arXiv:2304.04352v1 [math.AG] 10 Apr 2023

关于次数3 且具有唯一奇点的叶状结构的稳定性

´ ´ ´ ´ABEL CASTORENA、P. RUBI PANTALEON-MONDRAGON 和 JUAN VASQUEZ AQUINO

Abstract. 应用几何不变量理论（GIT），我们研究 $\mathbb{P}^2$ 上具有唯一一个重数1，2或3且米尔诺数为13的次数3 叶状结构的稳定性。特别地，我们在三种情形下刻画重数 2 的叶状结构：稳定、严格半稳定和不稳定。

1. Introduction

近几十年来，次数为 d 的 $\mathbb{P}^2$ 上全纯叶状结构的分类一直是代数几何中的重要课题。根据 [CO01, GMK89] ，我们知道，对于$d \geq 2$ 具有孤立奇点的全纯叶状结构，其由奇点概形唯一确定。所有奇点各不相同的情形已由 [GMK89],研究；当存在重合的奇点时，情况则更为复杂。在这项工作中，我们关注奇点概形恰由一个点构成的叶状结构。

David Mumford 提出的几何不变理论（GIT）指出，对于约化群在线性射影簇上的作用，通过将作用限制在半稳定点的开集上，并去除由不稳定点组成的闭子集，可以构造一个良好商。Frances Kirwan 证明，可以将该簇分层为非奇异的局部闭子簇，使得唯一的开分层是半稳定点的开子集，因此其他分层均由不稳定点组成。一个重要问题是确定该簇中各点的稳定性。

关键词和短语。全纯叶状结构、稳定性、奇点、几何不变理论、重数。第一作者获得了 C ONACyT 的 A1-S-9029 项目“ A_g 中的曲线模空间与曲率”以及 DGAPA、UNAM 的 PAPIIT IN100723 项目“射影曲面上的曲线、线性系统与向量丛”的资助。第二和第三作者获得了 CONACyT 的博士后奖学金。

次数为 d 的复射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上的叶层空间（记为 $\mathcal{F}_d$）是一个射影空间，我们通过 $\mathbb{P}^2$ 的自同构群 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ 的坐标变换定义线性作用。众所周知，叶层奇点、不变直线以及自同构群的研究都可以在此作用下进行。再者，由于 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 之间存在一个同源，我们可以用 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 的线性作用代替 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ 的作用，并且我们对这个约化群的更多性质和表示有所了解。自然地，我们希望获得有关 GIT 商 $\mathcal{F}_d//\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 的信息。在大多数情况下，这个商簇具有非常严重的奇点；最严重的奇点来自稳定子群具有正维数的半稳定点。对于具有唯一奇点的叶层的稳定性，我们能得出什么结论？在 [Alc09] 中，构造了 $\mathbb{P}^2$ 上次数为一的叶层的 GIT 商，并证明 $\mathcal{F}_1//\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1$。$\mathcal{F}_2$ 的几何不变理论在 [Alc13] 中进行了研究，并按照 Kirwan 的意义构造了分层。在 [ARL16] 中，作者给出了 $\mathcal{F}_3$ 的分层，并刻画了不稳定分层中的叶层；该分层基本上是利用 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{F}_3$ 上的表示的权重图构造的。在该分层中出现了具有唯一奇点的不稳定叶层，尽管并非所有这类叶层都得到了明确描述。

叶层上的一个重要不变量是奇点的重数，它使我们能够对叶层进行刻画。例如，当重数为 1 时，叶状结构的局部表示是众所周知的，并确定了奇点类型 [Bru15]。然而，寻找具有特定性质的例子通常非常困难，包括重数为 1 的情形。

在本文中，我们研究 $\mathcal{F}_3$ 中具有唯一奇点的叶层，确定其关于奇点重数的稳定性类型，并针对具有唯一奇点的稳定、半稳定、非稳定和不稳定叶状结构给出一些具体例子。

本文的结构如下。第2 节介绍本文所涉及的基本概念。第 3 节给出关于次数 $d \leq 3$ 的已知结果。第4节给出本文的主要结果，并描述具有唯一重数为二奇点的次数 3 叶状结构的稳定性。我们还给出叶状结构的定义多项式所满足的条件，使得该叶状结构为稳定、严格半稳定或不稳定。

2. Preliminaries

2.1.叶层。 本节给出复射影平面上由曲线定义的全纯叶层的一般结果。

在非零标量乘法意义下， $\mathbb{P}^2$ 上的次数为 d 的叶状结构由一个齐次向量场定义。

$$X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z},$$

其中， $P(x,y,z)$ $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 是次数为 d 的齐次多项式。此外，对于每个次数为$d-1$的齐次多项式 $G(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$，叶状结构 X 和 $X + G(x,y,z)\cdot(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$ 定义相同的叶状结构。我们称这些叶状结构等价。

令 $\mathcal{F}_d$ 为 $\mathbb{P}^2$ 上次数为 d的叶层空间。众所周知， $\mathcal{F}_d$ 是维数为 d^2+4d+2 的射影空间（见 [GMOB04]）。

定义 2.1. 若存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $X(p) = \lambda p$，则点 $p \in \mathbb{P}^2$ 是叶状结构 X 的**奇点**。我们用 $Sing(X)$ 表示叶状结构 X 的奇点集合。

如果定义叶状结构的多项式没有公因子，那么该叶状结构的奇点是孤立的。对于次数大于一的叶状结构，其由奇点概形唯一确定（参见 [CO01]）。本文中，我们假设叶层具有孤立奇点。注意，通过在开集 $U_0 \subset \mathbb{P}^2$ 上取叶状结构 X 的局部表示及其向量场，我们可以将 X 上叶状结构 $\mathbb{P}^2$ 的奇点轨迹视为 $\mathbb{C}^2$ 中的一个子集

$$f(y,z)\frac{\partial}{\partial y} + g(y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

where $f(y,z) := Q(1,y,z) - yP(1,y,z)$ 和 $g(y,z) := R(1,y,z) - zP(1,y,z)$。

容易看出， $Sing(X)$的点与簇 $V(\langle f,g\rangle)$的点之间存在一一对应关系。此外，利用这一表示，对于奇点 p，我们有两个重要的不变量： p 的米尔诺数和 p 的重数，这些不变量定义如下：

定义2.2。 设 p 是叶状结构 X的一个奇点，经过坐标变换$p = [1后：0：0]$。**米尔诺数** 的 p 定义为

$$\mu_p(X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}}{\langle f,g\rangle \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}},$$

其中 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}$ 是正则函数环。

若将 $f = f_m + f_{m+1} + \cdots$ 和 $g = g_r + g_{r+1} + \cdots$，写成它们的形式分解，其中 f_m 和 g_r 分别是 f 和 g 中次数最低的形式， m， $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$， p 的 **重数** 定义为

$$m_p(X) = min\{m, r\}.$$

我们可以看出， p 的米尔诺数就是代数曲线f 与 g 在原点处的交数，记作 $I_{(0,0)}(f, g)$。若无歧义，我们将 $I_{(0,0)}(f, g)$记作 $I_0(f, g)$。

对于具有孤立奇点的叶状结构，以下是一个重要且广为人知的结果:

命题 2.3。 [Jou06] 设 X 是 $\mathbb{P}^2$ 上的一个次数为 d 且具有孤立奇点的叶状结构，则

$$d^2 + d + 1 = \sum_{p \in \mathbb{P}^2} \mu_p(X).$$

该结果表明，当 X 是一个次数为 3 且具有唯一奇点的叶状结构时，米尔诺数为 13，等价地， $I_0(f, g) = 13$。

2.2. **射影簇的分层**。下面简要介绍 Kirwan 构造射影簇 V 在复数域上受约化群 G作用时的完全等变分层所用的技术；更多详情请参见 [Kir84, Part II]。

设 $V \subset \mathbb{P}^n$ 为一个非奇异复射影簇。考虑一个约化群 G 在线性作用于 V 上。

定义 2.4. 设 $x \in V$，并在 V 的仿射锥中取 $\bar{x}(\neq 0)$，使得 $\bar{x} \in x$。记 $\mathcal{O}(\bar{x})$ 为 $\bar{x}$ 的轨道，则:

(1) 若 $0 \in \overline{\mathcal{O}(\bar{x})}$，则称 x 为**不稳定**的。不稳定点的集合记为 V^{un}; (2) 若 $0 \notin \overline{\mathcal{O}(\bar{x})}$，则称 x 为**半稳定**的。半稳定点的集合记为 V^{ss}; (3) 若 x 是半稳定的，且 x 的轨道 $\mathcal{O}(x)$ 在 V^{ss} 中是闭的，并且 $\dim \mathcal{O}(x) = \dim G$，则称 x 为**稳定**的。稳定点的集合记为 V^s。

我们称该点为严格半稳定点，如果它是半稳定而非稳定的。

众所周知， V的商簇并不存在。Mumford 在 [MKF94]中指出，如果我们考虑半稳定点的开子集 $V^{ss} = V \setminus V^{un}$，并将 G 在 V^{ss}上的作用加以限制，那么该作用存在一个良好商，记作

$V//G$。然而，根据 V 的稳定性对点进行分类是一个重要问题。Kirwan 表明，不稳定点包含商簇 [Kir84] 的信息。

定义2.5。有限个 $\{S_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ 的子集构成 V 的一个**分层**，如果 V 是各层 $\{S_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ 的不交并，并且指标集 $\mathcal{B}$ 上存在一个偏序 $\succ^-$，使得对每个 $\beta \in \mathcal{B}$都有 $S_\beta \subset \bigcup_{\gamma \geq \beta} S_\gamma$。

分层的存在性由以下定理给出:

定理2.6。 *[Kir84，定理13。5]* 设 V 是一个带有约化群 G线性作用的非奇异射影簇。则存在 V的一个分层 $\{S_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$，使得唯一的开层为 V^{ss}，且不稳定点集中的每个层 S_β 都是非奇异的局部闭子集，并同构于 $G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss}$，其中 Y_β^{ss}是 V 的一个非奇异局部闭子簇，而 P_β 是 G的一个抛物子群。

这一分层的构造使用了 G 在 $V \subset \mathbb{P}^n$上的李代数表示的权重图，具体而言，考虑 G 的极大环面 T 以及 $\mathbb{C}^{n+1}$上的 T 表示。该表示分解为由特征标 $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ 给出的标量表示之和，而这些特征标是 $Lie(T)$的权重。

由于我们可以构造权重图，如果知道李代数表示的权重，就可以将原点识别为权重 0。希尔伯特-芒福德数值判据如下：设 $x = [x_0 : \cdots : x_n] \in V \subset \mathbb{P}^n$，则 x 是半稳定的，当且仅当原点 0位于权重 $Conv\{\alpha_i \mid x_i \neq 0\}$的凸包中。此外，当 0 位于 $Conv\{\alpha_i \mid x_i \neq 0\}$的内部时， x 是稳定的。

2.3. 三次叶状结构空间的分层。令 $\mathcal{F}_3$ 为三次叶状结构的空间， $PGL(3, \mathbb{C})$ 为 $\mathbb{P}^2$ 的自同构群，它通过坐标变换作用于 $\mathcal{F}_3$。此作用由以下方式给出

$$\begin{array}{rcl} PGL(3,\mathbb{C}) \times \mathcal{F}_3 & \to & \mathcal{F}_3 \\ (g, X) & \mapsto & g \cdot X = DgX(g^{-1}). \end{array}$$

由于 $PGL_3(\mathbb{C})$与$SL_3(\mathbb{C})$ 之间存在同源，我们可以考虑$SL_3(\mathbb{C})$的作用，而不是 $PGL_3(\mathbb{C})$ 的作用。与作用 $SL(3, \mathbb{C})$ on$\mathcal{F}_3$ 相关的表示是缩并映射的核:

$$\begin{array}{rccc} i_{1,3}: & Sym^3(\mathbb{C}^3)^* \otimes \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & Sym^2(\mathbb{C}^3)^* \\ & P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} & \mapsto & \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{array}$$

此核是一个记为 Γ_3 的不可约表示，然后

$$Sym^3(\mathbb{C}^3)^* \otimes \mathbb{C}^3 = \Gamma_3 \oplus Sym^2(\mathbb{C}^3)^*,$$

因此，

$$\Gamma_3 = \left\{ X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} : \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \right\}.$$

容易看出， Γ_3 是一个维数为 24 的复向量空间，由以下集合生成:

$$\left\{ x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x}, x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y} \text{ where } k+i+j=3 \text{ and } x^k y^i \frac{\partial}{\partial z} \text{ with } k+i=3 \right\}.$$

我们可以应用希尔伯特-芒福德数值判据，得到不稳定叶状结构的显式坐标。在 [ARL16] 中，作者证明了， $\mathbb{P}^2$ 上三次不稳定叶状结构的空间是一个扎里斯基闭簇，由以下 3 个向量空间组成:

p

$$V_1 = \langle xy^2\tfrac{\partial}{\partial x}, xyz\tfrac{\partial}{\partial x}, xz^2\tfrac{\partial}{\partial x}, y^3\tfrac{\partial}{\partial x}, y^2z\tfrac{\partial}{\partial x}, yz^2\tfrac{\partial}{\partial x}, z^3\tfrac{\partial}{\partial x}, xz^2\tfrac{\partial}{\partial y}, y^3\tfrac{\partial}{\partial y}, y^2z\tfrac{\partial}{\partial y}, yz^2\tfrac{\partial}{\partial y}, z^3\tfrac{\partial}{\partial y}, y^3\tfrac{\partial}{\partial z}\rangle_{\mathbb{C}},$$

$$V_2 = \langle x^2z\tfrac{\partial}{\partial x}, xyz\tfrac{\partial}{\partial x}, xz^2\tfrac{\partial}{\partial x}, y^2z\tfrac{\partial}{\partial x}, yz^2\tfrac{\partial}{\partial x}, z^3\tfrac{\partial}{\partial x}, x^2z\tfrac{\partial}{\partial y}, xz^2\tfrac{\partial}{\partial y}, xyz\tfrac{\partial}{\partial y}, y^2z\tfrac{\partial}{\partial y}, yz^2\tfrac{\partial}{\partial y}, z^3\tfrac{\partial}{\partial y}\rangle_{\mathbb{C}},$$

$$V_3 = \langle x^2z\tfrac{\partial}{\partial x}, xyz\tfrac{\partial}{\partial x}, xz^2\tfrac{\partial}{\partial x}, y^3\tfrac{\partial}{\partial x}, y^2z\tfrac{\partial}{\partial x}, yz^2\tfrac{\partial}{\partial x}, z^3\tfrac{\partial}{\partial x}, xz^2\tfrac{\partial}{\partial y}, xyz\tfrac{\partial}{\partial y}, y^2z\tfrac{\partial}{\partial y}, yz^2\tfrac{\partial}{\partial y}, z^3\tfrac{\partial}{\partial y}\rangle_{\mathbb{C}}.$$

因此， $\mathcal{F}_3^{un} = \mathbf{SL}_3(\mathbb{C})\mathbb{P}(V_1) \bigcup \mathbf{SL}_3(\mathbb{C})\mathbb{P}(V_2) \bigcup \mathbf{SL}_3(\mathbb{C})\mathbb{P}(V_3)$，其中 $\mathbf{SL}_3(\mathbb{C})\mathbb{P}(V_i)$ 表示复向量空间 V_i 的射影化中点的 $\mathbf{SL}_3(\mathbb{C})$-轨道。利用李代数表示 $\mathbf{SL}_3(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{F}_3$ 上的权重图（见图 1），可以构造 $\mathcal{F}_3^{un}$ 的分层，如定理2.6所示。该分层及其中若干层的刻画见于 [ARL16]。本文中，我们识别出一些具有唯一奇点且其重数为二的三次不稳定叶状结构。值得指出的是，这些不稳定叶状结构并未在 [ARL16] 给出的分层中得到刻画。

3. Stability of foliations with a unique singular point

从现在起，我们将使用以下记号:

$$\mathcal{A}_d := \{X \in \mathcal{F}_d \ : \ Sing(X) = \{p\}\},$$

$$\mathcal{A}_{d,m} := \{X \in \mathcal{A}_d \ : \ m_p(X) = m\}.$$

我们将用 $\mathcal{A}^s_{d,m}$ （分别用 $\mathcal{A}^{ss}_{d,m}$、 $\mathcal{A}^{un}_{d,m}$）表示 $\mathcal{A}_{d,m}$ 中稳定（分别为半稳定、不稳定）点的集合。

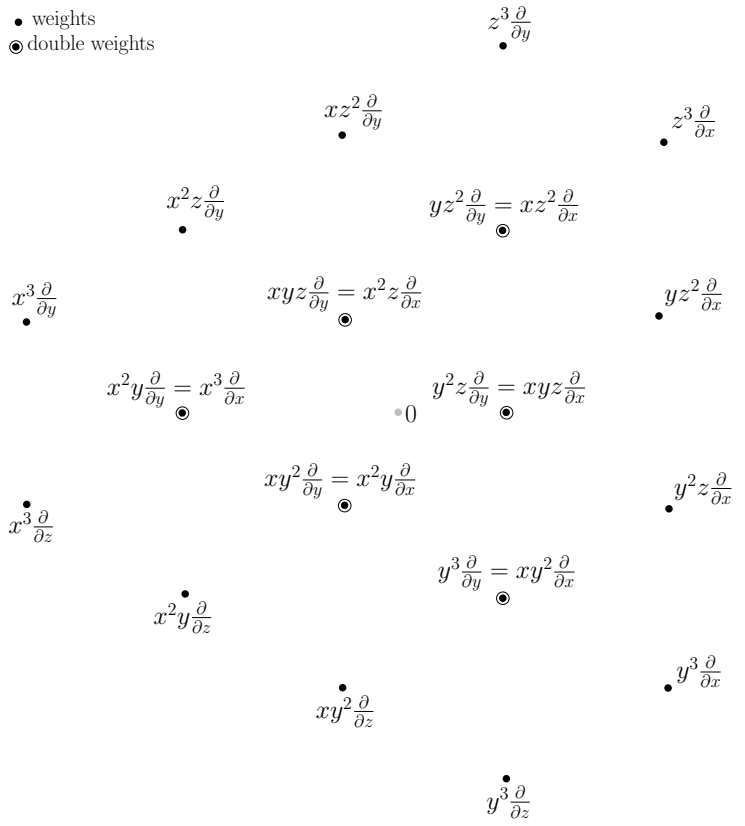

FIGURE 1. 在 $\mathcal{F}_3$上的表示的权重图

3.1. 次数1 的叶状结构。 在 [Alc09], 中，作者证明了叶状结构 $X \in \mathcal{F}_1$ 由 $X = A(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$ 模去径向叶层 $k(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$给出，其中 $k \in \mathbb{C}$且 A 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的非零 3×3矩阵。此外，当且仅当 A 是幂零的时，叶状结构 X是不稳定的。

容易看出，如果 $X \in \mathcal{A}_{1,1}$，那么 X 具有形式$(y + az)\frac{\partial}{\partial x} + bz\frac{\partial}{\partial y}$，因此，在这种情况下 X 是不稳定的。

3.2. 次数 2 的叶状结构。 根据 [CDBM10], ，在 $\mathcal{A}_2$ 中的全纯叶状结构在坐标变换意义下至多有 4 个:

(1) $X_1 = y^2\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y}$,(2)
$X_2 = -y^2\frac{\partial}{\partial x} + (yz - z^2)\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}$,—
(3) $X_3 = (y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y}$, (4)
$X_4 = -yz\frac{\partial}{\partial x} + (xy + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial}{\partial z}$.—

构造 $SL_3(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{F}_2$ 上的李代数表示的权重图，我们可以看到， X_1, X_2，以及 X_3 是具有一个重数 2奇点的不稳定叶状结构。这些叶状结构在 [Alc13] 中给出的空间 $\mathcal{F}_2$ 的分层的第 3 个分层中得到了刻画。同样地，我们可以看到，叶状结构 X_4 是 $\mathcal{A}^8_{2,1}$ 的一个元素。

3.3. **三次叶状结构**。叶状结构 $X \in \mathcal{A}_3$ 的重数为 $m_p(X) = 1$，2 或 3。在 [EM11] 中，作者给出了一个界，用以确定具有孤立奇点的叶状结构何时为非稳定；在此情形下，该界大于 1，因此具有一个重数为1的唯一奇点的叶状结构是稳定的。我们可以如下证明这一结果。

命题 3.1. 若 $X \in \mathcal{A}_{3,1}$，则 X 是稳定的。

证明。 考虑由下式给出的通用叶状结构

$$X = \left(\sum_{i,j} a_{ij}x^{3-i-j}y^iz^j\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{i,j} b_{ij}x^{3-i-j}y^iz^j\right)\frac{\partial}{\partial y} + (c_{00}x^3 + c_{10}x^2y + c_{20}xy^2 + c_{30}y^3)\frac{\partial}{\partial z}.$$

不失一般性，我们可以取奇点 p 为 $p = [1 : 0 : 0]$,，这意味着 $b_{00} = c_{00} = 0$。此外，点 $[0 : 1 : 0]$ 和 $[0 : 0 : 1]$ 不是奇点，这意味着 $(a_{30}, c_{30}) \neq 0$ 以及 $(a_{03}, b_{03}) \neq 0$。条件$m_p(X) = 1$意味着 $(a_{01}, a_{00}, b_{10}, c_{10}) \neq 0$。通过考察权重图（图 1）并应用 Hilbert-Mumford 稳定性判据，我们得出结论： X 是稳定叶状结构。特别地，$X \in \mathcal{A}_{3,1}$ 是稳定的。 □

例 3.2. 考虑叶状结构

$$X = (5xyz - y^3 + 2z^3)\frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}xz^2 + \frac{9}{2}y^2z)\frac{\partial}{\partial y} - 3xy^2\frac{\partial}{\partial z}.$$

注意，点 $[1 : 0 : 0]$ 是 X的一个奇点。该点附近的局部表示由 $f = -\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}y^2z + y^4 - 2yz^3$和 $g = -3y^2 - 5yz^2 + y^3z - 2z^4$给出。使用$Macaulay2$ 可以看出，关于字典序的约化 Gr¨obner 基为 $\{z^{13}, y + z^2 - z^5 + 3z^{11}\}$，这表明 $I_0(f, g) = 13$。因此， $[1 : 0 : 0]$ 是 X 唯一的奇点，重数为一。事实上，这是由一条曲线参数化的重数为一的叶状结构族的一个特例（见 [PMMdC]）。

已知有一些具有唯一重数1奇点的叶状结构例子，其中一些例子可见于 [APM20、FPR22、Alc18、PMMdC]。

对于重数3的情形，一个众所周知的结果表明，这样的叶层是不稳定的。该事实的证明如下命题所示。

命题 3.3。 令 $X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$ 是 $\mathcal{F}_3$中的叶状结构。如果 $X \in \mathcal{A}_{3,3}$，则 X 是不稳定的。

证明。 设 $p = [1 : 0 : 0]$ 是 X 的唯一奇点。由于 p 中的重数为 3，我们有 X 应当表示为

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= a_{20}xy^2 + a_{11}xyz + a_{02}xz^2 + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3, \\ Q(x,y,z) &= b_{30}y^3 + b_{21}y^2z + b_{12}yz^2 + b_{03}z^3, \\ R(x,y,z) &= c_{30}y^3, \end{aligned}$$

其中 $a_{ij}, b_{ij}, c_{30} \in \mathbb{C}$。这意味着 X 属于 V_1（V_1的定义见第（2.3）小节）。计算 X的权重后，我们发现 X 是不稳定的（参见图 1）。此外，如果 $X \in \mathcal{A}_3^{un}{}_{,3}$，那么 X 属于 [ARL16]中给出的分层 S_6。□

例3.4。 叶状结构 $X = (y^3 + y^2z - yz^2 + z^3)\frac{\partial}{\partial x} + z^3\frac{\partial}{\partial y}$ 具有由 $f = -y^4 - y^3z + y^2z^2 - y\,z^3 + z^3$ 和 $g = -y^3z - y^2z^2 + y\,z^3 - z^4$给出的局部表示。

我们注意到，$p = [1 : 0 : 0]$ 是 X 的唯一奇点，且米尔诺数$\mu_p(X) = 13$。这项计算可以在*Macaulay2* 中通过以下指令完成：

```
degree(ideal(f,g):saturate(ideal(f,g))).
```

4. Results

4.1. 重数 2. 我们想强调的是，在本文中，我们描述了一些具有唯一重数为二的奇点的三次不稳定叶状结构，而这些结构未曾在 [ARL16], 给出的分层中得到刻画；此外，我们还给出了$\mathcal{A}_3^{ss}{}_{,2}$ 和$\mathcal{A}_{3,2}^s$中的显式叶状结构。

在几乎所有计算中，我们将使用叶状结构 X的局部表示中的多项式 $f(y,z)$和 $g(y,z)$，并将 $P = P(1,y,z)$ $Q = Q(1,y,z)$和$R = R(1,y,z)$分别记作 $P(x,y,z)$、 $Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$的去齐次化。

4.1.1. 重数为2的情形；半稳定但非稳定。为了得到严格半稳定的三次叶状结构，我们将按以下方式应用该表示的权重图：在图 (1) 的权重图中，考虑一条经过原点且至少经过该表示的两个权重的直线。经过坐标变换后，我们可以考虑一条经过由集合 $\{x^2z\frac{\partial}{\partial x}, xyz\frac{\partial}{\partial y}\}$中至少一个元素定义的权重，以及由集合 $\{xy^2\frac{\partial}{\partial x}, y^3\frac{\partial}{\partial y}\}$定义的至少一个权重的直线。因此，严格半稳定的三次叶状结构可以写成

$$X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.1}$$

其中

$$P(x,y,z) = -c_{02}x^2z - c_{21}xy^2 - c_{12}xyz - b_{03}xz^2 + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3,$$
$$Q(x,y,z) = (b_{11} - c_{02})\, xyz + b_{02}xz^2 + (b_{30} - c_{21})\, y^3 + (b_{21} - c_{12})\, y^2z + (-b_{03} + b_{12})\, yz^2 + b_{03}z^3,$$

其中 $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{C}$。这些最后的方程在叶层等价意义下也可见于 [ARL16，定理 9]。

在表示 (4.1)下，点 $[1:0:0]$ 是 X 的奇点。此外，满足以下条件:

(1) 点 $[0:1:0]$ 是 X 的奇点，当且仅当 $a_{30} = 0$；(2) 点 $[0:0:1]$ 是 X 的奇点，当且仅当 $a_{03} = b_{03} = 0$；(3) 如果 a_{30} 和 b_{30} 均不为零，那么点 $[1:(b_{30}/a_{30}):0]$ 是 X 的奇点。

如果我们将点 $[1:0:0]$ 视为 X的唯一奇点，则可以假设$a_{30} \neq 0$，$(a_{03}, b_{03}) \neq 0$，且 $b_{30} = 0$。因此，由局部表示 f 和 g 在原点 (0,0) 处定义的曲线的交数为

$$I_0(f,g) = I_0(-a_{30}y^4, z) + I_0(Q,P) = 4 + I_0(Q,P). \tag{4.2}$$

为了得到 $I_0(f, g) = 13$，我们需要找出 P 和 Q 的系数所满足的条件，使得 $I_0(Q, P) = 9$。

定理 4.1。叶状结构 $X \in \mathcal{A}^{ss}_{3,2}$ 当且仅当 $X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}$，其中 —

$$P(x,y,z) = xy^2 - c_{12}xyz - b_{02}(b_{02} + c_{12})xz^2 + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3,$$
$$Q(x,y,z) = xyz + b_{02}xz^2 + y^3 + (b_{21} - c_{12})\, y^2z + \left(-b_{02}^2 - b_{02}c_{12} + b_{12}\right) yz^2 + b_{02}(b_{02} + c_{12})z^3,$$

系数满足以下关系:

$$a_{30}^{-1}(b_{21} - 2\,c_{12} - 5\,b_{02}) = 1,$$
$$a_{21} = -b_{21}c_{12} + c_{12}^2 - b_{21}b_{02} - 7\,b_{02}^2 + b_{12},$$
$$a_{12} = c_{12}^2b_{02} + 2\,c_{12}b_{02}^2 - 3\,b_{02}^3 - b_{12}c_{12} - b_{12}b_{02} + c_{12}b_{02} + b_{02}^2,$$
$$a_{03} = -b_{02}^4 - c_{12}^2b_{02} - 2\,c_{12}b_{02}^2 - b_{02}^3.$$

证明。设 X 是$\mathcal{A}_{3}^{ss}{}_{,2}$ 中的一个叶状结构，则 X 定义为 (4.1)。我们可以假设 $p=[1\colon 0\colon 0]$ 是 X 的唯一奇点。

考虑将 P 和 Q 分解为齐次分量 $P=P_3+P_2+P_1$ 和 $Q=Q_3+Q_2$，其中

$$\begin{aligned} P_3 &= a_{30}y^3+a_{21}y^2z+a_{12}yz^2+a_{03}z^3,\\ P_2 &= -c_{21}y^2-c_{12}yz-b_{03}z^2,\\ P_1 &= -c_{02}z,\\ Q_3 &= -c_{21}y^3+(b_{21}-c_{12})y^2z+(b_{12}-b_{03})yz^2+b_{03}z^3,\\ Q_2 &= (b_{11}-c_{02})yz+b_{02}z^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 X 是半稳定但非稳定的，因此必须满足以下条件之一:

$$(c_{02}\neq 0 \text{ and } c_{21}\neq 0) \text{ or } (b_{11}-c_{02}\neq 0 \text{ and } c_{21}\neq 0).$$

根据这些半稳定条件以及奇点的唯一性，我们有$P_3\neq 0$，$Q_3\neq 0$和 $P_2\neq 0$。可以看出，如果 $Q_2=0$，那么 $I_0(P,\ Q)=3$且 $I_0(f,\ g)=7$。因此，我们假设 $Q_2\neq 0$，并分析两种情况： $P_1\neq 0$ 和 $P_1=0$。在第一种情况下， $P_1\neq 0$ 蕴含 $I_0(f,\ g)=7$，于是值得分析的情况是 $P_1=0$时（$c_{02}=0$）。

由于 $Q_2\neq 0$，它可以分解为 $Q_2=zq$，其中 $q=b_{11}y+b_{02}z$，并注意到 $z\nmid P_2$，因为 $c_{21}\neq 0$。另请注意，如果 $q\nmid P_2$，那么 $I_0(P,\ Q)=4$。另一方面，如果 $q|P_2$，则可以将其分解为 $P_2=qm$，其中 $m=y+bz$，对某个 $b\in\mathbb{C}$ 成立，因为 $c_{21}\neq 0$。

定义如下多项式 $H:=-zP+mQ=-zP_3+mQ_3$。这是一个关于两个变量的四次齐次多项式，因此 H 可以分解为四条直线，如下所示：$H=\prod_{i=1}^{4}l_i$。利用交数的性质，我们可以推导出：如果 $l_i\in\{z,q\}$ 且对所有 i 都有 $l_i\nmid P_3$，那么

$$5\leq I_0(P,Q)=\sum_{i=1}^{4}I_0(l_i,Q)-I_0(z,Q)\leq 9.$$

断言 4.2. 当 $a_{30}b_{11}c_{21}\neq 0$、$b_{30}=c_{02}=0$、(a_{03},b_{03})、$\neq 0$、$H=q^4$、$q|P_2$ 和 $q\nmid P_3$时，等式 $I_0(P,Q)=9$ 成立。

为证明这一断言，注意到如果对于某个 i有 $l_i=z$，那么 $z\mid mQ_3$，这不可能，因为 $c_{21}\neq 0$。因此 $H=q^4$，在这种情况下，系数将满足许多条件。首先，注意到由 $P_2=mq$ 可得 $b_{11}+c_{21}=0$ 和 $b_{11}b_{03}=b_{02}$（$b_{02}+c_{12}$）。

由 $H = q^4$ 可知， $b_{11}^4 + c_{21} = 0$。不妨假设$b_{11} = 1$，于是 $c_{21} = -1$，并且还可得以下方程:

$a_{30} = b_{21} - 2\,c_{12} - 5\,b_{02}$,
$a_{21} = -b_{21}c_{12} + c_{12}^2 - b_{21}b_{02} - 7\,b_{02}^2 + b_{12}$,
$a_{12} = c_{12}^2 b_{02} + 2\,c_{12}b_{02}^2 - 3\,b_{02}^3 - b_{12}c_{12} - b_{12}b_{02} + c_{12}b_{02} + b_{02}^2$,
$a_{03} = -b_{02}^4 - c_{12}^2 b_{02} - 2\,c_{12}b_{02}^2 - b_{02}^3$.

现在，如果 X 是满足上述所有条件的叶状结构，我们可以看到， $f = Q - yP$和 $g = -zP$的结式$Res(f, g, z)$是关于 $\mathbb{C}[b_{02}, b_{21}, b_{12}, c_{12}][y]$ 的次数为 13 的多项式。由于 $f(0, z) = z\,(b_{03}z + b_{02})$ 且 $g(0, z) = 0$，我们可以看到， $f(0, z) = g(0, z) = 0$当且仅当 $z = 0$。于是，(0,0) 是 $f = g = 0$ 和 $I_0(f, g) = 13$的唯一解。

利用权重图（图 1）很容易看出， X 是半稳定但不稳定的叶状结构，因此 $X \in \mathcal{A}_{3,\,2}^{ss}$。
□

例4.3。 考虑由下式给出的叶状结构

$$X = (x\,y^2 - 5\,y^3 - 2\,x\,y\,z - 12\,y^2z - 3\,x\,z^2 - y\,z^2 - 10\,z^3)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3 + x\,y\,z + 2\,y^2z + x\,z^2 + 3\,z^3)\frac{\partial}{\partial y}.$$

X 的一个局部表示如下
$f(y, z) = 5\,y^4 + 12\,y^3z + y^2z^2 + 10\,y\,z^3 + 4\,y^2z + 3\,y\,z^2 + 3\,z^3 + y\,z + z^2$ and
$g(y, z) = 5\,y^3z + 12\,y^2z^2 + y\,z^3 + 10\,z^4 - y^2z + 2\,y\,z^2 + 3\,z^3$.

我们可以看到，系数满足上述定理的条件；通过在 Macaulay2 中直接计算可知, $I_0(f, g) = 13$。因此 $X \in \mathcal{A}_{3,\,2}^{ss}$。

4.1.2. 重数为 2；稳定。 现在我们描述一个次数为 3、具有唯一重数为 2 的奇点的稳定叶状结构。令 $X = P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$, 其中

$P(x, y, z)$
$= a_{10}x^2y + a_{01}x^2z + a_{20}xy^2 + a_{11}xyz + a_{02}xz^2 + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3$, $Q(x, y, z) = b_{30}y^3 + b_{21}y^2z + b_{12}yz^2 + b_{03}z^3$, $R(x, y, z) = c_{30}y^3$,

其中 $a_{10}a_{01} \neq 0$。

命题 4.4. 设 X 为上述叶状结构。则 $X \in \mathcal{A}_{3,\,2}^{s}$ 如果P 和 Q 的系数满足以下条件:

(1) $b_{30} = -4a_{10}^3a_{01}$,

(2) $b_{21} = -6a_{10}^2 a_{01}^2$,(3) $b_{12} = -4a_{10}a_{01}^3$,(4) $b_{03} = -a_{01}^4$,
(5) $c_{30} = a_{10}^4$, (6) $Res(a_{10}y + a_{01}z, Q - y($
$a_{20}y^2 + a_{11}yz + a_{02}z^2)) = 0$, (7) $Res(a_{10}y + a_{01}z,$
$a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3) \neq 0$.

证明。假设 $[1:0:0] \in Sing(X)$ 是唯一的奇点，我们考虑 $A = -zQ + yR$。那么 $I_0($ $f, g) = I_0(A, f) - I_0(y, f)$。我们可以看到 $I_0(y, f) = I_0(y, b_{03}z^3) = 3$如果 $b_{03} \neq 0$。

条件 $a_{10}a_{01} \neq 0$ 意味着 $[1:0:0]$ 的重数 2。由于 A 是四次齐次多项式，因此 $A = \prod_{i=1}^4 l_i$ ，其中 $deg(l_i) = 1$。如果 $l_i \notin \{y, a_{10}y + a_{01}z\}$ 对于某个 $i = 1, 2, 3, 4$，那么 $I_0(l_i, f) = 2$，且 $I_0(f, g) = 5$。

假设 $l_i \in \{y, a_{10}y + a_{01}z\}$ 对于某个 i成立。如果我们将 f写作 $f = f_4 + f_3 - y($ $a_{10}y + a_{01}z)$，其中 $f_4 = y(a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3)$，且 $f_3 = Q - y($ $a_{20}y^2 + a_{11}yz + a_{02}z^2)$。那么

$$I_0(l_i, f) = \begin{cases} 3 & \text{if } l_i \nmid f_3, \\ 4 & \text{if } l_i | f_3 \text{ and } l_i \nmid f_4. \end{cases} \tag{4.4}$$

如果 $l_i = y$ 对某个 i 且 $b_{03} \neq 0$，则 $y \nmid f$，因此 $I_0(f, g) \leq 12$。

我们假设 $l_i = a_{10}y + a_{01}z$ 对于所有 $i = 1, 2, 3, 4$，这意味着 $A = (a_{10}y + a_{01}z)^4$。因此 $I_0(l_i, f) = I_0(l_i, f_4 + f_3)$。如果 $l_i \nmid f_3$ 我们有 $I_0(f, g) = 9$。如果 $l_i | f_3$ 并且 $l_i \nmid f_4$ 我们推 deducethat $I_0(l_i, f) = I_0(l_i, f_4) = 4$。因此 $I_0(A, f) = 16$ 并且 $I_0(f, g) = 13$。根据等式 $A = (a_{10}y + a_{01}z)^4$，我们得到该陈述的条件。

由所有这些条件可知，0 位于由 X 的权重定义的凸包内部（参见图 1 中的权重图）。因此， X 是稳定的。□

一般而言，我们无法刻画 $\mathcal{A}_{3,2}^s$ 中的元素。

例4.5。令 $X = P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$ 为由下列多项式定义的叶状结构

$$\begin{aligned} P(x, y, z) =& x^2y + 2x^2z - 8xy^2 - 16xyz - 8xz^2 + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3, \\ Q(x, y, z) =& -8y^3 - 24y^2z - 32yz^2 - 16z^3, \\ R(x, y, z) =& y^3. \end{aligned}$$

其中 a_{30}, a_{21}, a_{12}, $a_{03} \in \mathbb{C}^*$。由于 $[1:0:0] \in Sing(X)$，我们考虑 X 的局部表示。为计算交数 $I_0(f, g)$，我们考虑多项式$A = -zQ + yR$，于是 $I_0(g, f) = I_0(A, f) - I_0(y, f)$。由于 $A = (y + 2z)^4$，我们有 $I_0(A, f) = 4I_0(y + 2z, f)$。

我们可以将 f 写为 $f = -y(a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{0,3}z^3) + (y + 2z)(-8z(y + z) - y)$，那么 $I_0(y + 2z, f) = 4$ 且 $I_0(f, y) = I_0(z^3, y) = 3$。因此 $I_0(f, g) = 13$。

4.1.3.重数 *2*；不稳定。在 [ARL16] 中构造了一个包含16个分层的 $\mathcal{F}_3$分层。在这样的分层中，第6层包含集合$\mathcal{A}_{3\ 3}^{un}$，并提到$A_{3\ 2}^{un}$ 中的点可以出现在第15层中。以下结果扩展了 [ARL16]中给出的对第15层的刻画。

引理 4.6. 设 X 为以下叶状结构

$$(b_{11}^3y^3 + 3b_{11}^2b_{02}y^2z + 3b_{11}b_{02}^2yz^2 + b_{02}^3z^3)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{11}xyz + b_{02}xz^2 + b_{21}y^2z + b_{12}yz^2 + b_{03}z^3)\frac{\partial}{\partial y},$$

其中 $b_{11}b_{02} \neq 0$ 和 $Res(b_{11}y + b_{02}z, b_{21}y^2 + b_{12}yz + b_{03}z^2) \neq 0$。然后 $X \in \mathcal{A}_{3\ 2,}^{un}$。

证明。设 $p = [1:0:0]$ 为 X 的唯一奇点。利用 X 的局部表示 f, g ，我们有 $m_p(X) = 2$。 f 和 g 在原点处的交数为 $I_0(f, g) = 4 + I_0(P, Q)$。由于 $Q = z(b_{11}y + b_{02}z + b_{21}y^2 + b_{12}yz + b_{03}z^2)$ 和 $P = (b_{11}y + b_{02}z)^3$，我们有 $I_0(P, Q) = 3 + I_0(b_{11}y + b_{02}z, b_{21}y^2 + b_{12}yz + b_{03}z^2) = 9$。由此得出 $I_0(f, g) = 13$。利用权重图（见图 1），容易看出，在给定条件下， X 是不稳定叶状结构。□

References

[Alc09] ClaudiaRAlc´antara。次数为1 的半稳定叶状结构的良好商。《数学成果》，53(1):1–7, 2009。[Alc13] ClaudiaR Alc´antara。次数为 2 的具有退化奇点的叶层。《巴西数学会通报》新系列, 44(3):421–454，2013。[Alc18] ClaudiaR Alc´antara。次数为 d 且具有米尔诺数为$d^2 + d + 1$的奇点的叶层。《康普顿斯数学杂志》，31(1):187–199，2018。[APM20] Claudia R Alc´antara 和 Rub´ı Pantale´on-Mondrag´on。具有唯一奇-点且没有不变代数曲线的叶层。《几何学献稿》，207(1):193–200，2020。[ARL16] Claudia R Alc´antara和Ramon Ronzon-Lavie。次数为 3 的具有退化奇点的叶层分类。《奇点杂志》，14:52–73，2016。[Bru15] Marco Brunella。叶状结构的双有理几何。施普林格，2015。

[CDBM10] Dominique Cerveau、Julie D´eserti、D Garba Belko 和 Rafik Meziani。《某些二次叶状结构的经典几何》。Bulletin of the Brazilian Mathematical Society，新系列，41(2):161–198，2010。[CO01] Antonio Campillo 和 Jorge Olivares。《相对于叶状结构的极性与 Cayley-Bacharach 定理》。Journal für die Reine und Angewandte Mathematik，534:95–118，2001。[EM11] Esteves Eduardo 和 Marina Marchisio。《射影平面叶状结构的不变量理论》。Rendiconti del Circolo Matematico di Parlerno，Serie II，Suppl.(83):175–188，2011。[FPR22] Percy Fern´andez、Liliana Puchuri 和 Rudy Rosas。《在 $\mathbb{CP}^2$ 上仅有一个奇点的叶状结构》。《几何学献稿》，216(5):1–17，2022。[GMK89] Xavier G´omez-Mont 和 George Kempf。《射影空间中亚纯向量场的稳定性》。Commentarii Mathematici Helvetici，64(1):462–473，1989。[GMOB04] Xavier G´omez-Mont 和 Laura Ortiz-Bobadilla。《曲面上的全纯动力系统》（西班牙语），第3卷，Aportaciones Matem´aticas: Notas de Investigaci´on，2004。[Jou06] Jean-Pierre Jouanolou。《代数 Pfaff 方程》，第708卷。施普林格，2006。[Kir84] Frances Clare Kirwan。《辛几何与代数几何中商空间的上同调》，第31卷。普林斯顿大学出版社，1984。[MKF94] David Mumford、Frances Kirwan 和 John Fogarty。《几何不变量理论》。施普林格出版社，柏林，1994。[PMMdC] Petra Rub´ı Pantale´on-Mondrag´on 和 Abraham Mart´ın del Campo。《用于识别 Hilbert 概形中叶状结构的 Euler-Betti 算法》。预印本：https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.17698。

Abel Castorena Martínez, Centro de Ciencias Matemáticas, Antigua Carretera aPátzcuaro # 8701, Col. Ex Hacienda San José de la Huerta, Morelia, Michoacán,México, C.P. 58089.电子邮箱地址：abel@matmor.unam.mx

P. Rubí Pantaleón-Mondragón, Centro de Ciencias Matemáticas, Antigua Carreteraa Pátzcuaro # 8701, Col. Ex Hacienda San José de la Huerta, Morelia, Michoacán,México, C.P. 58089.
电子邮箱地址：petra@matmor.unam.mx

Juan Vásquez Aquino, Unidad académica de matemáticas, Universidad Autónoma deZacatecas, Paseo la Bufa, Av. Solidaridad, Zacatecas, Zacatecas, México, C.P. 98060.电子邮箱地址：juan.vasquez@cimat.mx