arXiv:2304.04379v1 [math.NT] 10 Apr 2023

16 阶半二面体群的整数群行列式

HUMBERTO BA　　UTISTA SERRANO、BISHNU PAUDEL 和　　CHRIS PINNER

Abstract. 我们完整描述了小群(16,8)（即 16 阶半二面体群）的整数群行列式。

本文准备期间，Yuka Yamaguchi 和 Naoya Yamaguchi 独立地得到了该群的完整描述，见 [21]（以及 [20] 中另一个尚未处理的 16 阶群）。我们在此给出自己的版本，供对略有不同的方法感兴趣的读者参考。

1. Introduction

当所有元素均为整数时，确定群行列式所取的整数值是一个非平凡问题。这一问题由 Olga Taussky-Todd [12] 于1977年4月在美国数学学会于加利福尼亚州海沃德举行的会议上提出。对于所有阶不超过15的群（见 [6, 10, 2, 11, 7] ），以及14个16阶群中的12个群（ [13, 14, 15, 16, 17]中的5个阿贝尔群和[2, 8, 9, 18, 19, 1]中的9个非阿贝尔群中的7个），现已获得完整描述。我们回顾群行列式的定义，并注意到我们将把整数群行列式视为定义在群环 $\mathbb{Z}[G]$的元素上的函数

$$\mathcal{D}_G\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) := \det\left(a_{gh^{-1}}\right).$$

在本文中，我们确定16阶半二面体群或拟二面体群的整数群行列式

$$SD_{16} \text{ or } QD_{16} = \langle X, Y \mid X^8 = Y^2 = 1,\ YXY = X^3\rangle.$$

这是小群(16,8)，采用的是 GAP 小群库中的群标识。注意，我们有阶为 8 的二面体子群 $D_8 = \langle X^2$，以及四元数子群 $Y\rangle$ 和 $Q_8 = \langle X^2XY\rangle$。

定理 1.1。对于 SD_{16}，偶整数群行列式恰好是 2^{10} 的倍数。

奇整数行列式是模 8 同余于 $n \equiv 1$ 的整数，加上模 8 同余于 $n \equiv 5$ 且形式为 $n = mp^2$ 的那些数，其中 $m \equiv 5$ 模 8，p 是一个模 8 同余于 3 的素数。

最近，Yuka和 NaoyaYamaguchi 独立地获得了这一结果[21], ，以及 [20] 中剩余的那个16 阶群的行列式。 [21] 很好地展示了 14 个 16 阶群的整数群行列式之间的关系。

Date：2023 年 4 月 11 日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11C20，15B36；次要分类号：11C08，43A40。*Key words and phrases.* 整数群行列式、小群、半二面体群。

2. A formula for the semidihedral group determinant

Frobenius [4] 观察到群行列式可以因式分解

$$\mathcal{D}_G\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \prod_{\rho\in\hat{G}} \det\left(\sum_{g\in G} a_g \rho(g)\right)^{\deg\rho},$$

ˆ其中 G 表示该群的一组完备的、两两非同构的不可约群表示（例如参见 [3] 或 [5]）。

我们利用这一点给出阶为 2^n、 $n \geq 4$的一般半二面体群（也称为准二面体群）的公式。

$$SD_{2^n} = \left\langle X, Y \mid X^{2^{n-1}} = Y^2 = 1,\ YXY = X^{2^{n-2}-1} \right\rangle.$$

根据群的表示，群环 $\mathbb{Z}[SD_{2^n}]$ 中的元素可写成如下形式

$$F(X,Y) = f(X) + Yg(X) \tag{1}$$

其中 f 和 g 是次数为 $2^{n-1}-1$的整系数多项式。

根据群表示可知，群特征标必须满足$\chi(Y)^2 = \chi(X)^{2^{n-1}} = \chi(X)^{2^{n-2}-2} = 1$，也就是说，我们有四个特征标:

$$\chi(X), \chi(Y) = \pm 1.$$

这些贡献

$$M = F(1,1)F(1,-1)F(-1,1)F(-1,-1) = \left(f(1)^2 - g(1)^2\right)\left(f(-1)^2 - g(-1)^2\right) \tag{2}$$

对于群行列式。这是 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ （X,Y）的 F行列式。

这还留下 $2^{n-2}-1$ 个二阶表示需要求出。现在，如果 $\lambda^{2^{n-1}} = 1$，那么$\lambda^{(2^{n-2}-1)^2} = \lambda$ 并且

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{2^{n-2}-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

满足群关系，其中

$$\begin{aligned} \det\left(\rho(F(X,Y)\right) &= \det\begin{pmatrix} f(\lambda) & g(\lambda^{2^{n-2}-1}) \\ g(\lambda) & f(\lambda^{2^{n-2}-1}) \end{pmatrix} \\ &= f(\lambda)f(\lambda^{2^{n-2}-1}) - g(\lambda)g(\lambda^{2^{n-2}-1}) := k(\lambda). \end{aligned}$$

复数 λ 给出了 $2^{n-1}-2$ 个额外的二次因子，并且:

$$\mathcal{D}_{SD_{2^n}}(F(X,Y)) = \prod_{\lambda^{2^{n-1}}=1} f(\lambda)f(\lambda^{2^{n-2}-1}) - g(\lambda)g(\lambda^{2^{n-2}-1}).$$

也就是说， SD_{2^n} 行列式 $f(x) + yg(x)$ 是 $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ 行列式的

$$f(x)f(x^{2^{n-2}-1}) - g(x)g(x^{2^{n-2}-1}).$$

注意，复根 λ 具有 $k(\lambda) = k(\lambda^{2^{n-2}-1})$，因此我们将这些因子重复两次（也就是说，我们只需要一半的复 ρ，并将所得因子平方）。对于 $\lambda^{2^{n-2}} = 1$ ，显然有

$$k(\lambda) = f(\lambda)f(\lambda^{-1}) - g(\lambda)g(\lambda^{-1}),$$

并且当 λ 是一个本原的 2^{n-1}st 次单位根时

$$k(\lambda) = f(\lambda)f(-\lambda^{-1}) - g(\lambda)g(-\lambda^{-1}).$$

因此我们可以写成

$$\mathcal{D}_{SD_{2^n}}(F(X,Y)) = M\prod_{j=2}^{n-1} A_j^2$$

其中 M 如(2)所示，对于 $2 \le j \le n-2$ 整数

$$A_j = \prod_{\substack{i=1\\ i \text{ odd}}}^{2^{j-1}} f(\omega_{2^j}^i)f(\omega_{2^j}^{-i}) - g(\omega_{2^j}^i)g(\omega_{2^j}^{-i}),$$

其中 $\omega_t := e^{2\pi i/t}$ 表示 t 次本原单位根，且为整数

$$A_{n-1} = \prod_{\substack{i=1\\ i \text{ odd}}}^{2^{n-3}} |f(\omega_{2^{n-1}}^i)f(-\omega_{2^{n-1}}^{-i}) - g(\omega_{2^{n-1}}^i)g(-\omega_{2^{n-1}}^{-i})|^2.$$

注意到， $M\prod_{j=2}^{n-2} A_j^2$是 [2]中 $F(X,Y)$的二面体$D_{2^{n-1}}$行列式。

2.1. 限制到 SD_{16}的情形。当 $n=4$ 时，这变为

$$F(X,Y) = f(X) + Yg(X), \quad f(x) = \sum_{i=0}^{7} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{i=0}^{7} b_i x^i \in \mathbb{Z}[x], \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{SD_{16}}(F(X,Y)) &= \prod_{j=0}^{7} f(\omega_8^j)f(\omega_8^{3j}) - g(\omega_8^j)g(\omega_8^{3j})\\ &= MA_2^2A_3^2\end{aligned}$$

其中 M 如(2)所示，并且整数

$$A_2 = f(i)f(-i) - g(i)g(-i)$$

and

$$A_3 = \left(f(\omega_8)f(\omega_8^3) - g(\omega_8)g(\omega_8^3)\right)\left(f(\omega_8^5)f(\omega_8^7) - g(\omega_8^5)g(\omega^7)\right),$$

其中 $\omega_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$、$\omega_8^3 = -\overline{\omega_8}$、 $\omega_8^5 = -\omega_8$、 $\omega^7 = \overline{\omega}_8$。

2.2. 群 M_{2^n}。对于这一族群，其表示非常相似

$$M_{2^{2^n}} = \left\langle X, Y \mid X^{2^{n-1}} = Y^2 = 1,\ YXY = X^{2^{n-2}+1} \right\rangle.$$

同样，我们可以取(1)形式的 $F(X,Y)$。这一次我们有更多的特征；$\chi(Y) = \pm 1$，而 $\chi(X)$为 2^{n-2}次单位根，贡献为

$$M_1 := \prod_{x^{2^{n-2}}=1,\ y^2=\pm 1} F(x,y) = \prod_{x^{2^{n-2}}=1} f(x)^2 - g(x)^2, \tag{4}$$

群行列式；也就是 $\mathbb{Z}_{2^{n-2}} \times \mathbb{Z}_2$ $F(X,Y)$ 的行列式。

二次表示与之前相同，只是我们取的是

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{2^{n-2}+1} \end{pmatrix},$$

其中的新因子来自本原的 2^{n-1} 次单位根。因此

$$\mathcal{D}_{M_{2^n}} = \prod_{x^{2^{n-1}}=1} f(x)f(x^{2^{n-2}+1}) - g(x)g(x^{2^{n-2}+1}) = M_1 A^2,$$

其中 M_1 如（4）所示，且

$$A = \prod_{\substack{1\le j<2^{n-2}\\ j \text{ odd}}} f\left(\omega_{2^{n-1}}^j\right) f\left(-\omega_{2^{n-1}}^j\right) - g\left(\omega_{2^{n-1}}^j\right) g\left(-\omega_{2^{n-1}}^j\right).$$

例如，对于 $n = 4$和 M_{16} =小群(16,6)，我们取 $F(X, Y)$ 的形式 (3)，得到

$$\mathcal{D}_{M_{16}}(F(X, Y)) = M_1 A^2$$

与《Integers》

$$M_1 = \prod_{x=\pm1,\pm i, y=\pm1} F(x, y)$$

and

$$A = (f(\omega_8)f(-\omega_8) - g(\omega_8)g(-\omega_8)) \left(f(\omega_8^3)f(-\omega_8^3) - g(\omega_8^3)g(-\omega_8^3)\right).$$

3. Achieved values for SD_{16}

偶数值。我们得到 2^{10} 的所有倍数。

写作

$$h(x) := (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1),$$

我们从 $2^{12}m$ 得到

$$F(x, y) = (1 + x + x^2 + x^3 - x^6 - x^7 - mh) + y(1 + x - x^3 - x^4 - x^5 - x^7 - mh),$$

我们从 $2^{11}(2m + 1)$得到

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 - x^7 + mh) + y(1 + x - x^5 + x^7 + mh),$$

与 $2^{10}(-1 + 4m)$ 来自

$$\left((1 + x)(1 + x^2) - mh\right) + y\left((1 + x + x^2)(1 - x^5) - mh\right),$$

以及来自 $2^{10}(1 + 4m)$ 的

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - x^7 + mh) + y(1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + mh).$$

模 8 的奇数值 $n \equiv 1$ 。

我们得到 $1 + 16m$，从 $F(x, y) = (1 + mh) + ymh$ 以及 $(16m - 7)$ 而来

$$F(x, y) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - x^6 - mh) + y(1 + x + x^5 - mh).$$

模 8 的奇数值 $mp^2 \equiv 5$ 。

设 $p \equiv 3 \bmod 8$。那么 $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$ 和 p 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$中分裂。因此存在整数 U、 V，使得 $U^2 + 2V^2 = p$，其中 U、 V必为奇数。

根据需要改变 U 或 V的符号，我们写成 $U = 4k + 1$、 $V = 4s + 1$，并由（$5 + 16m$）p^2 得到

$$F(x, y) = (x + x^2 - (k - sx^2)(1 - x^4) + mh) + y(1 + x + x^2 + (s + kx^2)(1 - x^4) + mh),$$

写作 $U = 4s + 1$ 和 $V = 4k - 1$，我们从（$16m - 3$）p^2 得到

$$F(x, y) = (1 + x + (s + kx^2)(1 - x^4) - mh) + y(x + (k - sx^2)(1 - x^4) - mh).$$

4. Values must be of the stated form

在 [2] 中已经证明，奇 D_8 行列式必为模 4 余 1，而偶行列式可被 2^8 整除。由于 $\mathcal{D}_{SD_{16}}(F) = MA_2^2A_3^2$，其中 MA_2^2 是 F 的 D_8 行列式，我们可知奇 SD_{16} 行列式必为模 4 余 1。由于$MA_2^2 \equiv F(1,1)^8$ 模 2 且 $A_3 \equiv F(1,1)^4$ 模 2，我们可知偶行列式必须满足 $F(1,1)$ 为偶数、 $2^8 \mid MA_2^2$、 $2^2 \mid A_3^2$ 以及 $2^{10} \mid \mathcal{D}_{SD_{16}}(F)$；这些条件我们都能实现。

由于我们已经得到 1mod 8，因此只需证明5 mod8 具有所述形式。设 $\mathcal{D}_{SD_{16}}(F) \equiv 5 \mod 8$。由于它是奇数，我们知道 $f(1)$和$g(1)$的奇偶性相反。我们假设 $f(1)$ $f(-1)$ 为奇数，而 $g(1)$， $g(-1)$ 为偶数（否则交换 f 和 g 的角色）。由于 $(A_2A_3)^2 \equiv 1 \mod 8$，我们必有 $g(1)^2$、 $g(-1)^2 \equiv 4 \mod 8$ 中的一个，而另一个为 $0 \mod 8$。也就是说，

$$\frac{1}{4}(g(1)^2 - g(-1)^2) \equiv 1 \mod 2. \tag{5}$$

我们写作

$$\alpha_0 = a_0 - a_4, \quad \alpha_1 = a_1 - a_5, \quad \alpha_2 = a_2 - a_6, \quad \alpha_3 = a_3 - a_7,$$
$$\gamma_0 = a_0 + a_4, \quad \gamma_1 = a_1 + a_5, \quad \gamma_2 = a_2 + a_6, \quad \gamma_3 = a_3 + a_7,$$

以及 $\beta_0 = b_0 - b_4, \ldots, \beta_3 = b_3 - b_7$ 以及 $\delta_0 = b_0 + b_4, \ldots, \delta_3 = b_3 + b_7$. 然后

$$\begin{aligned} f(\omega_8) &= \alpha_0 + \alpha_1\omega_8 + \alpha_2 i - \alpha_3\overline{\omega}_8 \\ &= \left(\alpha_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}i(\alpha_1 + \alpha_3)\right) + \left(i\alpha_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)\right), \\ f(-\overline{\omega}_8) &= \left(\alpha_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}i(\alpha_1 + \alpha_3)\right) - \left(i\alpha_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)\right), \end{aligned}$$

and

$$f(\omega_8)f(-\overline{\omega}_8) = U_1 + \sqrt{2}iV_1$$

with

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\ V_1 &= \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3. \end{aligned}$$

显然

$$U_1 \equiv \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \equiv f(1)^2 \equiv 1 \mod 2.$$

同样地

$$V_1 \equiv \gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 \mod 2.$$

由于 $f(1) = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$为奇数，我们必有 $\gamma_0,\ldots,\gamma_3$中一个为奇数、三个为偶数，或者三个为奇数、一个为偶数。在这两种情况下，我们都得到 V_1 为偶数。

同样，我们可以写成

$$g(\omega_8)g(-\overline{\omega}_8) = U_2 + i\sqrt{2}V_2$$

with

$$\begin{aligned} U_2 &\equiv g(1)^2 \equiv 0 \mod 2, \\ V_2 &\equiv \delta_0\delta_1 + \delta_0\delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 \mod 2. \end{aligned}$$

但后一表达式是 (5)，因此 V_2 为奇数。于是 $(U_1 - U_2)$ 和 $(V_1 - V_2)$ 均为奇数，并且

$$A_3 = (U_1 - U_2)^2 + 2(V_1 - V_2)^2 \equiv 3 \bmod 8.$$

注意到

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \text{ or } 3 \bmod 8, \\ -1 & \text{if } p \equiv 5 \text{ or } 7 \bmod 8, \end{cases}$$

因此， A_3 中模 8 同余于 5 或 7 的素数必须平方。也就是说， A_3 必须包含一个模 8 同余于 $p \equiv 3$ 的素数 $\mathcal{D}_{SD_{16}}(F) = mp^2$，其中 $m \equiv 5$ 模 8 同余于 $p \equiv 3$。□

References

[1] H. Bautista-Serrano、B. Paudel 和 C. Pinner, *The integer group determinants for Small-Group(16,13)* 2304 00321 [ ] , arXiv:. math.NT.[2] T. Boerkoel和 C. Pinner, *Minimal group determinants and the Lind-Lehmer problem for dihedral groups* **186** 2018 4, 377 395 1802 07336 [ ] , 《Acta Arith.》 () , 第 . - 期。arXiv: . math.NT . [3] K. Conrad, *The origin of representation theory*, 《Enseign. Math.》 (2) 44 (1998) , 第 3-4期, 361-392。[4] F. G. Frobenius, *Über die Primefactoren der Gruppendeterminante*, 《GesammelteAhhand-lungen》 , 第三卷, Springer, 纽约, 1968年, 第38–77页。MR0235974[5] K. Johnson, 群矩阵 群行列式和表示论, 《数学讲义》第2233卷, Springer, 2019年。[6] M. Newman, *On a problem suggested by Olga Taussky-Todd*, 《Ill. J.Math.》24 (1980) , 156-158。 (1980) , 第 3 期, 187–191。MR0601702。[7] B. Paudel 和 C. Pinner, *Integer circulant determinants of order 15*, 《Integers》22 (2022) , 论文编号A4。[8] B. Paudel 和C. Pinner, *The group determinants for $\mathbb{Z}_n \times H$*, arXiv:2211.09930 [math.NT]。[9] B. Paudel 和C. Pinner, *The integer group determinants for Q_{16}* 2302 11688 , arXiv:. [ ] math.NT.[10] H. T.Laquer, *Values of circulants with integer entries*, 载于《斐波那契数列相关手稿集》, 斐波那契协会, 加利福尼亚州圣克拉拉, 1980年, 第 212–217 页。MR0624127。[11] C. Pinner 和C. Smyth, *Integer group determinants for small groups*, 《RamanujanJ.》51 (2020) , 第 2期, 421-453。[12] O. Taussky Todd, *Integral group matrices*, 《NoticesAmer.Math. Soc.》24 (1977) , 第 3期, A-345。摘要编号746-A15, 第746次会议, 加利福尼亚州海沃德, 1977年4月22-23日。[13] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Generalized Dedekind's theorem and its application to integer group determinants* 2022 2203 14420 2 [ ] , arXiv: . vmath.RT . [14] Y. Yamaguchi 和N. Yamaguchi, *Integer circulant determinants of order 16*, 《RamanujanJ.》, arXiv:2204.05014 [math.NT]。[15] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for C_2^4*, 2022年。arXiv: 2203 14420 2 [ ]。v math.RT [16] Y. Yamaguchi 和 N.Yamaguchi, *Integer group determinants for C_4^2* 2211 01597 , arXiv: . [ ] math.NT . [17] Y. Yamaguchi 和N.Yamaguchi, *Integer group determinants for abelian groups of order 16*, arXiv:2211.14761 [math.NT]。[18] Y. Yamaguchi 和 N.Yamaguchi, *Integer group determinants for $C_2^2 \rtimes C_4$* 2303 08489 , arXiv: . [ ] math.NT . [19] Y. Yamaguchi 和 N.Yamaguchi, *Integer group determinants for $C_4 \rtimes C_4$* 2303 13189 , arXiv: . [ ] math.NT . [20] Y.Yamaguchi 和N.Yamaguchi, *Integer group determinants for $C_8 \rtimes_5 C_2$*, 已提交至 arXiv [math.NT]。[21] Y.Yamaguchi 和N.Yamaguchi, *Integer group determinants of order 16*, 已提交至 arXiv [math.NT]。

Department of Mathematics, Kansas State University, Manhattan, KS 66506, USA
Email address: humbertb@ksu.edu, bpaudel@ksu.edu, pinner@math.ksu.edu