arXiv:2304.04392v1 [math.GT] 10 Apr 2023

浸入的二维球面上的四个临界点莫尔斯函数

Svitlana Bilun、Bohdana Hladysh、Alexandr Prishlyak 和 Mariia Roma n

2023年4月11日

摘要

我们研究浸入的二维球面上具有 4 个临界点的简单莫尔斯函数的拓扑性质。为对这类函数进行分类，我们使用浸入的对偶图和里布图。我们找到了这些函数的所有可能结构：在一个 1-层分支上有 4 个临界点的结构有 6 种；在 1-层上有两个点、在 2-层上有两个点的结构有 7 种；具有两个 1-层和一个三连通二维分层的结构有 7 种；具有两个 1-层且不含三连通二维分层的结构有 3 种。

引言

根据黎布定理，球面是唯一一个（在同胚意义下）存在具有两个临界点的（Morse）函数的闭曲面。球面经浸入所得的像曲面具有更多的临界点。我们证明其上至少有四个临界点。同时，我们所考虑的曲面没有三重点。

根据莫尔斯理论，流形上的任意 Morse 函数都可以通过增加和消去临界点化为一个最优函数。因此，了解最优函数中可能出现的结构非常重要。[10, 14]描述了带边界曲面上最优Morse函数的可能结构。

使用图论对函数和动力系统进行分类在二维和三维中很典型。

闭合二维流形上的流的拓扑分类见 [7, 18, 22, 23, 24, 42, 1, 31, 34,47, 32, 33, 40, 30], ，带边界的二维流形上的流的拓扑分类见 [5, 8, 20, 19, 34, 31, 27, 39, 24, 40, 43]。 [48, 50, 38, 26, 28, 12, 4, 3]构造了三维流形上莫尔斯–斯梅尔流的完备拓扑不变量。

莫尔斯流是处于一般位置的莫尔斯函数的梯度流。若固定奇点处函数的值，流就决定了函数的拓扑结构 [21, 46]。因此，莫尔斯–斯梅尔流的分类与莫尔斯函数的分类有关。

定向二维流形上的函数的拓扑不变量在 [17] 和 [44] 中得到构造；对于非定向二维流形，则在[21] 中构造；对于带边界流形，在 [9, 15, 16, 29] 中构造；对于非紧流形，则在 [37] 中构造。

闭二维流形上的光滑函数的拓扑不变量也在 [6, 16, 15, 37, 36,41, 21, 26, 54, 49, 2, 45], 中得到了研究；带边界二维流形上的相关研究见 [13, 16, 14] ，闭三维流形和四维流形上的相关研究见 [35, 25]。

关于流形上的函数与流理论的初步认识，我们推荐阅读论文[29, 51, 52, 53, 54]。

问题陈述。 本文旨在描述分层集上具有四个临界点的简单莫尔斯函数的所有可能拓扑结构；该分层集是二维球面浸入三维定向流形且不含三重点所形成的。

基本概念。 分层集是由若干子集（层）构成的空间，每个子集都是一个流形，并且每个点都有一个邻域，该邻域与有限多个层相交。当一个紧致二维流形浸入三维流形时，会自然地产生一种分层：维数为 0 的层（零维层）是三重点集合的分支（原像包含三个不同的点）；1-层是双重点集合的分支（原像包含两个点）；2-层是点集的分支，其原像各自只包含一个点。

设 M 是一个没有零维层的二维分层集。函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 称为*Morse* 函数，如果属于 2-层的每个临界点都是非退化的，并且函数在 1-层上的限制的临界点是非退化临界点；对于函数在 1-层上的限制，以及函数在某点 [11] 的邻域内与 2-层相交所得各分支的闭包上的限制，其临界点也都必须是非退化的。

如果 Morse 函数在不同的临界点处取不同的值，则称其为简单的 。换句话说：每个临界值都对应一个临界点。

论文结构。 在第一节中，为了描述球面的浸入结构，我们引入了一个图，它是球面上 1-层原像的对偶图，其边根据浸入过程中像的重合情况分成若干对（着色）。由于每个 1-层至少包含两个临界点（函数限制在该 1-层上的极小值点和极大值点），因此具有四个临界点的函数中，1-层的总数不超过两个。因此，我们考虑了所有具有一个和两个 1-层的可能分层。

在第二节中，我们使用里布图对 2-层闭包上的函数限制进行拓扑分类。

在第三节中，我们利用前两节的结果，描述双重点集连通时浸入球面上具有四个临界点的莫尔斯函数的所有可能结构；在第四节中，则讨论该集合具有两个分支的情形。

1 浸入的对偶图

若 $g: S^2 \to N^3$ 是球面的浸入，则分层 $M = g(S^2)$定义了球面的分层，其中各层是各层原像的连通分支。若自然分层M 只有一个 1-层，则对应的球面分层有两个 1-层。若自然分层 M 有两个 1-层，则球面上有四个 1-层。我们用对偶图来描述它们可能的构形。

球面分层的对偶图是一个图，其顶点对应于 2-层，边对应于 1-层。同时，当一条边界圆（1-层）位于与这两个顶点对应的两个 2-层的边界中时，这两个顶点之间就由一条边相连。

引理 1 球面上的对偶分层图是一棵树。球面的两个分层是同胚的
当且仅当它们的对偶图同构。

该引理的证明与 [29] 中三维流形上函数分类中相应结论的证明类似。

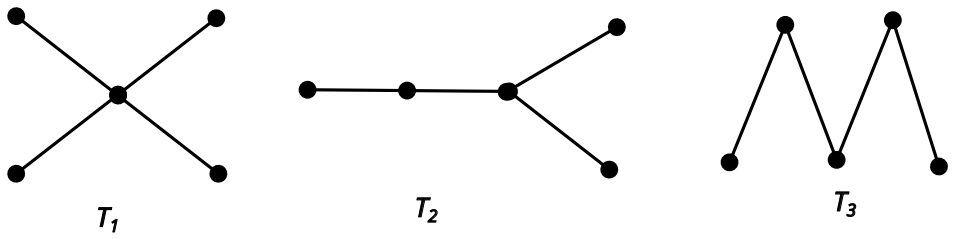

图 1：具有四条边的树

如果球面上的分层有两个 1-层，那么对偶图是一棵树，并且有两条边。由于只有一棵具有两条边的树，因此具有两条边的球面的所有分层都是同胚的。

如果球面的分层有四个 1-层，那么对偶图有 4 条边。具有四条边的树有三种（见图 1）：

1) T_1 有一个度数为 4 的顶点，其余顶点的度数均为 1（换句话说，所有边都有一个公共顶点）；

2) T_2 有一个度数为 3 的顶点、一个度数为 2 的顶点，以及三个度数 1 的顶点 ；
3) T_3 有三个度数为 2 的顶点和两个度数为 1 的顶点（链）。

我们用两种颜色给树的边着色：如果球面浸入时对应的层显示在同一个层中，则这两条边着同一种颜色。因此，在同构意义下，图T_1 只有一种着色，图 T_2 有两种着色，图 T_3 有三种着色，见图 2

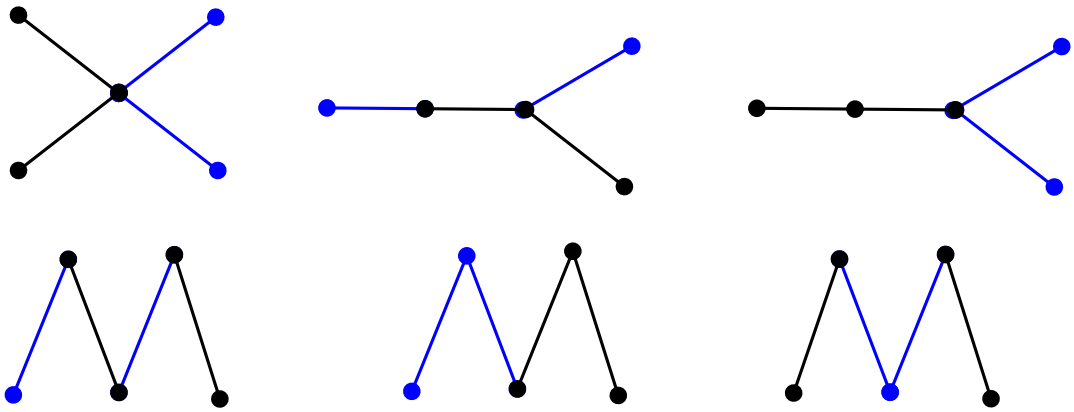

图 2：有四条边的树的着色

我们称度数为 1 的顶点为边缘顶点，其余顶点为内部顶点。如果一条边的某个端点的度数为 1，则称该边为边缘边；否则称为内部边。相应的层也称为内部层和边缘层。

2 定向曲面上具有嵌入圆的简单 Morse 函数的 Reeb 图

设分层集为一个紧致定向曲面，1-层仅由闭曲线和曲面边界分支构成，且 Morse 函数在每个分层上恰有两个临界点。将边界的每个分支上函数值相同的点粘合在一起，就得到一个嵌有线段的闭曲面。

Reeb 图是一个图，它是根据如下等价关系对曲面取商得到的商空间：若两点属于函数某个水平集的同一连通分支，则这两点等价。边的定向由函数值的增长方向确定。

如果不存在 1-层，那么 Reeb 图就是简单 Morse 函数的一个完备拓扑不变量。每个 1-层都被临界点分成两条路径，沿每条路径移动时函数值都会增加。这些路径在 Reeb 图上生成路径。我们对这些路径编号，使编号 1 和 2、3 和 4、5 和 6 等分别对应同一个 1-层；其余未成对的路径则对应于将边界分支上函数值相同的点粘合后得到的线段。

固定曲面的定向。在每个水平集分支上，其定向由函数值小于该水平集的点集的定向诱导。包含临界点的临界水平分支被该临界点分割成若干线段。沿线段定向移动的方向决定了该线段与路径交点集合上的次序。因此，经过价为 3 的顶点的路径集合（即 Reeb 图）被划分为两个有序子集。这些次序在与之对应的边上诱导出相同的循环次序。注意，如果一条边的两个端点都是价为 3 的顶点，那么诱导出的两个循环次序必须一致。

判别图 是一个 Reeb 图，其上选取了一些路径，其中一部分被分成若干对；并且对于每个度为 3 的顶点，都将经过该顶点的路径集合划分为两个有序子集。

定理 1设 M 为一个紧致定向曲面，其上给定了一个不含零维层的分层集结构，f、g：$M \to R$ 是在此分层集上的莫尔斯函数，它们在每个*1*-层上各有两个临界点。当且仅当它们的判别图等价时，函数 f 和 g 纤维等价。

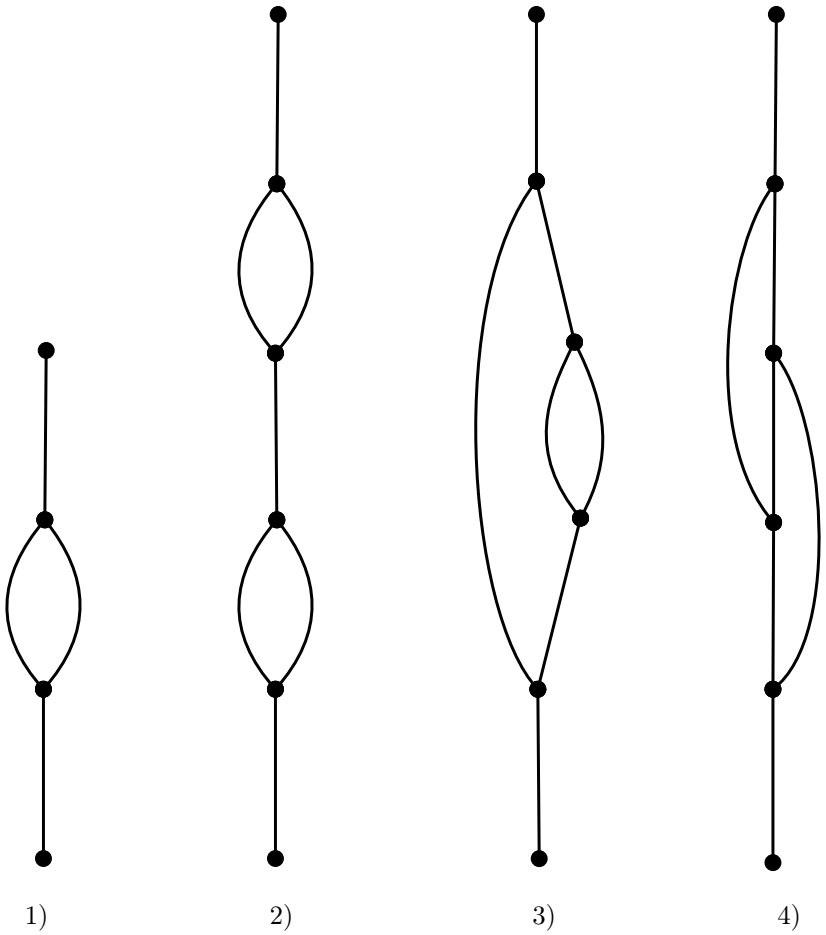

图3：1）环面和2）–4）双环面上的最优Morse函数的肋图

Pr唉 定理的证明与 [17, 44, 9] 中相应定理的证明类似 .

判别图的性质。属于顶点处两个子群之一的路径，会经过与该顶点相连的两条相邻边中的一条（或离开该顶点）。

如果一个顶点是两条路径（来自同一对路径）的起点或终点，那么这些路径在该顶点处属于不同的子集。

这些性质直接由定义得到。

3 具有单个1-层的浸入球面上的函数

我们首先考虑1-层上有两个临界点的情形。

步骤 1 的顶点对应一个单连通区域（2-圆盘）。其上的最优 Morse 函数有两个临界点——一个极小值和一个极大值（它们位于 2-圆盘的边界上）。因此，在拓扑等价的精度下，这种 2-层上只有一个最优函数。

如果 2-层有两个边界分量，那么在浸入后的像中，它们会显示在同一个 1-层中，因此函数在它们上的取值相同。将它们粘合起来（取浸入过程中该层像的闭包），就会得到一个环面。环面上的最优 Morse 函数有 4 个临界点：极小点 p_0、第一个鞍点 p_1、第二个鞍点 p_2 和极大点 p_3。对应的里布图如图 3 1) 所示。1-层上的两个临界点将是这四个临界点中的两个。以下点对是可能的：

$$1)\ (p_0,p_1),\ 2)\ (p_0,p_2),\ 3)\ (p_0,p_3),\ 4)\ (p_1,p_2),\ 5)\ (p_1,p_3),\ 6)\ (p_2,p_3).$$

对于第一对，从 p_0 到 p_1 的两条路径在里布图上重合，并在环面上形成一条子午线。因此，这种情况下只有一种 Morse 函数结构。第二种情况下，里布图上有两条不同的路径，它们在环面上形成两条平行线。第三种情况下，可能有两对路径：a) 它们在里布图上重合，并在环面上形成一条子午线；b) 它们在里布图上不同，在环面上则彼此平行。第四种情况下，两条不同的路径在环面上形成两条平行线。第五种和第六种情况分别与逆Morse函数下的第二种和第一种情况类似。

现在考虑全部 4 个临界点都位于 1-层上的情形。对于每个同胚于 2-圆盘的 2-层，其 Reeb 图呈字母 Y 或倒置的 Y 形。因此，每个 2-层上都有两种莫尔斯函数结构；但考虑对称性后，这一对 2-圆盘上共有三种结构。在环面上，1-层经过全部四个临界点。沿着 1-层从极小点出发，前往函数值最小的临界点时，临界点只能按以下顺序出现： p_0， p_2， p_1， p_3。与此同时，在 Reeb 图上，这条环路的像要么覆盖整个图，要么会留下连接 p_1 和 p_2 的两条边之一未被覆盖。因此，环面上有两种带环路的结构。一般而言，浸入球面上有$2 \times 3 = 6$ 种在一个 1-层上具有四个临界点的结构。

综上所述，我们得到以下结论：

定理2 有一 关于浸入球面上的*13*个拓扑不等价的最优*Morse*函数 *wi th* 一个连通的 *do*双重点。

4 浸入球面上具有两个 1-层的函数

图4展示了双重点集有两个分支的浸入球面的所有可能分层。它们对应于图2所述图的着色。下面详细考察每个分层上的莫尔斯函数。

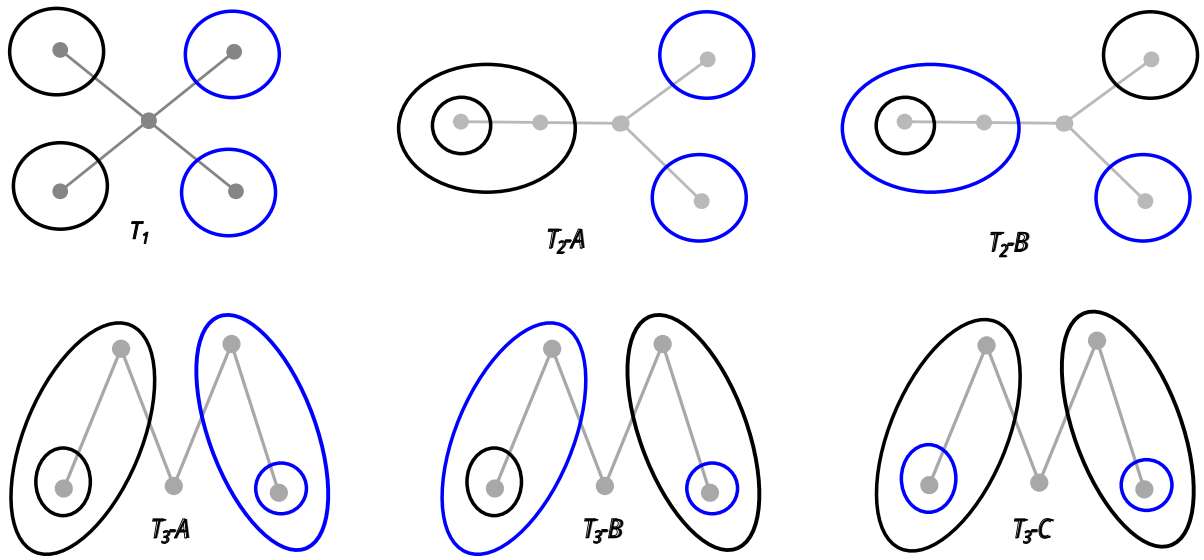

图4：浸入球面的分层

1. 图 T_1. 内层的像的闭包是一个亏格为2的定向曲面。此类曲面上的最优莫尔斯函数有6个临界点，按函数值递增顺序排列。相应的 Reeb 图见图3的2）–4）。因此，这种分层集上不存在只有4个临界点的莫尔斯函数。

2. 图 $T_2 - A$。内部区域的闭包是一个环面和一个带孔的环面。环面对应对偶图上的度为 2 的顶点。在这个环面上，除了两个临界点之外

在1-层上，还有两个内部临界点。也就是说，临界点的总数至少为六个。

因此，在这样的分层球面上不存在具有四个临界点的莫尔斯函数 t.

3. 图 $T_2 - B$. 在二维圆盘上（对应于对偶图中度为 1 的顶点），以及在圆柱上（对应于度为 2 的顶点），边界上的Morse 函数完全决定了内部Morse 函数的结构，因为始终只有一种不存在内部临界点的此类延拓。因此，这个分层集上的 Morse函数结构完全由对偶图中度为 3的顶点所对应的分层上的结构决定。对于蓝色循环，以及在具有一个 1-层的情形下，共有 7种可能。在除情形 3 a)之外的所有情形中，都存在一个保持这对路径不变的 Reeb 图对称。因此，在具有对称性的情形中，剩下的两个顶点可以通过一条路径连接，其精确性取同胚意义。对于情形 3 a)，选择路径有两种这样的可能（无论所有路径的并集是否覆盖 Reeb 图）。因此，在这种情形下，共有八种具有四个临界点的 Morse 函数结构。

4. 图 $T_3 - A$。在这种情况下，两个内部 2-层的闭包是一个环面，另一个 2-层是一个圆柱。在每个环面上，最优函数有 4 个临界点。因此，该曲面上任意 Morse 函数的临界点总数不少于 8。

因此，这种分层球面上不存在具有四个临界点的 Morse 函数。 t.

5. 图 $T_3 - B$。 在这种情况下，每个内部 2-层的闭包都是一个圆柱。每个圆柱上都只有一种最优 Morse 函数结构。1-层上的临界值可以交替出现，也可以是一个层上的两个值都小于另一个层上的临界值；或者一个层上有一个极小值和一个极大点，而其他层上有两个中间临界点。

因此，这种情况下有 3 个结构。

6. 图 $T_3 - C$。在这种情况下，两个内部 2-层的闭包是圆柱，另一个 2-层是环面。在环面上，最优函数有 4 个临界点。因此，该曲面上任意 Morse 函数的临界点总数至少为 6。

因此，在这样的分层集合上不存在具有四个临界点的莫尔斯函数 t.

综上所述，我们得到以下结论：

定理 3 对于双重点集合有两个连通分支的浸入球面，存在 *11* 种在拓扑意义上不等价的最优*Morse*函数。

结论

我们描述了三维流形中双重点集合连通以及双重点集合有两个连通分支的球面浸入的所有可能结构。在这些空间上，我们找到了具有四个临界点的简单莫尔斯函数的所有可能结构：双重点集合连通时有 13 种结构，双重点集合有两个连通分支时有 11 种结构。为对这些结构进行分类，我们使用定义在每个 2-层闭包上的函数的 Reeb 图。

我们希望，所得结果能够推广到浸入球面及其他曲面上具有更多临界点的函数。由于所构造的结构具有离散性质，描述这些及其他分层二维集合上离散莫尔斯函数的所有可能结构也很有意义。

参考文献

[1] O. Akchurin、S. Bilun 和 A. Prishlyak。作为 2-球面三角剖分 1-骨架的三色图。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.05737*，2022。doi:10.48550/ARXIV.2209.05737。

[2] S. Bilun 和 A. Prishlyak。闭曲面上的闭 Morse 1-形式。*Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ.Im. Tarasa Shevchenka*，2002(8):77–81，2002。

[3] S. Bilun和A. Prishlyak。在 3-球面图上对具有两个鞍点的莫尔斯流进行可视化。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.12174*，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2209.12174。

[4] S.Bilun、A.Prishlyak 和 A. Prus。带边界3-流形上的定点莫尔斯流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.04019*，2022。doi:10.48550/arXiv.2209.04019。[5] S. Bilun、M. Hrechko、O.Myshnova、A.Prishlyak。具有一个或两个临界胞腔的曲面上最优离散梯度向量场的结构 *arXiv* 预印本 *arXiv:2303.07258*，2023。doi:10.48550/arXiv. 2303.07258。[6] S. Bilun、A.Prishlyak、S. Stas、A. Vlasenko。射影平面上莫尔斯函数的拓扑结构 *arXiv* 预印本 *arXiv:2303.03850*，2023。doi:10.48550/arXiv.2303.03850。[7] S. Bilun、B.Hladysh、A.Prishlyak、VSinitsyn。具有至多十个奇点的2-球面上的余维一梯度向量场 *arXiv* 预印本 *arXiv:2303.10929*，2023。doi:10.48550/arXiv.2303.10929。[8] S. Bilun、M.Loseva、O.Myshnova、A.Prishlyak。带孔2-球面上具有至多六个奇点的梯度流的典型单参数分岔 *arXiv* 预印本 *arXiv:2303.14975*，2023。doi:10.48550/arXiv.2303.14975。[9] A.V. Bolsinov和A.T.Fomenko。可积哈密顿系统。几何、拓扑与分类。CRC Press公司，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿特区，2004。724页。[10] M. Borodzik、A.N´emethi 和 A. Ranicki。带边界流形的莫尔斯理论。代数几何拓扑学，16(2):971–1023，2016。doi:10.2140/agt.2016.16.971。[11]M. Goresky和R. MacPherson。分层莫尔斯理论。Springer，1988。doi:10.1007/ 978-3-642-71714-7。[12]C.Hatamian 和 A. Prishlyak。亏格1和亏格2非定向3-流形上的 Heegaard 图与最优莫尔斯流。国际几何中心论文集，13(3):33–48，2020。doi:10.15673/tmgc.v13i3.1779。[13] B.I. Hladysh和 A. O. Pryshlyak。曲面边界上具有非退化临界点的函数。乌克兰数学杂志，68(1):29–41，2016。doi:10.1007/s11253-016-1206-5。[14] B.I.Hladysh 和 A.O. Pryshlyak。带边界定向曲面上最优函数的一般位置变形。乌克兰数学杂志，71(8):1173–1185，2020。doi:10.1007/s11253-019-01706-8。[15] B.I.Hladysh和 A.O.Prishlyak。二维流形边界上具有孤立临界点的函数的拓扑。*SIGMA*。对称性、可积性与几何：方法与应用，13:050，2017。doi:0.3842/SIGMA.2017.050。[16] B.I.Hladysh 和A.O. Prishlyak。带边界定向曲面上的简单莫尔斯函数。数学物理、分析与几何杂志，15(3):354–368，2019。doi:10.15407/mag15.03.354。[17] A.S. Kronrod。二元函数。俄罗斯数学评论，5:24–134，1950。[18] Z. Kybalko、A.Prishlyak和 R. Shchurko。闭曲面上最优莫尔斯流的轨道等价性。国际几何中心论文集，11(1):12–26，2018。doi:10.15673/tmgc.v11i1.916。[19] M.Loseva、A. Prishlyak。Girl 曲面上最优流的拓扑结构。国际几何中心论文集，15(3-4):184–202，2022。doi:10.15673/tmgc.v15i3-4.2338。[20] M.Losieva和A.Prishlyak。二维圆盘边界上带奇点的莫尔斯–斯梅尔流的拓扑。国际几何中心论文集，9(2):32–41，2016。doi:10.15673/tmgc.v9i2.279。[21] D.P.Lychak和 A.O. Prishlyak。非定向曲面上的莫尔斯函数与流。泛函分析与拓扑学方法，15(03):251–258，2009。[22] A.A.Oshemkov和 V.V. Sharko。二维流形上莫尔斯–斯梅尔流的分类。数学文集，189(8):93–140，1998。

[23] M.M. Peixoto. 二维流形上流的分类。动力系统（1971年巴西萨尔瓦多巴伊亚大学研讨会论文集），第389–419页，1973年。[24] A.O. Prishlyak. 嵌入曲面中的图。俄罗斯数学调查，52(4):844，1997。doi:10.1070/RM1997v052n04ABEH002074。[25] A.O. Prishlyak. 四维流形上莫尔斯函数的共轭。俄罗斯数学调查，56(1):170，2001。[26] A.O. Prishlyak. 流形上无闭轨的莫尔斯–斯梅尔向量场。数学札记，71(1-2):230–235，2002。doi:10.1023/A:1013963315626。[27] A.O. Prishlyak. 分层集上具有孤立不动点的流的指标和。数学物理、分析、几何杂志 /数学物理、分析、几何/,10(1):106–115，2003。[28] A.O. Prishlyak. 莫尔斯–斯梅尔流的完备拓扑不变量与三维流形的把手分解。数学科学杂志，144:4492–4499，2007。[29] A.O. Prishlyak. 二维和三维流形上函数的拓扑性质。Palmarium Academic Pablishing，2012。[30] A. Prishlyak and L. Di Beo. 男孩曲面上具有最少奇点数的流。《国际几何中心论文集》，15(1):32–49，2020。[31] A. Prishlyak and M. Loseva. 女孩曲面上最优流的拓扑结构。《国际几何中心论文集》，15(3-4):184–202，2022。[32] A. Prishlyak, A. Prus, and S. Huraka. 球面上具有集体动力学的流。《国际几何中心论文集》，14(1):61–80，2021。doi:10.15673/tmgc.v14i1.1902。[33] A. Prishlyak and M. Loseva. 闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑。《国际几何中心论文集》，13(2):50–67，2020。doi:10.15673/tmgc. v13i2.1731。[34] A. Prishlyak and A. Prus. 带孔环面上的莫尔斯–斯梅尔流。《国际几何中心论文集》，10(1):47–58，2017。doi:10.15673/tmgc.v1i10.549。[35] A.O. Prishlyak. 三维流形上莫尔斯函数的等价性。《泛函分析与拓扑方法》，5(3):49–53，1999。[36] A.O. Prishlyak. 取值于直线和圆的曲面上莫尔斯函数的共轭。乌克兰数学杂志，52(10):1623–1627，2000。doi:10.1023/A:1010461319703。[37] A.O. Prishlyak. 平面上具有有限个奇点的莫尔斯函数。《泛函分析与拓扑方法》，8:75–78，2002。[38] A.O. Prishlyak. 三维流形上具有 beh2 的莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价性。乌克兰数学杂志，54(4):603–612，2002。[39]A.O. Prishlyak. 带边界的二维和三维流形上 m-场的拓扑分类。乌克兰数学杂志，55(6):966–973，2003。[40] A.O. Prishlyak and M.V. Loseva. 曲面边界上具有奇点的最优莫尔斯–斯梅尔流。数学科学杂志，243:279–286，2019。[41] A.O. Prishlyak and K.I. Mischenko. 带边界非紧曲面的分类。《泛函分析与拓扑方法》，13(01):62–66，2007。[42] A.O. Prishlyak and A.A. Prus. 带边界紧曲面上莫尔斯流的三色图。数学科学杂志，249(4):661–672，2020。doi:10.1007/s10958-020-04964-1。

[43] A. Prishlyak 和 S. Stas. 二维圆盘上具有唯一奇点的流的结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.00751*，2023。doi:10.48550/ARXIV.2304.00751。[44] G. Reeb。关于完全可积的 Pfaff 形式或数值函数的奇点。巴黎科学院报告，222:847—849，1946。[45] V.V. Sharko。流形上的函数：代数与拓扑方面。，第131卷，数学专著译丛。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993。[46] S. Smale。关于梯度动力系统。数学年刊，74:199–206，1961。[47] В.М. Кузаконь、В.Ф. Кириченко 和 О.О. Пришляк。光滑流形：几何与拓扑方面。乌克兰国家科学院数学研究所论文集.—*2013.—97.—500*页，2013。[48]А.О. Пришляк。三维流形上具有有限条特殊轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场。乌克兰国家科学院学报，(6):43–47，1998。[49]А.О. Пришляк。莫尔斯函数的共轭。现代数学若干问题。乌克兰科学院数学研究所，基辅，1998。[50] А.О. Пришляк。三维流形上莫尔斯–斯梅尔函数与向量场的拓扑等价性。拓扑与几何：乌克兰数学大会论文集，第29–38页，2001。[51] О.О. Пришляк。莫尔斯理论。基辅大学，2002。[52] О.О. Пришляк。微分几何。基辅大学，2004。

[53] О.О. 普里什利亚克。《现代拓扑学基础》。基辅大学，2006年。

[54] О.О. 普里什利亚克。《流形拓扑学》。基辅大学，2015年。

基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学 Svitlana Bilun 电子邮箱：bilun@knu.ua *Orcid ID*：0000-0003-2925-5392 Bohdana Hladysh 电子邮箱：bohdanahladysh@gmail.com，*Orcid ID*：0000-0001-8935-1453 AlexandrPrishlyak 电子邮箱：prishlyak@knu.ua *Orcid ID*：0000-0002-7164-807X Mariia Roman 电子邮箱：3848855@gmail.com *Orcid ID*：0009-0000-6795-8991