反射向量与爆破的量子上同调

Todor MILANOV 和 *Xiaokun XIA*

KavliIPMU (WPI)，*UTIAS*，东京大学，柏市，千叶 *277-8583*，日本电子邮箱：
todor.milanov@ipmu.jp，*xia.xiaokun@ipmu.jp*

收稿日期：2023年5月30日，定稿日期：2024年3月14日；在线发表：2024年4月5日
https://doi.org/10.3842/SIGMA.2024.029

摘要。 设 X 是一个具有半单量子上同调的光滑射影簇。已知，将 X 在一点处爆破所得的爆破 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}(X)$ 也具有半单量子上同调。特别地，$\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}(X)$ 的量子上同调的单值群是一个反射群。我们找到了 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}(X)$ 的量子上同调单值群的一些生成元的显式公式，这些公式仅取决于例外除子的几何性质。

关键词： Frobenius 结构；Gromov–Witten 不变量；量子上同调

*2020*年数学主题分类： 14N35；35Q53

arXiv:2304.04365v2 [math.AG] 5 Apr 2024

1 引言

弗罗贝尼乌斯流形这一概念由 Dubrovin 提出，旨在为量子上同调的性质提供几何表述（见 [9]）。后来，Dubrovin 和 Zhang（见 [12]）发现，如果弗罗贝尼乌斯流形还具有半单性，那么相应的 Frobenius 结构对于 KdV 型可积层级理论有着非常重要的应用。我们主要关注一类特定的向量，并将其称为反射向量，它们与任意半单弗罗贝尼乌斯流形相关联。最一般的问题是，对应于半单弗罗贝尼乌斯流形的反射向量集合进行分类。事实上，反射向量集合包含了所谓的第二结构联络的单值群信息，因此，通过求解适当的经典黎曼–希尔伯特问题，反射向量可以唯一确定相应的半单 Frobenius 结构。

1.1 周期向量

定义半单弗罗贝尼乌斯流形的周期向量，其主要动机来源于Givental的工作 [19]。利用 A 型简单奇点的周期积分，Givental得以构造出广田双线性方程形式的可积层级。这一结果也推广到了简单奇点（见 [21]）。这两篇论文中的构造关键在于K.Saito的周期积分（见 [33]）。给定一个奇点 $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$，Saito发明了经典留数配对的一种扩展，称为高阶留数配对，并利用它为超曲面 $\{f(x) = \lambda\} \subset \mathbb{C}^n$构造了周期映射，其中 λ 是一个正则值。由于该超曲面是Stein流形，全纯形式的向量空间是无限维的，因此完全不清楚是否存在一个良好定义的周期映射。Saito非凡的想法是，选取一组称为优基的全纯形式（ω_1，……，ω_N），其中 N是该奇点的米尔诺数，使得对于所有 $1 \le i,\ j \le N$，ω_i与ω_j的高阶留数配对均为零。M. Saito证明了优基的存在性 [34]。优基的存在性意味着奇点 f 的极小全变形空间具有平坦结构，该结构

结果是 Dubrovin 意义下的半单 Frobenius 结构（见 [23]）。此外，消失上同调中的 Gauss–Manin 联络与第二结构联络 (2.1)–(2.2) 相对应，其中取 $m \in \mathbb{Z}$ 或 $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$，具体取决于奇点 f 的变量个数 n 是奇数还是偶数。因此，奇点理论中的 Frobenius 结构的第二结构联络可以用周期积分表示其解，参见 [14,第 3 节1]，其中对这类解的构造进行了很好的概述。Givental 和 Milanov 使用的周期积分对应于变量个数为奇数的奇点，也就是说，它们是某个 $m \in \mathbb{Z}$ 对应的第二结构联络 $\nabla^{(m)}$ 的解。需要指出的是，Dubrovin 引入了所谓的 Gauss–Manin 系统和扩展 Gauss–Manin 系统（见 [11, 方程 (5.9)、(5.11) 和 (5.12)]）。按我们的记号，Gauss–Manin 系统是取 $m = -1$ 和 $\lambda = 0$ 的线性微分方程组 (2.1)，而扩展 Gauss–Manin 系统则是取 $m = 0$ 的系统 (2.1)–(2.2)。然而，为了更令人满意地刻画周期积分，我们需要考虑取 $m \in \mathbb{Z}$ 的整个第二结构联络序列 (2.1)–(2.2)!

注 1.1。 整组联络 $\nabla^{(m)}$ $(m \in \mathbb{C})$由 Manin 和 Merkulov引入 [27] 旨在将半单弗罗贝尼乌斯流形分类为 Schlesinger 方程的特殊解。

容易验证，若 $I^{(m)}(t,\lambda)$ 是 $\nabla^{(m)}$ 的一个解，则 $I^{(m+1)}(t,\lambda) := \partial_\lambda I^{(m)}(t,\lambda)$ 是 $\nabla^{(m+1)}$ 的一个解。此外，若 $m + \frac{1}{2}$ 不是分次算子 θ 的特征值，则微分算子 ∂_λ 在 $\nabla^{(m)}$ 和 $\nabla^{(m+1)}$ 的解之间定义了一个同构。特别地，这两个联络的单值化表示是同构的。在奇点理论中，即使 $m + \frac{1}{2}$ 是 θ 的特征值，且 ∂_λ 可能不是满射，周期积分总是在 ∂_λ 的像中！原因如下。若 $I^{(m+1)}$ 是一个由周期积分定义的 $\nabla^{(m+1)}$ 的解，那么通过对奇点进行一次稳定化，即在 f 中加入一个新变量的平方，我们得到一个新的周期积分 $I^{(m+1/2)}$，它是 $\nabla^{(m+1/2)}$ 的一个解。此外，通过进行两次稳定化，我们得到一个周期积分 $I^{(m)}$，它是满足 $I^{(m+1)} = \partial_\lambda I^{(m)}$ 的 $\nabla^{(m)}$ 的一个解。进行两次稳定化可知，若一个周期积分对于某个 $m \in \mathbb{Z}$ 是 $\nabla^{(m+1)}$ 的解，那么它必定是 $\nabla^{(m)}$ 的一个解的导数，而该解本身也是一个周期积分。以上讨论引出了如下定义。

定义 1.2。 对于给定的半单弗罗贝尼乌斯流形，满足以下两个条件的序列 $I^{(m)}(t,\lambda)$ $(m \in \mathbb{Z})$:

(i) 平坦性： $I^{(m)}(t,\lambda)$ 是 $\nabla^{(m)}$ 的一个解，对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 均成立；(ii) 平移不变性：对所有 $m \in \mathbb{Z}$， $\partial_\lambda I^{(m)}(t,\lambda) = I^{(m+1)}(t,\lambda)$

称为该弗罗贝尼乌斯流形的周期向量 。

1.2 反射向量

反射向量这一概念由第一作者在 [28] 中提出。其定义取决于所选的 校准，并将在第 2.2 节回顾。本节将给出一种替代定义，其优点是不依赖于校准的选择。与原始定义的关系将在下文第1.3 节中解释。

设 M 是一个半单弗罗贝尼乌斯流形，并令 $\mathcal{A}$ 为 M的所有周期向量构成的集合。给定 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们用 $I^{(m)}_\alpha(t,\lambda)$ $(m \in \mathbb{Z})$ 表示相应的解序列。更准确地说，我们固定一个参考点 $(t^\circ, \lambda^\circ) \in M \times \mathbb{C}$，它位于判别式的补集内（见第 2.2 节），并令每个 $I^{(m)}_\alpha(t,\lambda)$ 都是在 (t°,λ°) 的邻域内定义的 $\nabla^{(m)}$ 的解析解。显然， $\mathcal{A}$ 具有向量空间结构：若 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$，则定义 $I^{(m)}_{\alpha+\beta}(t,\lambda) := I^{(m)}_\alpha(t,\lambda) + I^{(m)}_\beta(t,\lambda)$，且 $I^{(m)}_{c\alpha}(t,\lambda) := cI^{(m)}_\alpha(t,\lambda)$，其中 $c \in \mathbb{C}$ 是一个标量。正如我们

上文已经说明，若 m 是一个充分小的负整数，则映射 $\alpha \mapsto I_\alpha^{(m)}(t,\lambda)$ 给出了 $\mathcal{A}$ 与 $\nabla^{(m)}$的解空间之间的同构。特别地， $\mathcal{A}$ 是一个有限维向量空间，而沿判别式补集内闭环的解析延拓定义了 $\pi_1((M\times\mathbb{C})', (t^\circ,\lambda^\circ))$ 在 $\mathcal{A}$ 上的一个表示，该表示与 $\nabla^{(m)}$的单值化表示同构。这里，$(M\times\mathbb{C})'$ 表示 $M\times\mathbb{C}$ 中判别式的补集（见第 2.2 节）。此表示中基本群的像，即单值群，将称为 M的稳定单值化群，或简称 M的单值群。

注 1.3。 Dubrovin 将弗罗贝尼乌斯流形的单值群定义为高斯–马宁系统的单值群（见 [11, 定义5。6]），即带有 $m=-1$的第二结构联络的单值群。在本文中，弗罗贝尼乌斯流形的单值群是指联络 $\nabla^{(m)}$的单值群，其中 m 是一个充分小的整数，使得$m+\frac{1}{2}$ 不是分次算子 θ的特征值。如果分次算子 θ 的特征值不属于$\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，我们的单值群定义将与 Dubrovin 的定义一致。由于取m 更小的值对应于奇点理论中的稳定化，如果需要明确区分我们的定义与 Dubrovin 的定义，我们建议将我们的单值群称为稳定 单值群。

周期向量空间 周期向量 $\mathcal{A}$ 具有如下显著的配对，称为交叉配对 ，

$$(\alpha|\beta) := \big(I_\alpha^{(0)}(t,\lambda), (\lambda - E\bullet) I_\beta^{(0)}(t,\lambda)\big),$$

其中 E 是 Euler 向量场（更多细节请参见第2.1节和2.2 节）。利用微分方程（2.1）–（2.2），容易验证上述公式右侧与 t 和 λ无关。特别地，交叉配对在单值化作用下保持不变。判别式上一般点附近周期向量的局部结构由下面这个简单的引理描述。

引理 1.4。设 C 是一条参考路径，从(t°,λ°) 到点$(t,\lambda)\in(M\times\mathbb{C})'$，该点充分接近判别式上的一般点$(t',u')$ 。则

(a) 满足 $I_\beta^{(m)}(t,\lambda)$ 在(t',u')的邻域内解析延拓的 $\beta\in\mathcal{A}$ 子空间，是 $\mathcal{A}$ 的余维1 子空间。(b) 除相差一个符号外，存在唯一的周期向量 $\alpha\in\mathcal{A}$，使得沿着绕(t',u') 的小回路进行解析延拓后， $I_\alpha^{(m)}(t,\lambda)\mapsto -I_\alpha^{(m)}(t,\lambda)$ $(\forall m)$ 且$(\alpha|\alpha)=2$。

在 $m=0$的情形下，这正是 [11]中的引理 5.3。经过一些小的修改，Dubrovin 的证明在一般情形下同样适用。此外，Dubrovin 在 [11,引理 5.3], 中构造的 $\nabla^{(0)}$ 的解实际上是周期；也就是说，我们可以将它们纳入一个满足定义 1.2条件的序列中——参见第 2.3 节，其中利用 Givental 的 R-矩阵构造了该序列。

定义 1.5。 若存在一条参考路径 C 趋近判别式上的一个一般点，使得 $\pm\alpha$ 是引理 1.4第 (b) 部分中的唯一向量，则周期向量 $\alpha\in\mathcal{A}$ 称为 反射向量。

这是引理 1.4 的一个直接推论：若 C 是绕判别式上一点（该点为一般点）的 $(M\times\mathbb{C})'$ 简单回路，那么沿 C 的解析延拓定义了一个线性变换

$$w_\alpha\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{A},\qquad x\mapsto x-(x|\alpha)\alpha,$$

其中 α 是与 C对应的反射向量，即，这是关于超平面 $\alpha^{\perp} := \{y \in \mathcal{A} \mid (\alpha|y) = 0\}$的 $\mathcal{A}$中的一个正交反射。这正是我们称 α 为反射向量的主要动机。注意，若 $\pi_1(M, t^\circ) = 1$，则单值群 $\pi_1((M \times \mathbb{C})', (t^\circ, \lambda^\circ))$由绕判别式的简单回路生成。因此，在这种情况下， M 的稳定单值化群是一个反射群。

1.3 标定的弗罗贝尼乌斯流形

我们希望构造一个同构 $\mathcal{A} \cong H$，其中 $H = T_{t^\circ}M$ 是参考点处的切空间，或者等价地，是平坦向量场的空间。这个同构取决于在 $z = \infty$ 附近对 Dubrovin 联络的一个基本解 $S(t,z)z^\theta z^{-\rho}$ 的选择，使得算子级数满足辛条件 $S(t,z)S(t,-z)^T = 1$（更多细节见第2.2 节）。对于流形 X 的量子上同调，存在这样一个解的规范选择： ρ 是由 $c_1(TX)$ 进行经典杯积乘法的算子，而 $S(t,z)$则根据 X 的零亏格单点后代格罗莫夫–威滕不变量定义（见(2.11)）。一般而言，这样的解的选择存在歧义（见 [11], 引理2.7）。按照Givental [20], 的说法，我们称配备了一个基本解选择的弗罗贝尼乌斯流形为标定的。在这种情况下，算子级数 S 被称为校准。需要指出的是，在所有来自几何的弗罗贝尼乌斯流形例子中，我们都有如下交换关系： $[\theta, \rho] = -\rho$。再次按照 Givental 的说法，如果存在一个校准使得 $[\theta, \rho] = -\rho$.，我们将称 θ 为霍奇分次算子。

现在假设 M 是一个标定的弗罗贝尼乌斯流形，且 θ 是霍奇分次算子。那么我们可以构造一个取值于 End(H) 的解 $I^{(m)}(t,\lambda)$，使其满足第二结构联络 $\nabla^{(m)}$，其中 $\partial_\lambda I^{(m)}(t,\lambda) = I^{(m+1)}(t,\lambda)$——见公式（2.3）。此外，若 m 充分负，则算子 $I^{(m)}(t,\lambda)$ 可逆。因此，映射

$$H \to \mathcal{A}, \qquad a \mapsto I^{(m)}(t,\lambda)a, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

是一个向量空间同构。在此同构下， $\mathcal{A}$ 上的交叉配对可用算子 θ 和 ρ 表示——见公式（2.6）和（2.7）。

1.4 量子上同调

假设 X 是一个具有半单量子上同调的光滑射影簇。在这种情况下，除非该流形在 Givental 意义下存在镜像，否则反射向量没有几何解释。尽管如此，受镜像对称实例的部分启发，我们对反射向量集合有一个引人注目的猜想性描述。下面给出精确陈述。由于 X 的量子上同调是半单的，Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}(X) = 0$ 对于 $p \neq q$ 成立（见 [24]）。特别地，存在一组充足线丛 $L_1, \dots, L_r$，使得第一陈类 $p_i := c_1(L_i)$ $(1 \le i \le r)$ 构成 $H^2(X, \mathbb{Z})_{\text{t.f.}}$（无挠部分）的 $\mathbb{Z}$ 基。令 $q_1, \dots, q_r$ 为形式变量。遵循 Iritani 的做法，我们引入如下映射（见 [25]）：

$$\Psi_q \colon K^0(X) \to H^*(X, \mathbb{C}), \tag{1.2}$$

由.....定义

$$\Psi_q(E) := (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \widehat{\Gamma}(X) \cup e^{-\sum_{i=1}^r p_i \log q_i} \cup (2\pi \mathbf{i})^{\deg}(\mathrm{ch}(E)),$$

其中 deg 是复次数算子，即 $\deg(\phi) = i\phi$ 对 $\phi \in H^{2i}(X;\mathbb{C})$，$\mathbf{i} := \sqrt{-1}$，$n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$，而 $\widehat{\Gamma}(X) = \widehat{\Gamma}(TX)$ 是 X 的 Γ-类。回忆一下，对于向量丛 E， E 的 Γ-类定义为

$$\widehat{\Gamma}(E) := \prod_{x \colon \text{Chern roots of } E} \Gamma(1+x).$$

映射 Ψ_q 关于 q 是多值的。如果对于所有 $1 \le i \le r$， q_i 都足够接近 1，那么我们通过对数的主值分支定义 $\log q_i$ 。一般而言，需要在 $(\mathbb{C}^*)^r$ 中固定一条连接 $q = (q_1, \dots, q_r)$ 与 $(1, \dots, 1)$ 的参考路径，并通过沿该参考路径进行解析延拓来定义 Ψ_q。下面引入如下配对

$$\langle\ ,\ \rangle\colon\ H^*(X,\mathbb{C}) \otimes H^*(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \qquad \langle a, b\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_X a \cup \mathrm{e}^{\pi \mathbf{i}\theta} \circ \mathrm{e}^{\pi \mathbf{i}\rho}(b),$$

其中线性算子 θ 和 ρ 分别定义为

$$\theta\colon\ H^*(X,\mathbb{C}) \to H^*(X,\mathbb{C}), \qquad \theta(\phi) := \frac{n\phi}{2} - \deg(\phi),$$

and

$$\rho\colon\ H^*(X,\mathbb{C}) \to H^*(X,\mathbb{C}), \qquad \rho(\phi) := c_1(TX) \cup \phi.$$

通过使用 Hirzebruch–Riemann–Roch 公式，我们得到

$$\langle \Psi_q(E), \Psi_q(F)\rangle = \chi(E^\vee \otimes F),$$

其中 χ 是全纯欧拉示性数，即 $\chi(E) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim H^i(X, E)$。我们将 $\langle\ ,\ \rangle$ 称为欧拉配对。如果流形 X 在 Givental 的意义下具有镜像模型，则欧拉配对 $\langle\ ,\ \rangle$ 可以与 Seifert形式对应，因此其对称化

$$(a|b) := \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle, \qquad a, b \in H^*(X,\mathbb{C})$$

对应于交叉配对。因此，我们将欧拉配对的对称化（ | ）称为 交叉配对。

我们将 $D^b(X)$记作在 X上的凝聚层的有界复形范畴的导出范畴，即 X 的有界导出范畴（有关导出范畴的背景知识，参见 [18] ）。对于 $\mathcal{E}$， $\mathcal{F} \in D^b(X)$我们将 $\mathcal{E}[i]$ 记作移位复形：($\mathcal{E}[i])^k$ ： $= \mathcal{E}^{k+i}$以及$\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $=\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[k])$，其中Hom是在导出范畴 $D^b(X)$中计算的。回顾一下，如果对象 $\mathcal{E} \in D^b(X)$满足.....，则称其为例外对象

$$\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{if } k = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 $D^b(X)$ 中，例外对象序列 ($\mathcal{E}_1$、.....、 $\mathcal{E}_N$) 称为一个例外集合，若对于所有 $i > j$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}_i,\ \mathcal{E}_j) = 0$。例外集合 ($\mathcal{E}_1$、.....、 $\mathcal{E}_N$) 称为满例外集合，若包含 $\mathcal{E}_i$ $(1 \le i \le N)$ 且对同构、平移和锥封闭的 $D^b(X)$ 的最小子范畴就是 $D^b(X)$ 本身。

猜想1.6。

(a) 如果 X 的量子上同调收敛且为半单的，那么对于每个例外对象 $\mathcal{E} \in D^b(X)$， $\Psi_q(\mathcal{E})$ 都是反射向量。

(b) 如果($\mathcal{E}_1$、.....、 $\mathcal{E}_N$) 是 $D^b(X)$中的满例外集合，那么反射向量 α_i : $=\Psi_q(\mathcal{E}_i)$ $(1 \le i \le N)$ 在以下意义下生成全体反射向量的集合 $\mathcal{R}$:

(i) 反射 $x \mapsto x - (x|\alpha_i)\alpha_i$ $(1 \le i \le N)$ 生成单值群 W 的量子上同调。(ii) 对于每个 $\alpha \in \mathcal{R}$，存在 $w \in W$，使得， $w(\alpha) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$。

量子上同调中的反射向量 $\mathcal{R}$ 是通过大量子杯积的收敛域 $M \subset H^*(X,\mathbb{C})$ 上的弗罗贝尼乌斯流形结构定义的。利用校准 (2.11)，我们将 M 转化为一个标定的弗罗贝尼乌斯流形。M 的周期向量空间通过同构 (1.1) 与 $H^*(X,\mathbb{C})$ 相识别，该同构为我们提供了反射向量集合 $\mathcal{R}$ 在 $H^*(X,\mathbb{C})$ 中的嵌入。更多细节将在第 2.2 节和第 2.5 节中给出。对于满足以下条件的情形：X 是一个弱紧致 Fano 托里克轨形，并且具有一个仅由线丛构成的满例外集合，猜想 1.6 可由 Iritani 的工作（见 [25]）轻易推出。一般而言，由于第二结构联络是 Dubrovin 联络的拉普拉斯变换，猜想1.6 应当等价于所谓的 Dubrovin 猜想（见 [10, 猜想 4.2.2]），或等价于 Galkin–Golyshev–Iritani 提出的改进版本（见 [16, 猜想 4.6.1]）。Dubrovin 猜想最初是针对 Fano 流形提出的，但不久之后 Arend Bayer 建议应当去掉 Fano 条件（见 [3]）。Dubrovin 已经证明，交叉配对可以用第一结构联络的 Stokes 乘子表示（见 [11，引理 5.4]）。我们认为，Dubrovin 的论证已经包含了证明猜想1.6 等价于 Dubrovin 猜想所需的要素。我们计划在不久的将来重新研究这一问题。

现在陈述本文的主要结果。令 $\mathrm{Bl}(X)$ 为 X 在一点处的爆破，$\pi\colon \mathrm{Bl}(X) \to X$ 为爆破映射，并令 $j\colon \mathbb{P}^{n-1} \to \mathrm{Bl}(X)$ 为闭嵌入，它将 $\mathbb{P}^{n-1}$ 与例外除子 E 等同起来。

定理 1.7。 如果 X 的量子上同调是收敛且半单的，并且$\mathrm{Bl}(X)$ 的量子上同调是收敛的，那么 $\Psi_q(\mathcal{O}_E(k))$，其中 $\mathcal{O}_E(k) := j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(k)$、$k \in \mathbb{Z}$是$\mathrm{Bl}(X)$的量子上同调的反射向量。

有几条备注需要说明。根据 Bayer 的结果（见 [3]），已知在一点处的爆破保持量子上同调的半单性。我们相信，我们所要求的 $\mathrm{Bl}(X)$的量子上同调是收敛的这一条件是多余的，也就是说，爆破运算保持量子上同调中的收敛性。需要指出的是，最近 Giordano Cotti（见 [7, 定理6。6]）在假设小型量子上同调是半单且收敛的条件下，证明了量子上同调的收敛性。他的结果对于我们的目的来说并不完全充分，但运用他的技巧研究一般爆破的收敛性或许会很有趣。我们将在不久的将来回到这个问题。此外，我们希望证明猜想 1.6与爆破运算相容。回顾 Orlov 的工作（见 [31]），如果（$\mathcal{E}_1$，……，$\mathcal{E}_N$）是 X的满例外集合，那么（$\mathcal{O}_E$（$-n+1$）……，$\mathcal{O}_E$（-1） $\pi^*\mathcal{E}_1$，……，$\pi^*\mathcal{E}_N$）是$\mathrm{Bl}(X)$ 的满例外集合。为了完成猜想1.6 对于有限多个点处爆破的证明，我们仍需证明 $\pi^*\mathcal{E}_i$ 是反射向量。当前论文中使用的方法经过一定修改后，应该足以完成这一点。然而，到目前为止，我们修改论证的尝试并未成功，因此我们也将这个问题留给另一个独立项目。

本文组织如下。截面 2 和3 包含了我们构造并陈述主要结果（即定理1.7）所需的背景知识。在截面 4中，我们研究爆破的第二结构联络的基本解。目标是在 $Q = 0$处将解展开为洛朗级数，其中 Q 是对应于例外除子的诺维科夫变量，并显式计算首阶项的系数。在截面 5 和 6中，我们计算 Q-展开中首阶项系数的单值化。首阶项系数的单值化使我们能够确定对应于某类简单闭环的反射向量，从而得到我们的主要结果。我们的证明逻辑如下。考虑基本解 $I^{(m)}(t,\lambda)$——该基本解通过校准定义，见截面 2.2。这个基本解是一个洛朗级数，其系数是亏格 0、1 点后代 GW 不变量。由于对应于例外除子的线丛 E 不是丰沛的，GW 不变量通常

Q中的洛朗级数。我们的第一个观察是，如果适当地对基本解 $I^{(m)}(t,\lambda)$进行重新缩放，那么我们将得到关于 Q的幂级数。此外，我们可以提取在 $Q=0$ 处的泰勒级数展开的首项，直到 Q^n 阶，其中 $n=\dim(X)$。这是在第4节中通过使用 Gathman消没结果的推广来完成的（见命题 4.3、4.4 和 4.5）。后者在第3节命题 3.4 中得到证明。下一步是分析第二结构联络的奇点，即典范坐标 u_j 对 Q的依赖关系。再次利用Gathman消没结果，我们证明（见命题 5.2）典范坐标分成两组，使得 Qu_j 要么充分接近0（有 $N=\dim H^*(X)$个这样的坐标），要么充分接近 $-(n-1)v_k(1\le k\le n-1)$。现在，假设我们有一个围绕 $-(n-1)v_k$ 的简单回路 γ_k，它包含相应的典范坐标，并令 $\alpha=:Q^{-(n-1)e}\beta$ 为相应的反射向量，其中 α 对 Q 的依赖关系来自除子方程（见第5.1节）。令我们分解$\beta=\beta_b+\beta_e$，其中 $\beta_b\in H^*(X)$，以及 $\beta_e\in H^*(E)$，其中 E是例外除子。在第5节中，通过分析在 $Q=0$ 处展开的首项的单值化，我们证明了$\beta_b=0$。证明 β_b 的最高次数部分消没时存在一个小问题，因为 Q展开中的某个系数（见命题4.3，其中涉及 $Q^n\phi_N$ 的项）是一个无穷级数，因此其单值化并不能直接计算。在第 6节中，我们证明这个有问题的系数是一个梅林–巴恩斯积分，并通过基于变形围道的标准技术计算其单值化。最后，为了计算 β_e，我们再次考察 Q展开的首项，并看到相应的系数是量子上同调中 $\mathbb{P}^{n-2}$的第二结构联络的基本解（见第5.3节和第5.4节）。我们得到 β_e 必须是 $\mathbb{P}^{n-2}$ 的量子上同调中的一个反射向量，但后者已在我们先前的工作 [28] 中计算过（另见 [25]）。

2 弗罗贝尼乌斯流形

遵循 Dubrovin [9], ，我们回顾弗罗贝尼乌斯流形的概念。接着，我们定义半单弗罗贝尼乌斯流形的所谓第二结构联络和反射向量。最后，我们回顾格罗莫夫–威滕理论背景下弗罗贝尼乌斯流形的构造。

2.1 第一结构联络和第二结构联络

假设 M 是一个复流形，且 $\mathcal{T}_M$ 是 M上的全纯向量场层。流形 M 配备了以下结构：

（F1）非退化对称双线性配对

$$(\cdot,\cdot):\ \mathcal{T}_M\otimes\mathcal{T}_M\to\mathcal{O}_M.$$

(F2) Frobenius 乘法：交换且结合的乘法

$$\cdot\bullet\cdot:\ \mathcal{T}_M\otimes\mathcal{T}_M\to\mathcal{T}_M,$$

such that $(v_1\bullet w,v_2)=(v_1,w\bullet v_2)\ \forall v_1,v_2,w\in\mathcal{T}_M$.

(F3) 一个单位向量场：全局向量场 $\mathbf{1}\in\mathcal{T}_M(M)$，使得，

$$\mathbf{1}\bullet v=v,\qquad \nabla^{\mathrm{L.C.}}_v\mathbf{1}=0,\qquad \forall v\in\mathcal{T}_M,$$

其中 $\nabla^{\mathrm{L.C.}}$ 是配对 $(\cdot,\cdot)$ 的 Levi-Civita 联络。

(F4)一个 Euler 向量场：全局向量场 $E \in \mathcal{T}_M(M)$，使得，存在一个常- 数 $n \in \mathbb{C}$，称为 共形维数，并且

$$E(v_1, v_2) - ([E, v_1], v_2) - (v_1, [E, v_2]) = (2 - n)(v_1, v_2)$$

对所有 v_1， $v_2 \in \mathcal{T}_M$。

注意，复流形 $TM \times \mathbb{C}^*$ 具有以 $M \times \mathbb{C}^*$ 为底空间的全纯向量丛结构：在 $(t,\ z)$ 上方的纤维 $\in M \times \mathbb{C}^*$ 是 $T_tM \times \{z\} \cong T_tM$，它具有自然的向量空间结构。给定数据 (F1)–(F4)，我们在向量丛 $TM \times \mathbb{C}^*$ 上定义所谓的*Dubrovin* 联络

$$\nabla_v := \nabla_v^{\mathrm{L.C.}} - z^{-1} v\bullet, \qquad v \in \mathcal{T}_M, \qquad \nabla_{\partial/\partial z} := \frac{\partial}{\partial z} - z^{-1}\theta + z^{-2} E\bullet,$$

其中 z是 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$上的标准坐标， $v\bullet$是 $\mathcal{T}_M$的一个端omorphism，由向量场 v的 Frobenius 乘法定义，而 θ：$\mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_M$是一个 $\mathcal{O}_M$-模态射，定义如下

$$\theta(v) := \nabla_v^{\mathrm{L.C.}}(E) - \left(1 - \frac{n}{2}\right) v.$$

定义 2.1。 满足性质 $(F1)$–$(F4)$ 的数据 $((\cdot,\ \cdot)\bullet,\ \mathbf{1},\ E)$，称为共形维数为 n 的*Frobenius* 结构，若相应的 Dubrovin 联络是平坦的；也就是说，若 $(t_1,\ \ldots\ldots,\ t_N)$ 是 M 上的全纯局部坐标，则这组 $N+1$ 个微分算子 $\nabla_{\partial/\partial t_i}\ (1 \le i \le N)$， $\nabla_{\partial/\partial z}$ 两两对易。

让我们继续回顾第二结构联络和反射向量的概念。我们遵循 [28]中的论述。我们将只研究满足以下 4 个附加条件的弗罗贝尼乌斯流形：

(i) 切丛 TM 是平凡的，并且存在一个由全局平坦向量场构成的标架给出的平凡化。

(ii) 回顾，算子

$$\mathrm{ad}_E\colon\ \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_M, \qquad v \mapsto [E, v]$$

保持平坦向量场的空间不变。我们要求，ad_E 在平坦向量场空间上的限制是一个可对角化算子，其特征值为有理数 ≤ 1。

(iii) 弗罗贝尼乌斯流形具有一个 校准，使得分次算子是霍奇分次算子（参见第 1.3 节和 2.2 节）。

(iv) 弗罗贝尼乌斯流形具有直积分解 $M = \mathbb{C} \times B$，使得若记 $t_1\colon\ M \to \mathbb{C}$ 为沿 B 的投影，则 $\mathrm{d}t_1$ 是平坦 1-形式，且 $\langle \mathrm{d}t_1, \mathbf{1} \rangle = 1.$

由量子上同调或奇点理论中的原始形式构造的所有弗罗贝尼乌斯流形，均满足条件 (i)–(iv)。

固定基点 $t^\circ \in M$ 以及参考切空间 $H := T_{t^\circ}M$ 的一组基 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$。此外，设 $(t_1, \ldots, t_N)$ 是 t° 某个开邻域上的局部平坦坐标系，使得 $\partial/\partial t_i|_{t^\circ} = \phi_i$ 属于 H。平坦向量场 $\partial/\partial t_i$ ($1 \le i \le N$) 可延拓为 M 上的全局平坦向量场，并给出切丛 $TM \cong M \times H$ 的一个平凡化。这使我们能够将 Frobenius 乘法 $\bullet$ 与一族依赖于 $t \in M$ 的解析的结合交换乘法 $\bullet_t$：$H \otimes H \to H$ 等同起来。如有必要，修改我们对 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 和 $\{t_i\}_{i=1}^N$ 的选择后，可以使得

$$E = \sum_{i=1}^{N} ((1 - d_i)t_i + r_i)\partial/\partial t_i,$$

其中 $\partial/\partial t_1$ 与单位向量场 $\mathbf{1}$ 以及数字

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_N = n$$

关于区间 $[0, n]$中点对称。数值 n 被称为共形维数 M。上文定义的算子 θ: $\mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_M$ 保持平坦向量场子空间不变。它在 H 上诱导出一个线性算子，该算子关于 Frobenius配对(,) 是斜对称的。沿用 Givental的说法，我们将 θ 称为霍奇分次算子。

有两个可与 Frobenius 结构相关联的平坦联络。第一个是上文定义的 *Dubrovin* 联络 —。Dubrovin 联络在平坦坐标下具有如下形式:

$$\nabla_{\partial/\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} - z^{-1}\phi_i \bullet, \qquad \nabla_{\partial/\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + z^{-1}\theta - z^{-2}E\bullet,$$

其中 z 是 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 上的标准坐标，对于 $v \in \Gamma(M, \mathcal{T}_M)$，我们将 $v\bullet$: $H \to H$ 记为通过 v 进行 Frobenius 乘法的线性算子。
我们主要关注第二结构联络。

$$\nabla^{(m)}_{\partial/\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} + (\lambda - E\bullet_t)^{-1}(\phi_i \bullet_t)(\theta - m - 1/2), \tag{2.1}$$

$$\nabla^{(m)}_{\partial/\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} - (\lambda - E\bullet_t)^{-1}(\theta - m - 1/2), \tag{2.2}$$

其中 $m \in \mathbb{C}$ 是一个复参数。这是平凡丛上的一个联 le

$$(M \times \mathbb{C})' \times H \to (M \times \mathbb{C})',$$

其中

$$(M \times \mathbb{C})' = \{(t, \lambda) \mid \det(\lambda - E\bullet_t) \neq 0\}.$$

超曲面 $\det(\lambda - E\bullet_t) = 0$ in $M \times \mathbb{C}$ 称为判别式。

2.2 标定的弗罗贝尼乌斯流形的反射向量

我们希望为第二结构联络构造一个基本解 $\nabla^{(m)}$，使得 m 充分负。如第 1.3节所述，这样我们就可以将弗罗贝尼乌斯流形 M 在 H中的反射向量（见定义1.5）嵌入其中。

假设 M 是一个标定的弗罗贝尼乌斯流形，其校准为 $S(t, z)$，且分次算子是霍奇分次算子。根据定义（见 [20]），校准是算子级数 $S(t, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) z^{-k}$, $S_k(t) \in \mathrm{End}(H)$，它全纯地依赖于 t和 z，当 t 充分接近基点 t° 和 $z \in \mathbb{C}^*$时满足以下条件：Dubrovin 联络在 $z = \infty$ 附近有一个形式如下的基本解

$$S(t, z) z^{\theta} z^{-\rho},$$

其中 ρ ∈End(H) 是一个幂零算子，并且满足以下辛条件

$$S(t, z) S(t, -z)^T = 1,$$

其中，^{T} 表示关于 Frobenius 配对的转置。我们称 θ 为霍奇分次算子，如果 $[\theta, \rho] = -\rho$。

固定一个参考点 $(t^\circ,\lambda^\circ)\in(M\times\mathbb{C})'$，使得 λ° 是充分大的正实数。容易验证，下列函数是第二结构联络 $\nabla^{(m)}$ 的一个解。

$$I^{(m)}(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S_k(t)\widetilde{I}^{(m+k)}(\lambda), \tag{2.3}$$

其中

$$\widetilde{I}^{(m)}(\lambda)=\mathrm{e}^{-\rho\partial_\lambda\partial_m}\left(\frac{\lambda^{\theta-m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\theta-m+\frac{1}{2}\right)}\right).$$

注意，$I^{(m)}(t,\lambda)$ 和 $\widetilde{I}^{(m)}(\lambda)$ 的取值均属于 $\mathrm{End}(H)$。从现在起，我们限制 $m\in\mathbb{Z}$。第二结构联络在无穷远处有一个福克斯型奇点，因此，当 (t,λ) 充分接近 (t°,λ°) 时，级数$I^{(m)}(t,\lambda)$ 收敛。利用微分方程 (2.1)–(2.2)，我们将 $I^{(m)}$ 延拓为定义在 $(M\times\mathbb{C})'$ 上的多值解析函数，其取值属于 $\mathrm{End}(H)$。我们定义以下取值在 H中的多值函数：

$$I_a^{(m)}(t,\lambda):=I^{(m)}(t,\lambda)a,\qquad a\in H,\quad m\in\mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

显然，对于每个固定的 $a\in H$，序列 $I_a^{(m)}(t,\lambda)$ $(m\in\mathbb{Z})$ 是定义 1.2 意义下的一个周期向量。此外，如果 $m\in\mathbb{Z}$ 充分小于零，那么 $I^{(m)}(t,\lambda)$ 是一个可逆算子。因此，M 的所有周期向量均具有形式 (2.4)。利用解析延拓，我们得到一个表示

$$\pi_1((M\times\mathbb{C})',(t^\circ,\lambda^\circ))\to\mathrm{GL}(H)$$

称为弗罗贝尼乌斯流形的单值化表示。单值化表示的像 W 称为单值群或稳定单值化群(见注1.3)。

在半单性假设下，我们可以在 M 上选取一个一般的参考点 t°，使得 Frobenius 乘法 $\bullet_{t^\circ}$ 是半单的，并且算子 $E\bullet_{t^\circ}$ 具有 N 个两两不同的特征值 u_i°（$1\le i\le N$）。基本群 $\pi_1((M\times\mathbb{C})',(t^\circ,\lambda^\circ))$ 适合以下正合列

$$\pi_1(F^\circ,\lambda^\circ)\xrightarrow{i_*}\pi_1((M\times\mathbb{C})',(t^\circ,\lambda^\circ))\xrightarrow{p_*}\pi_1(M,t^\circ)\longrightarrow 1, \tag{2.5}$$

其中 $p\colon(M\times\mathbb{C})'\to M$ 是到 M 上的投影，$F^\circ=p^{-1}(t^\circ)=\mathbb{C}\setminus\{u_1^\circ,\dots,u_N^\circ\}$ 是 t° 上方的纤维，而 $i\colon F^\circ\to(M\times\mathbb{C})'$ 是自然包含映射。证明见 [35,命题 5.6。4] 或 [30, 引理 1.5 (C)]。利用正合列 (2.5)，我们得到单值群 W 由表示 $\pi_1(M,t^\circ)$ 中生成元在 $\pi_1((M\times\mathbb{C})',(t^\circ,\lambda^\circ))$ 中的提升的单值化变换，以及 $\pi_1(F^\circ,\lambda^\circ)$ 的生成元生成。

在单值化表示下，$\pi_1(F^\circ,\lambda^\circ)$ 的像是一个反射群，可描述如下。引入双线性配对

$$\langle a,b\rangle=\frac{1}{2\pi}\left(a,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\rho}b\right),\qquad a,b\in H. \tag{2.6}$$

受镜像对称应用的启发，我们将 $\langle\ ,\ \rangle$ 称为欧拉配对。其对称化

$$(a|b):=\langle a,b\rangle+\langle b,a\rangle,\qquad a,b\in H, \tag{2.7}$$

也在镜像对称中发挥重要作用，我们将其称为交叉配对。可以验证，交叉配对可以用周期向量表示如下：

$$(a|b) := \big(I_a^{(0)}(t,\lambda), (\lambda - E\bullet) I_b^{(0)}(t,\lambda)\big).$$

利用第二结构联络的微分方程，很容易证明上述恒等式的右端与 t 和 λ无关。然而，证明该常数必须为（$a|b$）则需要一些额外的工作（参见 [29]）。

现在假设 γ 是 F°中的一个简单回路，即一条从 λ°出发，沿着路径 γ' 接近奇点 u_i°之一，并在充分接近 u_i°的一点处结束，绕 u_i°一周，最后沿 γ'返回 λ° 的回路。通过分析 $\lambda = u_i$附近的第二结构联络，很容易看出，除一个符号外，存在唯一的 $a \in H$，使得（$a|a$） $= 2$，并且 a 沿 γ 的单值化变换为 $-a$。表示$\gamma \in \pi_1$（F°， λ°）的单值化变换就是由以下公式定义的反射：

$$w_a(x) = x - (a|x)a.$$

我们将 $\mathcal{R}$ 记作由 $a \in H$ 中所有可能的简单回路选择所确定的上述所有 F°的集合。在同构（1.1）下，集合 $\mathcal{R}$ 与 M的反射向量集合重合。

2.3 反不变解

我们希望构造引理1.4（b）部分中出现的第二结构联络的唯一解。我们称之为反不变解，因为绕判别式作解析延拓会使其符号改变。我们的构造与（2.3）非常相似，只不过现在我们考虑的是 $\nabla^{(m)}$ 在 $\lambda = \infty$处的奇点，而不是 $\lambda = u_i(t)$处的奇点；并且我们将使用 $z = \infty$ 附近 Dubrovin 联络的形式渐近解，而不是 Dubrovin 联络在 $z = 0$附近的基本解。

回顾 Givental 的 R-矩阵（见 [20]）

$$R(t,z) = 1 + R_1(t)z + R_2(t)z^2 + \cdots, \qquad R_k(t) \in \mathrm{End}(H)$$

对于所有半单 $t \in M$，定义为以下微分方程组的唯一解：

$$\frac{\partial R}{\partial t_a}(t,z) = -R(t,z)\frac{\partial \Psi}{\partial t_a}\Psi^{-1} + z^{-1}[\phi_a\bullet, R(t,z)],$$
$$\frac{\partial R}{\partial z}(t,z) = -z^{-1}\theta R(t,z) - z^{-2}[E\bullet, R(t,z)],$$

其中， $\phi_a\bullet$ 和 $E\bullet$ 分别是由平坦向量场 $\partial/\partial t_a$ 和 Euler 向量场 E 进行 Frobenius 乘法的算子， Ψ 是一个条目为】【。

$$\Psi_{ai} := \sqrt{\Delta_i}\frac{\partial t_a}{\partial u_i}, \qquad 1 \le a, i \le N,$$

其中 $u_1, \ldots, u_N$是基点 t°邻域中的典范坐标，即一个局部坐标系，使得，

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \bullet \frac{\partial}{\partial u_j} = \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{\Delta_i},$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克 δ 符号，$\Delta_i \in \mathcal{O}_{M,t^\circ}$ 是在 t° 的某个邻域内无零点的全纯函数。已知典范坐标与算子 $E\bullet_t$ 的特征值重合。这里，End(H) 通过基 $\phi_1, \ldots, \phi_N$ 与 $(N\times N)$-矩阵空间等同，也就是说，End(H) 的元素 $A \in$ 的矩阵元 A_{ab} 由 $A(\phi_b) =: \sum_a \phi_a A_{ab}$ 定义。

注 2.2。 矩阵 Ψ 在忽略归一化因子 Δ_i 的情况下，是从规范坐标到平坦坐标变换的雅可比矩阵。上述对 R-矩阵的定义与 [20] 中的原始定义不同，区别在于通过 Ψ进行共轭，即 $\Psi^{-1}R(t,z)\Psi$ 是 R-矩阵 Givental。

设 $\alpha \in H$ 是一个反射向量。固定一个一般的半单点 $t \in M$，使得典范坐标 $u_1(t)\dots,u_N(t)$ 两两不同。固定一条从 (t°,λ°) 到判别式上某点 $(t,u_i(t))$ 的邻域的参考路径，其中 i 满足：周期向量 $I_\alpha^{(-m)}(t,\lambda)$ 沿着围绕 $u_i(t)$ 的闭环在 λ 中进行解析延拓后变为 $-I_\alpha^{(-m)}(t,\lambda)$。我们断言，周期向量在 $\lambda = u_i(t)$ 处有如下展开：

$$I_\alpha^{(-m)}(t,\lambda) = \sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda-u_i)^{k+m-1/2}}{\Gamma(k+m+1/2)}R_k(t)\Psi(t)e_i, \tag{2.8}$$

其中，e_i 是一个列向量，其第 i 个位置为 1，其余位置为 0，也就是说，Ψe_i 是表示向量场 $\sum_{a=1}^N\sqrt{\Delta_i}\frac{\partial t_a}{\partial u_i}\phi_a = \sqrt{\Delta_i}\partial/\partial u_i$的列向量。下面证明这一断言。利用 $R(t,z)$ 的微分方程，很容易验证上述公式右侧是第二结构联络的一个解。因此，式（2.8）右侧和参考路径确定了一个向量 $\alpha \in H$，使公式（2.8）成立。此外，

$$\big(I_\alpha^{(0)}(t,\lambda),(\lambda-E\bullet)I_\alpha^{(0)}(t,\lambda)\big) = \frac{2\pi}{\Gamma(1/2)^2} + O(\lambda-u_i) = 2+O(\lambda-u_i).$$

由于左侧与 λ 和 u_i无关，因此上述公式中的高阶项 $O(\lambda-u_i)$必须为零。这证明了$(\alpha|\alpha)=2$。最后，由于(2.8)右侧在 $\lambda = u_i$ 附近的解析延拓会改变右侧的符号，因此我们得出结论：α 必定是一个反射向量，并且(2.8)是相应周期向量在判别式附近的展开。

2.4 格罗莫夫–威滕理论

让我们回顾一下Gromov–Witten（GW）理论的一些基础知识。更多详情请参阅 [26]。令 $\mathrm{Eff}(X) \subset H_2(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{t.f.}}$ 为所有可表示为 $\sum_i k_i[C_i]$ 形式的同调类所组成的幺半群，其中 k_i 是非负整数，而 $[C_i]$ 是全纯曲线 $C_i \subset X$ 的基本类。GW 理论的主要对象是稳定映射的模空间 $\mathcal{M}_{g,k}(X,\beta)$，其中 g、k 是非负整数，且 $\beta \in \mathrm{Eff}(X)$。根据定义，一个稳定映射由以下数据$(\Sigma, z_1,\dots,z_k,f)$ 组成：

(1) Σ是一个至多只有结点奇异点的黎曼曲面。(2) z_1、……、z_k 是标记点，也就是说，它们是 Σ上的光滑且两两不同的点。(3) $f\colon \Sigma \to X$ 是一个全纯映射，满足 $f_*[\Sigma]=\beta$。(4) 该映射是稳定的，即$(\Sigma$、z_1、……、z_k、$f)$的自同构群是有限群。

若存在双全纯映射 $\phi\colon \Sigma \to \Sigma'$，使得 $\phi(z_i) = z_i'$且 $f'\circ\phi = f$，则称两个稳定映射 $(\Sigma,z_1,\dots,z_k,f)$ 和 $(\Sigma',z_1',\dots,z_k',f')$ 等价。稳定映射等价类的模空间已知是一个关于概形范畴上的 ´etale拓扑的适当 Delign–Mumford 堆栈（见 [6]）。相应的粗模空间 $M_{g,k}(X,\beta)$ 具有射影簇的结构，但可能非常奇异。

我们有如下图示:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{g,k+1}(X,\beta) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{k+1}} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,k}(X,\beta) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_i} & X \qquad 1 \le i \le k, \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ft}} & & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,k}, & & \end{array}$$

其中，$\mathrm{ev}_i(\Sigma, z_1, \dots, z_k, f) := f(z_i)$，$\pi$是遗忘最后一个标记点并收缩所有不稳定分量的映射，而 ft 是遗忘全纯映射 f 并收缩所有不稳定分量的映射。该模空间具有自然的轨形线丛 L_i ($1 \le i \le k$)，其在点 $(\Sigma, z_1, \dots, z_k, f)$ 处的纤维是余切线 $T^*_{z_i}\Sigma$，并配备了 $(\Sigma, z_1, \dots, z_k, f)$ 的自同构群作用。令 $\psi_i = c_1(L_i)$ 为第一陈类。GW 理论中最复杂的构造是所谓虚基本循环的构造。该构造以复形 $(R\pi_*\mathrm{ev}_{k+1}^* TX)^\vee$ 为输入，它在 $\mathcal{M}_{g,k}(X,\beta)$ 上相对于 $\mathcal{M}_{g,k}$ （见 [4, 5]）给出一个完美障碍理论，并在 $\overline{M}_{g,k}(X,\beta)$ 中导出一个复维数为

$$3g - 3 + k + n(1-g) + \langle c_1(TX), \beta \rangle,$$

称为虚基本循环。Gromov–Witten 不变量按定义是如下关联函数:

$$\left\langle a_1\psi^{l_1}, \dots, a_k\psi^{l_k} \right\rangle_{g,k,\beta} = \int_{[\overline{M}_{g,k}(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}} \mathrm{ev}_1^*(a_1)\cdots\mathrm{ev}_k^*(a_k)\psi_1^{l_1}\cdots\psi_k^{l_k},$$

其中 a_1、.....、$a_k \in H^*(X;\ \mathbb{C})$ 和 l_1、.....、l_k 均为非负整数。

让我们回顾所谓的弦方程和除子方程。假设要么 $\beta \neq 0$ 要么$2g-2+k>0$，那么

$$\left\langle 1, a_1\psi^{l_1}, \dots, a_k\psi^{l_k} \right\rangle_{g,k+1,\beta} = \sum_{i=1}^{k} \left\langle a_1\psi^{l_1}, \dots, a_i\psi^{l_i-1}, \dots, a_k\psi^{l_k} \right\rangle_{g,k,\beta},$$

并且如果 $p \in H^2(X,\mathbb{C})$ 是一个除子类，那么

$$\begin{aligned} \left\langle p, a_1\psi^{l_1}, \dots, a_k\psi^{l_k} \right\rangle_{g,k+1,\beta} = & \left(\int_\beta p\right) \left\langle a_1\psi^{l_1}, \dots, a_k\psi^{l_k} \right\rangle_{g,k,\beta} \\ & + \sum_{i=1}^{k} \left\langle a_1\psi^{l_1}, \dots, p\cup a_i\psi^{l_i-1}, \dots, a_k\psi^{l_k} \right\rangle_{g,k,\beta}, \end{aligned}$$

其中，如果 $l_i = 0$，则我们定义 $\psi_i^{l_i-1} := 0$。我们还需要亏格-0 的拓扑递归关系，即如果 $k \ge 2$，则有以下关系:

$$\begin{aligned} & \left\langle a\psi^{l+1}, b_1\psi^{m_1}, \dots, b_k\psi^{m_k} \right\rangle_{0,k+1,\beta} \\ & \quad = \sum_{i,I,\beta'} \left\langle a\psi^l, \phi_i, b_{i_1}\psi^{m_{i_1}}, \dots, b_{i_r}\psi^{m_{i_r}} \right\rangle_{0,2+r,\beta'} \left\langle \phi^i, b_{j_1}\psi^{m_{j_1}}, \dots, b_{j_s}\psi^{m_{j_s}} \right\rangle_{0,1+s,\beta''}, \end{aligned}$$

其中，求和遍历所有 $1 \le i \le N$、序列 (1、2、 . . . , k) 的所有子序列 $I = (i_1、\ \dots、\ i_r)$（包括空序列），以及所有同调类 $\beta' \in \mathrm{Eff}(X)$，满足 $\beta'' := \beta - \beta' \in \mathrm{Eff}(X)$。序列 $(j_1、\ \dots、\ j_s)$ 是从 (1、2、 . . . 、 k) 中移除子序列 I 后得到的。特别地， $r + s = k$。

2.5 量子上同调的 X

回顾引言中的记号 L_i, $p_i := c_1(L_i)$ 和 $q_i (1 \le i \le r)$。若 $\beta \in \mathrm{Eff}(X)$，则令 $q^\beta = q^{\langle p_1, \beta \rangle} \dots q^{\langle p_r, \beta \rangle}$。群环 $\mathbb{C}[\mathrm{Eff}(X)]$ 称为 X 的诺维科夫环，变量 q_i 称为诺维科夫变量。注意，诺维科夫变量确定了一个从诺维科夫环到形式幂级数环 $\mathbb{C}[\![q_1, \dots, q_r]\!]$的嵌入。固定 $H^*(X;\mathbb{C})$ 的一个齐次基 $\phi_i (1 \le i \le N)$，使得 $\phi_1 = 1$ 且对所有 $1 \le i \le r$都有 $\phi_{i+1} = p_i$。令 $t = (t_1, \dots, t_N)$ 为相应的线性坐标。X 的量子杯积 $\bullet_{t,q}$ 是经典杯积的一种变形，定义如下：

$$(\phi_a \bullet_{t,q} \phi_b, \phi_c) := \langle \phi_a, \phi_b, \phi_c \rangle_{0,3}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathrm{Eff}(X)} \frac{q^\beta}{m!} \langle \phi_a, \phi_b, \phi_c, t, \dots, t \rangle_{0,3+m,\beta}.$$

利用 string 方程和除子方程，我们得到量子杯积的结构常数，即上述公式中的三点 genus-0 关联函数，与 t_1 无关，并且是以下变量的形式幂级数：

$$q_1 \mathrm{e}^{t_2}, \dots, q_r \mathrm{e}^{t_r}, t_{r+1}, \dots, t_N.$$

我们将只考虑这样的流形 X：量子杯积是解析的。更准确地说，我们允许诺维科夫变量取值于 $0 < |q_i| < 1$ $(1 \le i \le r)$。那么我们将假设存在一个 $\epsilon > 0$，使得量子杯积的结构常数对于所有满足 t 的情形都是收敛幂级数

$$\mathrm{Re}(t_i) < \log \epsilon, \quad 2 \le i \le r+1, \qquad |t_j| < \epsilon, \quad r+1 < j \le N. \tag{2.9}$$

不等式（2.9）定义了一个开子集 $M \subset H^*(X;\mathbb{C})$。关于属 0 GW 不变量的主要事实是，$M$ 具有 Frobenius 结构，其中 Frobenius 配对是 Poincar´e 配对，Frobenius 乘法是量子杯积，单位元为 $\mathbf{1} = \phi_1$，而 Euler 向量场为

$$E = \sum_{i=1}^{N} (1 - d_i) t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=2}^{r+1} \left(c_1(TX), \phi^j \right) \frac{\partial}{\partial t_j},$$

其中 d_i 是 ϕ_i 的复次数，即 $\phi_i \in H^{2d_i}(X;\mathbb{C})$，而 $\phi^j (1 \le j \le N)$ 是关于庞加莱配对与 $\phi_i (1 \le i \le N)$ 对偶的 $H^*(X;\mathbb{C})$ 的基。我们指出，若量子杯积是半单的，则有 $H^{\mathrm{odd}}(X;\mathbb{C}) = 0$。否则，一般而言，$M$ 必须赋予超流形结构（见 [26]）。M 的共形维数为 $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$，霍奇分次算子具有如下形式

$$\theta(\phi_i) = \left(\frac{n}{2} - d_i \right) \phi_i, \qquad 1 \le i \le N. \tag{2.10}$$

最后，校准有一个标准选择 $S(t,q,z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t,q) z^{-k}$，其中$S_k(t,q) \in \mathrm{End}(H^*(X;\mathbb{C}))$ 定义为

$$(S_k(t,q)\phi_i, \phi_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathrm{Eff}(X)} \frac{q^\beta}{m!} \left\langle \phi_i \psi^{k-1}, \phi_j, t, \dots, t \right\rangle_{0,2+m,\beta}. \tag{2.11}$$

设与量子上同调对应的弗罗贝尼乌斯流形 M 是半单的。回顾第2.2节中的构造，我们得到反射向量的概念。

3 爆破的几何

令Bl(X) 为 X 在点 pt $\in X$处的爆破， π: Bl(X) $\to X$ 为相应的爆破映射，且 $E := \pi^{-1}$(pt)为例外除子。令 $e = c_1(\mathcal{O}(E)) =$ P.D.(E)。我们想回顾一下关于 Bl(X) 的一些众所周知的事实，这些事实将在后文中使用。

3.1 爆破的上同调

利用 Mayer–Vietoris 序列论证，可以很容易证明以下两个事实:

(1) 拉回映射 π^*: $H^*(X;\mathbb{C}) \succ H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C})$ 是单射，因此我们可以将上同调 $H^*(X;\mathbb{C})$ 视为 $H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C})$ 的子向量空间。(2) 我们有直和分解

$$H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C}) = H^*(X;\mathbb{C}) \bigoplus \widetilde{H}^*(E),$$

其中， $\widetilde{H}^*(E) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}e^i$ 是 E 的约化上同调。

Bl(X) 的庞加莱配对可按如下方式计算。我们选取 $H^*(X;\mathbb{C})$ 的一组基 ϕ_i $(1 \le i \le N)$，使得，

(i) $\phi_1 = 1$ 和 $\phi_N =$P.D.(pt)，(ii) $\phi_{i+1} = p_i = c_1(L_i)$ $(1 \le i \le r)$，其中 L_i $(1 \le i \le r)$是 X上的一组充足线丛，并且 p_i $(1 \le i \le r)$构成 $H^2(X,\mathbb{Z})_{\text{t.f.}}$的 $\mathbb{Z}$基。

引理 3.1。 设 $(\ ,\ )^{\mathrm{Bl}(X)}$ 和 $(\ ,\ )^X$ 分别是Bl(X) 和 X 上的庞加莱配对。则有

(a) $(\phi_i, \phi_j)^{\mathrm{Bl}(X)} = (\phi_i, \phi_j)^X$ 对所有 $1 \le i, j \le N$。(b) $(\phi_i, e^k)^{\mathrm{Bl}(X)} = 0$ 对于 $1 \le i \le N$ 和 $1 \le k \le n-1$。(c) $e^n = (-1)^{n-1}\phi_N$ 以及 $\left(e^k, e^{n-k}\right)^{\mathrm{Bl}(X)} = (-1)^{n-1}$。

证明。 (a)和(b)由投影公式和庞加莱对偶性立即得到。(c)的第二部分是第一部分的推论，因此我们只需证明 $e^n = (-1)^{n-1}\phi_N$。出于维数的原因，我们有 $e^n = c\phi_N$ 。注意到$E \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 以及 $\mathcal{O}(E)|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$。因此， $e|_E = c_1(O(E)|_E) = -p$，其中 $p = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$是 $\mathbb{P}^{n-1}$的标准超平面类。我们得到

$$c = \int_{[\mathrm{Bl}(X)]} e^n = \int_{[E]} e^{n-1} = \int_{[\mathbb{P}^{n-1}]} (-p)^{n-1} = (-1)^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

关于杯积， $H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C})$ 的环结构也很容易计算。我们有

(1) $H^*(X;\mathbb{C})$ 是 $H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C})$ 的子环。(2) $\phi_1 \cup e^k = e^k$ 和 $\phi_i \cup e^k = 0$、 $2 \le i \le N$、 $1 \le k \le n-1$。

(3)

$$e^k \cup e^l = \begin{cases} e^{k+l} & \text{if } k+l < n, \\ (-1)^{n-1}\phi_N & \text{if } k+l = n, \\ 0 & \text{if } k+l > n. \end{cases}$$

性质 (1) 源于上同调中的拉回是环同态。(3) 中的公式由引理 3.1 (c) 得出。最后，(2) 由 (1)、(3) 和引理 3.1(b) 得出。

3.2 K-环的爆破

关于拓扑 K 理论的背景知识，请参见 [13, 第 6] 章。下面计算 Bl(X) 的拓扑 K-环。我们只关注 X 流形，且其对应的量子上同调是半单的。这类 X 流形已知只有 Hodge 型为 (p,p) 的同调类。特别地，$K^1(X)\otimes\mathbb{Q}=0$。为简化叙述，我们假设 $K^1(X)=0$。在下面的论证中，我们需要处理非紧流形。不过，在所有情形下，这些非紧流形都与有限 CW 复形同伦等价。我们将对应的 K-群定义为相应有限 CW 复形的 K-群。

命题 3.2。

(a) K理论的拉回 π^*: $K^0(X)\to K^0(\mathrm{Bl}(X))$ 是单射。

(b) 我们有

$$K^0(\mathrm{Bl}(X))=K^0(X)\oplus\bigoplus_{j=1}^{n-1}\mathbb{Z}\mathcal{O}_E^j,$$

其中 $K^0(X)$ 被视为 $K^0(\mathrm{Bl}(X))$ 的一个子环，这是通过 K 理论拉回 π^* 和$\mathcal{O}_E:=\mathcal{O}-\mathcal{O}(-E)$ 是例外除子的结构层。

证明。令 $U\subset X$ 为爆破中心 pt 的一个小开邻域，并令 $V:=X\setminus\{\mathrm{pt}\}$。注意到 $\{U,V\}$ 是 X 的一个覆盖。置 $\widetilde{U}=\pi^{-1}(U)$，并令 $\widetilde{V}:=\pi^{-1}(V)$，则 $\{\widetilde{U},\widetilde{V}\}$ 是 Bl(X) 的一个覆盖。让我们比较这两个覆盖的约化 K-理论 Mayer–Vietoris 序。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\widetilde{K}^{-1}(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-1}(V)\oplus\widetilde{K}^{-1}(U) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-1}(U\setminus\mathrm{pt}) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{0}(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{0}(V)\oplus\widetilde{K}^{0}(U)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\\
\widetilde{K}^{-1}(\mathrm{Bl}(X)) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-1}(\widetilde{V})\oplus\widetilde{K}^{-1}(\widetilde{U}) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-1}(\widetilde{U}\setminus E) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{0}(\mathrm{Bl}(X)) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{0}(\widetilde{V})\oplus\widetilde{K}^{0}(\widetilde{U}),
\end{array}$$

其中，上述图中的纵向箭头由 K 理论拉回 π^* 诱导。注意，$\widetilde{K}^{\mathrm{ev}}(U\setminus\mathrm{pt})=\widetilde{K}^0(\widetilde{U}\setminus E)=0$，因为 $\widetilde{U}\setminus E\cong U\setminus\mathrm{pt}$ 与 $\mathbb{S}^{2n-1}$ 同伦——即一个维数为 $(2n-1)$ 的球面。因此，上述图中第一个方框和最后一个方框的横向箭头分别是单射和满射。此外，$\widetilde{K}^{-1}(U)=\widetilde{K}^0(U)=0$，因为 U 可缩；并且 $\widetilde{K}^{-1}(\widetilde{U})=0$，因为 $\widetilde{U}$ 与 $E\cong\mathbb{P}^{n-1}$ 同伦等价。由此可知，第二个纵向箭头是同构 $(V\cong\widetilde{V})$，因此，回顾五引理或通过简单的图追踪，可得 $\widetilde{K}^{-1}(\mathrm{Bl}(X))\cong\widetilde{K}^{-1}(X)$。由假设，$\widetilde{K}^{-1}(X)=0$，所以 $\widetilde{K}^{-1}(\mathrm{Bl}(X))=0$。简单的图追踪表明，第四个纵向箭头是单射，即我们证明了 (a)。

注意，上述图表给出了以下短正合列：

$$0\longrightarrow\widetilde{K}^0(X)\xrightarrow{\pi^*}\widetilde{K}^0(\mathrm{Bl}(X))\xrightarrow{|_E}\widetilde{K}^0(\mathbb{P}^{n-1})\longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

其中映射 $|_E$ 是到例外除子 $E\cong\mathbb{P}^{n-1}$ 上的限制。上述正合列分裂，这是因为 $\widetilde{K}^0(\mathbb{P}^{n-1})\cong\mathbb{Z}^{n-1}$ 是一个自由模。注意，$\mathcal{O}_E|_E=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}-\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$（1）是 $\widetilde{K}^0(\mathbb{P}^{n-1})$的生成元，因此（b）由（3.1）的正合性得出。■

让我们计算无挠部分 $K^0(\mathrm{Bl}(X))_{\mathrm{t.f.}}$ 的K 理论乘积。注意，$\pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Bl}(X)})=\mathcal{O}_X$。因此，对于每个 $F\in K^0(X)$，$\pi_*\pi^*(F)=F$。让我们计算 $\mathcal{O}_E\otimes\pi^*F$

对于 $F \in \widetilde{K}^0(X)$。将 $\mathcal{O}_E \otimes \pi^* F$限制到 E 上为 0。回顾正合列 (3.1)，可得 $\mathcal{O}_E \otimes \pi^* F = \pi^* G$，其中某个 $G \in \widetilde{K}^0(X)$。进行推前，得到

$$G = \pi_*(\mathcal{O}_E \otimes \pi^* F) = \pi_*(\mathcal{O}_E) \otimes F = \mathbb{C}_{\mathrm{pt}} \otimes F = \mathrm{rk}(F)\mathbb{C}_{\mathrm{pt}} = 0,$$

其中 $\mathbb{C}_{\mathrm{pt}}$ 是 X 上的摩天大楼层，并且在第3个等式中我们使用了正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-E) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow j_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) \longrightarrow 0,$$

其中 $j\colon \mathbb{P}^{n-1} \to \mathrm{Bl}(X)$ 是其像为例外除子的嵌入。该序列蕴含 $\mathcal{O}_E = j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$，从而 $\pi_*\mathcal{O}_E = (\pi \circ j)_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} = \mathbb{C}_{\mathrm{pt}}$. 我们证明了

$$\mathcal{O}_E \otimes \pi^* F = 0, \qquad \forall F \in \widetilde{K}^0(X).$$

只需计算 $\mathcal{O}_E^n$。将 $\mathcal{O}_E^n$限制到 E上可得 $(1-\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1))^n = 0$。因此，$\mathcal{O}_E^n = \pi^* F$。陈特征$\mathrm{ch}(\mathcal{O}_E^n) = (1-\exp(-c_1(\mathcal{O}(E))))^n = e^n = (-1)^{n-1}\phi_N$，其中使用了引理 3.1 (c)。另一方面，利用格罗滕迪克–黎曼–罗赫公式可以轻松计算摩天大楼层的陈特征。也就是说，我们有

$$\mathrm{ch}(\iota_*^\circ(\mathbb{C})) \cup \mathrm{td}(X) = \iota_*^\circ(\mathrm{ch}(\mathbb{C}) \cup \mathrm{td}(\mathrm{pt})) = \iota_*^\circ(1) = \mathrm{P.D.}(\mathrm{pt}) = \phi_N,$$

其中 $\iota^\circ\colon \mathrm{pt} \to X$是点 pt 的自然包含映射。因此，$\mathrm{ch}(\mathbb{C}_{\mathrm{pt}}) = \phi_N$。与 $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_E^n)$ 的公式比较，我们得到

$$\mathcal{O}_E^n = (-1)^{n-1}\mathbb{C}_{\mathrm{pt}} \mod \ker(\mathrm{ch}).$$

最后，让我们通过引用切丛的 K 理论类公式来结束本节（参见 [15,引理 15。4]）：

$$T\,\mathrm{Bl}(X) = TX - n - 1 + n\mathcal{O}(-E) + \mathcal{O}(E).$$

3.3 爆破的量子上同调

首先比较有效曲线锥 $\mathrm{Eff}(X)$ 和 $\mathrm{Eff}(\mathrm{Bl}(X))$。我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow H_2\left(\mathbb{P}^{n-1};\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{j_*} H_2(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} H_2(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

其中 $j\colon \mathbb{P}^{n-1} \to \mathrm{Bl}(X)$ 是例外除子的自然闭嵌入。该序列的正合性证明与（3.1）的证明类似。特别地，由于上述序列的无挠部分分裂，我们得到

$$H_2(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{Z})_{\mathrm{t.f.}} = H_2(X;\mathbb{Z})_{\mathrm{t.f.}} \oplus \mathbb{Z}\ell,$$

其中，$\ell \in H_2(E;\mathbb{Z})$是例外除子中一条直线的类。爆破的有效曲线类锥$\mathrm{Eff}(\mathrm{Bl}(X)) \subset \mathrm{Eff}(X) \oplus \mathbb{Z}\ell$。爆破的诺维科夫变量将被固定为 X 的诺维科夫变量以及一个对应于线丛 $\mathcal{O}(E)$的额外变量。换言之，对于 $\beta = \beta + d\ell \in \mathrm{Eff}(\mathrm{Bl}(X))$，令

$$q^{\widetilde{\beta}} = q^\beta q_{r+1}^{\langle c_1(O(E)),\widetilde{\beta}\rangle} = q_1^{\langle \phi_2,\beta\rangle} \cdots q_r^{\langle \phi_{r+1},\beta\rangle} q_{r+1}^{-d}.$$

注意，$\mathcal{O}(E)$不是充足线丛：例如，$\ell \cdot E = -1 < 0$。我们对 q_{r+1}的选择使结构常数成为关于 q_{r+1}的形式Laurent（而非幂）级数。遵循 Bayer（见 [3]），我们写作 $q_{r+1} = Q^{n-1}$，其中某个形式变量为 Q。让我们回顾基 ϕ_i $(1 \le i \le N)$

$H^*(X;\mathbb{C})$的。令 $\phi_{N+k} = e^k$ $(1 \le k \le n-1)$。则 ϕ_i $\left(1 \le i \le \widetilde{N} := N+n-1\right)$ 是 $H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C})$的基。令 $t = (t_1, \dots, t_{\widetilde{N}})$为$H^*(\mathrm{Bl}(X);\mathbb{C})$上的相应线性坐标系。$\mathrm{Bl}(X)$的量子上同调的结构常数形式如下

$$(\phi_a \bullet_{t,q} \phi_b, \phi_c) := \langle \phi_a, \phi_b, \phi_c \rangle_{0,3}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\widetilde{\beta}=(\beta,d)} \frac{q^\beta Q^{-d(n-1)}}{m!} \langle \phi_a, \phi_b, \phi_c, t, \dots, t \rangle_{0,3+m,\widetilde{\beta}}.$$

注 3.3. 的量子杯积 $H^*(X)$ 仅取决于 $(t_2, \dots, t_N)$。假设这些 $N-1$ 参数取一般值，使得 $H^*(X)$ 的量子杯积是半单的。那么根据 Bayer [3]（另见命题 4.6），即使我们将其余参数限制为 0，也就是说令 $t_1 = t_{N+1} = \cdots = t_{\widetilde{N}} = 0$，爆破的量子杯积仍然是半单的。因此，就我们的目的而言，只需研究 $t \in H^*(\mathrm{Bl}(X))$，其中 $t_1 = t_{N+1} = \cdots = t_{\widetilde{N}} = 0$。

3.4 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的扭曲的 GW 不变量

~事实证明，$\mathrm{Bl}(X)$的属-0GW不变量（其次数为 $\beta = d\ell$ 且满足 $d \neq 0$ ）可以与 $\mathbb{P}^{n-1}$的某些扭曲的 GW 不变量对应起来。假设 $(C, z_1, \dots, z_k, f)$ 是一个表示 $\mathcal{M}_{0,k}(\mathrm{Bl}(X)\ d\ell)$ 中一点的稳定映射。令 π: $\mathrm{Bl}(X) \to X$ 为爆破映射。由于 $\pi_* \circ f_*[C] = 0$ 和 π 在$\mathrm{Bl}(X) \setminus E$ 与 $X \setminus \{\mathrm{pt}\}$ 之间诱导了一个双全纯映射，我们得到 $f(C)$ 包含于 E 中。因此，我们有一个规范的对应

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(\mathrm{Bl}(X), d\ell) = \overline{\mathcal{M}}_{0,k}(E, d),$$

其中 $E \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 是例外除子。我们比较两个模空间在 $(C, z_1, \dots, z_k, f)$ 处的虚切空间。对于左侧，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{0,k,d\ell} = {} & H^1(C, \mathcal{T}_C(-z_1 - \cdots - z_k)) - H^0(C, \mathcal{T}_C(-z_1 - \cdots - z_k)) \\ & + H^0(C, f^*T_{\mathrm{Bl}(X)}) - H^1(C, f^*T_{\mathrm{Bl}(X)}),\end{aligned}$$

而对于右侧，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{0,k,d} = {} & H^1(C, \mathcal{T}_C(-z_1 - \cdots - z_k)) - H^0(C, \mathcal{T}_C(-z_1 - \cdots - z_k)) \\ & + H^0(C, f^*T_E) - H^1(C, f^*T_E),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{T}_C$是 C的切层，而 $\mathcal{T}_C(-z_1 - \cdots - z_k)$ 是 $\mathcal{T}_C$的子层，由在 $z_1, \dots, z_k$ 处消失的截面组成。另一方面，我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow T_E \longrightarrow T_{\mathrm{Bl}(X)|E} \longrightarrow \mathcal{O}_E(-1) \longrightarrow 0,$$

这里我们用到了 $\mathcal{O}_E(-1)$ 是 $\mathrm{Bl}(X)$ 中例外除子的法丛。通过稳定映射将该正合列拉回到 C，并取上同调长正合列，得到

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow {} & H^0(C, f^*T_E) \longrightarrow H^0(C, f^*T_{\mathrm{Bl}(X)}) \longrightarrow H^0(C, f^*\mathcal{O}_E(-1)) \longrightarrow \\ \longrightarrow {} & H^1(C, f^*T_E) \longrightarrow H^1(C, f^*T_{\mathrm{Bl}(X)}) \longrightarrow H^1(C, f^*\mathcal{O}_E(-1)) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

注意，$H^0(C,\ f^*\mathcal{O}_E(-1)) = 0$，因为 C是一条有理曲线。事实上，若 C'是 C 的一个不可约分支，且 $d' = f_*[C']$ 是它对 f的次数的贡献，那么 $C' \cong \mathbb{P}^1$且$f^*\mathcal{O}_E(-1)|_{C'} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d')$。因此，$H^0(C',\ f^*\mathcal{O}_E(-1)) = 0$，于是我们得到，$f^*\mathcal{O}_E(-1)$的截面在 C 的不可约分支上的限制均为 0，这意味着

不存在非零整体截面。回顾一下结点曲线的黎曼–罗赫公式（可通过对结点数进行归纳轻易证明）

$$\dim H^0(C,\mathcal{L})-\dim H^1(C,\mathcal{L})=1-g+\int_{[C]}c_1(\mathcal{L}),$$

其中， $\mathcal{L}$ 是 C 上的全纯线丛， g 是 C的亏格。将黎曼–罗赫公式应用于 $f^*\mathcal{O}_E(-1)$，可得

$$\dim H^1(C,f^*\mathcal{O}_E(-1))=-1-\int_{f_*[C]}c_1(\mathcal{O}_E(-1))=d-1.$$

上同调群 $H^1(C,f^*\mathcal{O}_E(-1))$是全纯向量丛$\mathbb{N}_{0,k,d}$在$\mathcal{M}_{0,k}(E,d)$上的纤维，其秩为 $d-1$。虚切丛之间满足关系$\mathcal{T}_{0,k,d\ell}=\mathcal{T}_{0,k,d}-\mathbb{N}_{0,k,d}$。回顾虚基本循环 [5],的构造，可得

$$\left[\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(\mathrm{Bl}(X),d\ell)\right]^{\mathrm{virt}}=\left[\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(E,d)\right]^{\mathrm{virt}}\cap e(\mathbb{N}_{0,k,d}).$$

上述虚基本类的公式给出以下公式:

$$\langle\alpha_1\psi^{m_1},\dots,\alpha_k\psi^{m_k}\rangle_{0,k,d\ell}=\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(E,d)]^{\mathrm{virt}}}\prod_{i=1}^{k}\mathrm{ev}_i^*(\alpha_i|_E)\psi_i^{m_i}\cup e(\mathbb{N}_{0,k,d}).$$

稍后我们将需要 $d=1$的三点 GW 不变量。下面来计算它们。若 $d=1$，则 $e(\mathbb{N}_{0,\ k,\ d})=1$ ，上述公式意味着爆破的 GW 不变量与例外除子的 GW 不变量相同，即

$$\langle\alpha_1\psi^{m_1},\dots,\alpha_k\psi^{m_k}\rangle_{0,k,\ell}^{\mathrm{Bl}(X)}=\langle\alpha_1|_E\psi^{m_1},\dots,\alpha_k|_E\psi^{m_k}\rangle_{0,k,1}^{E},$$

其中我们使用上标 $\mathrm{Bl}(X)$ 和 E ，以说明关联函数分别是 $\mathrm{Bl}(X)$ 和 E 的 GW 不变量。注意，若 $p=c_1\mathcal{O}_E(1)$ 是超平面类，则 $e|_E=-p$。众所周知， $\mathbb{P}^{n-1}$ 的量子上同调为 $\mathbb{C}[p]/(p^n-Q)$。特别地，3 点关联函数

$$\left\langle p^i,p^j,p^k\right\rangle_{0,3,1}=\begin{cases}1 & \text{if } i+j+k=2n-1,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad \forall 0\le i,j,k\le n-1.$$

因此,

$$\left\langle e^i,e^j,e^k\right\rangle_{0,3,\ell}=\begin{cases}-1 & \text{if } i+j+k=2n-1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

让我们特化 $k=1$。利用除子方程（回忆一下， $\int_\ell e=-1$），我们得到

Le

$$\left\langle e^i,e^j\right\rangle_{0,2,\ell}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j=n-1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

3.5 Gathmann 的消失定理

Gathmann 发现了爆破的 GW 不变量的一个非常有趣的消失判据（见 [17]）。我们需要对他的结果作一点推广，可以表述如下。按照 Gathmann 的做法，我们为每个基向量赋予一个权重。

$$\mathrm{wt}(\phi_a)=\begin{cases}0 & \text{if } 1\le a\le N,\\ a-N-1 & \text{if } N<a\le N+n-1.\end{cases}$$

换句话说，对于所有 $1\le k\le n-1$ ，异常类 e^k 的权重均为 $k-1$ ；其他情况下权重均为 0。

命题 3.4。 假设我们有一个 *GW* 不变量

$$\langle \phi_a \psi^k, \phi_{b_1}, \dots, \phi_{b_m}, e^{l_1}, \dots, e^{l_s} \rangle_{0,\beta+d\ell,1+m+s}, \tag{3.2}$$

~其中 $1 \le a \le N$、 $1 \le b_1$、……、 $b_m \le N$，以及 $2 \le l_1$、……、 $l_s \le n-1$，满足以下3 条件：

(*i*) $\beta \neq 0$。(*ii*) $\mathrm{wt}(\phi_a) + \sum_{i=1}^{s}(l_i - 1) > 0$ 或 $d > 0$。(*iii*) $\mathrm{wt}(\phi_a) + \sum_{i=1}^{s}(l_i - 1) < (d+1)(n-1) - k$.

那么 *GW* 不变量(3.2) 必须为0。

证明。证明通过对 k进行归纳完成。当 $k = 0$时，Gathmann 的结果成立。归纳步骤使用 genus-0 拓扑递归关系（见第 2.4节）。假设命题对 k 已得到证明，并证明其对 $k+1$成立。利用 TRR，我们将其中 3.2 式中的关联函数里的 k 替换为 $k+1$，写成以下形式：

$$\sum_{c=1}^{N+n-1} \sum \langle \phi_a \psi^k, \phi_c, \phi_{B'}, e^{L'} \rangle_{\beta'+d'\ell} \langle \phi^c, \phi_{B''}, e^{L''} \rangle_{\beta''+d''\ell},$$

其中第二个求和遍历所有可能的拆分 $B' \sqcup B'' = \{b_1, \dots, b_m\}$, $L' \sqcup L'' = \{l_1, \dots, l_s\}$,$\beta' + \beta'' = \beta$ 和 $d' + d'' = d$。记号说明如下。我们从关联函数的记号中省略了亏格和标记点的数量，因为亏格始终为 0，且标记点的数量与插入项的数量相同。所有 $\phi_{b'}$ 与 $b' \in B'$ 的插入记作 $\phi_{B'}$，所有 $e^{l'}$ 与 $l' \in L'$ 的插入记作 $e^{L'}$。第二个关联函数中的 $\phi_{B''}$ 和 $e^{L''}$ 也采用类似的约定。第一个关联函数有 $2+m'+s'$ 个插入项，而第二个关联函数有 $1+m''+s''$ 个插入项，其中 m'、m''、 s' 和 s'' 分别是 B'、 B''、 L' 和 L'' 中元素的数量。我们必须证明，若命题中的 3 个条件成立，且其中的 k 应替换为 $k+1$，那么上述求和为 0。我们将涉及 B' 和 L' 的关联函数称为第一个关联函数，将涉及 B'' 和 L'' 的关联函数称为第二个关联函数。我们将证明，对于上述求和中的每一项，第一个关联函数或第二个关联函数必有一个为零。证明分为 4 种情况。

情形 1： 若 $\beta' = 0$ 且第二个关联函数不满足条件（ii），即 $\mathrm{wt}(\phi^c) + \sum_{l'' \in L''}(l''-1) \le 0$ 且 $d'' \le 0$。注意，由于 $\beta'' = \beta \neq 0$，第二个关联函数满足条件 (i)。由于 $\beta' = 0$，我们只需考虑 c，使得 $\phi_c|_E \neq 0$，从而$\phi_c \in \{1, e, \dots, e^{n-1}\}$。此外， ϕ^c的权重为 0，因此 $\phi_c \in \{1, e^{n-1}\}$ 且 $\phi^c \in \{\phi_N, e\}$。由于对所有 $l'' \in L''$，$l'' \ge 2$，集合 L'' 必为空。在这种情况下，和中的相应项为

$$\langle \phi_a \psi^k, \phi_c, 1, \dots, 1, e^{l_1}, \dots, e^{l_s} \rangle_{d'\ell} \langle \phi^c, \phi_{B''} \rangle_{\beta+d''\ell},$$

其中，来自 $\phi_{B'}$ 的插入项必须全部为 1，否则 $\phi_b|_E = 0$，关联函数为零。利用维数公式，我们得到

$$\deg(\phi_a) + k + \deg(\phi_c) + \sum_{i=1}^{s} l_i = (d'+1)(n-1) + s + m'.$$

注意， ϕ_a必须满足 $\phi_a|_E \neq 0$，否则关联函数为 0。因此， $\phi_a \in \{1, e, \dots, e^{n-1}\}$这意味着$\deg(\phi_a) \le \mathrm{wt}(\phi_a) + 1$，不等式仅在 $\phi_a = 1$时成立。我们得到

$$\begin{aligned}(d'+1)(n-1) + m' &= \deg(\phi_a) + k + \deg(\phi_c) + \sum_{i=1}^{s}(l_i - 1) \\ &\le \mathrm{wt}(\phi_a) + 1 + k + \sum_{i=1}^{s}(l_i - 1) + \deg(\phi_c).\end{aligned}$$

另一方面，让我们回顾一下，关联函数（3.2）（以 $k+1$ 替代 k）满足条件 (iii)，即：

$$\mathrm{wt}(\phi_a)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)<(d+1)(n-1)-k-1.$$

我们得到（$d'+1$）（$n-1$）$+m'<$ deg（ϕ_c）+（$d+1$）（$n-1$）。回顾一下，ϕ_c有两种可能：$\phi_c=1$ 或 $\phi_c=e^{n-1}$。在第一种情形下，我们得到 $0\le m'<d''$（$n-1$），从而得到 $d''>0$，这与我们的假设 $d''\le 0$矛盾。在第二种情形下，我们得到 $0\le m'<$（$d''+1$）（$n-1$）。这意味着 $d''>-1$，结合 $d''\le 0$ 可推出 $d''=0$。然而，由于$\phi^c=e$，根据除子方程，第二个关联函数为零。这就完成了我们在情形1中的证明。

情形 2：$\beta'=0$ 且第二个关联函数满足条件（ii）。由于 $\beta''=\beta\neq 0$，第二个关联函数也满足条件(i)，因此除非条件 (iii)不成立，否则它将为零，也就是说，

$$\mathrm{wt}(\phi^c)+\sum_{l''\in L''}(l''-1)\ge(d''+1)(n-1).$$

另一方面，类似于情形1，我们必须有$\phi_{b'}=1$ 对所有 $b'\in B'$，所以将维数公式应用于第一个关联函数可得

$$\deg(\phi_a)+k+\deg(\phi_c)+\sum_{l'\in L'}(l'-1)=(d'+1)(n-1)+m'.$$

将上述不等式和恒等式相加，我们得到

$$\deg(\phi_a)+k+\deg(\phi_c)+\mathrm{wt}(\phi^c)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)\ge(d+1)(n-1)+n-1+m'.$$

同样，deg(ϕ_a) $\le$wt(ϕ_a) $+1$，所以

$$m'+n-1-\deg(\phi_c)-\mathrm{wt}(\phi^c)\le\mathrm{wt}(\phi_a)+1+k+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)-(d+1)(n-1).$$

再次回顾条件(iii)，我们得到上述不等式的右侧为 <0，因此 $m'+n-1<$ deg(ϕ_c)+wt(ϕ^c)。与情形1类似，我们可以假设 $\phi_c|_E\neq 0$，也就是说，$\phi_c\in\{1,e,\dots,e^{n-1}\}$ 这意味着deg(ϕ_c) + wt(ϕ^c) $\le n-1$。这与 $m'+n-1<$ deg(ϕ_c) +wt(ϕ^c) 矛盾。

情况 3：如果 $\beta'\neq 0$ 且第一个关联函数不满足条件（ii），即 wt(ϕ_a) +wt(ϕ_c)+ $\sum_{l'\in L'}(l'-1)=0$ 且 $d'\le 0$。注意，我们必须有 $L'=\varnothing$ 且 $d''>0$或 $\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)>0$中的一个成立。因此，第二个关联函数满足条件（ii）。

假设 $\beta''=0$ ($\Leftrightarrow$ 条件(i) 不成立)。我们必须有 $\phi_{b''}|_E\neq 0$ 对所有 $b''\in B''$ $\Rightarrow\phi_{b''}=1$ 对所有 $b''\in B''$。回顾第二个关联函数的维数公式，我们得到

$$\deg(\phi^c)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)=(d''+1)(n-1)+m''-1.$$

另一方面，由于在所考虑的情形下 wt(ϕ_a) $=0$，条件 (iii) 意味着 $\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)<(d+1)(n-1)-k-1$。将这一估计与上面的等式结合，我们得到 $m''+k<$ deg(ϕ^c) $+d'(n-1)$。如果 $m''>0$，那么第二个关联函数至少有一个由 1 ($\because B''\neq\varnothing$) 给出的插入。由于第二个关联函数没有后代，除非 $d''=0$，否则它将为零。然而，如果 $\beta''=d''=0$，第二个关联函数非零当且仅当

插入的数量为 3，因为模空间是 $\mathcal{M}_{0,\ 1+m''+s}\times \mathrm{Bl}(X)$，也就是说，$m''=s=1$。此外，$\phi^c\cup e^{l_1}$ 至多相差一个常数必须是 ϕ_N，因此 $\phi^c=e^{n-l_1}$ 和 $\phi_c=e^{l_1}$。然而，$l_1\geq 2$ 根据定义成立，所以 $\mathrm{wt}(\phi_c)=l_1-1>0$ ——这与第一个关联函数不满足条件（ii）的假设相矛盾。我们得到 $m''=0$，而我们之前得到的估计给出 $k<\deg(\phi^c)+d'(n-1)$。注意，$\deg(\phi^c)\leq n-1$。因此，$d'>-1$。回忆我们假设 $d'\leq 0$，所以 $d'=0$。利用除子方程，我们得到 $\phi_c\neq e$。由于$\beta''=0$，限制 $\phi^c|_E\neq 0$，因此 $\phi^c\in\{1,e,\dots,e^{n-1}\}$。此外，$\phi^c\neq 1$，这归功于弦方程。于是，对于某个 $l\geq 2$，我们得到 $\phi_c=e^l$，这与 $\mathrm{wt}(\phi_c)=0$ 的假设相矛盾。

现在假设 $\beta''\neq 0$。那么第二个关联函数同时满足条件 (i) 和 (ii)。因此，条件 (iii) 必须不成立，也就是说，

$$\mathrm{wt}(\phi^c)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)\geq (d''+1)(n-1). \tag{3.3}$$

利用 $\mathrm{wt}(\phi^c)\leq n-2$ 以及 $\sum_i(l_i-1)<(d+1)(n-1)-k-1$，我们得到

$$(d''+1)(n-1)<n-2+(d+1)(n-1)-k-1,$$

这意味着 $k+1<d'(n-1)+n-2$. 特别地，$d'>-1$，并且由于假设$d'\leq 0$，我们得到 $d'=0$。若 $\phi_c=e$，则利用除子方程可得

$$\left\langle \phi_a\psi^k,\phi_c,\phi_{B'}\right\rangle_{\beta'}=\left\langle e\cup\phi_a\psi^{k-1},\phi_{B'}\right\rangle_{\beta'}.$$

由于 $\mathrm{wt}(\phi_a)=0$ 杯积 $e\cup\phi_a\neq 0$ 仅当 $\phi_a=e$。然而这意味着 $e\cup\phi_a=e^2$具有正权重，因此上述恒等式右端的关联函数同时满足条件 (i) 和 (ii)。条件 (iii) 必须不成立，因此 $1\geq n-1-(k-1)=n-k$，也就是说，$k\geq n-1$。另一方面，回顾我们已经得到估计 $k+1<d'(n-1)+n-2=n-2$ 这与前一句中的不等式相矛盾。我们得到 $\phi_c\neq e$，结合$\mathrm{wt}(\phi_c)=0$可知 $\phi^c\notin\{e^2,\dots,e^{n-1}\}$，从而$\mathrm{wt}(\phi^c)=0$。回顾 (3.3)，我们得到

$$(d''+1)(n-1)\leq\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)<(d+1)(n-1)-k-1.$$

由于 $d'=0$，我们得到 $0<-k-1$，这显然是矛盾的。至此，情形 3 中消失断言的证明完成。

情形 4：如果 $\beta'\neq 0$ 并且第一个关联函数满足条件（ii），那么第一个关联函数的条件 (iii) 必然不成立，即

$$\mathrm{wt}(\phi_a)+\mathrm{wt}(\phi_c)+\sum_{l'\in L'}(l'-1)\geq (d'+1)(n-1)-k. \tag{3.4}$$

我们断言第二个关联函数也满足条件 (i) 和 (ii)。事实上，假设 (i) 不成立，即 $\beta''=0$。$\phi_{B''}$ 中的所有插入项都必须为 1。回顾维数公式，我们得到

$$\deg(\phi^c)+\sum_{l''\in L''}(l''-1)=(d''+1)(n-1)-1+m''.$$

将上述等式与不等式（3.4）相加，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(\phi_a)+\deg(\phi^c)+\mathrm{wt}(\phi_c)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)&\geq (d+2)(n-1)-k-1+m''\\&=(d+1)(n-1)-k-1+n-1+m'',\end{aligned}$$

这等价于

$$n-1+m''-\deg(\phi^c)-\mathrm{wt}(\phi_c)\le \mathrm{wt}(\phi_a)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)+k+1-(d+1)(n-1)<0,$$

其中，最后一个不等式用到了我们想要证明其为零的关联函数满足条件 (iii)。我们得到 $m''+n\le \deg(\phi^c)+\mathrm{wt}(\phi_c)$。另一方面，由于 $\phi^c|_E\neq 0$，我们有 $\phi^c\in\{1,e,\dots,e^{n-1}\}$，这意味着 $\deg(\phi^c)+\mathrm{wt}(\phi_c)\le n-1$——矛盾。这证明了 $\beta''\neq 0$。

假设第二个关联函数不满足条件（ii）。那么，$d''\le 0$，$\mathrm{wt}(\phi^c)=0$，并且 $L''=\varnothing$。由于 $L''=\varnothing$，不等式（3.4）化为

$$\mathrm{wt}(\phi_a)+\mathrm{wt}(\phi_c)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)\ge (d'+1)(n-1)-k.$$

另一方面，再次回顾我们希望证明其消失的关联函数的条件 (iii)，可得

$$\mathrm{wt}(\phi_a)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)<(d+1)(n-1)-k-1.$$

结合上述估计，我们得到

$$(d'+1)(n-1)-k<\mathrm{wt}(\phi_c)+(d+1)(n-1)-k-1,$$

这变为 $(-d'')(n-1)<\mathrm{wt}(\phi_c)-1$。由于$\mathrm{wt}(\phi^c)=0$ 且 $d''\le 0$ 上述不等式只有在 $\phi^c=e$时才可能成立。因此，根据除子方程，我们得到 $d''\neq 0$，即 $d''\le -1$，从而 $\mathrm{wt}(\phi_c)-1>n-1$。这是一个矛盾，因为 $\mathrm{wt}(\phi_c)$ 的最大可能值是 $n-2$。这就完成了我们关于第二个关联函数满足条件 (i) 和 (ii) 的证明。

最后，为使第二个关联函数非零，条件 (iii) 必须不成立。我们得到

$$\mathrm{wt}(\phi^c)+\sum_{l''\in L''}(l''-1)\ge (d''+1)(n-1).$$

将上述不等式与（3.4）相加，得到

$$\mathrm{wt}(\phi_a)+\mathrm{wt}(\phi_c)+\mathrm{wt}(\phi^c)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)\ge (d+2)(n-1)-k=(d+1)(n-1)-k-1+n.$$

另一方面，回想不等式

$$\mathrm{wt}(\phi_a)+\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)<(d+1)(n-1)-k-1,$$

我们得到

$$n-\mathrm{wt}(\phi_c)-\mathrm{wt}(\phi^c)<0.$$

如果其中一个权重为 0，则该不等式显然不成立。如果两个权重均非零，那么我们将有 $\mathrm{wt}(\phi_c)+\mathrm{wt}(\phi^c)=n-2$，这再次与上述不等式矛盾。结论是，第一个或第二个关联函数满足条件 (iii)，因此根据归纳假设，两个关联函数中的一个必为零。■

4 第二结构联络与爆破

让我们回顾一下第 3.1 节和第 3.3 节中已经确定的记号。从现在起，对于复-~杂簇 Y，我们分别用 $H(Y) := H^*(Y,\mathbb{C})$ 和 $H(Y)$ 表示 Y 的复系数上同调和约化上同调。利用直和分解-~式 $H(\mathrm{Bl}(X)) = H(X) \oplus H(E)$，我们将向量 $v \in H(\mathrm{Bl}(X))$ 的 $H(X)$-分量（分别为 $H(E)$-分量）定义为 v 在 $H(X)$（分别为 $H(E)$）上的投影。

我们将把 $\mathrm{Bl}(X)$ 的量子上同调视为一个由诺维科夫变量 $q = (q_1, \dots, q_{r+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{r+1}$ 参数化的弗罗贝尼乌斯流形族，该族定义于第 3.3 节。回忆一下$q_{r+1} = Q^{n-1}$。我们将关注$\mathrm{Bl}(X)$ 的第二结构联络关于 Q 在 $Q = 0$ 处的洛朗级数展开，同时其余参数 $q_1, \dots, q_r$ 保持不变。本节的主要目标是确定该展开的首项。

4.1 爆破的周期向量

我们将 $\widetilde{\rho}$ 和 ρ 分别记为经典杯积乘法的算子，其乘法元素分别为-~tively $c_1(T\,\mathrm{Bl}(X))$和 $c_1(TX)$。令 θ 和 θ 分别为底层量子上同调$\mathrm{Bl}(X)$ 和 X 的弗罗贝尼乌斯结构的分次算子（见（2.10））。在下面的引理中，我们需要以下记号。设 $A\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}(H)$是一个取值于 $\mathrm{End}(H)$ 的光滑函数。令 m 为 $\mathbb{C}$上的标准坐标。我们将 $\mathbb{C}$上的右微分算子定义为如下形式的形式表达式

$$L\big(m, \overleftarrow{\partial}_m\big) = \sum_{k=0}^{r} B_k(m) \overleftarrow{\partial}_m^k, \tag{4.1}$$

其中系数 $B_k(m) \in \mathrm{End}(H)$ 光滑地依赖于 m。我们定义 L 在 A 上的作用为

$$A(m)L\big(m, \overleftarrow{\partial}_m\big) := \sum_{k=0}^{r} \partial_m^k(A(m) \circ B_k(m)),$$

其中，$\circ$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 中的复合运算。给定两个右微分算子 L_1 和 L_2，存在唯一的右微分算子 $L_1 \circ L_2$，使得，

$$\big(A(m)L_1\big(m, \overleftarrow{\partial}_m\big)\big)L_2\big(m, \overleftarrow{\partial}_m\big) =: A(m)(L_1 \circ L_2)\big(m, \overleftarrow{\partial}_m\big).$$

我们称 $L_1 \circ L_2$ 是 L_1 与 L_2的复合。可以验证此运算满足结合律，因此，所有形如（4.1）的右微分算子构成一个结合代数，从右侧作用于定义在某空间上的光滑 $\mathrm{End}(H)$-值函数空间 $\mathbb{C}$。

引理 4.1.

(a) 以下公式成立：

$$\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) := e^{\widetilde{\rho}\partial_\lambda\partial_m}\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m+1/2\big)}\right) = \left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m+1/2\big)}\right) e^{\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m},$$

其中，第一个恒等式只是定义，而 $\overleftarrow{\partial}_m$ 表示关于 m的导子右作用。

(*b*) 下面的恒等式成立：

$$\widetilde{I}^{(-m)}\big(Q^{-1}\lambda\big)=\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m+1/2\big)}\right)e^{Q\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m}Q^{-(\widetilde{\theta}+m-1/2)}Q^{-\widetilde{\rho}}.$$

证明。(a) 根据定义

$$\begin{aligned}e^{\widetilde{\rho}\partial_\lambda\partial_m}\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m+1/2\big)}\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\widetilde{\rho}^k\partial_m^k\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-k-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m-k+1/2\big)}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\partial_m^k\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m+1/2\big)}\right)\widetilde{\rho}^k,\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\widetilde{\rho}\widetilde{\theta}=\big(\widetilde{\theta}+1\big)\widetilde{\rho}$。上述表达式按定义是 $e^{\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m}$ 对 $\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}/\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m+1/2\big)$ 的右作用。

(b) 使用 (a) 部分的公式，我们得到，必须证明的恒等式等价于以下共轭公式：

$$Q^{\widetilde{\theta}+m}Q^{-Q\widetilde{\rho}}Q^{-(\widetilde{\theta}+m)}=Q^{-\widetilde{\rho}},$$

and

$$Q^{-(\widetilde{\theta}+m)}e^{\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m}Q^{\widetilde{\theta}+m}=Q^{-Q\widetilde{\rho}}e^{Q\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m}.\tag{4.2}$$

第一个恒等式可由 $\big[\widetilde{\theta},\widetilde{\rho}\big]=-\widetilde{\rho}$ 轻易推出。下面证明（4.2）。首先注意，这是一条关于从右侧作用的算子的恒等式。我们将用到以下事实。设有一个结合代数 $\mathcal{A}$ 从右侧作用于向量空间 V，即 $v\cdot(AB)=(v\cdot A)\cdot B$ 对所有 $A,\ B\in\mathcal{A}$ 以及 $v\in V$ 都成立。那么以下公式成立：

$$v\cdot\big(e^ABe^{-A}\big)=v\cdot\big(e^{\mathrm{ad}_A}(B)\big),\tag{4.3}$$

其中 $\mathrm{ad}_A(X)=AX-XA$。在我们的情形中，$\mathcal{A}$ 是 m 上的微分算子代数，其系数取自 $\mathrm{End}(H^*(\mathrm{Bl}(X)))$；也就是说，作为向量空间，$\mathcal{A}$ 由如下形式的元素组成

$$\sum_{k=0}^{k_0}c_k(m)\overleftarrow{\partial}_m^k,\qquad c_k(m)\in\mathrm{End}(H^*(\mathrm{Bl}(X))),$$

且 $\mathcal{A}$ 中的乘积由 $H^*(\mathrm{Bl}(X))$ 上自同态的自然复合以及交换关系 $\big[m,\overleftarrow{\partial}_m\big]=1$ 决定。我们将共轭公式（4.3）应用于（4.2）。主要难点在于证明

$$\mathrm{ad}^k_{\widetilde{\theta}+m}\big(\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m\big)=(-1)^k\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m+(-1)^{k-1}k\widetilde{\rho},\tag{4.4}$$

对所有 $k\geq 0$ 均成立。我们对 k 作归纳论证。当 $k=0$ 时，该恒等式成立。假设该恒等式对 k 成立。于是得到

$$\begin{aligned}\big[\widetilde{\theta}+m,(-1)^k\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m+(-1)^{k-1}k\widetilde{\rho}\big]&=(-1)^k\big(-\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m+\widetilde{\rho}\big)+(-1)^kk\widetilde{\rho}\\&=(-1)^{k+1}\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m+(-1)^k(k+1)\widetilde{\rho},\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\big[\widetilde{\theta},\widetilde{\rho}\big]=-\widetilde{\rho}$ 以及 $\big[m,\overleftarrow{\partial}_m\big]=1$。利用共轭公式（4.3）和公式（4.4），可得（4.2）的左边等于

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\log Q)^k\big((-1)^k\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m+(-1)^{k-1}k\widetilde{\rho}\big)\right)=e^{Q\widetilde{\rho}\overleftarrow{\partial}_m}e^{-(\log Q)Q\widetilde{\rho}},$$

这与（4.2）的右端相同。 ■

令 $q=(q_1,\dots,q_r)$，并设 $S(t,q,Q,z)$ 为爆破 Bl(X) 的校准。回顾一下 Bl(X) 的量子上同调的第二结构联络的基本解。

$$I^{(-m)}(t,q,Q,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S_k(t,q,Q)\partial_\lambda^k \widetilde{I}^{(-m)}(\lambda).$$

回顾引理4.1，我们得到

$$I^{(-m)}\big(t,q,Q,Q^{-1}\lambda\big)Q^{\widetilde{\rho}}Q^{\widetilde{\theta}+m-1/2} = \sum_{i,l=0}^{\infty}(-1)^l Q^l S_l(t,q,Q)\frac{\partial_m^i}{i!}\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-l-1/2}}{\Gamma\big(\widetilde{\theta}+m-l+1/2\big)}(Q\widetilde{\rho})^i\right). \tag{4.5}$$

我们将霍奇分次算子 $\widetilde{\theta}$ θ X H^* X $\theta\big(e^k\big)=\frac{n}{2}e^k$ of 延拓到 $\overline{\text{(Bl( ))}}$，使得对所有 $1\le k\le n-1$ 都成立。令 $\Delta:=\theta-\theta$，则在基

$$\phi_i,\quad 1\le i\le N,\qquad e^k,\quad 1\le k\le n-1 \tag{4.6}$$

H^*(Bl(X)) 中，算子 Δ 具有如下形式

$$\Delta(\phi_i)=0,\quad 1\le i\le N,\qquad \Delta\big(e^k\big)=-ke^k,\quad 1\le k\le n-1.$$

需要指出的是，关于 Poincar´e 配对，与基 (4.6) 对偶的 H^*(Bl(X)) 的基为 $\phi^i(1\le i\le N)$，$e_k(1\le k\le n-1)$，其中 $\phi^i(1\le i\le N)$ 是 $H^*(X)$ 的一个基，它关于 Poincar´e 配对（在 X 上）与 ϕ_i ($1\le i\le N$) 对偶，并且 $e_k:=(-1)^{n-1}e^{n-k}$。

引理 4.2. 假设 $t=\sum_{b=2}^{N}t_b\phi_b\in H^*(X)$ 且 $l\ge 1$。那么

$$Q^{\Delta}Q^{k+l}\big(S_l(t,q,Q)e^k\big)=\sum_{k''=1}^{n-1}\sum_{d=0}^{\infty}\big\langle\psi^{l-1}e^k,e^{k''}\big\rangle_{0,2,d\ell}e_{k''}+\big\langle\psi^{l-1}e^k,1\big\rangle_{0,2,d\ell}Q^n(-1)^{n-1}\phi_N + O\big(Q\widetilde{H}(E)+Q^{n+1}H(X)\big),$$

其中，O-项表示一个以 Q 为变量、取值于 $H(\mathrm{Bl}(X))$ 的幂级数，其 $H(E)$-分量只含 Q 的正幂，而其 $H(X)$-分量只含次数为 $\ge n+1$的 Q 的幂。

证明。回忆一下，每个 $\widetilde{\beta}\in$ Eff(Bl(X)) 都可写成 $\widetilde{\beta}=\beta+d\ell$，其中 $\beta\in$ Eff(X) 且$d\in\mathbb{Z}$。根据校准的定义，我们得到

$$Q^{\Delta}Q^{k+l}\big(S_l(t,q,Q)e^k\big)=Q^{\Delta}Q^{k+l}\sum_{\widetilde{\beta}\in\mathrm{Eff}(\mathrm{Bl}(X))}\left(\sum_{b=1}^{N}\big\langle e^k\psi^{l-1},\phi_b\big\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t)\phi^b + \sum_{k''=1}^{n-1}\big\langle e^k\psi^{l-1},e^{k''}\big\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t)e_{k''}\right)q^{\beta}Q^{-d(n-1)}.$$

我们先来考察关联函数

$$\big\langle e^k\psi^{l-1},\phi_b\big\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{b_1,\dots,b_r=2}^{N}\big\langle e^k\psi^{l-1},\phi_b,\phi_{b_1},\dots,\phi_{b_r}\big\rangle_{0,2+r,\beta+d\ell}t_{b_1}\cdots t_{b_r}.$$

有三种情况。

情形 1：若 $\beta = 0$。那么该关联函数是 E 的扭曲的 GW 不变量，并且由于 $2 \le b \le N$ 时 $\phi_b|_E = 0$，我们可以假设 $b = 1$，也就是说 $\phi_b = \phi_1 = 1$。出于类似的原因，我们可以假设 $r = 0$。$\mathcal{M}_{0,\,2}(\mathrm{Bl}(X)\ d\ell)$的虚基本循环的维数为 $(d+1)(n-1)$。因此，$k + l - 1 = (d+1)(n-1)$，或等价地，$k + l - d(n-1) = n$，也就是说，在这种情况下，该关联函数与我们要证明的公式右侧 Q^n 阶项相同。

情形 2：若 $\beta \neq 0$，且该关联函数不满足 Gathmann 消失定理中的条件（ii）。则 $d \le 0$ 且 $k - 1 \le 0$，也就是说，$k = 1$。若 $d \le -1$，则 $k + l - d(n-1) \ge k + l + n - 1 \ge n + 1$，因此该关联函数对阶数为 $O\big(Q^{n+1}H(X)\big)$ 的项有贡献。接下来考虑 $k = 1$ 且 $d = 0$ 的情形。我们将证明，若该关联函数$\big\langle e\psi^{l-1},\ \phi_b\big\rangle_{0}$

$_{,2,\beta}(t)$ 非零，则 $l > n$。

首先，利用除子方程，我们可以将问题化简为 $2 \le b \le N$ 的情形。事实上，若 $b = 1$，则利用弦方程可得 $\big\langle e\psi^{l-1},\ 1\big\rangle_{0,\,2,\,\beta}(t) = \big\langle e\psi^{l-2}\big\rangle_{0,\,1,\,\beta}(t)$。由于 $\beta \neq 0$，存在一个除子类 $p \in H^2(X)$，使得 $\int_\beta p \neq 0$。回顾除子方程可得 $\big\langle e\psi^{l-2},\ p\big\rangle_{0,\,2,\,\beta} = \int_\beta p \big\langle e\psi^{l-2}\big\rangle_{0,\,1,\,\beta}$，也就是说，对于 $b = 1$ 的关联函数，可以用仅涉及 $2 \le b \le N$ 的关联函数表示。

现在假设 $2 \le b \le N$。回顾除子方程，我们得到

$$\big\langle e\psi^{l-1}, \phi_b\big\rangle_{0,2,\beta}(t) = \big\langle e, \psi^l, \phi_b\big\rangle_{0,3,\beta}(t),$$

根据拓扑递归关系（TRR），可将其写为

$$\sum_{\beta'+\beta''=\beta}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\big\langle\psi^{l-1}, e^j\big\rangle_{0,2,\beta'+d\ell}(t)\langle e_j, e, \phi_b\rangle_{0,3,\beta''-d\ell}(t) + \sum_{a=1}^{N}\big\langle\psi^{l-1}, \phi_a\big\rangle_{0,2,\beta'+d\ell}(t)\langle\phi^a, e, \phi_b\rangle_{0,3,\beta''-d\ell}(t)\right).$$

我们来考虑涉及 β' 的两个关联函数。若 $\beta' = 0$，则在这两个关联函数中都有 $d > 0$，且在第二个关联函数中有 $\phi_a = 1$。由于 $t|_E = 0$，我们可以假设 $t = 0$。由维数公式可得，第一个关联函数为 $l - 1 + j = (d+1)(n-1)$，第二个关联函数为 $l - 1 = (d+1)(n-1)$。在这两种情况下，由于 $d \ge 1$ 且 $n \ge 2$，我们有 $l \ge n$。现在假设 $\beta' \neq 0$，且第一个（分别为第二个）关联函数不满足 Gathmann 消失定理中的条件（ii），也就是说 $j = 1$ 且 $d \le 0$。注意，对于涉及β'' 的关联函数，由于除子类 e 的除子方程以及 $\phi_b|_E = 0$ 和 $d \neq 0$，我们必须有 $\beta'' \neq 0$。我们得到 $d < 0$。因此，涉及 β'' 的关联函数同时满足 Gathmann 消失定理中的条件（i）和条件（ii）。所以，条件 (iii) 必须不成立，也就是说，$n - j - 1 \ge (-d+1)(n-1)$ 且 $0 \ge (-d+1)(n-1)$。由于 $-d \ge 1$，这两个不等式都会导致矛盾。现在只剩下一种可能：$\beta' \neq 0$，且涉及β' 的关联函数满足 Gathmann 消失定理中的条件（ii）。那么条件 (iii) 必须不成立，因此$j - 1 + l - 1 \ge (d+1)(n-1)$ 且 $l - 1 \ge (d+1)(n-1)$。若 $d \ge 1$，则这些不等式将推出 $l \ge n + 1$。若 $d = 0$，则 $\beta'' = 0$；否则，涉及 β'' 的关联函数将由除子方程得出为 0。但此时该关联函数变为 $\int_{\mathrm{Bl}(X)} e_j \cup e \cup \phi_b$，由于 $\phi_b \cup e = 0$，它等于 0。最后，若 $d \le -1$，则由于 $\phi_b|_E = 0$，我们必须有 $\beta'' \neq 0$，因此涉及 β'' 的关联函数满足 Gathmann 消失定理中的条件（i）和条件（ii）。第三个条件必须不成立，也就是说，$n - j - 1 \ge (-d+1)(n-1)$ 且 $0 \ge (-d+1)(n-1)$。这两个不等式都不可能成立，至此第二种情形的分析完成。

情形 3：如果 $\beta \neq 0$，且关联函数确实满足条件（ii）。那么 Gathmann 消失定理中的条件 (iii) 不成立，也就是说，

$$k - 1 \ge (d+1)(n-1) - l + 1 = d(n-1) + n - l.$$

这个不等式等价于 $k+l-d(n-1) \geq n+1$。因此，在这种情况下，关联函数对 $O\big(Q^{n+1}\big)$ 阶项有贡献。

类似地，让我们考察关联函数。

$$\left\langle e^k\psi^{l-1}, e^{k''}\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{b_1,\dots,b_r=2}^{N}\left\langle e^k\psi^{l-1}, e^{k''}, \phi_{b_1},\dots,\phi_{b_r}\right\rangle_{0,2+r,\beta+d\ell} t_{b_1}\cdots t_{b_r}.$$

由于 $\Delta(e_{k''}) = -(n-k'')e_{k''}$，我们得到必须证明：如果上述关联函数非零，则 $k+l-d(n-1) -(n-k'') \geq 0$，并且如果等式成立，则 $r=0$ 和 $\beta=0$。同样我们将考虑 3 种情况。

情形 1：若 $\beta=0$。与上文一样，$r=0$，因为我们可以将关联函数识别为例外除子的扭曲的 GW 不变量，而ϕ_{b_i} 在 E 上的限制为 0。利用虚基本循环的维数公式，我们得到

$$k+l-1+k'' = \dim\left[\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\mathrm{Bl}(X), d\ell)\right]^{\mathrm{virt}} = n-1+(n-1)d.$$

我们得到

$$k+l-d(n-1)-(n-k'') = k+l+k''-n-d(n-1) = 0.$$

情形 2：若 $\beta\neq 0$ 且条件（ii）不成立。则 $d\leq 0$ 且 $k-1+k''-1\leq 0$，即$k=k''=1$。若 $d\leq -1$，则

$$k+l-d(n-1)-(n-k'') \geq k+l+n-1-n+k'' = 1+l \geq 2.$$

该关联函数对 $O\big(Q^2\big)$ 阶项有贡献。假设 $d=0$。插入项 $e^{k''}=e$ 可以通过除子方程消去，也就是说，$t_{b_1}\cdots t_{b_r}$ 前面的关联函数具有如下形式。

$$\left\langle e^k\psi^{l-1}, e^{k''}, \phi_{b_1},\dots,\phi_{b_r}\right\rangle_{0,2+r,\beta} = \left\langle e^2\psi^{l-2}, \phi_{b_1},\dots,\phi_{b_r}\right\rangle_{0,1+r,\beta}.$$

上述关联函数确实满足命题 3.4 的条件（ii）。因此，为了得到非平凡的贡献，Gathmann消失定理中的条件 (iii) 必须不成立，即$1\geq n-1-l+2$ 或等价地 $l\geq n$。我们得到

$$k+l-d(n-1)-(n-k'') = 1+l-(n-1) = 2+l-n \geq 2 > 0,$$

因此，我们需要证明的等式成立。

情形 3：如果 $\beta\neq 0$且条件（ii）成立。换言之，Gathmann 消失定理中的条件（i）和条件（ii）（见命题3.4）对关联函数

$$\left\langle e^k\psi^{l-1}, e^{k''}, \phi_{b_1},\dots,\phi_{b_r}\right\rangle_{0,2+r,\beta+d\ell}.$$

A增益，为了获得非平凡贡献，条件 (iii) 必须不成立，因此

$$k-1+k''-1 \geq (d+1)(n-1)-l+1 = d(n-1)+n-l,$$

或等价地，$k+l+k'' \geq 2+n+d(n-1)$。我们得到

$$k+l-d(n-1)-(n-k'') = k+l+k''-n-d(n-1) \geq 2 > 0.$$

至此，引理的证明完成。 ■

注意，

$$\widetilde{\rho}^i e^k = (c_1(TX) - (n-1)e)^i e^k = (-n+1)^i e^{k+i},$$

并且 $\widetilde{\theta}(e^{k+i}) = \left(\frac{n}{2} - \underline{k} - i\right)e^{k+i}$。因此，利用公式（4.5）和引理4.2，我们得到以下命题。

命题 4.3。 以下公式成立：

$$\begin{aligned}
&\left(Q^{\Delta} I^{(-m)}(t,q,Q,Q^{-1}\lambda) Q^{\widetilde{\rho}} Q^{\widetilde{\theta}+m-1/2} Q^{-\Delta}\right) e^k \\
&= \sum_{l,d=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1-k} \sum_{k''=1}^{n-1} \left\langle e^{k+i}\psi^{l-1}, e^{k''}\right\rangle_{0,2,d\ell} e_{k''} (-\partial_\lambda)^l \frac{(-(n-1)\partial_m)^i}{i!} \left(\frac{\lambda^{\frac{n-1}{2}+m-k-i}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+m-k-i+1\right)}\right) \\
&\quad + \sum_{l,d=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1-k} \left\langle e^{k+i}\psi^{l-1}, 1\right\rangle_{0,2,d\ell} (-1)^{n-1} Q^n \phi_N (-\partial_\lambda)^l \frac{(-(n-1)\partial_m)^i}{i!} \\
&\qquad \times \left(\frac{\lambda^{\frac{n-1}{2}+m-k-i}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+m-k-i+1\right)}\right) + O\left(Q\widetilde{H}(E) + Q^{n+1}H(X)\right),
\end{aligned}$$

其中 $1 \le k \le n-1$ 以及涉及 O 的记号与引理 4.2相同。

命题 4.4。 如果 $2 \le a \le N$，则以下公式成立：

$$\left(Q^{\Delta} I^{(-m)}(t,q,Q,Q^{-1}\lambda) Q^{\widetilde{\rho}} Q^{\widetilde{\theta}+m-1/2} Q^{-\Delta}\right)\phi_a = \frac{\lambda^{\theta+m-1/2}}{\Gamma(\theta+m+1/2)}\phi_a + O(Q).$$

此外，在上述展开中， $H(X)$-分量前的 Q^m 对于$0 \le m \le n-1$ 的系数是 $\lambda^{1/2}$ (一个系数属于 $H(X)$)的洛朗多项式。

证明。 使用公式 (4.5)，我们得到我们想要证明的公式的左边等于

$$Q^{\Delta} \sum_{i,l=0}^{\infty} (-1)^l Q^l S_l(t,q,Q) \frac{\partial_m^i}{i!} \left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-l-1/2}}{\Gamma(\widetilde{\theta}+m-l+1/2)} (Q\widetilde{\rho})^i\right)\phi_a.$$

由于 $\widetilde{\rho}\phi_a = \rho\phi_a$，上述公式呈现为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} Q^{\Delta+l+i} S_l(t,q,Q)\rho^i\phi_a(-\partial_\lambda)^l \frac{\partial_m^i}{i!}\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m-i-\deg(\phi_a)}}{\Gamma((n+1)/2+m-i-\deg(\phi_a))}\right). \tag{4.7}$$

注意，上述双重求和中对应于 $l=i=0$ 的项，与我们需要证明的公式右端的首项相重合。因此，回顾校准的定义，我们必须证明以下两个陈述。首先，如果 $l+i>0$，那么以下表达式

$$\sum_{b=1}^{N} \left\langle \rho^i\phi_a\psi^{l-1}, \phi_b\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t)\phi^b Q^{l+i-d(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\langle \rho^i\phi_a\psi^{l-1}, e^k\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t) e_k Q^{k+l+i-d(n-1)-n}$$

其阶对于所有 $\beta+d\ell \in \mathrm{Eff}(\mathrm{Bl}(X))$ 至少为 $O(Q)$。其次，只有有限多个 d和 l，使得在第一重和中， $0 \le m \le n-1$ 前 Q^m 的系数非零。让我们考虑第一重和中的关联函数。

情形 1：若 $\beta = 0$。那么该关联函数是例外除子 E的一个扭曲的 GW 不变量，并且由于 $\phi_a|_E = 0$，我们得到该关联函数必为 0。

情形 2：若 $\beta \neq 0$且 Gathmann 消失定理中的条件（ii）不成立。那么 $d \leq 0$，并且我们得到 $l+i-d(n-1) \geq l+i > 0$。为了使该关联函数对某个 $0 \leq m \leq n-1$ 的 Q^m 前面的系数有贡献，我们必须有 $-1 \leq d \leq 0$ 且$0 \leq l < n$。显然，满足这些不等式的 d 和 l 只有有限多个。

案例 3：若 $\beta \neq 0$ 且条件（ii）成立。则 Gathmann 消失定理中的条件 (iii) 必须不成立，即 $0 \geq (d+1)(n-1) - l + 1$，或者等价地，$l - d(n-1) \geq n$。$Q$ 的幂为 $l+i-d(n-1) \geq n+i$. 因此，满足此案例条件的关联函数仅对 Q^m 且 $m \geq n$前的系数有贡献。

第二个求和中的关联函数的论证类似。

情形1：若 $\beta = 0$。那么该关联函数是例外除子 E 的一个扭曲的 GW 不变量，并且由于 $\phi_a|_E = 0$，我们得到该关联函数必为 0。

情形 2：若 $\beta \neq 0$ 且 Gathmann 消失定理中的条件（ii）不成立，则$d \leq 0$ 且 $k = 1$。除子方程意味着，若 $d = 0$，则关联函数为零。因此，$d \leq -1$。我们得到 $k+l+i-d(n-1) - n = l+i-(d+1)(n-1) \geq l+i > 0$。

情形 3：若 $\beta \neq 0$ 且条件（ii）成立，则 Gathmann 消失定理中的条件 (iii) 必定不成立，也就是说，$k-1 \geq (d+1)(n-1) - l + 1$，或者等价地，$k+l-d(n-1) \geq n+1$。$Q$ 的幂为 $k+l+i-d(n-1) - n \geq i+1 \geq 1$. ■

命题 4.5. 以下公式成立：

$$\begin{aligned}\left(Q^{\Delta} I^{(-m)}(t,q,Q,Q^{-1}\lambda) Q^{\tilde{\rho}} Q^{\tilde{\theta}+m-1/2} Q^{-\Delta}\right)\phi_1 &= \frac{\lambda^{\theta+m-1/2}}{\Gamma(\theta+m+1/2)}\phi_1 \\ &+ \sum_{d,l\geq 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\langle (-(n-1)e)^i\psi^{l-1}, e^k\right\rangle_{0,2,d\ell} e_k(-\partial_\lambda)^l \frac{\partial_m^i}{i!}\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m-i}}{\Gamma((n+1)/2+m-i)}\right) \quad (4.8) \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\beta\in \mathrm{Eff}(X)}\left\langle \psi^{l-1}, e\right\rangle_{0,2,\beta}(t) e_1 q^{\beta} Q^{l-n+1}(-\partial_\lambda)^l\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m}}{\Gamma((n+1)/2+m)}\right) + O(Q), \quad (4.9)\end{aligned}$$

其中 $e_k = (-1)^{n-1} e^{n-k}$，且关联函数

$$\left\langle (-(n-1)e)^i\psi^{l-1}, e^k\right\rangle_{0,2,d\ell} = \left\langle (-(n-1)e)^i\psi^{l}, e^k, 1\right\rangle_{0,3,d\ell}$$

也可以为 $l = 0$. 定义

证明。注意，如果 $i > 0$，那么 $\tilde{\rho}^i = \rho^i + (-(n-1)e)^i$. 与命题 4.4 的证明类似，我们可得希望证明的恒等式左边等于以下各项之和：(4.7)，其中 $a = 1$ 且

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} Q^{\Delta+l+i} S_l(t,q,Q)(-(n-1)e)^i(-\partial_\lambda)^l \frac{\partial_m^i}{i!}\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m-i}}{\Gamma((n+1)/2+m-i)}\right). \quad (4.10)$$

我们先讨论（4.7）的贡献。与命题4.4的证明中相同的论证表明，若 $i > 0$，则和式中相应项的阶至少为 $O(Q)$。若 $i = 0$ 且 $l = 0$，则和式中相应项变为 $\lambda^{\theta+m-1/2}/\Gamma(\theta+m+1/2)$，这恰好是我们要证明的公式右端的第一项。最后，剩下的情况是 $i = 0$ 且 $l \geq 1$。根据定义，$Q^{\Delta+l} S_l(t, q, Q)\phi_1$ 是

$$\sum_{\beta+d\ell b=1}^{N}\left\langle \psi^{l-1}, \phi_b\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t)\phi^b Q^{l-d(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\langle \psi^{l-1}, e^k\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t) e_k q^{\beta} Q^{k+l-d(n-1)-n}, \quad (4.11)$$

其中第一项求和遍历所有有效曲线类 $\beta + d\ell \in \mathrm{Eff}(\mathrm{Bl}(X))$。让我们考虑式（4.11）中的以下 3 种关联函数情况。

情况 1：如果 $\beta = 0$。我们可以假设 $t = 0$ 因为 $t|_E = 0$。对 b 求和仅当 $\phi_b = 1$时非零，也就是说， $b = 1$。回顾模空间维数的公式，我们得到

$$l - 1 = -1 + n + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad l - d(n-1) = n.$$

因此，在这种情况下，该贡献的阶为 $O(Q^n)$。对 k 在（4.11）中的求和（当 $\beta = 0$时）与 Q 无关，因为通过令相关子插入的次数与虚基本循环的维数相匹配，我们得到 $k+l-1 = -1+n+d(n-1)$。因此，对于和式（4.7）中满足 $a = 1$ 的项，若 $i = 0$、 $l \geq 1$且次数 $\beta = 0$ ，其对该和式的贡献为

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty}\left\langle \psi^{l-1}, e^k\right\rangle_{0,2,d\ell} e_k(-\partial_\lambda)^l\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m}}{\Gamma((n+1)/2+m)}\right).$$

注意，上述求和与 $i = 0$ 分量（4.8）一致。

情形 2：如果 $\beta \neq 0$ ，并且 Gathmann 消失定理中的条件（ii）不成立。由于$d \leq 0$ 且 $l \geq 1$ 关于 b 的求和的阶至少为 O（Q）。对于关于 k的求和，只有当 $k = 1$条件（ii）不成立且 $d \leq -1$ 时，该项的阶至少为 O（Q）。因此，只有满足 $k = 1$ 且 $d = 0$ 的项符合本情形的条件，并且其阶不为 O（Q）。对和式（4.7）中 $a = 1$ 的相应贡献变为。

$$\sum_{l\geq 1}\left\langle \psi^{l-1}, e\right\rangle_{0,2,\beta}(t) e_1 q^\beta Q^{1+l-n}(-\partial_\lambda)^l\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m}}{\Gamma((n+1)/2+m)}\right).$$

注意，上述求和与（4.9）中的求和一致。

情形 3：如果 $\beta \neq 0$ 和条件（ii）成立。那么条件 (iii)不成立。对于对 b 求和中的关联函数，我们得到 $0 \geq (d+1)(n-1) - l + 1 = d(n-1) + n - l$。这个不等式意味着对 b 的求和具有 $O(Q^n)$的阶。同样地，对于对 k求和中的关联函数，我们得到

$$k - 1 \geq (d+1)(n-1) - l + 1 = d(n-1) + n - l \quad \Rightarrow \quad k + l - d(n-1) - n \geq 1.$$

换言之，关于 k 的求和的阶至少为 $O(Q)$。

这完成了对总和（4.7）中贡献的分析，其中 $a = 1$。接下来需要分析总和（4.10）中的贡献。分析方法类似。首先注意到，满足 $l = 0$ 的各项之和等于

$$\sum_{i=1}^{n} Q^{\Delta+i}(-(n-1)e)^i(-\partial_\lambda)^l\frac{\partial_m^i}{i!}\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m-i}}{\Gamma((n+1)/2+m-i)}\right).$$

注意，只有含有 $i = n$ 的项取决于 Q，也就是说，它的阶数为 O（Q^n）。因此，除去阶数为 O（Q 的项后，上述和与（4.8）中满足 $l = 0$和 $i \geq 1$的各项之和一致。设 $l > 0$。根据定义， $Q^{\Delta+l+i}S_l$（t， q，Q）e^i 等于

$$\sum_{\beta+d\ell}\sum_{b=1}^{N}\left\langle e^i\psi^{l-1}, \phi_b\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t)\phi^b Q^{l+i-d(n-1)}$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\langle e^i\psi^{l-1}, e^k\right\rangle_{0,2,\beta+d\ell}(t) e_k q^\beta Q^{k+l+i-d(n-1)-n}.$$

让我们考虑上述总和中关联函数的以下三种情况。

情形1：如果 $\beta = 0$。再次由于 $t|_E = 0$，我们可以假设 $t = 0$。首先考虑对 b求和中的关联函数。由于对于 $b > 1$有 $\phi_b|_E = 0$，唯一的非平凡贡献将来自含有 $b = 1$ 的项。维数约束现在给出 $i+l-1 = -1+n+d(n-1)$，因此 $l+i-d(n-1) = n$。因此，对 (4.10)的贡献具有 $O(Q^n)$阶。现在考虑对 k 求和中的关联函数。维数约束采取 $i+l-1+k = -1+n+d(n-1)$的形式，因此 $k+l+i-d(n-1)-n = 0$。因此，这些项对和式 (4.10) 的贡献是

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sum_{d=0}^{\infty}\left\langle(-(n-1)e)^i\psi^{l-1},e^k\right\rangle_{0,2,d\ell}e_k(-\partial_\lambda)^l\frac{\partial_m^i}{i!}\left(\frac{\lambda^{(n-1)/2+m-i}}{\Gamma((n+1)/2+m-i)}\right).$$

Th上面的和与4.8) 中 $l \geq 1$ 和 $i \geq 1$对应项的和一致。

请注意，此时，我们希望证明的公式中的所有项都已经与4.7) 和 (4.10) 中的贡献相匹配。现在只需检查剩下的两种情况中，贡献的阶为 $O(Q)$。

情况 2：若 if $\beta \neq 0$ 且条件（ii）不成立。对于关于 b的求和，由于 $d \leq 0$ 和 $l \geq 1$，Q 的幂为正。对于关于 k的求和，除了 $d \leq 0$之外，我们还有$i-1+k-1 = 0$，即 $i = k = 1$。若 $d \leq -1$，则 Q 的幂为正。假设$d = 0$。利用除子方程可得 $\langle e\psi^{l-1},e\rangle_{0,2,\beta}(t) = \langle e^2\psi^{l-2}\rangle_{0,1,\beta}(t)$。后者同时满足 Gathmann 消失定理的条件 (i) 和 (ii)。若关联函数非零，则条件 (iii) 必须不成立 $1 \geq (d+1)(n-1)-l+2 = d(n-1)+n-l+1$。$Q$的幂变为

$$k+l+i-d(n-1)-n = 2+l-d(n-1)-n \geq 2.$$

情形 3: 如果 $\beta \neq 0$ 且条件（ii）成立。则条件 (iii)必须不成立。对于对 b 求和中的关联函数，我们得到 $i-1 \geq (d+1)(n-1)-l+1 = d(n-1)+n-l$。因此，$Q$的幂为 $l+i-d(n-1) \geq n+1$。对于对 k求和中的关联函数，我们得到 $i-1+k-1 \geq d(n-1)+n-l$，也就是说，Q 的幂为 $k+l+i-d(n-1)-n \geq 2$。
■

4.2 爆破的量子上同调

让我们回顾 Bayer [3] 的结果。设 $t \in H^*(X) \subset H^*(\widetilde{X})$ 且 $t_1 = 0$ (Bl(0))，也就是说，$t_{N+1} = \cdots = t_{N+n-1} = 0$。记 $\Omega_i(t,q,Q)$ $(1 \leq i \leq N+n-1)$ 为定义在 H^* (Bl(X)) 上的线性算子，它由量子乘法$\phi_i \bullet_{t,q,Q}$ （当 $1 \leq i \leq N$ 时）以及由 $e^k \bullet_{t,q,Q}$ 的量子乘法（当 $i = N+k$, $1 \leq k \leq n-1$ 时）定义。稍微滥用一下记号，我们用相同的字母 Ω_i 表示相应线性算子关于基 ϕ_i $(1 \leq i \leq N+n-1)$ 的矩阵；回忆一下，$\phi_{N+k} := e^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$。注意，Δ 的矩阵是对角矩阵，对角元为 $0,\dots,0,-1,-2,\dots,-n+1$（0 出现 N 次）。Bayer 的主要观察（见 [3,第 3.4] 节）可以表述如下。

命题 4.6. 线性算子 Ω_i $(1 \leq i \leq N+n-1)$ 关于基 $Q^{-\Delta}\phi_i$ $(1 \leq i \leq N+n-1)$ 的矩阵在 $Q = 0$ 处具有如下洛朗级数展开：

$$Q^{\Delta}\widetilde{\Omega}_i(t,q,Q)Q^{-\Delta} = \begin{bmatrix}\Omega_i(t,q)+O(Q^{n-1}) & O(Q^n)\\ O(1) & \delta_{i,1}\,\mathrm{Id}_{n-1}+O(Q)\end{bmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq N, \tag{4.12}$$

其中 Id_{n-1} 是大小为$(n-1)\times(n-1)$ 的单位矩阵，并且

$$Q^{\Delta}\widetilde{\Omega}_{N+a}(t,q,Q)Q^{-\Delta} = Q^{-a}\begin{bmatrix}O(Q^n) & O(Q^n)\\ O(1) & \epsilon^a+O(Q^2)\end{bmatrix}, \qquad 1 \leq a \leq n-1, \tag{4.13}$$

其中$\Omega_i(t,q)$ 是线性算子在 $H^*(X)$ 中的矩阵，该线性算子由$\phi_i\bullet_{t,q}$对基 $\phi_i\,(1\le i\le N)$ 的量子乘法定义，而 ϵ 是如下的$(n-1)\times(n-1)$-矩阵：

$$\epsilon=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&(-1)^n\\1&0&\cdots&&0\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}.$$

证明。 证明基于 Gathmann 消失定理，并且与引理 4.2 的证明非常相似。由于（4.12）和（4.13）的证明相似，我们只证明（4.13）。我们有

$$Q^{\Delta}\big(e^a\bullet(Q^{-\Delta}e^k)\big)=\sum_{\widetilde{\beta}=\beta+d\ell}\left(\sum_{j=1}^{N}\langle e^a,e^k,\phi^j\rangle_{0,3,\beta+d\ell}(t)\phi_j+\sum_{l=1}^{n-1}\langle e^a,e^k,e_l\rangle_{0,3,\beta+d\ell}(t)e^lQ^{-l}\right)q^{\beta}Q^{k-d(n-1)}.$$

让我们考察关于 j 求和中的关联函数，也就是说，

$$\langle e^a,e^k,\phi^j\rangle_{0,3,\beta+d\ell}(t)Q^{k-d(n-1)}.$$

共有 3 种情况。

情形 1：如果 $\beta=0$。关联函数是例外除子 E的扭曲的GW不变量。限制 $\phi^j|_E$ 仅在 $\phi^j=1$ 时非零，即 $j=N$。回顾弦方程，我们得到关联函数仅在 $\phi^j=1$ 且 $d=0$时非零。因此，该贡献具有以下形式

$$\int_{\mathrm{Bl}(X)}e^a\cup e^k\cup 1\ \phi_NQ^k=(-1)^{n-1}Q^{n-a}\delta_{a+k,n}\ \phi_N.$$

情况 2：如果 $\beta\neq 0$ 且条件（ii）在Gathmann 消失定理中不成立。这里我们考虑关联函数 $\langle e^a,e^k,\phi^j\rangle_{0,3,\beta+d\ell}(t)$。注意，该关联函数的权重为 $a-1+k-1$。如果条件（ii）不成立，那么 $a-1+k-1\le 0$ 且 $d\le 0$。由于$a,k\ge 1$，该情形只有在 $a=k=1$ 时才可能发生。此外，如果 $d=0$，那么根据除子方程，该关联函数为零。因此，我们可以假设 $d\le -1$。 Q 的幂变为$k-d(n-1)\ge 1+n-1=n$，也就是说，在这种情况下，贡献的阶数为 $O(Q^n)=O\big(Q^{n+1-a}\big)$。

情形 3：若 $\beta\neq 0$且条件（ii）成立。根据 Gathmann 消失定理，条件 (iii) 不成立，也就是说，

$$a-1+k-1\ge(d+1)(n-1)=d(n-1)+n-1\quad\Rightarrow\quad k-d(n-1)\ge n+1-a.$$

由此可知，这种情形下的贡献阶为 $O\big(Q^{n+1-a}\big)$。

C综合这 3 种情形的结果，我们得到对 j 的求和具有如下形式

$$Q^{-a}\big((-1)^{n-1}\delta_{a+k,n}Q^n\phi_N+O\big(Q^{n+1}\big)\big).$$

我们来考察对 l 求和中的关联函数。与上文一样，共有 3 种情形。

情形 1：若 $\beta=0$。关联函数 $\langle e^a,\ e^k,\ e_l\rangle_{0,\ 3,\ d\ell}(t)$ 可以显式计算。事实上，这样的关联函数是例外除子的扭曲的 GW 不变量，因此与 $t\in H^*(X)$ 无关，也就是说，我们可以代入 $t=0$。此外，由于 $d\ell$ 必须是 E 中的有效曲线类，因此有 $d\ge 0$。回顾 $e_l=(-1)^{n-1}e^{n-l}$，并注意到

$\mathcal{M}_0$ 的虚基本循环. $_3$(Bl(X) $d\ell$)为 $d(n-1)+n$。因此，$a+k-l=d(n-1)$。我们得出结论：$d=0$ 或 $d=1$，也就是说，

$$\left\langle e^a, e^k, e_l\right\rangle_{0,3,d\ell}(t)=\begin{cases}(-1)^n & \text{if } d=1 \text{ and } l=a+k-n+1,\\ 1 & \text{if } d=0 \text{ and } l=a+k,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对 l 求和的贡献变为

$$\begin{cases}(-1)^n e^{a+k-n+1}Q^{-a} & \text{if } a+k>n-1,\\ e^{a+k}Q^{-a} & \text{if } a+k\le n-1.\end{cases} \tag{4.14}$$

注意，矩阵 ϵ^a 的元素为

$$\epsilon^a_{ij}=\begin{cases}(-1)^n & \text{if } j=i+n-1-a,\\ 1 & \text{if } i=j+a,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

与公式（4.14）比较可得，在这种情况下，对公式（4.13）的贡献与矩阵 $Q^{-a}\epsilon^a$ 相同。

情形 2：若 $\beta\neq 0$ 且条件（ii）不成立，则 $d\le 0$ 且 $a-1+k-1+n-l-1\le 0$。由于 $a, k, n-l\ge 1$，这种情形只有在 $a=k=1$ 且 $l=n-1$ 时才可能发生。由于 $\beta\neq 0$，除子方程蕴含 $d\neq 0$，也就是说，$d\le -1$。换言之，若 Gathmann 消失定理中的条件（ii）不成立，则 Q 的幂必须是 $k-l-d(n-1)\ge 1-(n-1)+n-1=1=-a+2$。

情况 3：如果 $\beta\neq 0$ 且 条件（ii）成立。那么 条件 (iii) 必不成立，即，$a-1+k-1+n-l-1\ge (d+1)(n-1)=d(n-1)+n-1$，或等价地，$k-l-d(n-1)\ge -a+2$。

综合这 3 种情况的结果，我们得到，对 l 求和所得的贡献与公式（4.13）右侧矩阵的 (2,2) 块相匹配，其中插入了因子 Q^{-a}。

为了完成论证，我们必须重复上述讨论，将 e^k替换为 ϕ_i （$1\le i\le N$），也就是说，我们必须确定以下表达式对（4.13）右端的贡献：

$$Q^{\Delta}\left(e^a\bullet\left(Q^{-\Delta}\phi_i\right)\right)$$
$$=\sum_{\widetilde{\beta}=\beta+d\ell}\left(\sum_{j=1}^{N}\left\langle e^a,\phi_i,\phi^j\right\rangle_{0,3,\beta+d\ell}(t)\phi_j+\sum_{l=1}^{n-1}\left\langle e^a,\phi_i,e_l\right\rangle_{0,3,\beta+d\ell}(t)e^lQ^{-l}\right)q^{\beta}Q^{-d(n-1)}.$$

首先，让我们确定对 j 求和中关联函数的贡献。

情况 1：如果 $\beta=0$。关联函数只有在 $\phi^j=1$ 且 $d=0$ 时才可能非零。在后一种情况下，由于 $\int_{\mathrm{Bl}(X)}e^a\cup\phi_i\cup 1=0$，我们得出关联函数仍然为零。此情况没有贡献。

情形 2：如果 $\beta\neq 0$ 且条件（ii）不成立。那么 $d\le 0$ 以及权重 $a-1\le 0$，即 $a=1$。由于除子方程，$d\neq 0$，因此 $d\le -1$ 和 $-d(n-1)\ge n-1=n-a$。我们得到，此情形下的贡献阶数为 $O(Q^{n-1})$。

情形 3：如果 $\beta\neq 0$且条件（ii）成立。那么条件 (iii)不成立，因此$a-1\ge (d+1)(n-1)$以及 $-d(n-1)\ge n-a$。我们得到，此情形中的贡献仍为 $O(Q^{n-a})$量级。

综合这 3 种情形的结果可得，矩阵 $Q^{\Delta}\widetilde{\Omega}_{N+a}Q^{-\Delta}$ 中 (1,1) 块内元素的顺序为 $O(Q^{n-a})$，即与公式 (4.13) 中的顺序相同。

最后，还需要确定对 l 求和时关联函数的贡献。

情形 1：如果 $\beta = 0$。只有当 $\phi_i = 1$ 时，关联函数才可能非零，也就是说，$i = 1$ 和 $d = 0$。由此可得，此情形下的贡献为 $\delta_{i,\ 1}e^a Q^{-a}$。

情形 2：如果 $\beta \neq 0$ 且条件（ii）不成立。那么 $d \leq 0$ 且权重为 $a - 1 + n - l - 1 \leq 0$，也就是说，$a = n - l = 1$。由于除子方程，$d \neq 0$，因此 $d \leq -1$ 和$-l - d(n-1) \geq -l + n - 1 = 0 = -a + 1$。此情形下的贡献阶为 $O(Q^{-a+1})$。

Case 3：如果 $\beta \neq 0$ 且条件（ii）成立。那么条件 (iii) 必须不成立。我们得到 t

$$a - 1 + n - l - 1 \geq (d+1)(n-1) \quad \Rightarrow \quad -l - d(n-1) \geq -a + 1.$$

这种情况下的贡献阶数也是 $O(Q^{-a+1})$。

结合这 3 种情况的结果，我们得到矩阵 $Q^{\Delta}\tilde{\Omega}_{N+a}Q^{-\Delta}$ 的 (2,1) 块中的元素具有形式 $Q^{-a}(E_{a,1} + O(Q))$，其中 $E_{a,1}$ 表示一个矩阵，其 $(a,1)$ 项为 1，其余项均为 0。■

5 反射向量的例外分量

假设 $\alpha \in H^*(\mathrm{Bl}(X))$ 是一个反射向量。将 $\alpha = \alpha_e + \alpha_b$ 分解为 $\sim\alpha_e \in H^*(E)$ 和 $\alpha_b \in H^*(X$。我们分别称 α_e 和 α_b 为 例外和基底分量，它们对应于 α。利用命题 4.3，我们希望对反射向量的例外分量进行分类。

5.1 对诺维科夫变量的依赖

由于量子上同调是一个依赖于参数 $q := (q_1, \ldots, q_r)$ 和 $q_{r+1} := Q^{n-1}$ 的弗罗贝尼乌斯流形，反射向量也依赖于 q_i。我们断言，如果 α 是一个反射向量，那么

$$\alpha = q_1^{-p_1} \cdots q_r^{-p_r} q_{r+1}^{-e} \beta, \tag{5.1}$$

其中 $\beta \in H^*(\mathrm{Bl}(X))$ 与 q_i $(1 \leq i \leq r+1)$ 无关。为了证明这一事实，我们将使用除子方程。假设除子类基是基 $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N+n-1}$ 的一部分，使得对于 $1 \leq i \leq r$ 和 $p_{r+1} = e = \phi_{N+1}$，有 $p_i = \phi_{i+1}$。令 τ_i $(1 \leq i \leq r+1)$ 为与除子类 p_i 对应的线性坐标，即：$\tau_i := t_{i+1}$，对于 $1 \leq i \leq r$ 和 $\tau_{r+1} = t_{N+1}$。利用除子方程，我们得到校准满足以下微分方程：

$$z\frac{\partial}{\partial \tau_i} S(t,q,Q,z) = p_i \bullet S(t,q,Q,z),$$
$$z q_i \frac{\partial}{\partial q_i} S(t,q,Q,z) = z\frac{\partial}{\partial \tau_i} S(t,q,Q,z) - S(t,q,Q,z) p_i \cup .$$

因此，

$$S(t,q,Q,z) = T(t,q,Q,z) e^{\sum_{i=1}^{r+1} \tau_i p_i \cup / z},$$

w对于固定的 z，算子级数 $T(t,q,Q,z)$ 是变量上的函数

$$t_1, q_1 e^{t_2}, \ldots, q_r e^{t_{r+1}}, t_{r+2}, \ldots, t_N, q_{r+1} e^{t_{N+1}}, t_{N+2}, \ldots, t_{N+n-1}. \tag{5.2}$$

正如我们之前已经指出的（见第2.5节），由于除子方程，量子乘法算子$\phi_i \bullet_{t,q,Q}$ 由矩阵表示，其矩阵元素也是变量（2.5）的函数。由于典范坐标 $u_i(t,q,Q)$ 是 $E\bullet_{t,q,Q}$ 的特征值，因此

可知它们也具有相同的性质。此外，利用链式法则，我们得到偏导数 $\frac{\partial u_j}{\partial t_a}$ 也是（5.2）中的函数。另一方面，若 α 是一个反射向量，则 $I_\alpha^{(-m)}(t,q,Q,\lambda)$ 在点 $\lambda = u_i(t,q,Q)$ 处的洛朗级数展开，其系数是典范坐标 $u_j(t,q,Q)$ 及其偏导数 $\frac{\partial u_j}{\partial t_a}$ 的有理函数（见第 2.3节）。因此，

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} - q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\right) I_\alpha^{(-m)}(t,q,Q,\lambda) = 0. \tag{5.3}$$

按定义，

$$\begin{aligned} I^{(-m)}(t,q,Q,\lambda) &= S\big(t,q,Q,-\partial_\lambda^{-1}\big)\widetilde{I}^{-m}(\lambda) = T\big(t,q,Q,-\partial_\lambda^{-1}\big)e^{-\sum_{i=1}^{r+1}\tau_i p_i \cup \partial_\lambda}\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) \\ &= T\big(t,q,Q,-\partial_\lambda^{-1}\big)\widetilde{I}^{-m}(\lambda)e^{-\sum_{i=1}^{r+1}\tau_i p_i}, \end{aligned}$$

其中对于 la 第一个等式中我们使用了以下关系（另见引理的证明 4.1（a））：

$$-p \cup \partial_\lambda \frac{\lambda^{\theta+\alpha-1}}{\Gamma(\theta+\alpha)} = \frac{\lambda^{\theta+\alpha-1}}{\Gamma(\theta+\alpha)}(-p).$$

由于 $I_\alpha^{(-m)}(t, q, Q, \lambda) = I^{(-m)}(t, q, Q, \lambda)\alpha$，由方程（5.3）可得

$$q_i \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} + p_i \cup \alpha = 0, \qquad \forall 1 \le i \le r+1.$$

我们关于反射向量具有（5.1）这种形式的断言由此得证。

5.2 典范坐标

我们希望确定典范坐标 $u_i\ t\ q\ Q \quad 1 \le i \le (,,)(N+n-1)$ 对 Q的依赖关系，其中参数 $t \in H(X)$，也就是说，$t_1 = t_{N+1} = \cdots = t_{N+n-1} = 0$。利用 恒等式 $u_i = E(u_i)$，我们得到

$$u_i(t,q,Q) = \sum_{a=2}^{N}(1-\deg\phi_a)t_a\frac{\partial u_i}{\partial t_a}(t,q,Q) + \sum_{j=1}^{r}\rho_j\frac{\partial u_i}{\partial \tau_j}(t,q,Q) - (n-1)\frac{\partial u_i}{\partial t_{N+1}}(t,q,Q),$$

其中，ρ_j 是分解 $c_1(TX) = \sum_{j=1}^{N}\rho_j p_j$ 和 $\tau_j = t_{j+1}$ 中的系数。上述公式使我们能够将问题归结为考察偏导数 $\frac{\partial u_i}{\partial t_j}(1 \le i \le N+n-1, 1 \le j \le N+1)$ 对 Q 的依赖。现在的优势在于，算子 Ω $_j\ t\ q\ Q = \phi_j \bullet_{t\,q\,Q}$ ϕ_j $\frac{\partial u_i}{\partial t_j}$ $1 \le i \le (,,)$ $N+n-1$ 的特征值恰好是 ( )，该算子对应于量子乘法。

引理 5.1. 假设 $U(Q)$ 是一个 $k \times k$ 阶方阵，其矩阵元是在 $Q = 0$ 处全纯的函数。

(a) 存在一个整数 $b > 0$，使得 $U(Q)$ 的每个特征值都具有 $\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i Q^{i/b}$ 的形式展开。(b) 若 λ_0 是 $U(0)$ 的一个重数为 1 的特征值，则 $U(Q)$ 有且仅有一个重数为一、形式为 $\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i Q^i$ 的特征值。

证明。特征值是特征多项式 $\det(\lambda - U(Q))$ 的根。这是一个关于 λ 的首一多项式，次数为 k，其系数属于 $C\{Q\}$ ——即关于 Q 的收敛幂级数环。因此，为了证明 (a)，只需证明以下命题。

设 $f(Q,\lambda)\in C\{Q\}[\lambda]$ 是一个首一多项式。那么， $f(Q,\lambda)$ 的根具有引理中所述的展开式。我们将其分解为

$$f(0,\lambda)=(\lambda-w_1)^{b_1}\cdots(\lambda-w_s)^{b_s},$$

其中 $w_i\neq w_j$ 对于 $i\neq j$。回忆亨泽尔引理（参见 [22, 第 2 章第 2]节），我们得到 $f(Q,\lambda)=f_1(Q,\lambda)\cdots f_r(Q,\lambda)$，其中 $f_i(Q,\lambda)\in C\{Q\}[\lambda]$ 是一个次数为 b_i 的首一多项式，使得 $f_i(0,\lambda)=(\lambda-w_i)^{b_i}$。注意，若对某个 i有 $b_i=1$，则 $f_i(Q,\lambda)=0$ 的唯一零点在 $Q=0$ 处全纯，且其在 $Q=0$ 处的值为 w_i。因此，(b) 是亨泽尔引理的一个初等推论。若 $s>1$，则由归纳假设可得该引理。设 $s=1$，即，

$$f(Q,\lambda)=\lambda^k+a_1(Q)\lambda^{k-1}+\cdots+a_k(Q),$$

其中 $a_i(0)=0$。我们可以假设次首项系数 $a_1(Q)=0$。事实上，利用代换 $\lambda\mapsto\lambda-a_1(Q)/k$，我们可以将多项式化为次首项系数为 0 的多项式。两个多项式的根相差一个平移量 $a_1(Q)/k$，因此只需对其中一个证明我们的断言。令 $\operatorname{ord}(a_i)$ 表示 a_i在 $Q=0$处的消失阶。如果 $a_i(Q)=0$，则我们将消失阶定义为 $+\infty$。令 $\nu:=\min_{1\le i\le k}\operatorname{ord}(a_i)i$。将 $\lambda=Q^\nu\mu$代入方程 $f(Q,\lambda)=0$并除以 $Q^{\nu k}$，得到

$$\mu^k+\sum_{i=2}^{k}a_i(Q)Q^{-\nu i}\mu^{k-i}=0.$$

由于 $\operatorname{ord}(a_i)\ge\nu i$ 对至少一个 i取等号，我们得到上述方程的左侧是一个首一多项式 $g\big(Q^{1/b},\mu\big)$ 关于 $\mathbb{C}\big\{Q^{1/b}\big\}[\mu]$，其中某个整数为 $b>0$。注意， $g(0,\mu)$ 至少有两个不同的零点，因为它的次首项系数为 0。因此，正如上面所做的那样，我们可以使用亨泽尔引理将证明归约到可以应用归纳假设的情形。这就完成了证明。 ■

命题 5.2。 设 $u_j(t,q,Q)\,(1\le j\le N+n-1)$ 为$\widetilde{}$量子上同调的典范坐标，其中空间为 $\mathrm{Bl}(X)$，参数为 $t\in H(X)$。重新编号后，典范坐标分为两组

$$u_j(t,q,Q)\in\mathbb{C}\{Q\},\qquad 1\le j\le N,$$

and

$$u_j(t,q,Q)=-(n-1)v_kQ^{-1}+O(1),\qquad j=N+k,\qquad 1\le k\le n-1,$$

其中 $v_k\,(1\le k\le n-1)$ 是方程 $\lambda^{n-1}=(-1)^n$ 的解。

证明 . 让我们将上述引理应用于该线性算子的矩阵

$$\sum_{a=2}^{N}(1-\deg\phi_a)t_a\widetilde{\Omega}_a(t,q,Q)+\sum_{j=1}^{r}\rho_j\widetilde{\Omega}_{j+1}(t,q,Q)+Q\widetilde{\Omega}_{N+1}(t,q,Q)\tag{5.4}$$

相对于基 $Q^{-\Delta}\phi_i\,(1\le i\le N+n-1)$。回顾命题 4.6，可知算子（5.4）的矩阵各项在 $Q=0$ 处全纯，且其在 $Q=0$ 处的特化形式为

$$\begin{bmatrix}E\bullet_{t,q} & 0\\ * & \epsilon\end{bmatrix}.$$

上述矩阵的特征值是 X 的量子上同调的典范坐标 $u_i^X(t,q)$（$1 \le i \le N$），以及方程 $\lambda^{n-1} = (-1)^n$ 的解 $v_k\,(1 \le k \le n-1)$。注意，对于 t 的一般选择，特征值两两不同。另一方面，典范向量场 $\frac{\partial}{\partial u_j}(1 \le j \le N+n-1)$ 构成算子（5.4）的一组特征基。我们以如下方式为典范坐标编号：对于 $1 \le j \le N$ 和满足 $1 \le k \le n-1$ 的 $j = N+k$，与 $\frac{\partial}{\partial u_j}$ 对应的特征值分别为 $u_j^X(t,q) + O(Q)$ 和 $v_k + O(Q)$。回顾算子 $\widetilde{\Omega}_a(t,q,Q)$ 的特征值为 $\frac{\partial u_j}{\partial t_a}(t,q,Q)$（$1 \le j \le N+n-1$）。根据引理 5.1 (b)，可得函数

$$E(u_j) + Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}, \qquad 1 \le j \le N+n-1$$

在 $Q = 0$ 处全纯，其中 $E := \sum_{a=2}^N (1 - \deg(\phi_a)) t_a \partial/\partial t_a + \sum_{j=1}^r \rho_j \partial/\partial t_{j+1}$。此外，限制到 $Q = 0$ 满足

$$\left(E(u_j) + Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}\right)\Big|_{Q=0} = \begin{cases} u_j^X(t,q) & \text{if } 1 \le j \le N, \\ v_k & \text{if } j = N+k. \end{cases}$$

另一方面，请注意，$E(u_j)$ 是该矩阵的特征值

$$\sum_{a=2}^N (1 - \deg \phi_a) t_a \widetilde{\Omega}_a(t,q,Q) + \sum_{j=1}^r \rho_j \widetilde{\Omega}_{j+1}(t,q,Q)$$

并且上述矩阵在 $Q = 0$ 处的限制是

$$\begin{bmatrix} E\bullet_{t,q} & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}.$$

回顾引理5.1，我们得到 N 特征值 $E(u_j)\,(1 \le j \le N+n-1)$在 $Q = 0$ 处全纯，并具有 $u_i^X(t,q) + O(Q)(1 \le i \le N)$ 的形式，而剩余的 $n-1$ 个特征值的阶为 $O(Q^\alpha)$，其中某个有理数为 $\alpha > 0$。类似地，将引理 5.1应用于矩阵 $Q\widetilde{\Omega}_{N+1}$，我们得到其特征值 $Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 分成两组。第一组由在 $Q = 0$ 处全纯的 $n-1$ 个函数组成，其展开式为 $v_k + O(Q)$ 的形式；第二组由 N 个函数组成，这些函数关于 Q 具有可能是分数次幂的展开式，其阶为 $O(Q^\beta)$，其中某个 $\beta > 0$。令 (t,q)为一般的，使得典范坐标 $u_i^X\ t\ q \quad 1 \le i \le N$ $1 \le (\ ,\ )\ ()$ 两两 $j \le N+n-1$ $E\ u_j + Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}} \ne 0$ $E\ u_j \qquad Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 不同且非零。于是对于每个，和为( )。因此，两个数( ) 和不可能在 $Q = 0$处同时为零，也就是说，要么 $E(u_j)$ 在 $Q = 0$ 处全纯且具有 $u_i^X(t,q) + O(Q)$ 的形式，要么 $Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 在 $Q = 0$ 处全纯且具有 $v_k + O(Q)$ 的形式。在第一种情况下，由于 $E(u_j)$ 在 $Q = 0$ 处全纯，并且和 $E(u_j) + Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 在 $Q = 0$处也全纯，我们得到 $Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 在 $Q = 0$处全纯。类似地，$Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 的全纯性意味着 $E(u_j)$ 是全纯的。因此，对于所有 j，$E(u_j)$和 $Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 在 $Q = 0$ 处都是全纯的。特别地，数 α 和 β 必须是积分的。注意，由于 $E(u_j)$ 和 $Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}}$ 不可能在 $Q = 0$处同时为零，我们得到对于每个 $1 \le j \le N+n-1$ 或者

$$E(u_j) = u_i^X(t,q) + O(Q), \qquad Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}} = O(Q)$$

对于某些 i 或者

$$E(u_j) = O(Q), \qquad Q\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}} = v_k + O(Q)$$

对于某个 k。在第一种情况下，我们将得到

$$u_j(t,q,Q) = E(u_j) - (n-1)\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}} \in \mathbb{C}\{Q\},$$

而在第二种情况下

$$u_j(t,q,Q) = E(u_j) - (n-1)\frac{\partial u_j}{\partial t_{N+1}} = -(n-1)v_k Q^{-1} + O(1). \qquad \blacksquare$$

5.3 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的扭曲周期

回顾例外除子的约化上同调 $\widetilde{H}(E)$。其一组基由 e^i $(1 \le i \le n-1)$ 给出。 $H(\mathrm{Bl}(X))$ 上的 Poincar´e 配对在 $H(E)$ 上诱导出一个非退化配对：

$$\big(e^i, e^j\big) = (-1)^{n-1}\delta_{i+j,n}, \qquad 1 \le i,j \le n-1.$$

The *twisted periods* will be multi-valued analyticfunctions with valuesin $H(E)$. Let us define thefollowing linear operators on $H(E)$:

$${}^{tw}\theta\big(e^i\big) := \Big(\frac{n}{2} - i\Big)\, e^i, \qquad {}^{tw}\rho\big(e^i\big) := \begin{cases} -(n-1)e^{i+1} & \text{if } 1 \le i < n-1, \\ 0 & \text{if } i = n-1. \end{cases}$$

我们首先定义标定的扭曲周期：

$${}^{tw}\widetilde{I}_\beta^{(-m)}(\lambda) = e^{{}^{tw}\rho\partial_\lambda\partial_m}\left(\frac{\lambda^{{}^{tw}\theta+m-1/2}}{\Gamma\big({}^{tw}\theta+m+1/2\big)}\right)\beta, \qquad \beta \in \widetilde{H}(E),$$

以及扭曲校准

$${}^{tw}S(Q,z) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{tw}S_k(Q)z^{-k} \in \mathrm{End}\left(\widetilde{H}(E)\right)\big[\big[z^{-1}\big]\big],$$

其中 ${}^{tw}S_0(Q) = 1$ 和

$$\big({}^{tw}S_k(Q)e^i, e^j\big) = \sum_{d=0}^{\infty}\big\langle e^i\psi^{k-1}, e^j\big\rangle_{0,2,d\ell}Q^{-d(n-1)}, \qquad 1 \le i,j \le n-1.$$

注意，在上述求和中只有一个 d 的取值有贡献，因为关联函数中上同调类的次数（即 $k-1+i+j$ ）必须等于 $\mathcal{M}_{0,2}(\mathrm{Bl}(X)\ d\ell)$ 的虚基本循环的维数，该维数为 $(n-1)(d+1)$，因此得到 $d(n-1) = k+i+j-n$。扭曲周期定义为

$${}^{tw}I_\beta^{(-m)}(Q,\lambda) := \sum_{l=0}^{\infty} {}^{tw}S_l(Q)(-\partial_\lambda)^l\ {}^{tw}\widetilde{I}_\beta^{(-m)}(\lambda), \qquad \beta \in \widetilde{H}(E).$$

扭曲周期满足关于 Q 和 λ的常微分方程组。下面推导这些微分方程。

引理 5.3. 我们有

$$\big(\lambda - {}^{tw}\rho\big)\partial_\lambda\, {}^{tw}\widetilde{I}_\beta^{(-m)}(\lambda) = \left({}^{tw}\theta + m - \frac{1}{2}\right){}^{tw}\widetilde{I}_\beta^{(-m)}(\lambda).$$

证明很直接，留作练习。

引理 5.4。我们有

$$Q\partial_Q {}^{tw}S_l + {}^{tw}\theta {}^{tw}S_l - {}^{tw}S_l {}^{tw}\theta = -l\,{}^{tw}S_l.$$

证明。我们将左端的算子作用于 e^i，并计算其与任意 $1 \le i,\ j \le n-1$ 的 e^j 配对。得到

$$Q\partial_Q\big({}^{tw}S_l e^i, e^j\big) + \big({}^{tw}\theta {}^{tw}S_l e^i, e^j\big) - \big({}^{tw}S_l {}^{tw}\theta e^i, e^j\big).$$

由于 ${}^{tw}\theta e^i = \left(\frac{n}{2} - i\right) e^i$ 和 ${}^{tw}\theta$ 关于配对 $(,)$ 是斜对称的，上述表达式变为

$$Q\partial_Q\big({}^{tw}S_l e^i, e^j\big) - (n-i-j)\big({}^{tw}S_l e^i, e^j\big).$$

我们在上文看到，表达式 $\big({}^{tw}S_l e^i,\ e^j\big)$ 与 $Q^{-d(n-1)}$ 成正比，其中 $d(n-1) = l+i+j-n$。因此，上述表达式变为 $-l\big({}^{tw}S_l e^i,\ e^j\big)$。■

为了陈述下一个结果，我们需要引入线性算子

$$e\bullet_{tw}\colon\ \widetilde{H}(E) \to \widetilde{H}(E), \qquad e^i \mapsto e \bullet_{tw} e^i,$$

其中量子乘积定义为

$$\big(e \bullet_{tw} e^i, e^j\big) = \sum_{d=0}^{\infty} \big\langle e, e^i, e^j\big\rangle_{0,3,d\ell} Q^{-d(n-1)}.$$

由于维数的原因，即 $1+i+j = n+d(n-1)$，我们得到量子乘积的贡献只有在次数 $d=0$ 和 $d=1$中才可能是非平凡的。回顾第3.4节中的计算，我们得到以下公式：

$$e \bullet_{tw} e^i = \begin{cases} e^{i+1} & \text{if } 1 \le i \le n-2, \\ (-1)^n Q^{-(n-1)} e & \text{if } i = n-1. \end{cases}$$

换言之，$e\bullet_{tw}$关于基 $e, e^2, \dots, e^{n-1}$ 的矩阵是

$$e\bullet_{tw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^n Q^{-(n-1)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

引理 5.5. 我们有

$$Q\partial_Q {}^{tw}S_l = (n-1)e \bullet_{tw} {}^{tw}S_{l-1} + {}^{tw}S_{l-1}\,{}^{tw}\rho, \qquad \forall l \ge 1.$$

证明。该引理是由除子方程以及爆破 $\mathrm{Bl}(X)$ 的 GW 不变量的拓扑递归关系直接推出的。根据除子方程，我们有，

$$\big\langle e, e^i\psi^l, e^j\big\rangle_{0,3,d\ell} = -d\big\langle e^i\psi^l, e^j\big\rangle_{0,2,d\ell} + \big\langle e \cup e^i\psi^{l-1}, e^j\big\rangle_{0,3,d\ell}.$$

根据拓扑递归关系，左边等于

$$\sum_{d'+d''=d} \sum_{k=1}^{n-1} \big\langle e^i\psi^{l-1}, e_k\big\rangle_{0,2,d'\ell} \big\langle e^k, e, e^j\big\rangle_{0,3,d''\ell}.$$

多重 将上述恒等式乘以 $(n-1)Q^{-d(n-1)}$，并对所有 $d \ge 0$ 求和，我们得到

$$\big(S_l e^i, (n-1)e \bullet_{tw} e^j\big) = Q\partial_Q\big(S_{l+1}e^i, e^j\big) + \big(S_l(n-1)e \cup e^i, e^j\big).$$

注意到上述表达式为 0，因为 $e^n = (-1)^{n-1}\phi_N$ 是 $\mathrm{Bl}(X)$ 上的一个上同调类，其在例外除子 E 上的限制为 0。因此，我们可以用 $-{}^{tw}\rho(e^i)$ 替换 $(n-1)e \cup e^i$。引理得证。■

利用引理5.3、5.4和5.5，我们得到扭曲周期满足以下微分方程组

$$(\lambda+(n-1)e\bullet_{tw})\partial_\lambda\, {}^{tw}I_\alpha^{(-m)}(Q,\lambda)=\left({}^{tw}\theta+m-\frac{1}{2}\right){}^{tw}I_\alpha^{(-m)}(Q,\lambda), \tag{5.5}$$

$$Q\partial_Q\, {}^{tw}I_\alpha^{(-m)}(Q,\lambda)=-(n-1)e\bullet_{tw}\partial_\lambda\, {}^{tw}I_\alpha^{(-m)}(Q,\lambda), \tag{5.6}$$

其中 $\alpha=Q^{{}^{tw}\rho}\beta$，且 $\beta\in\widetilde{H}(E)$ 独立于 Q 和 λ。注意，行列式

$$\det(\lambda+(n-1)e\bullet_{tw})=\lambda^{n-1}+\left((n-1)Q^{-1}\right)^{n-1}.$$

我们得到，扭曲周期是在由方程 $(Q\lambda)^{n-1}+(n-1)^{n-1}=0$ 定义的 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ 中超曲面补集上的多值解析函数。

5.4 $\mathbb{P}^{n-2}$ 的周期

我们希望计算微分方程系统（5.5）–（5.6）的单值化。我们将通过把扭曲周期与 $\mathbb{P}^{n-2}$的周期对应起来来完成这一点。首先，让我们回顾一下 $\mathbb{P}^{n-2}$的周期的定义。我们有 $H^*\left(\mathbb{P}^{n-2}\right)=\mathbb{C}[p]/p^{n-1}$，其中 $p=c_1(\mathcal{O}(1))$ 是超平面类。我们有一个向量空间同构

$$\widetilde{H}(E)\cong H\left(\mathbb{P}^{n-2}\right),\qquad e^i\mapsto p^{i-1}.$$

注意，在此同构下，${}^{tw}\theta$ 与分次算子 $\theta_{\mathbb{P}^{n-2}}$ 重合，而 ${}^{tw}\rho$ 与 $-c_1\left(T\mathbb{P}^{n-2}\right)\cup$重合。因此，$\mathbb{P}^{n-1}$ 的扭曲 GW 理论中的标定周期与 $\mathbb{P}^{n-2}$ 的 GW 理论中的标定周期满足关系 $e^{{}^{tw}\theta\pi\mathbf{i}}{}^{tw}\widetilde{I}_\beta^{(-m)}(\lambda)=\widetilde{I}_\sigma^{(-m)}{}_{(\beta)}(\lambda)$，其中 $\sigma(\beta):=e^{\pi\mathbf{i}\theta}\beta$，其中 $\mathbb{P}^{n-2}$的分次算子为 θ。

我们来比较 S矩阵。在 $\mathbb{P}^{n-2}$的 GW 理论中，有

$$S(q,z)^{-1}1=1+\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{\prod_{m=1}^{d}(p-mz)^{n-1}},$$

其中 q 是对应于 $\mathcal{O}(1)$ 的 Novikov 变量。利用除子方程 $(-zq\partial_q+p\cup)S(q,z)^{-1}=S(q,z)^{-1}p\bullet$，其中 $p\bullet$ 是由 p进行量子乘法的算子，我们得到

$$S(q,z)^{-1}p^i=p^i+\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d(p-dz)^i}{\prod_{m=1}^{d}(p-mz)^{n-1}},\qquad 0\le i\le n-2. \tag{5.7}$$

另一方面，扭曲的 S-矩阵 ${}^{tw}S(Q,z)$ 可由已知的流形 $\mathbb{P}^n$ 在一点处的爆破 $\mathrm{Bl}(\mathbb{P}^n)$ 的 S-矩阵计算得出。具体来说，回顾一下，$\mathrm{Bl}(\mathbb{P}^n)$ 是 $\mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{P}^n$ 中由二次方程 $x_iy_j=x_jy_i\,(0\le i,j\le n-1)$ 定义的子流形，其中 $x=[x_0,\dots,x_{n-1}]$ 和 $y=[y_0,\dots,y_n]$ 分别是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 和 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标系。我们有两个投影映射 $\pi_1\colon\mathrm{Bl}(\mathbb{P}^n)\to\mathbb{P}^{n-1}$ 和 $\pi_2\colon\mathrm{Bl}(\mathbb{P}^n)\to\mathbb{P}^n$。注意，$\pi_2$ 是爆破的投影——例外除子 E 是位于$[0,0,\dots,0,1]\in\mathbb{P}^n$ 上方的纤维。令 L_1 和 L_2 分别为超平面线丛 $\mathcal{O}(1)$ 在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 和 $\mathbb{P}^n$ 上的拉回。记 ${}^{bl}S(q_1,q_2,z)$ 为 $\mathrm{Bl}(\mathbb{P}^n)$ 的 GW 理论中的 S-矩阵，其中 q_1 和 q_2 是分别对应于线丛 L_1 和 L_2 的诺维科夫变量。那么我们有

$${}^{bl}S(q_1,q_2,z)^{-1}1=\sum_{d_1,d_2\ge 0}\frac{q_1^{d_1}q_2^{d_2}\prod_{m=-\infty}^{0}(p_2-p_1-mz)}{\prod_{m=1}^{d_1}(p_1-mz)^n\prod_{m=1}^{d_2}(p_2-mz)\prod_{m=-\infty}^{d_2-d_1}(p_2-p_1-mz)},$$

其中 q_1 和 q_2 是诺维科夫变量。Bl($\mathbb{P}^n$) 中与一对 (d_1, d_2) 对应的次数类为 $d_1e_1 + d_2e_2$，其中 e_1 是 E 中的一条直线的类，而 $e_2 = \pi_2^{-1}$（避开 $[0, 0, \dots, 0, 1]$的 $\mathbb{P}^n$中的直线）。可以验证，爆破的上同调环是

$$H(\mathrm{Bl}(\mathbb{P}^n)) = \mathbb{C}[p_1, p_2]/\langle p_2(p_2 - p_1) = 0, p_1^n = 0\rangle$$

并且 $\mathcal{O}(E) = L_2L_1^{-1}$，也就是说，例外除子 E 的庞加莱对偶是 $e = p_2 - p_1$。为了计算扭曲的 S 矩阵 ${}^{tw}S$，我们必须将 ${}^{bl}S$ 限制到 $q_2 = 0$，并代入 $q_1 = Q^{-(n-1)}$。我们得到

$$ {}^{bl}S\big(Q^{-(n-1)}, 0, z\big)^{-1}1 = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{Q^{-d(n-1)} \prod_{m=-d+1}^{0}(p_2 - p_1 - mz)}{\prod_{m=1}^{d}(p_1 - mz)^n}. \tag{5.8}$$

注意，分子与 $p_2 - p_1$ 成正比。利用关系式 $p_2(p_2 - p_1) = 0$，我们得到 $p_1 - mz$ 可以替换为 $p_1 - p_2 - mz = -e - mz$。上述公式可写成

$$ {}^{bl}S\big(Q^{-(n-1)}, 0, z\big)^{-1}1 = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-1)^{dn}Q^{-d(n-1)}e}{(e + dz)^n \prod_{m=1}^{d-1}(e + mz)^{n-1}}. \tag{5.9}$$

利用上述公式和除子方程

$$\left(-\frac{1}{n-1}zQ\partial_Q + e\cup\right) {}^{bl}S\big(Q^{-(n-1)}, 0, z\big)^{-1} = {}^{bl}S\big(Q^{-(n-1)}, 0, z\big)^{-1}e\bullet,$$

其证明与引理 5.5 的证明相同，我们得到

$$ {}^{tw}S(Q, z)^{-1}e^i = e^i + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-1)^{dn}Q^{-d(n-1)}e}{(e + dz)^{n-i} \prod_{m=1}^{d-1}(e + mz)^{n-1}}, \qquad 1 \le i \le n-1, \tag{5.10}$$

其中，右端应展开为关于 z^{-1} 的幂级数，而 e 应与线性算子相对应

$$e\cup_{tw}\colon\ \widetilde{H}(E) \to \widetilde{H}(E), \qquad e \cup_{tw} e^i := \begin{cases} e^{i+1} & \text{if } 1 \le i \le n-2, \\ 0 & \text{if } i = n-1. \end{cases}$$

比较公式（5.7）和（5.10），可知若令 $q = (-1)^n Q^{-(n-1)}$，则 $S(q, z)$ 和 ${}^{tw}S(Q, -z)$ 的矩阵分别关于基 $1, p, \dots, p^{n-2}$ 以及 $e, e^2, \dots, e^{n-1}$相同。现在我们可以证明以下关键公式。

命题 5.6。 在同构 $\widetilde{H}(E) \cong H\big(\mathbb{P}^{n-2}\big)$ 下，以下恒等式成立：

$$ {}^{tw}I_{\beta}^{(-m)}(Q, \lambda) = e^{-\pi\mathbf{i}\theta}\, I_{\sigma(\beta)}^{(-m)}\big(-Q^{-(n-1)}, \lambda\big),$$

其中 $\sigma = e^{\pi\mathbf{i}\theta}$ 和 θ 是 $\mathbb{P}^{n-2}$的分次算子。

证明。 根据定义，

$$ {}^{tw}I_{\beta}^{(-m)}(Q, \lambda) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Res}\, dz z^{l-1}(-\partial_\lambda)^l \big({}^{tw}\widetilde{I}_{\beta}^{(-m)}(\lambda), {}^{tw}S(Q, -z)^{-1}e^i\big)e_i,$$

其中，留数在形式上定义为 dz/z 前面的系数。在同构 $\widetilde{H}(E) \cong H(\mathbb{P}^{n-2})$ 下，周期

$$ {}^{tw}\widetilde{I}_{\beta}^{(-m)}(\lambda) = e^{-\pi\mathbf{i}\theta}\widetilde{I}_{\sigma(\beta)}^{(-m)}(\lambda), \qquad {}^{tw}S(Q, -z)^{-1}e^i = S\big((-1)^nQ^{-(n-1)}, z\big)^{-1}p^{i-1},$$

以及 $e_i = (-1)^{n-1}p^{n-1-i}$。注意，$H\big(\mathbb{P}^{n-2}\big)$ 上的庞加莱配对与 $\widetilde{H}(E)$ 上的配对相差一个符号 $(-1)^{n-1}$。上述周期公式的形式为

$$
\begin{aligned}
{}^{tw}I_{\beta}^{(-m)}(Q,\lambda) = & \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{Res} dz z^{l-1}(-\partial_\lambda)^l \\
& \times \big(e^{-\pi\mathbf{i}\theta}\widetilde{I}_{\sigma(\beta)}^{(-m)}(\lambda), S\big((-1)^n Q^{-(n-1)}, z\big)^{-1}p^{i-1}\big)p^{n-1-i}.
\end{aligned}
$$

由于 $e^{\pi\mathbf{i}\theta}p = -pe^{\pi\mathbf{i}\theta}$，利用公式（5.7），得到

$$
e^{\pi\mathbf{i}\theta}S(q,z)^{-1}p^{i-1} = e^{\pi\mathbf{i}(\frac{n}{2}-i)}S\big((-1)^{n-1}q,-z\big)^{-1}p^{i-1}.
$$

周期的公式具有如下形式

$$
\begin{aligned}
{}^{tw}I_{\beta}^{(-m)}(Q,\lambda) = & \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{Res} dz z^{l-1}(-\partial_\lambda)^l \\
& \times \big(\widetilde{I}_{\sigma(\beta)}^{(-m)}(\lambda), S\big(-Q^{-(n-1)},-z\big)^{-1}p^{i-1}\big)\sigma^{-1}\big(p^{n-1-i}\big),
\end{aligned}
$$

其中我们用到了 $\sigma^{-1}\big(p^{n-1-i}\big) = e^{\pi\mathbf{i}(\frac{n}{2}-i)}p^{n-1-i}$. 显然，上述恒等式的右边与 $\sigma^{-1}\big(I_{\sigma}^{(-m)}{}_{(\beta)}\big(-Q^{-(n-1)},\ \lambda\big)\big)$一致。引理得证。■

5.5 $\mathbb{P}^{n-1}$的扭曲周期的单值性

下面描述微分方程组（5.5）–（5.6）的单值群，也就是 $\mathbb{P}^{n-1}$的扭曲周期的单值性。根据命题 5.6，只需回顾 $\mathbb{P}^{n-2}$的周期的单值群。首先固定 $q=1$ 和 $\lambda^\circ \in \mathbb{R}_{>0}$充分大——任意 $\lambda^\circ > n-1$ 均可。周期值 $I^{(-m)}(q,\ \lambda)$ 取决于一条从（1，λ°）到（q，λ）且避开判别式的路径

$$
\{(q,\lambda) \mid \det(\lambda - (n-1)p\bullet) = 0\}.
$$

对于固定的 q，判别式方程有 $n-1$ 个解

$$
u_k(q) := (n-1)\eta^{-2k}q^{1/(n-1)}, \qquad 0 \le k \le n-2,
$$

其中 $\eta = e^{\pi\mathbf{i}/(n-1)}$。我们先关注 $q=1$ 的扭曲周期的单值化。基本群

$$
\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{u_0(1),\dots,u_{n-2}(1)\},\lambda^\circ)
$$

是由与从 λ° 到 $u_k(1)$ 的路径 C_k° 相对应的简单闭环 γ_k° 生成的自由群，定义如下。 C_k° 由两部分组成。第一部分是一个圆弧，该圆的圆心为 0、半径为 λ°，从 λ° 出发，以顺时针方向旋转角度 $2\pi\mathbf{i}k/(n-1)$。第二部分是从 $\lambda^\circ\eta^{-2k}$ 到 $u_k(1)$的直线段 $=(n-1)\eta^{-2k}$。事实证明，与简单闭环 γ_k° 相对应的反射向量恰好是 $\Psi(\mathcal{O}(k))$，其中 Ψ 是Iritani关于 $\mathbb{P}^{n-2}$ 的量子上同调的积分结构的映射（见公式 (1.2)），也就是说，

$$
\Psi(\mathcal{O}(k)) = (2\pi)^{\frac{3-n}{2}}\Gamma(1+p)^{n-1}e^{2\pi\mathbf{i}kp}.
$$

如果 $q \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是任意的，那么我们通过让 q 沿某条参考路径连续变化来构造路径 $\big(q,\ \lambda^\circ q^{1/(n-1)}\big)$。此路径使我们能够确定 $I_\alpha^{(-m)}(q,\lambda)$在 $\lambda = \lambda^\circ q^{1/(n-1)}$ 处的值，我们将其规定为 $\mathbb{C}\setminus\{u_0(q)\dots,u_{n-2}(q)\}$的基点。令 $\gamma_k(q)$

是通过对 $\lambda \in \gamma_k^\circ \mapsto \lambda q^{1/(n-1)}$ 进行缩放从 γ_k° 获得的简单回路。与 $\gamma_k(q)$ 对应的反射向量恰好是

$$\Psi_q(\mathcal{O}(k)) = (2\pi)^{\frac{3-n}{2}}\Gamma(1+p)^{n-1}q^{-p}e^{2\pi\mathbf{i}kp}.$$

上述事实在 $\mathbb{P}^2$ （即 $n=4$）情形下的证明可见于 [28]。一般而言，该论证很容易推广。现在让我们应用上述构造和命题5.6，以描述 $\mathbb{P}^{n-1}$的扭曲周期的单值化。我们有 $q=-Q^{-(n-1)}$。设 $Q\in\mathbb{R}_{>0}$ 是一个实数。我们选取一条从 1到 q 的参考路径，该路径由区间 $\left[1,Q^{-(n-1)}\right]$ 以及从 $Q^{-(n-1)}$ 到 $q=-Q^{-(n-1)}$. 的上半-平面中的弧组成。注意，采用这样的参考路径 $q^{1/(n-1)}=\eta Q^{-1}$。因此， γ_k（q）变成了绕 u_k（q） $=$ （$n-1$）的简单回路，它们恰好是微分方程（5.5）的奇点。我们得到以下推论。

推论5.7. 如果 $\beta\in\widetilde{H}(E)$ 满足： ${}^{tw}I_{\beta}^{(-m)}(Q,\lambda)$ 沿着 $\gamma_k(q)$ 的解析延拓为 ${}^{tw}I_{-\beta}^{(-m)}(Q,\lambda)$，那么 β 必定与 ..... 成比例

$$\Psi(\mathcal{O}_E(-k+1)) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma(\mathrm{Bl}(X))Q^{-e(n-1)}(2\pi\mathbf{i})^{\deg}\mathrm{ch}(\mathcal{O}_E(-k+1)),$$

其中 $\mathcal{O}_E(-k+1):=\mathcal{O}(-(k-1)E)-\mathcal{O}(-kE)$。

证明。 根据上述讨论和命题 5.6，在同构 $H(E)\cong H\left(\mathbb{P}^{n-2}\right)$， $\sigma(\beta)$ 必须与 $\Psi_q(\mathcal{O}(k))$ 成比例，即 β 与其成比例

$$e^{-\pi\mathbf{i}\theta}\ (2\pi)^{\frac{3-n}{2}}\Gamma(1+p)^{n-1}q^{-p}e^{2\pi kp} = (2\pi)^{(3-n)/2}\mathbf{i}^{2-n}\Gamma(1-p)^{n-1}q^{p}e^{-2\pi\mathbf{i}kp}.$$

注意， $q^p=e^{\pi\mathbf{i}p}Q^{-p(n-1)}$。因此，在同构 $\widetilde{H}(E)\cong H\left(\mathbb{P}^{n-2}\right)$ 下，上述表达式变为

$$(2\pi)^{(3-n)/2}\mathbf{i}^{2-n}\Gamma(1-e)^{n-1}Q^{-e(n-1)}e^{(-2k+1)\pi\mathbf{i}e}e.$$

我们必须检查上述表达式是否与 Iritani映射在 $\mathrm{Bl}(X)$ 的例外对象 $\mathcal{O}((-k+1)E)-\mathcal{O}(-kE)$. We have

$$\Gamma(\mathrm{Bl}(X)) = \Gamma(X)\Gamma(1-e)^n\Gamma(1+e),$$
$$\Gamma(1-e)\Gamma(1+e) = \frac{2\pi\mathbf{i}e}{e^{\pi\mathbf{i}e}-e^{-\pi\mathbf{i}e}} = \frac{2\pi\mathbf{i}e}{e^{2\pi\mathbf{i}e}-1}e^{\pi\mathbf{i}e},$$

and

$$(2\pi\mathbf{i})^{\deg}\mathrm{ch}(\mathcal{O}((-k+1)E)-\mathcal{O}(-kE)) = e^{-2\pi\mathbf{i}ke}\left(e^{2\pi\mathbf{i}e}-1\right).$$

由于 $\Gamma(X)\cup e=e$， Iritani 映射的像变为

$$(2\pi)^{(3-n)/2}\mathbf{i}\Gamma(1-e)^{n-1}Q^{-e(n-1)}e^{(-2k+1)\pi\mathbf{i}e}e.$$

引理的结论由此得证。 ■

5.6 等单值解析延拓

令 $D(u,\ r)$ 为 $\mathbb{C}$ 中心为 u、半径为 r 的开圆盘。设 $\mathbb{D}_r := D(0,\ r)$。令 $\epsilon > 0$ 为实数，$V \subset \mathbb{C}$ 为开子集，且 $u_i\colon \mathbb{D}_\epsilon \to V\ (1 \le i \le m)$ 为 m 全纯函数，使得存在一个满足条件的正实数 $\delta > 0$

(i) m 圆盘 $D(u_i(0)\ \delta)\ (1 \le i \le m)$ 两两不交且包含于 V。

(ii) 我们有 $u_i(Q) \in D(u_i(0)\ \delta)$ 对所有 $Q \in \mathbb{D}_\epsilon$。

设 I 是定义在 $\mathbb{D}_\epsilon \times V \setminus \Sigma$上的多值解析函数，其取值属于有限维向量空间 H，其中

$$\Sigma := \{(Q,\lambda) \in \mathbb{D}_\epsilon \times V \mid \lambda = u_i(Q) \text{ for some } i\}.$$

令我们固定 $\lambda^\circ \in V$，使得，$\mathbb{D}_\epsilon \times \{\lambda^\circ\}$ 与 Σ不相交。于是，I 在 $(Q,\lambda) = (0,\lambda^\circ)$ 处是解析的，并且 I 沿着 $\mathbb{D}_\epsilon \times V \setminus \Sigma$ 中从 $(0,\lambda^\circ)$ 出发的任意路径解析延拓。特别地，对于所有 $Q \in \mathbb{D}_\epsilon$ 以及充分接近 λ°的 λ，我们可以唯一地延拓 $I(Q,\lambda)$。令我们展开 $I(Q,\lambda) = \sum_{d=0}^{\infty} I_d(\lambda)Q^d$，其中每个系数 I_d 都是在 $\lambda = \lambda^\circ$处的 H-值解析函数。显然，$I_d(\lambda)$沿着 $V \setminus \{u_1(0)\dots, u_m(0)\}$中的任意路径解析延拓。

引理 5.8。设 γ 是一个以 λ° 为基点的闭环，位于

$$V \setminus D(u_1(0),\delta) \sqcup \cdots \sqcup D(u_m(0),\delta),$$

满足：对于每个固定的 $Q \neq 0$，沿路径 $\{Q\} \times \gamma$ 对 $I(Q,\ \lambda)$ 作解析延拓，会将其变换为 $A(I(Q,\ \lambda)$，其中 λ 充分接近 λ°，且 $A \in \mathrm{GL}(H)$ 是一个线性算子。如果算子 A 与 Q 无关，那么沿 γ 作解析延拓会将系数 I_d（λ） 变换为 A（I_d（λ）。

证明。由于用偏导数 $\frac{1}{d!}\frac{\partial^d I}{\partial Q^d}(Q,\ \lambda)$ 替换函数 $I(Q,\ \lambda)$ 后，$I_d(\lambda) = \frac{1}{d!}\frac{\partial^d I}{\partial Q^d}(0,\ \lambda)$，我们可以将一般情形归约为 $d = 0$ 的情形。

用小的闭 圆盘 $D_j\ (1 \le j \le N)$ 覆盖路径 γ，使得

(i) 对所有 i，D_j 与 $D(u_i(0)\ \delta)$ 不相交。(ii) $D_j \cap D_{j+1} \neq \varnothing$。(iii) $D_N = D_1$。

换句话说，圆盘 D_j 的并集构成了路径 γ 的加厚。令 $I(Q,\ \lambda_j)\ \forall \lambda_j \in D_j$ 为沿着 γ 对 $I(Q,\ \lambda)$ 的解析延拓。任取一个 $\epsilon' > 0$。存在一个足够小的 $\rho_j > 0$，使得 $I(Q,\ \lambda_j)$ 是 $(Q,\ \lambda) \in \mathbb{D}_{\rho_j} \times D_j$ 上的一致连续函数。因此，存在 $0 < \delta_j' < \rho_j$，使得，

$$\|I(Q,\lambda_j) - I(0,\lambda_j)\| < \epsilon', \qquad \forall (Q,\lambda_j) \in \mathbb{D}_{\delta_j'} \times D_j,$$

其中 $\|\ \|$ 是 H 上的任意范数——例如，固定一个同构 $H \cong \mathbb{R}^{\dim(H)}$ 并选取标准欧几里得度量。由于圆盘 D_j 只有有限多个，我们可以选取同时适用于所有 j 的 ρ 和 δ'，也就是说，$\rho_j = \rho$ 和 $\delta_j' = \delta'$。利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|I(0,\lambda_N) - AI(0,\lambda_1)\| \le{}& \|I(0,\lambda_N) - I(Q,\lambda_N)\| + \|I(Q,\lambda_N) - AI(Q,\lambda_1)\| \\ &+ \|A\|\|I(Q,\lambda_1) - I(0,\lambda_1)\|.\end{aligned}$$

注意，根据定义，不等式右侧的中间项为 0。选取 $|Q| < \delta'$，可得上述不等式右侧有界于 $\epsilon'(1 + \|A\|)$。由于 ϵ'可以任意小，我们得到 $I(0,\lambda_N) = A(I(0,\lambda_1))$，这正是我们需要证明的结论。■

我们需要一个比引理 5.8 稍微一般一些的结果。具体来说，假设 I是 $\mathbb{D}_\epsilon^* \times V \setminus \Sigma$上的多值解析函数，其中 $\mathbb{D}_\epsilon^* := \mathbb{D}_\epsilon \setminus \{0\}$ 是穿孔圆盘。

定义 5.9。 $I(Q,\lambda)$在 $Q = 0$ 处的奇点被称为至多对数型，如果以下两个条件成立：

(i) 该函数具有如下形式的展开式

$$I(Q,\lambda) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{d=0}^{\infty} I_{s,d}(\lambda) Q^d (\log Q)^s,$$

其中 λ 与 λ° 足够接近，且 $Q \in \mathbb{D}_\epsilon \setminus (-\epsilon, 0]$。

(ii) 函数 $I_s(Q,\lambda) := \sum_{d=0}^{\infty} I_{s,d}(\lambda) Q^d$ $(0 \le s \le n)$ 沿 $\mathbb{D}_\epsilon \times V \setminus \Sigma$ 中的任意路径解析延拓。

注记 5.10. 条件（ii）或许是多余的，但我们无法在如此一般的情形下证明这一点。就我们的目的而言，这两个条件都很容易验证，因为 $I(Q,\lambda)$ 将是 Q 中一个在 $Q = 0$ 处具有福克斯型奇点的常微分方程的解。

命题 5.11。 假设 I 是定义在 $\mathbb{D}_\epsilon^* \times V \setminus \Sigma$ 上的多值解析函数，并且它在 $Q = 0$处至多有一个对数奇点。此外，假设 γ 是一个以 λ° 为基点的闭环，位于

$$V \setminus D(u_1(0),\delta) \sqcup \cdots \sqcup D(u_m(0),\delta),$$

使得，对于每个固定的 $Q \in \mathbb{D}_\epsilon \setminus (-\epsilon, 0]$，$I(Q,\lambda)$ 沿着路径 $\{Q\} \times \gamma$ 的解析延拓将 $I(Q,\lambda)$ 变换为 $A(I(Q,\lambda))$，其中 λ 足够接近 λ°，且 $A \in GL(H)$是一个线性算子。如果算子 A 与 Q 无关，则沿着 γ 的解析延拓将系数 $I_{s,d}(\lambda)$ 变换为 $A(I_{s,d}(\lambda))$。

证明。设 $I_s(Q,\lambda)$ 如定义 5.9 中条件（ii）所述。我们有 $I(Q,\lambda) = \sum_{s=0}^{n} I_s(Q,\lambda) \times (\log Q)^s$。沿 γ 的解析延拓给出 $A(I(Q,\lambda)) = \sum_{s=0}^{n} I_s(Q,\lambda)(\log Q)^s$，其中$I_s(Q,\lambda)$ 是 $I_s(Q,\lambda)$ 沿 γ 的解析延拓。令 $Q \to 0$，即可容易证明，只有当 $\log Q$ 的各次幂前的系数相等时，这样的恒等式才可能成立；也就是说，$A(I_s(Q,\lambda)) = I_s(Q,\lambda)$。最后只需回忆引理 5.8。■

5.7 基底分量的消失

设 $\alpha = Q^{-(n-1)e}\beta$，其中 $\beta \in H^*(\mathrm{Bl}(X))$ 是一个与 Q 和 t 线性无关的向量。设 $\beta = \beta_e + \beta_b$。我们希望提取在 $Q = 0$ 处的幂级数展开中的首项

$$Q^{\Delta+m+(n-1)/2} I^{(-m)}\left(t, q, Q, Q^{-1}\lambda\right)\alpha, \tag{5.11}$$

其中 $m > 0$ 是一个充分大的整数，也就是说，我们选择足够大的 m，使得算子$\sim$ $\theta + m + 1/2$ 只有正特征值。此外，我们希望确定展开中直到 Q^n 阶的以下各项的结构。注意

$$Q^{\Delta} Q^{-\widetilde{\theta}-m+\frac{1}{2}} Q^{-\widetilde{\rho}} \alpha = Q^{-m-(n-1)/2}\left(\beta_e + Q^{\deg}(Q^{-\rho}\beta_b)\right).$$

因此，我们有

$$Q^{\Delta+m+(n-1)/2} I^{(-m)}\left(t, q, Q, Q^{-1}\lambda\right)\alpha = \left(Q^{\Delta} I^{(-m)}\left(t, q, Q, Q^{-1}\lambda\right) Q^{\widetilde{\rho}} Q^{\widetilde{\theta}+m-\frac{1}{2}} Q^{-\Delta}\right) \times \left(\beta_e + Q^{\deg}(Q^{-\rho}\beta_b)\right).$$

让我们考察 β_e 对（5.11）的贡献，即表达式

$$\big(Q^{\Delta} I^{(-m)}\big(t,q,Q,Q^{-1}\lambda\big) Q^{\widetilde{\rho}} Q^{\widetilde{\theta}+m-\frac{1}{2}} Q^{-\Delta}\big)\beta_e. \tag{5.12}$$

根据命题 4.3，$H(E)$-分量的（5.12）的首项次数为 0，且恰为 ${}^{tw}I^{(-m)}_{\beta_e}(1,\lambda)$，即 $\mathbb{P}^{n-1}$ 在 $Q=1$ 处的扭曲周期。（$H(X)$-分量的（5.12）的首项次数为 n，而 Q^n 前的相应系数为

$$\sum_{l,d=0}^{\infty} (-\partial_\lambda)^l \big\langle \psi^{l-1} \widetilde{I}^{(-m)}_{\beta_e}(\lambda), 1\big\rangle_{0,2,d\ell} (-1)^{n-1}\phi_N, \tag{5.13}$$

其中

$$\widetilde{I}^{(-m)}_{\beta_e}(\lambda) = e^{-(n-1)e\partial_\lambda\partial_m}\left(\frac{\lambda^{\widetilde{\theta}+m-1/2}}{\Gamma(\widetilde{\theta}+m+1/2)}\right)\beta_e$$

是 $\mathrm{Bl}(X)$ 的标定周期；对于 $l=0$，关联函数应通过弦方程理解为 $\big\langle \psi^l \widetilde{I}^{(-m)}_{\beta_e}(\lambda)\mathbf{1}, 1\big\rangle_0$

我们来看（5.11）中对应于 β_b 的贡献，即表达式

$$\big(Q^{\Delta} I^{(-m)}\big(t,q,Q,Q^{-1}\lambda\big) Q^{\widetilde{\rho}} Q^{\widetilde{\theta}+m-\frac{1}{2}} Q^{-\Delta}\big) Q^{\deg}(Q^{-\rho}\beta_b). \tag{5.14}$$

将 $\beta_b = \sum_{a=1}^{N} \beta_{b,a}\phi_a$ 分解。$H(X)$-分量的（5.14）是关于 Q 的幂级数，其系数是 $\log Q$ 的多项式，这些多项式的系数属于 $H(X)$。根据命题（4.5）和（4.4），当 $0\le M\le n$ 时，$Q^M(\log Q)^0$ 前的系数具有如下形式

$$\sum_{a:\ \deg(\phi_a)=M} \frac{\lambda^{\theta+m-1/2}}{\Gamma(\theta+m+1/2)}\beta_{b,a}\phi_a + \sum_{a':\ \deg(\phi_{a'})<M} \beta_{b,a'} f_{M,a'}(\lambda), \tag{5.15}$$

其中 $f_{M,a'}(\lambda)$ 是在 $Q=0$ 处展开时 $Q^{M-\deg(\phi_{a'})}$ 前系数的 $H(X)$ 分量。

$$\big(Q^{\Delta} I^{(-m)}\big(t,q,Q,Q^{-1}\lambda\big) Q^{\widetilde{\rho}} Q^{\widetilde{\theta}+m-\frac{1}{2}} Q^{-\Delta}\big)\phi_{a'}.$$

我们来总结一下我们的分析。

命题 5.12. 设 $\alpha = Q^{-(n-1)e}\beta$，其中 $\beta\in H(\mathrm{Bl}(X))$ 与 t 和 Q无关。则

(a) (5.11) 的 $H(X)$-分量按 Q 展开成幂级数，其系数是 $\log Q$ 的多项式。当 $0\le M\le n-1$ 时，$(\log Q)^0 Q^M$ 前的系数由 *(5.15)* 给出；而当 $M=n$ 时，它由 *(5.15)*（其中 $M=n$）与 *(5.13)* 之和给出。

（b）若 $\beta_{b,\,1}=0$，则 $H(E)$-分量（5.11）按 Q展开为幂级数。相应的首项为 ${}^{tw}I^{(-m)}_{\beta_e}(1,\lambda)$。

现在我们来讨论级数（5.13）的解析性质。引入以下级数较为方便：

$$\Phi_\beta(Q,\lambda) := \sum_{l,d=0}^{\infty} (-\partial_\lambda)^l \big\langle \psi^{l-1}\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) Q^{-(n-1)e}\beta, 1\big\rangle_{0,2,d\ell} Q^{-d(n-1)}, \qquad \beta\in \widetilde{H}(E).$$

注意到 (5.13) 与 $\Phi_{\beta_e}(1,\lambda)(-1)^{n-1}\phi_N$ 相吻合。回顾周期向量的定义 $I^{(-m)}_{\alpha}(t,q,Q,\lambda)$，我们得到

$$\Phi_\beta(Q,\lambda) = \big(I^{(-m)}_{Q^{-(n-1)e}\beta}(t,0,Q,\lambda),1\big), \qquad \forall \beta\in\widetilde{H}(E).$$

命题 5.13。 设 Q 为正实数，且 $\gamma_k(q)$ 与 $q=-Q^{-(n-1)}$ 是推论 5.7中的同一个简单回路。如果

$$\beta=\Psi(\mathcal{O}_E(-k+1))=(2\pi)^{(1-n)/2}\Gamma(1-e)^{n-1}Q^{-(n-1)e}e^{(-2k+1)\pi\mathbf{i}e}2\pi\mathbf{i}e,$$

那么沿着 $\gamma_k(q)$ 的 $\Phi_\beta(Q,\lambda)$ 的解析延拓是 $-\Phi_\beta(Q,\lambda)$。

命题的证明 5.13将在第6节给出。

5.8 定理的证明 1.7

~现在我们可以证明本文的主要结果了。固定 $t\in H(X)$ 和 X 的诺维科夫变量 $q=(q_1,\dots,q_r)$，使其处于一般位置，从而 X 的量子上同调是半单的，且命题 5.2 的结论成立。取实数 $R>0$，使得对所有 $1\le j\le N$，$u_j(t,q,0)\in\mathbb{D}_R$；这里回忆一下，$\mathbb{D}_R$ 表示圆心为 0、半径为 R 的圆。取一个足够小的实数 $\epsilon>0$，使得在 (t,q,Q) 处爆破 $\mathrm{Bl}(X)$ 的量子杯积对所有 $|Q|<\epsilon$，$u_j(t,q,Q)\in\mathbb{D}_R$、所有 $|Q|<\epsilon$ 和 $1\le j\le N$ 都收敛，且 $R<(n-1)\epsilon^{-1}$。我们希望在以下设置中运用第 (5.6) 节的结果：定义域为 $V:=\{\lambda\mid|\lambda|>R\epsilon\}$，$m:=n-1$，而 $(n-1)$ 全纯函数（在第 5.6 节中记为 u_i）由 $Qu_{N+k}(t,q,Q)$，$1\le k\le n-1$ 给出。这里我们利用命题 5.2 得出 $Qu_{N+k}(t,q,Q)=-(n-1)v_k+O(Q)$ 在 $Q=0$ 处解析。取 $\delta>0$，使得圆盘 $D(-(n-1)v_k,2\delta)$ $(1\le k\le n-1)$ 两两不相交。若有必要，我们进一步减小 ϵ，以满足第 5.6 节开头给出的条件（ii）。注意，根据我们对 δ 的选择，条件 (i) 得以满足。继续之前，先固定 $\lambda^{n-1}=(-1)^n$ 的解 v_k，令其由 $v_k=-\eta^{-2k+1}$ 给出，其中 $\eta:=e^{\pi\mathbf{i}/(n-1)}$。于是 $-(n-1)v_k=(n-1)\eta^{-2k+1}$。最后，对于参考点 $\lambda^\circ\in V$，我们取任意正实数 $\lambda^\circ>(n-1)>R\epsilon$。

将 γ_k 于 $V\setminus D\big((n-1)\eta^{-1},\delta\big)\sqcup\cdots\sqcup D\big((n-1)\eta^{-2n+3},\delta\big)$ 中的回路定义为以 λ° 为基点绕 $(n-1)\eta^{-2k+1}$ 的简单回路，对应于从 λ° 到 $(n-1)\eta^{-2k+1}$ 的路径，该路径由以下两段组成：沿圆 $|\lambda|=\lambda^\circ$ 从 λ° 顺时针旋转角度 $(2k-1)\pi/(n-1)$ 所得的圆弧，以及从 $\lambda^\circ\eta^{-2k+1}$ 到 $(n-1)\eta^{-2k+1}$ 的直线段。

现在设 $Q\in\mathbb{D}_\epsilon$ 是一个正实数。注意，通过对路径 γ_k重新缩放，我们得到了一条围绕（$n-1$）$\eta^{-2k+1}Q^{-1}$的简单回路 $\gamma_k\cdot Q^{-1}$。简单回路γ_k 沿着一个以（$n-1$）η^{-2k+1} 为圆心、半径为 r的圆绕过（$n-1$）η^{-2k+1}，其中$\delta<r<2\delta$。我们声称，如有必要，通过减小 ϵ，可以使以（$n-1$）$\eta^{-2k+1}Q^{-1}$ 为圆心、半径为 rQ^{-1} 的圆包含典范坐标 u_{N+k}（t，q，Q）。事实上，我们有

$$\big|u_{N+k}(t,q,Q)-(n-1)\eta^{-2k+1}Q^{-1}\big|=\big|Qu_{N+k}(t,q,Q)-(n-1)\eta^{-2k+1}\big|Q^{-1}$$

并且由于 $\big|Qu_{N+k}(t,q,Q)-(n-1)\eta^{-2k+1}\big|$ 的阶为 $O(Q)$，通过选取足够小的 ϵ，我们可以安排使得 $\big|Qu_{N+k}(t,q,Q)-(n-1)\eta^{-2k+1}\big|<r$ 对所有 $|Q|<\epsilon$均成立。换言之，重新缩放后的回路 $\gamma_k\cdot Q^{-1}$ 是围绕典范坐标 $u_{N+k}(t,q,Q)$的简单回路。我们将对应于简单回路 $\gamma_k\cdot Q^{-1}$的反射向量记为 $\alpha\in H(\mathrm{Bl}(X))$。让我们回顾一下级数 (5.11) 的命题 5.11，即，

$$I(Q,\lambda):=Q^{\Delta+m+(n-1)/2}I^{(-m)}\big(t,q,Q,Q^{-1}\lambda\big)\alpha.$$

$I(Q,\lambda)$的奇点恰好位于 $Q^{-1}\lambda=u_j(t,q,Q)$，当 $1\le j\le N+k$ 时，也就是说，$\lambda=Qu_j(t,q,Q)$。注意，根据 R 的定义，前 N 个奇点 $Qu_j(t,q,Q)$ $(1\le j\le N)$ 位于 $\mathbb{D}_{R\epsilon}$中。因此，$I(Q,\lambda)$ 是(Q,λ)中的多值解析函数 $\in\mathbb{D}_\epsilon\times V\setminus\Sigma$。尽管我们不打算给出完整的证明，但让我们概述如何证明 $I(Q,\lambda)$ 具有

在 $Q=0$ 处至多有对数奇点（见定义 5.9）。回顾除子方程（5.3），其中 $i=r+1$。注意 $q_{r+1}\partial_{q_{r+1}}=\frac{1}{n-1}Q\partial_Q$。结合除子方程以及第二结构联络关于 $\tau_{r+1}=t_{N+1}$的微分方程，容易证明，对每个 $\lambda\in V\setminus D\big((n-1)\eta^{-1},\ \delta\big)\sqcup\cdots\sqcup D\big((n-1)\eta^{-2n+3},\ \delta\big)$ 函数 $I(Q,\ \lambda)$ 都是一个在 $Q=0$处有福克斯型奇点的微分方程的解。现在结论由福克斯奇点理论得出。

沿着 γ_k 对 $I(Q,\lambda)$进行解析延拓，会将 $I(Q,\lambda)$变为 $-I(Q,\lambda)$，因为当 λ 沿着 γ_k变化时，$Q^{-1}\lambda$ 沿着 $\gamma_k\cdot Q^{-1}$ 变化，而后者正是用于定义反射向量 α 的简单回路。让我们考察 $I(Q,\lambda)$ 在 $Q=0$ 处关于 Q 的幂和 $\log Q$ 的展开。首先，我们知道 $\alpha=Q^{-(n-1)e}\beta$，其中 $\beta\in H(\mathrm{Bl}(X))$ 与 $\widetilde{\qquad}$ t 无关，而 Q（它可能依赖于 q）。将 $\beta=\beta_e+\beta_b$分解为 $\beta_e\in H(E)$和 $\beta_b\in H(X)$。令 $\beta_b=:\sum_{i=1}^N\beta_{b,i}\phi_i$。我们断言 $\beta_b=0$。根据命题 5.12(a)，在 $I(Q,\lambda)$ 的 $H(X)$-分量的展开中，$Q^0(\log Q)^0$ 前面的系数是

$$\frac{\lambda^{\theta+m-1/2}}{\Gamma(\theta+m+1/2)}\beta_{b,1}\phi_1=\frac{\lambda^{m+(n-1)/2}}{\Gamma(m+(n+1)/2)}\beta_{b,1}\phi_1.$$

根据命题5.11，上述表达式沿 γ_k 的解析延拓应当改变符号。然而，函数 $\lambda^{m+(n-1)/2}$ 在沿 γ_k 的解析延拓下是不变的。因此，唯一的可能性是 $\beta_{b,1}=0$。假设 M 是满足以下条件的最小数：对于某个次数为 M 的 ϕ_a，$\beta_{b,a}\neq 0$。如果 $M\leq n-1$，那么由于对于所有满足 $\deg(\phi_{a'})<M$ 的 a'，$\beta_{b,a'}=0$，命题 5.12(a) 得出，在 $I(Q,\lambda)$ 的 $H(X)$-分量展开中，$Q^M(\log Q)^0$ 前的系数是

$$\sum_{a:\deg(\phi_a)=M}\frac{\lambda^{\theta+m-1/2}}{\Gamma(\theta+m+1/2)}\beta_{b,a}\phi_a.$$

和之前一样，上述表达式沿 γ_k的解析延拓保持不变，而命题 5.11意味着解析延拓必须改变符号。再次得出结论：对于所有使 ϕ_a 具有 M次数的 a，都有$\beta_{b,a}=0$。我们得到所有 $\beta_{b,a}=0$，除了可能的$\beta_{b,N}$。我们将$\beta_{b,N}$ 的分析推迟，先考虑 β_e。回顾命题 5.12(b)，我们得到，在 $I(Q,\lambda)$ 的E 分量的展开中，Q^0 前面的系数是扭曲周期 ${}^{tw}I^{(-m)}_{\beta_e}(1,\lambda)$。因此，${}^{tw}I^{(-m)}_{\beta_e}(1,\lambda)$沿 γ_k的解析延拓必须是 ${}^{tw}I^{(-m)}_{-\beta_e}(1,\lambda)$。回顾推论 5.7，我们得到 β_e 必须与

$$\Psi(\mathcal{O}_E(-k+1))=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma(\mathrm{Bl}(X))(2\pi\mathbf{i})^{\deg}\mathrm{ch}(\mathcal{O}_E(-k+1)).$$

我们来证明 $\beta_{b,N}=0$。根据命题 5.12，在 $Q^n(\log Q)^0$ 的展开中，$H(X)$-分量 $I(Q,\lambda)$ 前面的系数为

$$\left(\frac{\lambda^{m-(n+1)/2}}{\Gamma(m+(1-n)/2)}\beta_{b,N}+\Phi_{\beta_e}(1,\lambda)(-1)^{n-1}\right)\phi_N.$$

沿着 γ_k 对上式作解析延拓。与上文一样，解析延拓应当改变符号。不过，回想命题 5.13，可得

$$\left(\frac{\lambda^{m-(n+1)/2}}{\Gamma(m+(1-n)/2)}\beta_{b,N}-\Phi_{\beta_e}(1,\lambda)(-1)^{n-1}\right)\phi_N.$$

因此，$\beta_{b,N}=0$ 这就完成了我们关于 $\beta_b=0$这一主张的证明。此外，我们证明了 $\beta=\beta_e$ 与 $\Psi(\mathcal{O}_E(-k+1))$ 成正比。为了得出比例系数为 ±1，我们只需验证欧拉配对 $\langle\Psi(\mathcal{O}_E(-k+1))\ \Psi(\mathcal{O}_E(-k+1))\rangle=1$。

为简单起见，我们仅考虑 $k=1$的情形。事实上，一般情形可通过关于 q 绕 $q=0$进行解析延拓而轻易得到：顺时针解析延拓将 $\Psi_q(\mathcal{O}_E(-k+1))$变为 $\Psi_q(\mathcal{O}_E(-k+1)\otimes\mathcal{O}(-E))=\Psi_q(\mathcal{O}_E(-k))$。我们有

$$\Psi_q(\mathcal{O}_E)=(2\pi)^{(1-n)/2}\Gamma(1-e)^{n-1}q^e(2\pi\mathbf{i}e),$$

其中 $q=-Q^{-(n-1)}$ 且对数的分支 q 固定为满足 $q^e=e^{\pi\mathbf{i}e}Q^{-(n-1)e}$。回顾公式（2.6），经过直接计算可得 $\langle\Psi_q(\mathcal{O}_E)\ \Psi_q(\mathcal{O}_E)\rangle=1$。

6 镜像模型关于扭曲周期

本节的目标是证明命题 5.13。其思路是证明，相对于 λ， $\Phi_\beta(Q,\lambda)$的拉普拉斯变换可以与一个适当的振荡积分相识别，其中积分循环由一族消失循环扫掠而成。完成这一步后，命题的陈述便可通过一个初等的局部计算轻松得到。当 $q:=-Q^{-(n-1)}$ 为正实数时，构造一个振荡积分更为方便。因此，让我们沿逆时针方向连接射线 $\mathbb{R}_{>0}$ 和 $\eta\mathbb{R}_{>0}$ 的一段弧，对 $\Phi_\beta(Q,\lambda)$ 关于 Q 作解析延拓，从而重新表述命题5.13 的陈述，其中 $\eta:=e^{\pi\mathbf{i}/(n-1)}$。注意，$\log Q$ 的值将变为 $\log|Q|+\pi\mathbf{i}/n-1$。换句话说，我们将假设 $Q=\eta q^{-1/(n-1)}$，其中 $q\in\mathbb{R}_{>0}$ 为正实数。注意，$Q^{-(n-1)e}=e^{-\pi\mathbf{i}e}q^e$，并且 $\Phi_\beta(Q,\lambda)$ 的公式采取以下形式

$$\Phi_\beta(q,\lambda)=\sum_{l,d=0}^{\infty}(-\partial_\lambda)^l\big\langle\psi^{l-1}\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda)q^ee^{-\pi\mathbf{i}e}\beta,1\big\rangle_{0,2,d\ell}(-q)^d. \tag{6.1}$$

此外，只需证明命题 5.13在 $k=0$的情形下成立即可，因为一般情形可通过关于 q 绕 $q=0$进行适当的解析延拓而由此推出。设 $k=0$，于是

$$e^{-\pi\mathbf{i}e}\beta=(2\pi)^{(1-n)/2}\Gamma(1-e)^{n-1}(2\pi\mathbf{i}e).$$

注意， $\gamma_0(q)$ 是一个简单回路，沿着正实轴趋近于 $u_0(q)=(n-1)q^{1/(n-1)}\in\mathbb{R}_{>0}$。从现在起，我们假设上述设定，并分别将 $\Phi_\beta(Q,\ \lambda)$ 和 $u_0(q)$ 简记为 $\Phi(q,\ \lambda)$ 和 $u(q)$。我们必须证明，沿着 $\gamma_0(q)$ 对 $\Phi(q,\ \lambda)$ 作解析延拓，结果为 $-\Phi(q,\ \lambda)$。最后需要指出的是，在前几节中，我们用 q 表示 X 的诺维科夫变量序列（q_1，……，q_r），而在本节中，我们用 q 仅表示一个正实数。我们不会用到 X，因此这样做不会造成混淆。

6.1 Contour integral

定义级数所涉及的 Gromov–Witten 不变量 $\Phi(q,\lambda)$ 可以从公式 (5.8) 中提取。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(q,\lambda)&=\sum_{l=0}^{\infty}(-\partial_\lambda)^l\big({}^{bl}S_l(-q,0)\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda)q^ee^{-\pi\mathbf{i}e}\beta,1\big)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}(-\partial_\lambda)^l\big(\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda)q^ee^{-\pi\mathbf{i}e}\beta,{}^{bl}S_l(-q,0)^T1\big).\end{aligned}$$

回忆一下，${}^{bl}S(-q,0,-\partial_\lambda)^T = {}^{bl}S(-q,0,\partial_\lambda)^{-1}$。利用公式 (5.9)，得到

$$\Phi(q,\lambda) = \int_{\mathrm{Bl}(X)} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^{dn}(-q)^d e\partial_\lambda}{(e\partial_\lambda + d)^n \prod_{i=1}^{d-1}(e\partial_\lambda + i)^{n-1}} \partial_\lambda^{d(n-1)} \widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) q^e e^{-\pi \mathbf{i} e} \beta. \tag{6.2}$$

利用 $\theta e = e(\theta - 1)$，我们得到关系式 $\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda)e = e\partial_\lambda \widetilde{I}^{(-m)}(\lambda)$（见引理 4.1 (a)），这里稍微滥用了记号，用 e 表示经典杯积乘法算子 $e_\cup$。因此，

$$\begin{aligned}\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) q^e e^{-\pi \mathbf{i} e} \beta &= q^{e\partial_\lambda} (2\pi)^{(1-n)/2} \Gamma(1 - e\partial_\lambda)^{n-1} (2\pi \mathbf{i} e \partial_\lambda) \widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) 1 \\ &= q^{e\partial_\lambda} (2\pi)^{(1-n)/2} \Gamma(1 - e\partial_\lambda)^{n-1} (2\pi \mathbf{i} e \partial_\lambda) e^{-(n-1)e\partial_\lambda \partial_m} \left(\frac{\lambda^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)} \right).\end{aligned}$$

让我们将上述关于 $\widetilde{I}^{(-m)}(\lambda) q^e e^{-\pi \mathbf{i} e} \beta$ 代入（6.2）中。注意，处处算子 e 都与微分算子 ∂_λ一起出现。另一方面，由于在整个表达式中，只有 e^n 前面的系数有贡献，我们可以从 ∂_λ 中移除 $e\partial_\lambda$，并对整个表达式应用微分算子 ∂_λ^n，也就是说，将 $\partial_\lambda^{d(n-1)}$ 改为 $\partial_\lambda^{d(n-1)+n}$。我们得到关于 $\Phi(q,\ \lambda)$ 的以下公式

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{(1-n)/2} 2\pi \mathbf{i} \sum_{d=0}^{\infty} \int_{\mathrm{Bl}(X)} \frac{(-1)^{dn+d} q^{d+e} e^2}{(e+d)^n \prod_{i=1}^{d-1}(e+i)^{n-1}} \Gamma(1-e)^{n-1} \\ &\quad \times \partial_\lambda^{d(n-1)+n} e^{-(n-1)e\partial_m} \left(\frac{\lambda^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)} \right).\end{aligned}$$

注意，

$$\partial_\lambda^{d(n-1)+n} e^{-(n-1)e\partial_m} \left(\frac{\lambda^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}\right)} \right) = \frac{\lambda^{-\frac{n}{2}-(n-1)(d+e)+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}-(n-1)(d+e)+m+\frac{1}{2}\right)}$$

and

$$\Gamma(1-e) = (-e)(-e-1)\cdots(-e-d)\Gamma(-e-d) = (-1)^{d+1} e(e+1)\cdots(e+d)\Gamma(-e-d).$$

由于 $\int_{\mathrm{Bl}(X)} e^n = (-1)^{n-1}$，我们可以用 $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Res}_{e=0} \frac{de}{e^{n+1}}$ 替换 $\int_{\mathrm{Bl}(X)}$。注意，$dn + d + (d+1)(n-1) + n - 1 = 2dn + 2n - 2$ 是偶数，因此公式中出现的符号恰好相互抵消。我们得到

$$\begin{aligned}\Phi(q,\lambda) = (2\pi)^{(1-n)/2} 2\pi \mathbf{i} \sum_{d=0}^{\infty} &\mathrm{Res}_{e=0} \frac{de}{d+e} q^{d+e} \Gamma(-d-e)^{n-1} \\ &\times \frac{\lambda^{-\frac{n}{2}-(n-1)(d+e)+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}-(n-1)(d+e)+m+\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

让我们代入 $x := -e - d$，则上述公式变为

$$\Phi(q,\lambda) = (2\pi)^{(1-n)/2} 2\pi \mathbf{i} \sum_{d=0}^{\infty} \mathrm{Res}_{x=-d} \frac{\mathrm{d}x}{x} q^{-x} \Gamma(x)^{n-1} \frac{\lambda^{-\frac{n}{2}+(n-1)x+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+(n-1)x+m+\frac{1}{2}\right)}.$$

无穷多个留数之和可以替换为形式为 $\int_{\epsilon-\infty}^{\epsilon+\mathbf{i}\infty} \mathbf{i}\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $\epsilon > 0$ 是一个正实数。我们来概述这一论断的证明。固定一个实数 $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得，$\mu := (n-1)\left(\delta - 1/2\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$。假设 $K \geq 1$ 是一个整数。

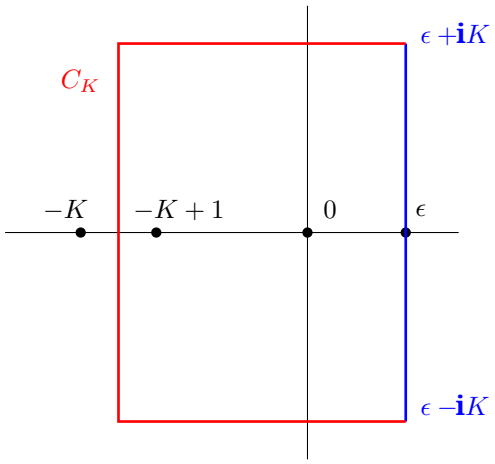

图1. 积分路径。

考虑由顶点为$\epsilon-\mathbf{i}K$、$\delta-K-\mathbf{i}K$、$\delta-K+\mathbf{i}K$和$\epsilon+\mathbf{i}K$的矩形边界所给出的矩形路径。该围道分为两部分：直线线段$[\epsilon-\mathbf{i}K,\ \epsilon+\mathbf{i}K]$以及其补集，我们将后者记为$C_K$—参见图1，其中这两部分分别以蓝色和红色标示。根据柯西留数公式，沿此围道的积分等于部分和$2\pi\mathbf{i}\sum_{d=0}^{K-1}\mathrm{Res}_{x=-d}$。另一方面，利用 Γ-函数的标准渐近估计（见附录A），可以证明，如果$\lambda>(n-1)q^{1/(n-1)}$是实数，那么沿C_K的积分在$K\to\infty$时趋于0。我们得到

$$\Phi(q,\lambda)=(2\pi)^{(1-n)/2}\int_{\epsilon-\mathbf{i}\infty}^{\epsilon+\mathbf{i}\infty}q^{-x}\Gamma(x)^{n-1}\frac{\lambda^{-\frac{n}{2}+(n-1)x+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(-\frac{n}{2}+(n-1)x+m+\frac{1}{2}\big)}\frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{6.3}$$

我们将(6.3)的右端记为$G(q,\lambda)$。注意，将$1/x$替换为$\Gamma(x)/\Gamma(x+1)$后，$G(q,\lambda)$变成了一个梅林–巴恩斯积分。这类积分的解析性质是众所周知的（见[2, 32]）。利用 Γ-函数的标准渐近估计，很容易证明该积分对所有正实λ都收敛，而当$\mathrm{Im}(\lambda)\neq 0$时发散。由于级数(6.1)视为关于$\lambda^{-1}$的洛朗级数时，在$|\lambda|>u(q)=(n-1)q^{1/(n-1)}$的情况下收敛，我们得到$\Phi(q,\lambda)$是$G(q,\lambda)$在区间$\big[(n-1)q^{1/(n-1)},+\infty\big)$上的限制的解析延拓。

引理6.1。梅林–巴恩斯积分$G(q,\lambda)$为0对于所有$0<\lambda\leq(n-1)q^{1/(n-1)}$。

证明。令$R>0$为一个充分大的正数。固定$\delta\in(0,1)$。我们希望将围道$\epsilon+\mathbf{i}\mathbb{R}$变形为由以下3个线性部分组成的围道：$-\mathbf{i}-s\ (-\infty<s\leq-\epsilon)$、$s\mathbf{i}+\epsilon\ (-1\leq s\leq 1)$和$\mathbf{i}+s\ (\epsilon\leq s<+\infty)$。积分$G(q,\lambda)$是当$R\to\infty$时，在$s\mathbf{i}+\epsilon\ (-T\leq s\leq T)$上的积分的极限，其中$T:=\sqrt{R^2-\epsilon^2}$；而变形后的围道上的积分，是当$R\to\infty$时，在由以下3个线性部分组成的围道上的积分的极限：$-\mathbf{i}-s\ (-\sqrt{R^2-1}<s\leq-\epsilon)$、$s\mathbf{i}+\epsilon\ (-1\leq s\leq 1)$和$\mathbf{i}+s\ (\epsilon\leq s<\sqrt{R^2-1})$。这两个积分之差是在以下两条弧线上的积分：$C_R$：$Re^{\mathbf{i}\theta}(\arcsin(1/R)\leq\theta\leq\arcsin T/R)$，以及$\overline{C}_R$：$Re^{\mathbf{i}\theta}(-\arcsin(T/R)\leq\theta\leq-\arcsin 1/R)$。需要证明

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R\text{ or }\overline{C}_R}q^{-x}\Gamma(x)^{n-1}\frac{\lambda^{-\frac{n}{2}+(n-1)x+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(-\frac{n}{2}+(n-1)x+m+\frac{1}{2}\big)}\frac{\mathrm{d}x}{x}=0.$$

这与[8, 节 5]中的证明方法相同。具体而言，将C_R分成两部分C_R'：$Re^{\mathbf{i}\theta}(\arcsin(1/R)\leq\theta\leq\delta)$和$C_R''$：$Re^{\mathbf{i}\theta}(\delta\leq\theta\leq\arcsin T/R)$，然后利用 Γ函数的标准渐近估计以及假设$|\lambda|\leq(n-1)q^{1/(n-1)}$。

最后，为完成证明，注意到该积分与 $\epsilon > 0$ 无关，因为 $G(q,\lambda)$ 中的 Γ 函数在正实轴上没有极点。令 $\epsilon \to +\infty$，并再次利用 Γ 函数的标准渐近估计，可得对于 $\lambda \le (n-1)q^{1/(n-1)}$，$G(q,\lambda) = 0$。■

利用上述引理，我们得到

$$\int_{u(q)}^{\infty} e^{-\lambda s} G(q,\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s} G(q,\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

将 $G(q,\lambda)$ 替换为相应的梅林–巴恩斯积分，交换积分顺序并利用

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{\lambda^{-\frac{n}{2}+(n-1)x+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(-\frac{n}{2}+(n-1)x+m+\frac{1}{2}\big)}\mathrm{d}\lambda = s^{\frac{n}{2}-(n-1)x-m-\frac{1}{2}},$$

我们得到

$$\int_{u(q)}^{\infty} e^{-\lambda s} G(q,\lambda)\mathrm{d}\lambda = (2\pi)^{(1-n)/2} \int_{\epsilon-\mathbf{i}\infty}^{\epsilon+\mathbf{i}\infty} q^{-x}\Gamma(x)^{n-1} s^{\frac{n}{2}-(n-1)x-m-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{6.4}$$

6.2 振荡积分

我们考虑如下函数族

$$f(x,q) = x_1 + \cdots + x_{n-2} + \frac{q}{x_1 \cdots x_{n-2}}\big(1 + x_{n-1}^2 + x_n^2\big),$$

其中 q 是一个正实数，并且

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \in V := \mathbb{C}^n \setminus \big\{x_1 \cdots x_{n-2}\big(1 + x_{n-1}^2 + x_n^2\big) = 0\big\}.$$

令 $\Gamma := \mathbb{R}_{>0}^{n-2} \times \mathbb{R}^2 \subset V$，也就是说，$\Gamma$ 是 V 中由满足以下条件的点$x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 组成的实 n 维循环：前 $n-2$ 个坐标为正实数，最后两个坐标为任意实数。注意，循环 Γ 属于以下半无限同调循环群：

$$\varprojlim H_n(V, \mathrm{Re}(f(x,q)) > M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{n-1},$$

其中，逆极限是对所有 $M \in \mathbb{R}$ 取的。

命题 6.2。在上述记号下，以下恒等式成立：

$$2\mathbf{i}\int_{\Gamma} e^{-f(x,q)} \frac{\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n}{x_1 \cdots x_{n-2}(1 + x_{n-1}^2 + x_n^2)} = \int_{\epsilon-\mathbf{i}\infty}^{\epsilon+\mathbf{i}\infty} q^{-x}\Gamma(x)^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

其中，Γ 的定向由 $\mathbb{R}^n$上的标准定向诱导。

证明。让我们对 x_{n-1}和 x_n积分消去。使用极坐标 $x_{n-1} = r\cos\theta$和 $x_n = r\sin\theta$，由于 $\mathrm{d}x_{n-1} \wedge \mathrm{d}x_n = r\mathrm{d}r \wedge \theta$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-K(1+x_{n-1}^2+x_n^2)} \frac{\mathrm{d}x_{n-1} \wedge \mathrm{d}x_n}{1 + x_{n-1}^2 + x_n^2} = \int_0^{\infty} e^{-K(1+r^2)} \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta}{1+r^2} = \pi \int_1^{\infty} e^{-Ku}\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

其中， K 是正实数；在第二个等式中，我们使用了代换 $u = 1+r^2$。将上述公式应用于我们的振荡积分，可得

$$\int_\Gamma e^{-f(x,q)} \frac{\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n}{x_1 \cdots x_{n-2}\big(1 + x_{n-1}^2 + x_n^2\big)} = \pi \int_{\mathbb{R}_{>0}^{n-2}} \int_1^\infty e^{-(x_1+\cdots+x_{n-2}+\frac{qu}{x_1\cdots x_{n-2}})} \frac{\mathrm{d}u}{u} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-2}}{x_1 \cdots x_{n-2}}, \tag{6.5}$$

其中，$\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-2}$ 是 $\mathbb{R}_{>0}^{n-2}$ 上的标准勒贝格测度。另一方面，让我们回顾振荡积分

$$J(q) := \int_{\mathbb{R}_{>0}^{n-2}} \exp\left(-\left(x_1 + \cdots + x_{n-2} + \frac{q}{x_1 \cdots x_{n-2}}\right)\right) \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-2}}{x_1 \cdots x_{n-2}}.$$

注意， $J(q)$ 的梅林变换是

$$\{\mathcal{M}J\}(x) = \int_0^\infty q^{x-1} J(q) \mathrm{d}q = \Gamma(x)^{n-1}.$$

回顾梅林反演定理，我们得到

$$J(q) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\epsilon - \mathbf{i}\infty}^{\epsilon + \mathbf{i}\infty} q^{-x} \Gamma(x)^{n-1} \mathrm{d}x,$$

其中 $\epsilon > 0$ 是一个正实数。让我们将上述公式应用于（6.5）。也就是说，在（6.5）的右侧交换积分次序后，我们得到

$$\pi \int_1^\infty J(qu) \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2\mathbf{i}} \int_1^\infty \int_{\epsilon - \mathbf{i}\infty}^{\epsilon + \mathbf{i}\infty} (qu)^{-x} \Gamma(x)^{n-1} \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

再次交换积分次序，并利用

$$\int_1^\infty u^{-x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{u^{-x}}{-x}\Big|_{u=1}^{u=\infty} = \frac{1}{x},$$

我们得到命题中陈述的公式。 ■

6.3 拉普拉斯变换

函数 $f(x,q)$在 $x \in \Gamma$ 上于临界点 $x_1 = \cdots = x_{n-2} = q^{1/(n-1)}$, $x_{n-1} = x_{n-2} = 0$ 处取得最小值。注意，相应的临界值为 $u(q) = (n-1)q^{1/(n-1)}$。考虑映射 $\Gamma \to [u(q), +\infty)$, $x \mapsto f(x,q)$。在 $\lambda \in (u(q), +\infty)$ 上的纤维是实代数超曲面 $\Gamma_\lambda \subset \Gamma$ ，由

$$x_1 + \cdots + x_{n-2} + \frac{q}{x_1 \cdots x_{n-2}}\big(1 + x_{n-1}^2 + x_n^2\big) = \lambda.$$

很容易看出， Γ_λ 是紧的，并且具有球面的同伦类型。事实上，该映射

$$\Gamma \setminus \{u(q)\} \to (u(q), +\infty), \qquad x \mapsto f(x,q)$$

是适当且正则的。因此，根据埃雷斯曼纤维化定理，它必然是一个局部平凡纤维化，进而是一个平凡纤维化，因为 $(u(q), +\infty)$ 是一个可缩流形。如果 λ 充分接近 $u(q)$，那么 Γ_λ 包含于一个莫尔斯坐标邻域中

临界点 $(q^{1/(n-1)},\ \ldots\ldots,\ q^{1/(n-1)},\ 0,\ 0)$的。切换到 f 的莫尔斯坐标后，我们得到纤维 Γ_λ 同胚于 $(n-1)$ 维球面。

我们用 $\Gamma_{\leq\lambda}$ 表示由下列不等式定义的 Γ子集

$$x_1+\cdots+x_{n-2}+\frac{q}{x_1\cdots x_{n-2}}\big(1+x_{n-1}^2+x_n^2\big)\leq\lambda.$$

注意， $\Gamma_{\leq\lambda}$ 是一个带边界的流形，其边界恰好是 $\partial\Gamma_{\leq\lambda}=\Gamma_\lambda$。 Pu t

$$\mathcal{I}(q,\lambda):=\int_{\Gamma_{\leq\lambda}}\frac{(\lambda-f(x,q))^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}\omega,$$

其中

$$\omega:=\frac{\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_{n-2}\big(1+x_{n-1}^2+x_n^2\big)}.$$

引理 6.3. 以下公式成立：

$$\int_\Gamma e^{-f(x,q)s}\omega=s^{m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}\int_{u(q)}^{\infty}e^{-\lambda s}\mathcal{I}(q,\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

证明 . 利用 Fubini 定理，我们变换

$$\mathcal{I}(q,\lambda)=\int_{u(q)}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}\int_{\Gamma_\mu}\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\mathrm{d}\mu.$$

因此，

$$\int_{u(q)}^{\infty}e^{-\lambda s}\mathcal{I}(q,\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{u(q)}^{\infty}\int_{u(q)}^{\lambda}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda-\mu)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}\int_{\Gamma_\mu}\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda.$$

交换积分顺序，我们得到

$$\int_{u(q)}^{\infty}\left(\int_{\mu}^{\infty}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda-\mu)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}\mathrm{d}\lambda\right)\int_{\Gamma_\mu}\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\mathrm{d}\mu=s^{-m+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\int_{u(q)}^{\infty}e^{-\mu s}\int_{\Gamma_\mu}\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\mathrm{d}\mu.$$

再次回顾 Fubini 定理，我们得到上述迭代积分与

$$\int_\Gamma e^{-f(x,q)s}\omega.$$

引理中陈述的公式如下。 ■

根据上述引理，积分 $\mathcal{I}(q,\ \lambda)$ 的拉普拉斯变换由以下公式给出：

$$\int_{u(q)}^{\infty}e^{-\lambda s}\mathcal{I}(q,\lambda)=s^{-m+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\int_\Gamma e^{-f(x,q)s}\omega=:F(s).$$

让我们 r 回顾命题 6.2 并注意到 $f(x,q)$ 具有如下缩放对称性 ry:

$$f\big(s\cdot x,s^{n-1}q\big)=f(x,q)s,$$

其中

$$s\cdot(x_1,\ldots,x_n)=(sx_1,\ldots,sx_{n-2},x_{n-1},x_n).$$

注意，如果 $s>0$ 是正实数，那么积分循环和全纯形式 ω 在 s的缩放作用下保持不变。因此，命题6.2中的公式给出以下公式：

$$\int_\Gamma e^{-f(x,q)s}\omega=\frac{1}{2\mathbf{i}}\int_{\epsilon-\mathbf{i}\infty}^{\epsilon+\mathbf{i}\infty}q^{-x}\Gamma(x)^{n-1}s^{-(n-1)x}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

因此，函数

$$F(s)=\frac{1}{2\mathbf{i}}\int_{\epsilon-\mathbf{i}\infty}^{\epsilon+\mathbf{i}\infty}q^{-x}\Gamma(x)^{n-1}s^{-(n-1)x-m+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

将上述公式与 (6.4) 进行比较，并利用拉普拉斯变换在光滑函数上是单射这一性质，可得 $G(q,\lambda)=2\mathbf{i}(2\pi)^{(n-1)/2}\mathcal{I}(q,\lambda)$。最后，为了完成命题 5.13 的证明，我们只需检验 $\mathcal{I}(q,\lambda)$ 绕 $\lambda=u(q)$ 的解析延拓如何将 $=(n-1)q^{1/(n-1)}$ 从 $\mathcal{I}(q,\lambda)$ 变换为 $-\mathcal{I}(q,\lambda)$。然而，这只是一个局部计算。事实上，若 λ 充分接近 $(n-1)q^{1/(n-1)}$，那么定义 $\mathcal{I}(q,\lambda)$ 的积分循环就充分接近临界点 $\big(q^{1/(n-1)},\dots,q^{1/(n-1)},0,0\big)$。通过换用莫尔斯坐标，我们得到

$$\int_{\Gamma_\mu}\omega/df=(\mu-u(q))^{\frac{n}{2}-1}P(q,\mu),$$

其中 $P(q,\mu)$ 在 $\mu=u(q)$ 处全纯（参见 [1, 第 12.1 节，引理 2]）。因此，

$$\mathcal{I}(q,\lambda)=\int_{u(q)}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}(\mu-u(q))^{\frac{n}{2}-1}P(q,\mu)\mathrm{d}\mu. \tag{6.6}$$

令变量 $\mu-u(q)=t(\lambda-u(q))$ 进行替换，得到 $\lambda-\mu=(1-t)(\lambda-u(q))$ 和 $\mathrm{d}\mu=(\lambda-u(q))\mathrm{d}t$，于是得到

$$\begin{aligned}\int_{u(q)}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}(\mu-u(q))^{i+\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\mu&=\int_0^1\frac{(1-t)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\big)}t^{i+\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}t\,(\lambda-u(q))^{i+m-1/2}\\&=\Gamma(i+n/2)\frac{(\lambda-u(q))^{i+m-1/2}}{\Gamma(i+m+1/2)}.\end{aligned}$$

将 $P(q,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}P_i(q(\mu-u(q))^i$ 在 $\mu=u(q)$ 处的泰勒级数展开代入式（6.6），并利用上述公式，得到

$$\mathcal{I}(q,\lambda)=(\lambda-u(q))^{m-1/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(i+n/2)}{\Gamma(i+m+1/2)}P_i(q)(\lambda-u(q))^i.$$

上述展开 在绕 $\lambda=u(q)$ 的解析延拓下显然是反不变的 .

弯曲围道

为完整起见，我们希望证明，如果 λ 是一个正实数，满足 $\lambda>(n-1)q^{1/(n-1)}$，那么

$$\lim_{K\to+\infty}\int_{C_K}q^{-x}\lambda^{(n-1)x}\frac{\Gamma(x)^{n-1}}{\Gamma\big(-\frac{n}{2}+(n-1)x+m+\frac{1}{2}\big)}\frac{\mathrm{d}x}{x}=0,$$

其中 C_K 是第 6.1节 中定义的围道（见图 1）。上述积分的被积函数与（6.3）中的被积函数相差常数因子 $\lambda^{-\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}}$。因此，（6.3）推导中所需的为零结论可由上述陈述得到。

我们先考虑 C_K 的上水平部分，即 $x=a+\mathbf{i}K, \delta-K\le a\le\epsilon$。这种情况下的估计直接由伽马函数的斯特林公式得出。具体来说，回忆一下，如果 $x=a+\mathbf{i}b\notin(-\infty,0]$，那么

$$|\Gamma(x)|=\sqrt{2\pi}e^{-a-|b||\mathrm{Arg}(x)|}|x|^{a-1/2}(1+o(1)),$$

其中，当 $|x|\to\infty$ 属于任意真子扇区 $-\pi<\alpha\le\mathrm{Arg}(x)\le\beta<\pi$ 时，$-\pi<\mathrm{Arg}(x)<\pi$ and $o(1)\to 0$ 一致成立。令 $c:=-\frac{n}{2}+m+\frac{1}{2}$。利用斯特林公式，我们得到

$$\begin{aligned}|\Gamma((n-1)x+c)|=&\sqrt{2\pi}e^{-(n-1)a-c-(n-1)|b||\mathrm{Arg}(x+c/(n-1))|}\\&\times|(n-1)x+c|^{(n-1)a+c-1/2}(1+o(1)).\end{aligned}$$

注意，由于我们可以选择足够大的 m，使得 $c>0$，而同时，$|\mathrm{Arg}(x+c/(n-1))|\le|\mathrm{Arg}(x)|$

$$|(n-1)x+c|^{(n-1)a+c-1/2}=(n-1)^{(n-1)a}|x|^{(n-1)a+c-1/2}O(1).$$

此外，对于水平积分轮廓上的所有 x，$(n-1)x+c$ 和 x 都属于扇区 $-\frac{3\pi}{4}\le\mathrm{Arg}(x)\le\frac{3\pi}{4}$。因此，我们得到如下形式的估计

$$|\Gamma((n-1)x+c)|^{-1}\le\mathrm{const}(n-1)^{-(n-1)a}|x|^{-(n-1)a-c+1/2}e^{(n-1)a+(n-1)|b||\mathrm{Arg}(x+c/(n-1))|},$$

对于 C_K 上部水平部分中的所有 x，其中常数与 K 无关。注意 $|q^{-x}\lambda^{(n-1)x}|=q^{-a}\lambda^{(n-1)a}$。综合这些估计可得，沿上部水平围道的被积函数绝对值可由以下表达式从上方界定：

$$\mathrm{const}((n-1)q^{1/(n-1)}/\lambda)^{(n-1)a}|x|^{-m-1/2}|\mathrm{d}a|\le\mathrm{const}\,K^{-m-1/2}|\mathrm{d}a|,$$

这里用到了，对于所有 $x=a+\mathbf{i}K\,(\delta-K\le a\le\epsilon)$，$\lambda>(n-1)q^{1/(n-1)}$ 且 $|x|^2\le K^2+(K+\epsilon-\delta)^2\le(1+|\epsilon-\delta|)^2K^2$。因此，除去一个与 K 无关的常数，该积分有如下界：$K^{-m+1/2}$，这证明当 $K\to\infty$ 时，该积分趋于零。

C_K 的下部水平部分，即 $x=a-\mathbf{i}K, \delta-K\le a\le\epsilon$，其估计与上文相同。现在考虑竖直部分 $x=\delta-K+\mathbf{i}b, -K\le b\le K$。为了应用斯特林公式，我们先回顾伽马函数的反射公式：

$$\Gamma(x)=\Gamma(1-x)^{-1}\frac{2\pi\mathbf{i}}{e^{2\pi\mathbf{i}x}-1}e^{\pi\mathbf{i}x}.$$

如果 x 位于积分轮廓的垂直部分，那么 $-x$ 属于 $-\pi<$ 辐角$(x)<\pi$ 的一个真子扇区，在该子扇区中可以应用 $\Gamma(1-x)=(-x)\Gamma(-x)$ 的斯特林公式，即，

$$|\Gamma(x)|=\sqrt{2\pi}\frac{e^{-\pi b}}{\left|e^{2\pi\mathbf{i}a}e^{-2\pi b}-1\right|}|x|^{a-1/2}e^{-a+|b||\mathrm{Arg}(-x)|}(1+o(1)),$$

其中 $x=a+\mathbf{i}b$。类似地，

$$\begin{aligned}|\Gamma((n-1)x+c)|=&\sqrt{2\pi}\frac{e^{-\pi(n-1)b}}{\left|e^{2\pi\mathbf{i}((n-1)a+c)}e^{-2\pi(n-1)b}-1\right|}|(n-1)x+c|^{(n-1)a+c-1/2}\\&\times e^{-(n-1)a-c+(n-1)|b||\mathrm{Arg}(-x-c/(n-1))|}(1+o(1)).\end{aligned}$$

注意，如果 $x=a+\mathbf{i}b$ 位于积分轮廓上，则 $a=\delta-K$ 和（$n-1$）$a+c=\mu+m-K$，其中 $\mu=$（$n-1$）（$\delta-1/2$）。因此，$e^{2\pi\mathbf{i}a}=e^{2\pi\mathbf{i}\delta}$ 和 $e^{2\pi\mathbf{i}((n-1)a+c)}=e^{2\pi\mathbf{i}\mu}$ 是与 K无关的常数。此外，我们选择 μ和 δ均为非整数，因此 $e^{2\pi\mathbf{i}\delta}-1$和 $e^{2\pi\mathbf{i}\mu}-1$均非零。于是得到

$$\frac{|\Gamma(x)|^{n-1}}{|\Gamma((n-1)x+c)x|}\le \text{const}\,\frac{\left|e^{2\pi\mathbf{i}\mu}e^{-2\pi(n-1)b}-1\right|}{\left|e^{2\pi\mathbf{i}\delta}e^{-2\pi b}-1\right|^{n-1}}\frac{|x|^{(n-1)(a-1/2)-1}}{|(n-1)x+c|^{(n-1)a+c-1/2}}$$
$$\times e^{(n-1)|b|(|\mathrm{Arg}(-x))|-|\mathrm{Arg}(-x-c/(n-1))|}(1+o(1)).$$

第 一个分式显然是关于 $b\in\mathbb{R}$ 的有界函数。对于第二个分式，我们有 ve

$$\frac{|x|^{(n-1)(a-1/2)-1}}{|(n-1)x+c|^{(n-1)a+c-1/2}}\le \text{const}\,\frac{|x|^{-m-1/2}}{(n-1)^{(n-1)a}}.$$

最后，对于指数项，我们来看由向量 $c/\ n-1$ $\frac{|b|c}{2\ n-1}$ $\theta=|\ \ -x\ \ -x\ -\ \ -x\ \ |-$ 和 ( ) 形成的三角形。这个三角形的面积为 ()。另一方面，当 $K\to\infty$ 趋于 0 时，差值 : 辐角( ))|辐角$(-x-c/(n-1))|$ 在 $x=\delta-K+\mathbf{i}b$ 中一致趋于 0，其中 $|b|\le K$。因此，除一个与 K 无关的常数因子外，我们可以用 $\sin\theta$ 从上方估计 θ。利用三角形的面积也等于 $\frac{1}{2}|x||x+c/(n-1)|\sin\theta$，我们得到

$$(n-1)|b|(|\mathrm{Arg}(-x))|-|\mathrm{Arg}(-x-c/(n-1))|$$
$$=(n-1)|b|\theta\le \text{const}\,|b|\sin\theta\le \text{const}\,\frac{b^2c}{|x||(n-1)x+c|}.$$

上述表达 式可由一个与 K 无关的常数界定。我们得到以下估计 e:

$$\frac{|\Gamma(x)|^{n-1}}{|\Gamma((n-1)x+c)x|}\le \text{const}\,K^{-m-1/2}(n-1)^{(n-1)K}$$

对所有 $x=\delta-K+\mathbf{i}b$, $-K\le b\le K$，其中该常数与 K 无关。最后，由于 $\left|q^{-x}\lambda^{(n-1)x}\right|=q^{-a}\lambda^{(n-1)a}$，我们得到以下估计：

$$\left|q^{-x}\lambda^{(n-1)x}\frac{\Gamma(x)^{n-1}}{\Gamma((n-1)x+c)x}\right|\le \text{const}\left((n-1)q^{\frac{1}{n-1}}/\lambda\right)^{(n-1)K}K^{-m-1/2}.$$

由于 $\lambda>(n-1)q^{\frac{1}{n-1}}$沿着 C_K 的竖直线段的积分（相差一个常数）被 $K^{-m+1/2}$ 所界。因此，该积分在极限 $K\to\infty$ 下趋于零。

致谢

我们谨向匿名审稿人致以感谢，感谢他们提出了许多有益的建议，帮助我们改进了论述。
T.M. 的研究部分得到了科研补助金（基盘C）17K05193 和 JP22K03265 的资助。本研究得到了世界顶级国际研究中心计划（WPI 计划）、日本文部科学省和日本的支持。

参考文献

[1] Arnold V.I.、Gusein-Zade S.M.、VarchenkoA.N.，《可微映射的奇点》。第 II 卷：积分的单调性与渐近性，*Monog. Math.*，第82 卷，Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，2012 年。[2] Bateman H.、Erd´elyi A.，《高等超越函数》。第 I卷，McGraw-Hill Book Co., Inc.，纽约，1953 年。

[3] Bayer A.，《半单量子上同调与爆破》，*Int. Math. Res. Not.* **2004** (2004年)，2069–2083，arXiv:math.AG/0403260。[4] Behrend K.，《代数几何中的 Gromov–Witten 不变量》，*Invent. Math.* **127** (1997年)，601–617，arXiv:alg- geom/9601011。[5]Behrend K.、Fantechi B.，《内在正规锥》，*Invent. Math.* **128** (1997年)，45–88，arXiv:alg- geom/9601010。[6] Behrend K.、Manin Yu.，《稳定映射的叠与 Gromov–Witten 不变量》，*Duke Math. J.* **85** (1996年)，1–60，arXiv:alg-geom/9506023。[7] Cotti G.，《退化的黎曼–希尔伯特–比尔克霍夫问题、半单性与 WDVV 势的收敛性》，*Lett. Math. Phys.* **111** (2021年)，99，44页，arXiv:2011.04498。[8] Dixon A.L.、Ferrar W.L.，《一类不连续积分》，*Quart. J. Math.* **7** (1936年)，81–96。[9] Dubrovin B.，《二维拓扑场论的几何》，载于《可积系统与量子群》（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1993），*Lecture Notes in Math.*，第1620卷，Springer，柏林，1996年，120–348，arXiv:hep- th/9407018。[10] Dubrovin B.，《弗罗贝尼乌斯流形的几何与解析理论》，*Doc. Math.* **2** (1998年)，315–326，arXiv:math.AG/9807034。[11] Dubrovin B.，《二维拓扑场论中的 Painlev´e 超越函数》，载于《Painlev´e 性质》，CRM Ser. Math. Phys.，Springer，纽约，1999年，287–412，arXiv:math.AG/9803107。[12] Dubrovin B.、Zhang Y.，《可积偏微分方程层级、弗罗贝尼乌斯流形与 Gromov– Witten 不变量的标准形》，arXiv:math.DG/0108160。[13] Fomenko A.、Fuchs D.，《同伦拓扑学》，第2版，*Grad. Texts in Math.*，第273卷，Springer，Cham，2016年。[14] Frenkel E.、Givental A.、Milanov T.，《孤子方程、顶点算子与简单奇点》，

Funct. ( )，– *Anal. Other Math.* **3** 2010 47 63, 0909 4032
arXiv: . .[15] Fulton W.，《交理论》，第2版，*Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*，Springer，柏林，1998年。[16] Galkin S.、Golyshev V.、Iritani H.，《Fano 流形的伽马类与量子上同调：伽马猜想》，*Duke Math. J.* **165** (2016年)，2005–2077，arXiv:1404.6407。[17]Gathmann A.，《爆破的 Gromov–Witten 不变量》，*J. Algebraic Geom.* **10** (2001年)，399–432，arXiv:math.AG/9804043。[18] Gelfand S.I.、Manin Yu.I.，《同调代数方法》，第2版，*Springer Monog. Math.*，Springer，柏林，2003年。[19]Givental A.，A_{n-1} 奇点与 nKdV 层级，*Mosc. Math. J.* **3** (2003年)，475–505，arXiv:math.AG/0209205。[20] Givental A.B.，《Gromov–Witten 不变量与二次哈密顿量的量子化》，*Mosc. Math. J.* **1** (2001年)，551–568，arXiv:math.AG/0108100。[21] Givental A.B.、Milanov T.E.，《简单奇点与可积层级》，载于《辛几何与泊松几何的广度》，*Progr. Math.*，第232卷，Birkh¨auser，马萨诸塞州波士顿，2005年，173–201，arXiv:math.AG/0307176。[22] Grauert H.、Remmert R.，《相干解析层》，*Grundlehren Math. Wiss.*，第265卷，Springer，柏林，1984年。[23] Hertling C.，《奇点的弗罗贝尼乌斯流形与模空间》，*Cambridge Tracts in Math.*，第151卷，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[24] Hertling C.、Manin Yu.I.、Teleman C.，《半单量子上同调与 F-流形的最新进展》，*Proc. Steklov Inst. Math.* **264** (2009年)，62–69，arXiv:0803.2769。[25] Iritani H.，《量子上同调中的积分结构与环面轨形的镜像对称》，

Adv. ( )，– *Math.* **222** 2009 1016 1079, 0903 1463
arXiv: . .[26] Manin Yu.I.，《弗罗贝尼乌斯流形、量子上同调与模空间》，

Amer. Math. Soc. Colloquium，第 *Publications* 47, 1999
American Mathematical Society 卷，罗德岛州普罗维登斯，。[27] Manin Yu.I.、Merkulov S.A.，《半单弗罗贝尼乌斯（超）流形与 P

^{r} *Topol.* 的量 *Methods Nonlinear Anal.* **9** 1997 107 161, 9702014
子上同调》，( )，– arXiv:alg-geom/ 。[28]Milanov T.，《 $\mathbb{P}^2$的量子上同调的周期映射》，*Adv. Math.* **351** (2019年)，804–869，arXiv:1706.04323。

[29] Milanov T., Saito K., 《原始形式与顶点算子》，筹备中。[30] Nori M.V., 《扎里斯基猜想及相关问题》，*Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983年)，305–344。[31] OrlovD.O., 《射影丛、单项变换与相干层的最出范畴》，*Russian Acad. Sci. Izv. Math.* **41** 1993 133 141 ( )，–。[32] Paris R.B., Kaminski D., 《渐近性与梅林 – 巴恩斯积分》，*Encyclopedia of Math. Appl.*，第 85 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2001年。[33] Saito K., 《与原始形式相关的周期映射》，*Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **19** (1983年)，1231–1264。[34] Saito M., 《论布里斯科恩格的结构》，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **39** (1989年)，27–72。[35] Shimada I., 《扎里斯基–范坎彭定理讲义》，可见于http://www.math.sci.hiroshima-u. ac.jp/~shimada/LectureNotes/LNZV.pdf。