(\mathrm{x})| > \lambda\})$$
$$\leq \sum_j \mu_{\mathcal{N}}\left(\left\{\mathrm{x} \in 3B^j;\, |\mathcal{R}(f\varphi_j)(\mathrm{x})| > \lambda/N\right\}\right). \qquad (3.7)$$

根据 $p = 1$ 的 (3.2)，只需证明存在一个普适常数$c > 0$，使得对于所有 $\lambda > 0$ 和 $j \in \mathbb{N}$

$$\mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B^j;\, |\mathcal{R}(f)(\mathrm{x})| > \lambda\}) \leq c\, \frac{\|f\|_1}{\lambda}, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(B^j). \qquad (3.8)$$

根据假设，每个 B^j 都满足 (ND)，且常数与 j 无关。从现在起，我们省略 B^j 的下标。我们可以应用经典的 Calder´on-Zygmund 分解。存在一个常数 $\kappa > 0$ （仅取决于 (ND) 中的常数，因此与 j 无关），使得给定 $f \in C_0^\infty(B)$ 和 $\lambda > \frac{\|f\|_1}{\mu_{\mathcal{M}}\, B()}$，我们可以将 f 分解为

$$f = g + b = g + \sum_i b_i,$$

并找到一个球列 $B_i = B(\mathrm{x}_i, r_i) \subseteq B$，满足

(i) $\|g\|_2^2 \leq \kappa\, \lambda\, \|f\|_1$; (ii) $b_i \subseteq B_i$ 的支集和 $\|b_i\|_1 \leq \kappa\, \lambda\, \mu_{\mathcal{N}}(B_i)$;

(iii) $\sum_i \mu_{\mathcal{N}}(2B_i) \leq \kappa\, \lambda^{-1} \|f\|_1$.

显然，$r_i \leq \mathrm{diam}(B) \leq 1$。

注意到

$$\mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}(f)(\mathrm{x})| > \lambda\})$$
$$\leq \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}(g)(\mathrm{x})| > \lambda/2\}) + \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}(b)(\mathrm{x})| > \lambda/2\}). \qquad (3.9)$$

结合 L^2 的有界性 $\mathcal{R}$ 和 (i)，第一项很容易估计。因此我们只需处理第二项。我们写作

$$\mathcal{R}(b) = \sum_i \mathcal{R}(\chi_{5B}\, \mathrm{e}^{t_i \Delta_{\mathcal{N}}} b_i) + \mathcal{R}\big((1 - \chi_{5B}) \sum_i \mathrm{e}^{t_i \Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big) + \sum_i \mathcal{R}((I - \mathrm{e}^{t_i \Delta_{\mathcal{N}}})\, b_i), \quad (3.10)$$

其中 $t_i = r_i^2$。于是

$$\mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}(b)(\mathrm{x})| > \lambda/2\}) \le \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}\big(\sum_i \chi_{5B}\, \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big)(\mathrm{x})| > \lambda/6\})$$
$$+\ \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}\big((1-\chi_{5B})\sum_i \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big)(\mathrm{x})| > \lambda/6\})$$
$$+\ \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\sum_i \mathcal{R}((I-\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}})\, b_i)(\mathrm{x})| > \lambda/6\}). \tag{3.11}$$

由我们的假设和 (ND) 可知，中心 Hardy-Littlewood 极大算子在 $L^2(5B)$ 上有界。另一方面，根据构造，每个 $t_i \le 1$。因此我们可以应用 (GUE_θ')。利用 [13, §3]，中采用的对偶方法，我们得到

$$\big\|\sum_i \chi_{5B}\, \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big\|_2^2 \lesssim \lambda\, \|f\|_1.$$

因此，$\mathcal{R}$ 的 L^2 有界性和切比雪夫不等式推出

$$\mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\sum_i \mathcal{R}(\chi_{5B}\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i)(\mathrm{x})| > \lambda/6\}) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{3.12}$$

至于 $\mathcal{R}\big((1-\chi_{5B})\sum_i \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big)$，我们将使用 $\mathcal{R}_\infty$ 对其进行控制。事实上，对于 $\mathrm{x} \in 3B$，

$$\Big|\mathcal{R}\big((1-\chi_{5B})\sum_i \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big)(\mathrm{x})\Big| \le \mathcal{R}_\infty\big((1-\chi_{5B})\sum_i \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i\big)(\mathrm{x}) \le \mathcal{R}_\infty\big(\sum_i |\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i|\big)(\mathrm{x}).$$

将此与 $\mathcal{R}_\infty$ 的弱型 (1, 1) 估计结合起来，并利用热半群的压缩性 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{N}}})_{t>0}$，我们得到

$$\mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\mathcal{R}((1-\chi_{5B})\sum_i \mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}} b_i)(\mathrm{x})| > \lambda/6\}) \lesssim \frac{\sum_i \|b_i\|_1}{\lambda} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}, \tag{3.13}$$

在最后一个不等式中，我们用到了性质 (ii) 和 (iii)。

因此，由 (3.9)-(3.13)，要得到 (3.8)，还需证明以下估计：

$$\mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B;\, |\sum_i \mathcal{R}((I-\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}})\, b_i)(\mathrm{x})| > \lambda/6\}) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda},$$

这可以用标准方法证明。更确切地说，上述不等式的左端可由以下表达式控制

$$\mu_{\mathcal{N}}(\cup_i 2B_i) + \mu_{\mathcal{N}}(\{\mathrm{x} \in 3B \setminus (\cup_i 2B_i);\, |\sum_i \mathcal{R}((I-\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}})\, b_i)(\mathrm{x})| > \lambda/6\}).$$

再次利用性质 (ii) 和 (iii)，通过切比雪夫不等式，只需证明：

$$\int_{3B\setminus 2B_i} |\mathcal{R}((I-\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}})\,b_i)(\mathrm{x})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x}) \lesssim \|b_i\|_1, \qquad \forall\, i. \tag{3.14}$$

用 k_t 表示 $\mathcal{R}(I-\mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{N}}})$ 的核。由于 $\operatorname{supp}\ b_i \subseteq B_i \subseteq B$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{3B\setminus 2B_i} |\mathcal{R}((I-\mathrm{e}^{t_i\Delta_{\mathcal{N}}})\,b_i)(\mathrm{x})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x})\\
\le&\int_{3B\setminus 2B_i}\left(\int_{B_i}|k_{t_i}(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,|b_i(\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{y})\right)\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x})\\
\le&\int_{B_i}\left(\int_{\{\mathrm{x};\,\sqrt{t_i}\le\rho\le 2\}}|k_{t_i}(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x})\right)|b_i(\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{y}),
\end{aligned}$$

其中

$$k_t(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \nabla_{\mathcal{N}} p_s^{\mathcal{N}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\left(\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{\chi_{\{s>t\}}}{\sqrt{s-t}}\right)\mathrm{d}s.$$

将 (WGE_1') 与上面的等式结合，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\{\mathrm{x};\,\sqrt{t}\le\rho\le 2\}}|k_t(\mathrm{x},\mathrm{y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{N}}(\mathrm{x}) &\lesssim \int_0^\infty\left|\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{\chi_{\{s>t\}}}{\sqrt{s-t}}\right|F\left(\frac{t}{s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}}\\
&\lesssim \int_0^t F\left(\frac{t}{s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{s}+\int_t^\infty\left|\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{\chi_{\{s>t\}}}{\sqrt{s-t}}\right|F\left(\frac{t}{s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}}.
\end{aligned}$$

根据我们对 F 的假设，上述积分关于 $t>0$ 一致有上界。因此，(3.14) 得证。定理 6 的证明至此结束。 □

3.2 定理 6 的推论

作为定理 6 的一个应用，本小节将证明定义在 $\mathcal{M}=\mathbb{H}^n\times M$ 上的 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 的弱型 (1, 1) 有界性。事实上，我们可以将这一结果推广到具有指数体积增长的一般直积流形。设 $\mathcal{E}$ 是一个连通、完备、非紧的加权黎曼流形。为方便起见，我们略微滥用记号，用 r 表示 $\mathcal{E}$ 上的测地距离。

推论 7. 设 M 是连通、完备、非紧的加权黎曼流形，满足 (ND)、(GUE_θ) 和 $(\widetilde{WGE}_{q,\theta})$（关于 $1\le q\le 2$、$0<\theta\le 1$），其中采用 $\widetilde{\ }$ 拟距离 d。此外，假设对于任意给定的 $R_0>0$，球 $B(x,R_0)$ 配备诱导的拟距离 d 和测度 $\mathrm{d}\mu_M$ 后满足 (ND)，且其倍增常数与球心无关。假设 $\mathcal{E}$ 满足 (ND_{loc}) 和 (VE)，其热核 $p_t^{\mathcal{E}}$ 具有小时间上界

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,u)\le\frac{C}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})},\quad \forall\, u\in\mathcal{E},\ 0<t\le 1.$$

此外，我们假设 $\mathcal{R}_\infty$ 定义在 $\mathcal{E}\times M$ 上是弱型(1, 1)。那么 $\mathcal{R}_{\rm loc}$定义在 $\mathcal{E}\times M$ 上是弱型(1, 1)。

证明。我们将 $\mathcal{E}\times M$ 简记为 $\mathcal{W}$。在 $\mathcal{W}$ 上定义的拟距离 d 也由（1.6）给出。根据定理6，只需验证 $\mathcal{W}$ 上的条件（GUE'_θ）和（WGE'_1），因为考虑到注 1，其余假设显然成立。

我们从（GUE'_θ）开始。由 [21, 定理 1。1]（另见 [22, 第 16]章）可知，$p_t^{\mathcal{E}}$和 $\mathcal{E}$ 的（$ND_{\rm loc}$）的小时间上界蕴含以下非对角估计：给定 $\gamma>4$,

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\lesssim_\gamma \frac{1}{\sqrt{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})V_{\mathcal{E}}(v,\sqrt{t})}}\exp\left(-\frac{r^2}{\gamma t}\right),\qquad \forall\, t\in(0,1],\ u,v\in\mathcal{E}.$$

并且显然，由 (VE),

$$V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})\le V_{\mathcal{E}}(v,\sqrt{t}+r)\le C\,\mathrm{e}^{c\frac{r}{\sqrt{t}}}V_{\mathcal{E}}(v,\sqrt{t}),\quad \forall\, t\in(0,1],\ u,v\in\mathcal{E}.$$

因此，我们得到以下关于 $p_t^{\mathcal{E}}$ 的经典小时间上界：给定 $\gamma>4$，我们有

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\lesssim_\gamma \frac{1}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})}\exp\left(-\frac{r^2}{\gamma t}\right),\qquad \forall\, t\in(0,1],\ u,v\in\mathcal{E}. \tag{3.15}$$

此外 er，根据对所有 $s\ge 0$ 和 $0<\theta\le 1$ 都成立的平凡不等式 $s^\theta\le 1+s$，我们得到

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\lesssim_\gamma \frac{1}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{r^2}{t}\right)^\theta\right),\qquad \forall\, t\in(0,1],\ u,v\in\mathcal{E}. \tag{3.16}$$

现在，对于 $t\in(0,1]$ 和 $\mathrm{X}=(u,x)$、$\mathrm{Y}=(v,y)\in\mathcal{E}\times M=\mathcal{W}$，直积流形上热核的基本性质表明 $p_t^{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\,p_t^M(x,y)$。结合 (3.16)，关于 M 的假设 (GUE_θ) 意味着存在一个常数 $c\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned} p_t^{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\lesssim \frac{1}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})\widetilde{V}_M(x,\sqrt{t})}\exp\left\{-c\left[\left(\frac{r(u,v)^2}{t}\right)^\theta+\left(\frac{\widetilde{d}(x,y)^2}{t}\right)^\theta\right]\right\}\\ &\lesssim \frac{1}{V_{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\sqrt{t})}\exp\left(-c\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{Y})^2}{t}\right)^\theta\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中，最后一行用到了以下显而易见的观察：

$$\{\mathrm{Y};\, d(\mathrm{X},\mathrm{Y})<s\}=\{v;\, r(u,v)<s\}\times\{y;\,\widetilde{d}(x,y)<s\},\qquad \forall\, s>0.$$

换言之，(GUE'_θ) 在 $\mathcal{W}$ 上成立。

我们转向（WGE'_1）。事实上，定理 6中的要求 $a\ge\frac{1}{2}(2\omega^2+\omega+1)$只是一个技术性假设。下面的证明对我们的任意给定 $a>0$ 也同样适用

情形（见注 3）。由于如果 $t > a^2$，则 (WGE_1') 显然成立，以下我们假设$t \le a^2$。回顾 d 的定义，我们对所有 $t \in [0,1]$ 以及 $\mathrm{Y} =$ 得到$(v,y) \in \mathcal{W}$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{\mathrm{X};\,\sqrt{t}\le d\le a\}} |\nabla_{\mathcal{W}} p_s^{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{W}}(\mathrm{X}) \\
&\le \int_{\left\{\mathrm{X};\,\sqrt{t}\le r\le a,\ \widetilde{d}\le a\right\}} |\nabla_{\mathcal{W}} p_s^{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{W}}(\mathrm{X}) + \int_{\left\{\mathrm{X};\,r\le a,\ \sqrt{t}\le\widetilde{d}\le a\right\}} |\nabla_{\mathcal{W}} p_s^{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{W}}(\mathrm{X}) \\
&\le \int_{\{u;\,\sqrt{t}\le r\le a\}} p_s^{\mathcal{E}}\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}} \int_{\{x;\,\widetilde{d}\le a\}} |\nabla_M p_s^M|\mathrm{d}\mu_M + \int_{\{u;\,\sqrt{t}\le r\le a\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_s^{\mathcal{E}}|\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}} \int_{\{x;\,\widetilde{d}\le a\}} p_s^M \mathrm{d}\mu_M \\
&+ \int_{\{u;\,r\le a\}} p_s^{\mathcal{E}}\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}} \int_{\{x;\,\sqrt{t}\le\widetilde{d}\le a\}} |\nabla_M p_s^M|\mathrm{d}\mu_M + \int_{\{u;\,r\le a\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_s^{\mathcal{E}}|\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}} \int_{\{x;\,\sqrt{t}\le\widetilde{d}\le a\}} p_s^M \mathrm{d}\mu_M.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

这个不等式意味着，为了验证（WGE_1'）在 $\mathcal{W}$ 上成立，我们只需分别估计在 $\mathcal{E}$ 和 M 上的积分。我们首先考虑涉及 $\mathcal{E}$的项。我们的证明主要基于加权 L^2-范数估计，这已经成为热核理论中的标准工具。关于更多细节，我们请读者参阅专著 [22] 。给定 $D > 2$，我们定义热核及其梯度的加权积分如下：对于$s > 0$ 和 $v \in \mathcal{E}$,

$$
E(v,s) := \int_{\mathcal{E}} p_s^{\mathcal{E}}(u,v)^2 \exp\left(\frac{r^2}{Ds}\right)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u),
$$

and

$$
E_1(v,s) := \int_{\mathcal{E}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_s^{\mathcal{E}}(u,v)|^2 \exp\left(\frac{r^2}{Ds}\right)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u).
$$

回想一下，关于热核的一个基本事实是，对于任意给定的 $v \in \mathcal{E}$， $p_s^{\mathcal{E}}(v,v)$关于 $s > 0$是递减的。根据 [22, 定理 16.3] （另见 [21, 定理2.1]），由 $p_t^{\mathcal{E}}$ 的小时间上界和（ND_{loc}）可得

$$
E(v,s) \lesssim \frac{1}{V_{\mathcal{E}}(v,\sqrt{s})}, \qquad \forall\, s \in (0,1],\ v \in \mathcal{E}. \tag{3.19}
$$

此外，令 $\lambda_1 \ge 0$ 表示 $(-\Delta_{\mathcal{E}})$的谱底。结合 (3.19) 与积分最大值原理（例如参见 [22, 定理12.1]），我们得到（另见[22, (15.25)]）

$$
E(v,s) \lesssim \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda_1 s}}{V_{\mathcal{E}}(v,\min\{\sqrt{s},1\})}, \qquad \forall\, s > 0,\ v \in \mathcal{E}. \tag{3.20}
$$

那么， [20, 定理 1.1] （注意，其中的主要结果和证明在加权黎曼流形的情形下仍然成立，无需修改）意味着

$$
E_1(v,s) \lesssim \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda_1 s}}{sV_{\mathcal{E}}(v,\min\{\sqrt{s},1\})}, \qquad \forall\, s > 0,\ v \in \mathcal{E}. \tag{3.21}
$$

另一方面，由环带分解法可知，(VE)意味着

$$\int_{\{u;\,\sqrt{t}\le r\le a\}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{Ds}}\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) \lesssim_a \mathrm{e}^{-\frac{t}{2Ds}} V_{\mathcal{E}}(v,\min\{\sqrt{s},1\}), \qquad \forall\, s>0,\ t\in[0,1]. \tag{3.22}$$

此处以及下文的 (3.23)–(3.24) 中，隐含常数可能随 a 呈指数增长。结合 (3.20) 和 (3.21)，由柯西-施瓦茨不等式可得，对所有 $s>0$、$t\in[0,1]$ 和 $v\in\mathcal{E}$，

$$\int_{\{u;\,\sqrt{t}\le r\le a\}} p_s^{\mathcal{E}}(u,v)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) \lesssim_a \exp\left(-\frac{t}{4Ds}-\lambda_1 s\right), \tag{3.23}$$

and

$$\int_{\{u;\,\sqrt{t}\le r\le a\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_s^{\mathcal{E}}(u,v)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) \lesssim_a \frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{t}{4Ds}-\lambda_1 s\right). \tag{3.24}$$

接下来，我们分析 (3.18) 中涉及 M 的各项，这要简单得多。直接计算可知，存在 $c>0$，使得对所有 $s>0$、$t\in[0,1]$ 和 $y\in M$，

$$\int_{\{x;\,\sqrt{t}\le \widetilde{d}\le a\}} p_s^{M}(x,y)\,\mathrm{d}\mu_M(x) \lesssim \exp\left(-c\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta}\right), \tag{3.25}$$

and

$$\int_{\{x;\,\sqrt{t}\le \widetilde{d}\le a\}} |\nabla_M p_s^{M}(x,y)|\,\mathrm{d}\mu_M(x) \lesssim \frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-c\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta}\right). \tag{3.26}$$

总之，综合 (3.23)–(3.26)，由 (3.18) 可知，对于任意 $a>0$ 和 $F_a(h)=c_a^{-1}\mathrm{e}^{-c_a h^{\theta}}$，$(WGE_1')$ 在 $\mathcal{W}$ 上成立，由此完成证明。 □

注4. 加权范数 $E(\cdot,t)$ 是建立热核逐点上界的重要工具，其依据是以下不等式（见 *[20]*）

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\le \sqrt{E(u,t/2)E(v,t/2)}\exp\left(-\frac{r^2}{2Dt}\right).$$

将其与 (3.20) 和 (ND_{loc}) 结合，热核 $p_t^{\mathcal{E}}$ 满足以下局部估计：给定 $r_0>0$，对于所有 $t>0$ 和 u，$v\in\mathcal{E}$ 满足 $r=r(u,v)\le r_0$，

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\lesssim_{r_0} \frac{1}{V_{\mathcal{E}}(u,\min\{\sqrt{t},1\})}\exp\left(-\frac{r^2}{2Dt}-\lambda_1 t\right), \tag{3.27}$$

然后，利用 (3.17) 中所使用的类似论证，存在 $c>0$，使得对于所有 $t>0$以及 $\mathrm{X}=(u,x)$、$\mathrm{Y}=(v,y)\in\mathcal{W}$满足 $d=d(\mathrm{X},\mathrm{Y})\le 1$，

$$p_t^{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\lesssim \frac{1}{V_{\mathcal{W}}(\mathrm{X},\min\{\sqrt{t},1\})}\exp\left(-c\left(\frac{d^2}{t}\right)^{\theta}\right). \tag{3.28}$$

在第5节中，该估计将用于研究热极大算子。

显然， $\mathbb{H}^n$ 是这样的 $\mathcal{E}$ （见（2.5））。结合推论 7 与下一节中的定理 9 和定理 10, 我们得出

推论 8. $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 定义在 $\mathbb{H}^n \times M$ 上是弱型 (1, 1)。

弱型（1,1）性质的 $\mathcal{R}_\infty$ 在一般的 $\mathcal{W}$ 上是一个具有挑战性的问题。在第6节中，我们将给出一个充分条件，其提出受到 $\mathcal{M} = \mathbb{H}^n \times M$ 情形的启发。

4 定理 1 的证明：无穷远部分

在本节中，我们将证明无穷远部分 $\mathcal{R}_\infty$ 的弱型(1,1)估计。为此，以下记X $=(u, x)$、Y $=(v, y) \in \mathbb{H}^n \times M$,

$$R_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u, v)\right| \, p_t^M(x, y) \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},$$
$$R_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty p_t^{\mathbb{H}^n}(u, v) \, \left|\nabla_M p_t^M(x, y)\right| \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

现在我们如下定义 $\mathcal{R}_{i,\infty}$ $(i = 1, 2)$:

$$\mathcal{R}_{i,\infty} f(\mathrm{X}) := \int_{\{\mathrm{Y};\, d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \geq 1\}} R_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \, |f(\mathrm{Y})| \, \mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y}). \tag{4.1}$$

注意， $\mathcal{R}_\infty(f) \leq \mathcal{R}_{1,\,\infty}(f) + \mathcal{R}_{2,\,\infty}(f)$。因此，只需证明算子$\mathcal{R}_{i,\,\infty}$ $(i = 1, 2)$ 是弱型 (1, 1)。

4.1 $\mathcal{R}_{1,\,\infty}$的弱型（1,1）

我们先讨论 $\mathcal{R}_{1,\,\infty}$，由于 R_1(X,Y) 有显式的逐点上界，因此更容易处理。

定理 9. 定义在 $\mathcal{M}$ 上的 $\mathcal{R}_{1,\,\infty}$ 是弱型 (1, 1) 的。

证明. 由于 $\{(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{M}^2; d > 1\} \subseteq S_1 \cup S_2$，其中

$$S_1 := \{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}^2;\, \widetilde{d} > 1,\, r \leq 1\}, \qquad S_2 := \{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}^2;\, r > 1\}, \tag{4.2}$$

只需证明核为 R_1(X, Y) χ_{S_j} $(j = 1, 2)$ 的积分算子是弱型 (1, 1) 的。

我们从核 R_1(X, Y) χ_{S_1} 开始。接下来我们将证明

$$\sup_{\mathrm{Y} \in \mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} R_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \, \chi_{S_1}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \, \mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}) < +\infty, \tag{4.3}$$

那么，以核 $R_1(\mathrm{X},\mathrm{Y})\ \chi_{S_1}$ 为核的积分算子在 $L^1(\mathcal{M})$ 上有界。事实上，我们可以写成

$$\begin{aligned} 0 < R_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\lesssim \int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \, p_t^M(x,y)\, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\ &\leq \int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \, \mathrm{d}t \cdot \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{t}} p_t^M(x,y). \end{aligned} \tag{4.4}$$

作为 (2.7) 的推论，对于 $r \in (0,1]$, 我们有

$$\int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \, \mathrm{d}t \lesssim r \int_0^\infty t^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{Ct}\right) \mathrm{d}t \lesssim r^{-(n-1)} \lesssim \frac{r}{V_{\mathbb{H}^n}(v,r)}, \tag{4.5}$$

其中，最后一行用到了 (1.4)。

另一方面，利用热核的对称性，(GUE_θ) 和 (1.3) 可得

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{t}}\, p_t^M(x,y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{t}}\, p_t^M(y,x) \\ &\lesssim \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\widetilde{V}_M\left(y,\sqrt{t}\right)} \mathrm{e}^{-c\left(\frac{\tilde{d}^2}{t}\right)^\theta} \\ &\lesssim \sup_{t>0} \frac{\widetilde{d}}{\sqrt{t}} \left(1+\frac{\widetilde{d}}{\sqrt{t}}\right)^v \mathrm{e}^{-c\left(\frac{\tilde{d}^2}{t}\right)^\theta} \cdot \frac{1}{\widetilde{d}} \frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,\widetilde{d}\big)} \\ &\lesssim \frac{1}{\widetilde{d}} \frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,\widetilde{d}\big)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

然后通过标准的环带分解法，体积倍增性质推出，

$$\begin{aligned} &\sup_{y\in M} \int_{\{x;\, \widetilde{d}>1\}} \frac{1}{\widetilde{d}} \frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,\widetilde{d}\big)} \, \mathrm{d}\mu_M(x) \\ &= \sup_{y\in M} \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{x;\, 2^j<\widetilde{d}\leq 2^{j+1}\}} \frac{1}{\widetilde{d}} \frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,\widetilde{d}\big)} \, \mathrm{d}\mu_M(x) < +\infty. \end{aligned} \tag{4.7}$$

同样， $\mathbb{H}^n$ 上的局部体积倍增性质（参见（ND_{loc}））意味着

$$\sup_{v\in\mathbb{H}^n} \int_{\{u;\, r\leq 1\}} \frac{r}{V_{\mathbb{H}^n}(v,r)} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{H}^n}(u) < +\infty. \tag{4.8}$$

因此，(4.3) 是 (4.4)-(4.8) 的直接推论。

现在我们转而研究 $R_1(\mathrm{X},\mathrm{Y})\ \chi_{S_2}$。对于固定的 $\varepsilon \in (0, 1/64)$，我们记作

$$\begin{aligned} 0 < R_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\lesssim \int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \, p_t^M(x,y)\, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\ &\leq \int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \, \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}} \, \mathrm{d}t \cdot \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{t}}\, p_t^M(x,y)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{r}{t}}. \end{aligned}$$

对于 $r>1$，梯度估计 (2.7) 表明

$$\int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$\lesssim \mathrm{e}^{-(n-1)\,r}\sqrt{r}\int_0^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{r}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{r}{4}\left((n-1)\sqrt{\frac{t}{r}}-\sqrt{\frac{r}{t}}\right)^2+\varepsilon\frac{r}{t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

通过 $t=r\,\lambda$ 作变量代换，最后一个积分等于

$$\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\left(1+\lambda^{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{r}{4}\frac{((n-1)\lambda-1)^2}{\lambda}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right\}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$

$$=\int_{(n-1)\lambda-1\geq\frac{1}{2}}+\int_{-1<(n-1)\lambda-1\leq-\frac{1}{2}}+\int_{-\frac{1}{2}<(n-1)\lambda-1<\frac{1}{2}};$$

标准的拉普拉斯方法表明，主要贡献来自第三项，而该项可由 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的某个倍数控制。我们得出，当 $r>1$ 时，

$$\int_0^\infty \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\right| \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}\,\mathrm{d}t \lesssim_\varepsilon \mathrm{e}^{-(n-1)\,r}. \tag{4.9}$$

根据引理 4，在 $\mathbb{H}^n$上的积分算子（其核由 (4.9) 左端定义）属于弱型 (1, 1)。

另一方面，通过对 (4.6) 的证明作适当修改，我们可以证明，对于 $r>1$,

$$\sup_{t>0}\frac{1}{\sqrt{t}}p_t^M(x,y)\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{r}{t}}\lesssim_\varepsilon \min\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,1\big)},\frac{1}{\widetilde{d}}\frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,\widetilde{d}\big)}\right\}. \tag{4.10}$$

我们声称，在 M上的积分算子（其核由最后一个不等式的左端定义）在 L^1 上有界。事实上，容易验证

$$\sup_{y\in M}\int_M \min\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,1\big)},\frac{1}{\widetilde{d}}\frac{1}{\widetilde{V}_M\big(y,\widetilde{d}\big)}\right\}\mathrm{d}\mu_M(x)<+\infty. \tag{4.11}$$

因此，根据引理 5，具有核 R_1(X, Y) χ_{S_2} 的积分算子属于弱型 (1, 1)。综上，$\mathcal{R}_{1,\infty}$ 的弱型 (1, 1) 估计得以建立。 □

4.2 $\mathcal{R}_{2,\ \infty}$的弱型（1,1）

在本节中，我们转而分析$\mathcal{R}_{2,\infty}$。与 $\mathcal{R}_{1,\infty}$ 相比，这里的主要困难是缺少 $|\nabla_M p_t^M|$ 的逐点上界。由 (2.3) 可知，不失一般性，我们只假设在 M 上满足 ($WGE_{1,\theta}$)，也就是说，存在常数 c、$c'>0$ 和 $0<\theta\leq 1$，使得对于所有 $t>0$、$y\in M$,

$$\int_M \left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right|\exp\left(c\left(\frac{\widetilde{d}(x,y)^2}{t}\right)^\theta\right)\mathrm{d}\mu_M(x)\leq\frac{c'}{\sqrt{t}}.$$

特别是，作为其推论

$$\int_M \left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \,\mathrm{d}\mu_M(x) \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{4.12}$$

定理 10. $\mathcal{R}_{2,\infty}$ 定义在 $\mathcal{M}$ 上，是弱型 (1, 1) 的。

证明。正如上一小节所述，只需证明核为 $R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{S_j}$ $(j=1,2)$ 的积分算子是弱型 (1, 1) 的。

我们先分析 $R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{S_1^\circ}$。注意到

$$\begin{aligned} 0 < R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\lesssim \int_0^\infty p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\ &\le \sup_{t>0} \sqrt{t}\, p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v) \cdot \left(\int_0^\infty \left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \frac{\mathrm{d}t}{t}\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\mathbb{H}^n$ 上的热核估计（见 (2.6)）表明，当 $r \le 1$ 时，

$$\sup_{t>0} \sqrt{t}\, p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v) \lesssim \sup_{t>0} t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{Ct}} \lesssim r^{-(n-1)} \lesssim \frac{r}{V_{\mathbb{H}^n}(v,r)}. \tag{4.14}$$

另一方面，M 上的假设 $(WGE_{1,\theta})$ 表明，存在常数 $c>0$，使得对所有 $y \in M$ 和 $t>0$，

$$\int_{\{x;\,\widetilde{d}>1\}} \left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \,\mathrm{d}\mu_M(x) \lesssim \frac{\mathrm{e}^{-ct^{-\theta}}}{\sqrt{t}}.$$

因此

$$\sup_{y\in M} \int_{\{x;\,\widetilde{d}>1\}} \left(\int_0^\infty \left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \mathrm{d}\mu_M(x) \lesssim \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ct^{-\theta}}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{4.15}$$

由 (4.13)-(4.15) 和 (4.8) 可推得

$$\sup_{\mathrm{Y}\in\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{S_1}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}) < +\infty.$$

因此，具有核 $R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{S_1}$ 的积分算子在 L^1 上有界。

我们转而研究 $R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{S_2^\circ}$。对于固定的 $\varepsilon \in (0, 1/64)$，我们记

$$\begin{aligned} 0 < R_2(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\lesssim \int_0^\infty p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\ &\le \sup_{t>0} \sqrt{t}\, p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\, \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}} \cdot \left(\int_0^\infty \left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right| \mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{r}{t}} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right). \end{aligned}$$

热核估计 (2.4) 表明，当 $r>1$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0}\sqrt{t}\,p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\,\mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}\\
&\lesssim \sup_{t>0}\frac{r}{t}\left(1+\frac{r}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\exp\left\{-\frac{r}{4}\left((n-1)\sqrt{\frac{t}{r}}-\sqrt{\frac{r}{t}}\right)^2+\varepsilon\frac{r}{t}\right\}\cdot\mathrm{e}^{-(n-1)\,r}\\
&\lesssim \mathrm{e}^{-(n-1)\,r}\sup_{\lambda>0}\lambda^{-1}(1+\lambda^{-1})^{\frac{n-3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{((n-1)\lambda-1)^2}{\lambda}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right\}\\
&\lesssim_\varepsilon \mathrm{e}^{-(n-1)\,r}.
\end{aligned}\tag{4.16}$$

在最后一步中，我们使用了以下简单的观察：连续函数

$$g_\varepsilon(\lambda):=\lambda^{-1}(1+\lambda^{-1})^{\frac{n-3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{((n-1)\lambda-1)^2}{\lambda}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right\},$$

其定义在 $(0,+\infty)$ 上，满足 $\lim_{\lambda\to0^+}g_\varepsilon(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}g_\varepsilon(\lambda)=0$。然后我们令

$$\begin{aligned}
T(\mathrm{X},\mathrm{Y})&:=\mathrm{e}^{-(n-1)\,r}\cdot\left(\int_0^\infty\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right|\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{r}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\chi_{\{r>1\}},\\
\mathcal{T}f(\mathrm{X})&:=\int_{\mathcal{M}}T(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,|f(\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y}).
\end{aligned}$$

只需证明算子 $\mathcal{T}$ 是弱型 $(1,1)$。

我们对 $j\in\mathbb{N}$ 定义,

$$T_j(\mathrm{X},\mathrm{Y}):=T(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{\{2^j<r\le2^{j+1}\}},\qquad \mathcal{T}_jf(\mathrm{X}):=\int_{\mathcal{M}}T_j(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,|f(\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y}).$$

那么显然,

$$T_j(\mathrm{X},\mathrm{Y})\le\mathrm{e}^{-(n-1)\,r}\cdot\left(\int_0^\infty\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right|\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{2^j}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right).$$

我们断言$\|\mathcal{T}_j\|_{L^1\to L^{1,\,\infty}}\lesssim_\varepsilon 2^{-j/2}$。结合引理 4 和引理 5，还需证明

$$\sup_{y\in M}\int_M\left(\int_0^\infty\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right|\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{2^j}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}\mu_M(x)\lesssim_\varepsilon 2^{-j/2},\qquad\forall\,j\in\mathbb{N}.$$

事实上，交换积分次序并使用 (4.12) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_M\left(\int_0^\infty\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right|\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{2^j}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}\mu_M(x)\\
&=\int_0^\infty\left(\int_M\left|\nabla_M p_t^M(x,y)\right|\mathrm{d}\mu_M(x)\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{2^j}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&\lesssim\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{2^j}{t}}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t=2^{-j/2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s^{-1}}}{s^{3/2}}\,\mathrm{d}s\lesssim_\varepsilon 2^{-j/2}.
\end{aligned}$$

因此， [34, 引理 2.3] 蕴含了 $\mathcal{T}=\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{T}_j$ 的弱型 (1, 1)。因此，核为 R_2(X, Y) χ_{S_2} 的积分算子是弱型 (1, 1)。证明完毕。 □

5 $\mathcal{M}$上的热极大算子

在本节中，我们将建立 $\mathcal{M}$上的热极大算子的弱型 (1,1) 性质，该算子定义为

$$\mathcal{H}(f)(\mathrm{X})=\sup_{t>0}|\mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{M}}}f(\mathrm{X})|,\quad \forall\, f\in L^p(\mathcal{M}),\,1\le p\le+\infty.$$

基本策略与研究黎斯变换时所采用的策略相同。我们首先将$\mathcal{H}$ 分解为局部部分和无穷远部分。然后分别证明它们属于弱型 (1, 1)。

首先将 $\mathcal{H}$ 写作

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f)(\mathrm{X})&\le\sup_{t>0}\left|\int_{\{\mathrm{Y};\,d\le1\}}p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})f(\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y})\right|+\sup_{t>0}\left|\int_{\{\mathrm{Y};\,d>1\}}p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})f(\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y})\right|\\&\le\sup_{t>0}\int_{\{\mathrm{Y};\,d\le1\}}p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,|f(\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y})+\int_{\{\mathrm{Y};\,d>1\}}\sup_{t>0}p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,|f(\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y})\\&:=\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(f)(\mathrm{X})+\mathcal{H}_{\infty}(f)(\mathrm{X}).\end{aligned}$$

局部部分 $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 更容易处理。结合局部热核估计 (3.28) 和 (ND_{loc})， $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 可由局部中心Hardy-Littlewood 极大算子 $\mathrm{M}_{\mathrm{loc}}$ 的常数倍控制，该算子定义为

$$\mathrm{M}_{\mathrm{loc}}(f)(\mathrm{X})=\sup_{0<R\le1}\frac{1}{V_{\mathcal{M}}(\mathrm{X},R)}\int_{B(\mathrm{X},R)}|f(\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{Y}),$$

其弱型(1, 1)性质由 (ND_{loc}) 得出。因此，我们只需考虑无穷远部分 $\mathcal{H}_{\infty}$。

定理11。 $\mathcal{H}_{\infty}$ 定义在 $\mathcal{M}=\mathbb{H}^n\times M$ 上是弱型 (1, 1)，其中 M 如定理 2 所述。

证明。只需证明，具有核$\sup_{t>0}p_t^{\mathcal{M}}(X,Y)\chi_{S_j}(j=1,2)$ 的积分算子是弱型 (1, 1) 的。

我们从核 $\sup_{t>0}p_t^{\mathcal{M}}$(X,Y) χ_{S_1}开始。由(1.5)，对于X $=(u,x)$、Y $=(v,y)\in\mathbb{H}^n\times M$，我们得到，

$$\sup_{t>0}p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\le\sup_{t>0}\sqrt{t}\,p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\cdot\sup_{t>0}\frac{1}{\sqrt{t}}\,p_t^{M}(x,y).$$

由(4.6)、(4.7)、(4.14)和(4.8)可推得

$$\sup_{\mathrm{Y}\in\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}}\sup_{t>0}p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\chi_{S_1}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}}(\mathrm{X})<+\infty.$$

因此，核为 $\sup_{t>0} p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\ \chi_{S_1}$ 的积分算子在 L^1 上有界。

接下来我们分析 $\sup_{t>0} p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\ \chi_{S_2^\circ}$。取一个 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{64})$，由 (1.5) 可得，对 $r>1$

$$\sup_{t>0} p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \le \sup_{t>0} \sqrt{t}\, p_t^{\mathbb{H}^n}(u,v)\, \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}} \cdot \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{t}}\, p_t^{M}(x,y)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon\frac{r}{t}}.$$

结合 (4.10)、(4.11) 和 (4.16)，由引理 4 和 5 可知，以 $\sup_{t>0} p_t^{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\ \chi_{S_2}$ 为核的积分算子是弱型 (1, 1)。证明至此完成。

□

注 5. 回顾一下，$\mathcal{M}$ 上的一阶热极大算子定义为

$$\mathcal{H}_1(f)(\mathrm{X}) = \sup_{t>0} \left| t\frac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{M}}} f(\mathrm{X}) \right|, \quad \forall\, f \in L^p(\mathcal{M}),\ 1 \le p < +\infty.$$

由 [17, 定理 4] 可知，$|t\frac{\partial}{\partial t}\, p_t^M(x,y)|$ 也满足 (GUE_θ) 型上界。利用实双曲空间上热核的时间导数估计（见 [25, 第 5]节），通过类似的论证，我们可以得到$\mathcal{H}_1$的弱型 (1, 1) 性质。

6 一些推广

注意，我们的方法对于一大类直积流形均可奏效，且不会遇到重大困难。本节将讨论一些推广。

考虑直积流形 $\mathcal{E}\times M$，其中 M 与定理 1 或 2 中相同，$\mathcal{E}$ 是一个连通、完备、非紧的加权黎曼流形，其在无穷远处的体积增长至多为指数增长。我们还用 r 表示 $\mathcal{E}$上的测地距离。给定 $\sigma \in [0, \frac{1}{2})$、$\tau \in (0, \frac{1}{2}]$ 和 r_0、$\varepsilon > 0$，我们定义作用于 $\mathcal{E}$上的积分算子 $\mathcal{K}_i (= \mathcal{K}_{i,\mathrm{loc}} + \mathcal{K}_{i,\infty})$（$i = 1,\ 2$），其对应的核如下，

$$\begin{aligned} K_1(u,v) &= K_{1,\mathrm{loc}}(u,v) + K_{1,\infty}(u,v) \\ &:= \int_0^\infty |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\, \frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma}\, \chi_{\{r\le r_0\}} \ + \ \int_0^\infty |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\, \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}\, \frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma}\, \chi_{\{r>r_0\}}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

and

$$\begin{aligned} K_2(u,v) &= K_{2,\mathrm{loc}}(u,v) + K_{2,\infty}(u,v) \\ &:= \sup_{t>0} t^\tau\, p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\, \chi_{\{r\le r_0\}} \ + \ \sup_{t>0} t^\tau\, p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\, \mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}\, \chi_{\{r>r_0\}}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

因此，我们得到定理 1 和定理 2 的以下推广。

定理 12. 假设 $\mathcal{E}$ 满足 (ND_{loc}) 和 (VE)，其热核 $p_t^{\mathcal{E}}$ 具有小时间上界。

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,u) \le \frac{C}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})}, \quad \forall\, u \in \mathcal{E},\ 0 < t \le 1.$$

此外，假设存在$\sigma \in [0, \frac{1}{2})$、 $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$ 和 r_0、 $\varepsilon > 0$，使得积分算子 $\mathcal{K}_i$ $(i = 1,\ 2)$ 是弱型(1, 1)。那么，定义在 $\mathcal{E} \times M$ 上的黎斯变换是弱型 (1, 1)，其中 M 如定理 1 所述。

定理 13. 假设 $\mathcal{E}$ 满足 (ND_{loc}) 和 (VE)，其热核 $p_t^{\mathcal{E}}$ 具有如下小时间上界

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,u) \leq \frac{C}{V_{\mathcal{E}}(u, \sqrt{t})}, \quad \forall\, u \in \mathcal{E},\ 0 < t \leq 1.$$

此外，假设存在 $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$ 和 $r_0, \varepsilon > 0$，使得积分算子 $\mathcal{K}_2$ 为弱型 (1, 1)。那么，在 $\mathcal{E} \times M$ 上定义的热极大算子为弱型 (1, 1)，其中 M 如定理 2 所述。

定理 1 和定理 2 的证明经过了这样的安排，只需稍作修改，便可应用于这一更一般的情形。因此，我们省略定理 12 和定理 13 的证明。值得注意的是，定理 12 的假设实际上蕴含了在 $\mathcal{E}$上定义的黎斯变换的弱型 (1, 1) 估计。事实上，由谱分析可知，$\mathcal{K}_{1,\ \infty}$的弱型 (1, 1) 估计可以推出 $\nabla_{\mathcal{E}}(-\Delta_{\mathcal{E}})^{-s}\,\chi_{\{r>r_0\}}$在 $s \in (0, 1-\sigma]$上的弱型 (1, 1) 估计。另一方面，根据定理 6，关于 $\mathcal{E}$的假设蕴含了 $\nabla_{\mathcal{E}}(-\Delta_{\mathcal{E}})^{-1/2}\,\chi_{\{r\leq r_0\}}$的弱型 (1, 1) 估计。类似地，在 $\mathcal{E}$ 上定义的热极大算子也具有弱型 (1, 1)。

注6.(1) 值得指出的是，在 $\mathcal{K}_{i,\infty}(i = 1, 2)$ 的定义中引入的因子 $\mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}$ 并非唯一。例如，对证明稍作修改后，我们可以将其替换为 $(1 + \frac{r}{t})^{\varsigma}$，其中 $\varsigma \geq \frac{\upsilon+1}{2}$， $\upsilon > 0$ 是 (1.3) 中的常数。使用 $\mathrm{e}^{\varepsilon\frac{r}{t}}$的优势在于，它只取决于 $\mathcal{E}$ 的性质。

(2) 定理 注12和13在 M 为具有多项式增长的李群时仍然成立 .

6.1 L^1 有界性的充分条件$\mathcal{K}_{i,\mathrm{loc}}$

由于 $\mathcal{E}$ 满足 (ND_{loc})，关于局部算子 $\mathcal{K}_{i,\mathrm{loc}}(i = 1, 2)$还可以得到更多结论。事实上，在某些附加假设下，它们将在 $L^1(\mathcal{E})$上有界，尤其是对于具有正谱底的 $\mathcal{E}$ ，例如 $\mathbb{H}^n$。在继续之前，我们首先回顾一下，第 3.2节中建立的估计，特别是 (3.24) 和(3.27)，在 $\mathcal{E}$ 上仍然成立。因此，我们将直接使用它们。

我们首先分析 $\mathcal{K}_{1,\ \mathrm{loc}}$。

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} K_{1,\mathrm{loc}}(u,v)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) &= \int_0^{\infty}\left(\int_{\{u;\, r\leq r_0\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma}}\\ &= \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty}\right)\left(\int_{\{u;\, r\leq r_0\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma}}.\end{aligned}$$

由 (3.24)，我们有

$$\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_0^1\left(\int_{\{u;\, r\leq r_0\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma}} \lesssim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma+1/2}} < +\infty.$$

另一方面，当 $t \geq 1$ 时，根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\int_{\{u;\, r\leq r_0\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) \leq V_{\mathcal{E}}(v,r_0)^{1/2}\left(\int_{\mathcal{E}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|^2\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)\right)^{1/2}. \tag{6.3}$$

利用分部积分，柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} |\nabla_{\mathcal{E}} \mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon/2} g(u)|^2\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) &= -\int_{\mathcal{E}} g(u)\,(\Delta_{\mathcal{E}}\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} g)(u)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)\\ &\leq \|g\|_2\,\|\Delta_{\mathcal{E}}\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} g\|_2 \leq t^{-1}\|g\|_2^2, \qquad \forall\, t>0,\, g\in C_0^\infty(\mathcal{E}),\end{aligned} \tag{6.4}$$

其中，最后一个不等式用到了 $(\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon})_{t>0}$ 在 L^2 上的解析性。由半群性质可得 $p_t^{\mathcal{E}}(u,v) = \mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon/2}(p_{t/2}^{\mathcal{E}}(\cdot,v))(u)$。因此，结合 (6.3) 和 (6.4) 得到

$$\int_{\{u;\, r\leq r_0\}} |\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u) \leq \frac{V_{\mathcal{E}}(v,r_0)^{1/2}\,\|p_{t/2}^{\mathcal{E}}(\cdot,v)\|_2}{t^{1/2}} = \frac{\sqrt{V_{\mathcal{E}}(v,r_0)\,p_t^{\mathcal{E}}(v,v)}}{t^{1/2}}.$$

最后，我们得出结论：如果

$$\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_1^\infty \frac{\sqrt{V_{\mathcal{E}}(v,r_0)\,p_t^{\mathcal{E}}(v,v)}}{t^{\sigma+1/2}}\,\mathrm{d}t < +\infty \tag{6.5}$$

成立，则 $\mathcal{K}_{1,\mathrm{loc}}$ 在 $L^1(\mathcal{E})$ 上有界。

现在，我们转而讨论积分算子 $\mathcal{K}_{2,\mathrm{loc}}$。由 (3.27) 可知，存在常数 $C>0$，使得对所有满足 $r = r(u,v) \leq r_0$ 的 $u, v\in\mathcal{E}$，

$$\begin{aligned}K_{2,\mathrm{loc}}(u,v) &\leq \sup_{0<t\leq 1} t^\tau\, p_t^{\mathcal{E}}(u,v) + \sup_{t>1} t^\tau\, p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\\ &\lesssim \sup_{0<t\leq 1}\frac{t^\tau}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{Ct}} + \sup_{t>1} t^\tau\, p_t^{\mathcal{E}}(u,v).\end{aligned} \tag{6.6}$$

首先，我们断言存在正常数 υ_1 和 υ_2，使得

$$\frac{V_{\mathcal{E}}(u,R_1)}{V_{\mathcal{E}}(u,R_2)} \lesssim_{r_0} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\upsilon_1} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\upsilon_2}, \qquad \forall\, u\in\mathcal{E},\, R_1\in(0,r_0],\, R_2\in(0,1]. \tag{6.7}$$

事实上，当 $R_1 \geq R_2$ 时，通过迭代（ND_{loc}），存在 $\upsilon_1>0$ 使得

$$\frac{V_{\mathcal{E}}(u,R_1)}{V_{\mathcal{E}}(u,R_2)} \lesssim_{r_0} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\upsilon_1}, \qquad 0<R_1\leq r_0.$$

当 $R_1 < R_2$ 时，所谓的（局部）反向体积倍增性质（见 [22, 第412]页），这是（ND_{loc}）和 $\mathcal{E}$ 的连通性的直接结果，意味着存在 $\upsilon_2>0$ 使得

$$\frac{V_{\mathcal{E}}(u,R_1)}{V_{\mathcal{E}}(u,R_2)} \lesssim_{r_0} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\upsilon_2}.$$

在这两种情况下，(6.7) 都成立。

接着将 (6.7) 应用于 (6.6) 中的第一项，我们得到

$$\sup_{0<t\le 1}\frac{t^{\tau}}{V_{\mathcal{E}}(u,\sqrt{t})}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{Ct}}\lesssim_{r_0}\sup_{0<t\le 1}\left(\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\upsilon_1-2\tau}+\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\upsilon_2-2\tau}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{Ct}}\cdot\frac{r^{2\tau}}{V_{\mathcal{E}}(u,r)}. \tag{6.8}$$

通过与（4.8）中所用相同的论证，我们推得对于任意 $\tau>0$,

$$\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_{\{u;\,r\le r_0\}}\frac{r^{2\tau}}{V_{\mathcal{E}}(u,r)}\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)<+\infty.$$

令 $\upsilon'=\min\{\upsilon_1,\upsilon_2\}$。因此，如果 $\tau\in(0,\frac{\upsilon'}{2}]$，带有核 $\sup_{0<t\le1}t^{\tau}p_t^{\mathcal{E}}\chi_{\{r\le r_0\}}$ 的积分算子在 $L^1(\mathcal{E})$ 上有界。

总之，$\mathcal{K}_{2,\mathrm{loc}}$ 在 $L^1(\mathcal{E})$上有界，只要存在 $\tau\in(0,\frac{\upsilon'}{2}]$ 使得

$$\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_{\{u;\,r\le r_0\}}\sup_{t>1}t^{\tau}\,p_t^{\mathcal{E}}(u,v)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(u)<+\infty. \tag{6.9}$$

特别地，如果 $\mathcal{E}$ 具有正谱底 λ_1，那么由 (3.27) 和 (ND_{loc}) 可轻易验证条件 (6.5) 和 (6.9)。

6.2 更具体的示例

最后，为结束本节，我们给出更多关于 $\mathcal{E}$ 的具体例子。我们从下面这个简单但颇具启发性的模型开始。给定 $\alpha>0$，对于不全为零的非负数 a_1 和 a_2，函数

$$h(u)=a_1\mathrm{e}^{\alpha u}+a_2\mathrm{e}^{-\alpha u}$$

是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一个正 α^2-调和函数。此外，$\Delta_{\mathbb{R}}$ 中对应于正特征值的所有正特征函数都具有这种形式。设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的测度，定义为 $\mathrm{d}\mu=h^2\mathrm{d}u$，其中 $\mathrm{d}u$ 是勒贝格测度。我们考虑加权黎曼流形 $\mathcal{E}=(\mathbb{R},\mathrm{d}\mu)$，其配备了典范的欧几里得度量。容易看出，对于所有 $u\in\mathcal{E}$,

$$V_{\mathcal{E}}(u,R)\sim\begin{cases}h^2(u)R & \text{if}\quad 0<R\le 1,\\ h^2(u)\mathrm{e}^{2\alpha R} & \text{if}\quad R>1.\end{cases}$$

作用于 $\mathcal{E}$ 上的（加权）拉普拉斯算子如下:

$$\Delta_{\mathcal{E}}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}+2\frac{h'}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}+2\alpha\frac{a_1\mathrm{e}^{2\alpha u}-a_2}{a_1\mathrm{e}^{2\alpha u}+a_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}.$$

通过 Doob 的 h-变换（见 [22]），$\mathcal{E}$ 上的热核可明确表示为 b y

$$p_t^{\mathcal{E}}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}-\alpha^2t\right)\frac{1}{h(u)h(v)},$$

经过直接计算可得

$$|\nabla_{\mathcal{E}} p_t^{\mathcal{E}}(u,v)| \lesssim t^{-\frac{3}{2}}(r+t)\exp\left(-\frac{r^2}{4t}-\alpha^2 t\right)\frac{1}{h(u)h(v)},$$

其中 $r = r(u, v) = |u-v|$。

要应用定理 12 和定理 13，只需验证 $\mathcal{K}_i (i = 1, 2)$ 的弱型 (1,1)，因为关于 $\mathcal{E}$ 的其他假设显然都满足。为此，在 K_i 的表达式中取 $\sigma = 0$、$\tau = \frac{1}{2}$、$r_0 = 1$ 和 $\varepsilon \in (0, 1/8)$。注意，在这种情形下，局部算子 $\mathcal{K}_{i,\,\mathrm{loc}}$ $(i = 1,2)$ 在 L^1 上有界，因为 $\lambda_1 = \alpha^2$。

另一方面，我们有

$$K_{1,\infty}(u,v) \lesssim \int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}(r+t)\exp\left(-\frac{r^2}{4t}-\alpha^2 t+\frac{\varepsilon r}{t}\right)\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{h(u)h(v)} \lesssim \frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{h(u)h(v)},$$

and

$$K_{2,\infty}(u,v) \lesssim \sup_{t>0}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}-\alpha^2 t+\frac{\varepsilon r}{t}\right)\cdot\frac{1}{h(u)h(v)} \lesssim \frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{h(u)h(v)}.$$

注意到 $\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{h(u)h(v)} \leq \frac{1}{h^2(u)} \in L^{1,\infty}(\mathcal{E})$，即可推出 $\mathcal{K}_i$ 的弱型 (1, 1)。因此，$(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ 是我们定理中的一个例子。特别地，众所周知，赋予漂移拉普拉斯算子的欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 本质上可视为一个直积流形。于是，若取 $\mathcal{E} = (\mathbb{R}, \mathrm{e}^{2u}\mathrm{d}u)$ 和 $M = (\mathbb{R}^{n-1}, \mathrm{d}x)$，应用定理 12 和定理 13 即可得到文献 [27] 中定理 1 和定理 2 的另一种证明。

我们强调，关于 $\mathcal{E}$ 的假设可以在某些具有正谱底的流形上得到验证。如第 6.1 节所示，在这一背景下，主要困难在于 $\mathcal{K}_{i,\infty}$ $(i = 1, 2)$ 的弱型 (1, 1) 性质，而这通常可由引理 4 的类似结果推出，其中涉及对热核及其梯度的精确估计。根据关于弱型 (1, 1) 的已知结果，当 $\mathcal{E}$ 取为第 1.2 节中提到的以下流形时，定理 12 和定理 13 成立：非紧对称空间、调和 AN 群、实双曲空间上的带漂移的拉普拉斯算子，以及海森堡群上的带漂移的次拉普拉斯算子。至于确保我们的假设成立的具体性质，读者可参阅 [2, 36], [3], [25] 和 [26]。细节留给读者。

7 附录：$p > 2$ 的两个反例

正如我们在引言中已经提到的，黎斯变换在 $\mathcal{M} = \mathbb{H}^n \times M$ 上的 L^p 有界性（$p > 2$）是一个相当微妙的问题。一般而言，(ND)、(GUE_θ) 以及 $(WGE_{q,\theta})$ 的 M 并不足够。为了说明这一点，我们将给出两个典型的反例。在本附录中，我们始终假设 M 满足 (D) 和 (UE_2)，即拟距离 d 就是测地距离 d_M。我们回顾一下，$(WGE_{2,1})$ 是我们假设的一个推论。

例 7.1对于 $k \geq 2$，令 $M = \mathbb{R}^k \# \mathbb{R}^k$ 为两个 $\mathbb{R}^k$的连通和，其中黎斯变换在 L^p 上有界，当且仅当 $1 < p \leq 2$ （当 $k = 2$ ）以及 $1 < p < k$（当 $k \geq 3$）（见 [13, 10]）。根据其构造，Ric_M 在紧集之外恒等于零，因此下有界。另一方面，众所周知，$\mathrm{Ric}_{\mathbb{H}^n} \equiv -(n-1)$。因此，Ricci 曲率在 $\mathcal{M} = \mathbb{H}^n \times M$上下有界。然后应用 [6], 的主定理，我们得到对于任意给定的$1 < p < +\infty$,

$$\|\nabla_{\mathcal{M}} f\|_p \lesssim \|(-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}} f\|_p + \|f\|_p, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(\mathcal{M}).$$

并且很容易 看出， $\mathcal{M}$ 具有正谱底。通过插值 ,

$$\|f\|_p \lesssim \|(-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}} f\|_p, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(\mathcal{M}).$$

结合上述不等式，对于任意 $1 < p < +\infty$，黎斯变换在 $\mathcal{M}$上满足 L^p 有界性。这有些出人意料，因为取直积会扩大黎斯变换满足 L^p 有界性的 p 范围。此外，该论证并未使用(D)和(UE_2)，因此，当 M 取为 [23]中所考虑的连通和时，也会出现同样的现象。

例 7.2 设 M 为一个 k维、具有紧致无边界基底的锥形流形。文献 [24]研究了 M 上的黎斯变换。设 λ_1 为基底的最小正特征值。则黎斯变换满足 L^p 有界性当且仅当 $1 < p < p_0$，其中

$$p_0 = \begin{cases} k\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k-2}{2}\right)^2 + \lambda_1}\right)^{-1} & \text{if} \quad \lambda_1 < k-1, \\ +\infty & \text{if} \quad \lambda_1 \geq k-1. \end{cases}$$

我们只关注 $\lambda_1 < k-1$的情形。对于任意固定的 $p \geq p_0$，假设 $\mathcal{M} = \mathbb{H}^n \times M$ 上的黎斯变换在 L^p上有界，即

$$\|\nabla_{\mathcal{M}} F\|_p \lesssim \|(-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}} F\|_p, \quad \forall\, F \in D((-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}}). \tag{7.1}$$

根据 [14, p. 239], 存在 $g \in C_0^\infty(M)$ 和 $t_0 > 0$，使得

$$\|\nabla_M \mathrm{e}^{t_0 \Delta_M} g\|_p = +\infty.$$

现在我们选择一个不恒为 0 的 $f \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$，并令

$$\begin{aligned} G(u,x) &:= \mathrm{e}^{t_0 \Delta_{\mathbb{H}^n}} f(u) \cdot \mathrm{e}^{t_0 \Delta_M} g(x) \\ &= \mathrm{e}^{t_0 \Delta_{\mathcal{M}}} (f \otimes g) \in D((-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

那么很容易验证

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathcal{M}} G\|_p &\sim \|\nabla_{\mathbb{H}^n} \mathrm{e}^{t_0 \Delta_{\mathbb{H}^n}} f\|_p \cdot \|\mathrm{e}^{t_0 \Delta_M} g\|_p + \|\mathrm{e}^{t_0 \Delta_{\mathbb{H}^n}} f\|_p \cdot \|\nabla_M \mathrm{e}^{t_0 \Delta_M} g\|_p \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

另一方面，由于 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{\mathcal{M}}})_{t>0}$ 在 L^p 上的解析性，我们得到

$$\begin{aligned}\|(-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}}G\|_p &= \|(-\Delta_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{t_0\Delta_{\mathcal{M}}}(f\otimes g)\|_p\\ &\le t_0^{-\frac{1}{2}}\|f\otimes g\|_p<+\infty,\end{aligned}$$

这与 (7.1) 矛盾。因此，当 $p_0\le p<+\infty$ 时， $\mathcal{M}$ 上的黎斯变换不是 L^p 有界的。

关于一般 M上的黎斯变换的 $\mathcal{M}=\mathbb{H}^n\times M$ 有界性（$p>2$），我们可以应用 [4] 中提出的判据。事实上，根据 [31, 定理 5.53]，(ND_{loc})与局部庞加莱不等式同时成立，当且仅当小时间下的双边高斯热核估计成立。因此， [4, 定理 18]给出以下结果:

假设 M 是一个连通、随机完备的非紧黎曼流形，满足 (D)，其热核在短时间内满足双边高斯估计：存在常数 C 和 c，使得对所有 x、$y\in M$ 和 $0<t<1$,

$$\frac{c}{V_M(x,\sqrt{t})}\exp\left(-C\,\frac{d_M(x,\,y)^2}{t}\right)\le p_t^M(x,y)\le\frac{C}{V_M(x,\sqrt{t})}\exp\left(-c\,\frac{d_M(x,\,y)^2}{t}\right).$$

如果对于某个 $p_0\in(2,+\infty]$ 和 $\alpha\ge0$，对所有 $t>0$ 都有

$$\||\nabla_M\mathrm{e}^{t\Delta_M}|\|_{p_0\to p_0}\lesssim\frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{\sqrt{t}},$$

那么， $\mathcal{M}$ 上的黎斯变换在 L^p 上对所有 $p\in[2,p_0$都有界）。

致谢

本研究部分受到中国国家自然科学基金（项目编号：11625102 和 12271102）资助。第二作者还部分受到中国国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1006000、2020YFA0712900）和国家自然科学基金（11921001）资助。作者感谢匿名审稿人提出的诸多有益建议和宝贵意见，这些意见改进了本文的写作。

参考文献

[1] G. Alexopoulos. 齐次化理论在调和分析中的应用：多项式增长李群上的 Harnack 不等式与黎斯变换。Can. J. Math. 44, 691-727 (1992)。

[2] J.-P. Anker。非紧对称空间上拉普拉斯算子某些函数的精确估计。《Duke数学期刊》65，257-297（1992）。

[3] J.-P. Anker、E. Damek、C. Yacoub。调和群上的球面分析。《比萨高等师范学校科学年鉴》23，643-679（1996）。

[4] P. Auscher、T. Coulhon、X. T. Duong、S. Hofmann。流形上的黎斯变换与热核正则性。《法国高等师范学校科学年鉴》37，911-957（2004）。[5] D. Bakry。对称半群的黎斯变换。II. 在 $\Gamma_2 \geq 0$条件下的研究。《概率论研讨会》XIX，《数学讲义》1123，145-174。Springer（1985）。[6] D. Bakry。 ´具有下界Ricci曲率的黎曼流形上的黎斯变换研究。《概率论研讨会》XXI，《数学讲义》1247，137- 172。Springer（1987）。[7] D. Bakry、I. Gentil、M. Ledoux。马尔可夫扩散算子的分析与几何。《数学科学基础丛书》348。Springer（2014）。[8] S. Blunck、P. C. Kunstmann。非积分算子的Calderón-Zygmund理论与 H^∞-泛函演算。《伊比利亚美洲数学杂志》19，919-942（2003）。[9] S. Blunck、P. C. Kunstmann。黎斯变换的弱型 (p, p) 估计。《数学杂志》247，137-148（2004）。[10] G. Carron、T. Coulhon、A. Hassell。具有欧氏端的流形上的黎斯变换与 [10] -上同调。《杜克数学杂志》133，59-93（2006）。 L^pL. Chen、T. Coulhon、J. Feneuil、E. Russ。在没有高斯热核上界的 $1 \leq p \leq 2$ 上的黎斯变换。《几何分析杂志》27，1489-1514（2017）。[12] R. R. Coifman、G. Weiss。某些齐性空间上的非交换调和分析。《数学讲义》242。Springer-Verlag（1971）。 ˙T. Coulhon、X. T. Duong。 $1 \leq p \leq 2$上的黎斯变换。《美国数学学会汇刊》351，1151-1169（1999）。[14] T. Coulhon、H.-Q. Li。锥形流形上的热核下界估计与黎斯变换。《数学档案》83，229-242（2004）。[15] M. Cowling、G. Gaudry、S. Giulini、G, Mauceri。李群上热核极大函数的弱型 (1,1) 估计。《美国数学学会汇刊》323，637-649（1991）。[16] E. B. Davies。热核与谱理论。《剑桥数学论丛》92。剑桥大学出版社（1989）。[17] E. B. Davies。热核行为的非高斯特征。《伦敦数学学会杂志》55，105-125（1997）。[18] E. B. Davies、N. Mandouvalos。双曲空间与克莱因群上的热核上界。《伦敦数学学会学报》57，182-208（1988）。[19] X. T. Duong、A. McIntosh。不规则区域上具有非光滑核的奇异积分算子。《伊比利亚美洲数学杂志》15，233-265（1999）。

[20] A.Grigor'yan。任意完备流形上热核导数的上界。《泛函分析杂志》127，363–389（1995）。[21] A.Grigor'yan。任意流形上热核的高斯上界。《微分几何杂志》45，33–52（1997）。[22] A.Grigor'yan。流形上的热核与分析。高等数学研究丛书47。美国数学学会（2009）。[23] A. Hassell，A. Sikora。一类非倍增流形上的Riesz变换。《偏微分方程通讯》44，1072–1099（2019）。[24] H.-Q. Li。锥形´流´形上的黎斯变换。《泛函分析杂志》168，145–238（1999）。[25] H.-Q.Li，P.Sj¨ogren。实双曲空间上与带漂移的拉普拉斯算子相关的某些算子的弱型 (1,1)。《势分析》46，463–484（2017）。[26] H.-Q.Li，P.Sj¨ogren。海森堡群上带漂移的次拉普拉斯算子相关算子的估计。《傅里叶分析及其应用杂志》28，论文第10号（2022）。[27] H.-Q.Li，P. Sj¨ogren，Y.-R.Wu。带漂移的拉普拉斯算子的某些算子的弱型(1,1)。《数学杂志》282，623–633（2016）。[28] H.-Q.Li，J.-X.Zhu。关于“ $1 \leq p \leq 2$ 无高斯热核上界的黎斯变换”的注记。《几何分析杂志》28，1597–1609（2018）。[29] N.Lohou´e。非正曲率黎曼´流´形上向量场与拉普拉斯算子幂的比较。《泛函分析杂志》61，164–201（1985）。 `N. Lohou[30] e。不可和群上的黎斯变换与Littlewood-Paley函数。《巴黎科学院报告》306，327–330（1988）。´L.Saloff-Coste。Sobolev型不等式的若干方面。伦敦数学会讲义系列289。剑桥大学出版社（2002）。´E.M.Stein。奇异积分与函数的可微性。普林斯顿数学丛书30。普林斯顿大学出版社（1970）。[31] E.M. Stein。与Littlewood-Paley理论相关的调和分析专题。数学年刊研究丛书63。普林斯顿大学出版社（1970）。[32] E. M. Stein，N. J. Weiss。关于泊松积分的收敛性。《美国数学学会汇刊》140，35–54（1969）。[33] R. S. Strichartz。完备黎曼流形上的拉普拉斯算子分析。《泛函分析杂志》52，48–79（1983）。[34] J.-O. Str[35] omberg，非紧对称空间上极大函数的弱型[36] 估计。《数学年刊》114，115–126（1981）。

Hong-Quan Li 数学科学学院 复旦大学220邯郸路 上海 200433 中华人民共和国 电子邮件:
hongquan_li@fudan.edu.cn

Jie-Xiang Zhu 应用数学中心 天津大学 天津 300072 中华人民共和国 电子邮箱:
15110840006@fudan.edu.cn