arXiv:2304.04414v1 [math.PR] 10 Apr 2023

马尔可夫链与多重正交性

AMÍLCAR BRANQUINHO、JUAN E. F. DÍAZ、ANA FOULQUIÉ-MORENO 和 MANUEL MAÑAS

摘要。在本文中，我们综述马尔可夫链与多重正交性理论之间的联系。我们主要致力于给出一种生成随机四对角海森堡矩阵的方法，这些矩阵来源于某些特定的多重正交族，例如 Jacobi–Piñeiro族和 HypergeometricLima–Loureiro 族。我们证明，与一个正的四对角非负有界海森-堡矩阵相关联时，可以构造出两个随机四对角矩阵。这两个随机三对角非负海森堡矩阵被证明在 Poincaré定理的启发下互为极限转置。

1. 引言

自 Karlin 和 McGregor 的著作以来（参见 [14, 15]），众所周知，正交多项式理论对于理解随机游走及其连续的生灭过程起着关键作用。

这是因为这些马尔可夫链或过程的转移矩阵具有三对角雅可比表示（参见 [10]），而根据 Stone–Shohat–Favard 定理（参见 [18]），已知存在与之相关的一列正交多项式。事实上，我们可以将所谓的谱测度确定为相关多项式与正交多项式之比的均匀极限（这就是著名的 Markov–Stieltjes 收敛定理）。这两列正交多项式（根据 Favard 定理而存在）由随机转移矩阵所支配的三项递推关系定义。

在本文中，我们将解释如何应用这些来自构造逼近理论的技术细节，以描述支配离散马尔可夫链的转移矩阵。

在一系列研究中，我们试图理解超越简单随机游走、并涉及远离近邻的联系的马尔可夫链

日期：2023年4月11日。2020数学主题分类。42C05,33C45,33C47,60J10,60Gxx。关键词与短语。多重正交多项式、马尔可夫链、随机矩阵、Karlin–McGregor 表示公式、Poincaré 定理。

（参见 [4, 5, 6]）。在这种情况下，转移矩阵不再是Jacobi型，离散马尔可夫链产生了Hessenberg结构。这里，正交多项式模型并不适用，不过仍可利用一些双正交性来对该过程进行建模，并提供一些洞见。这些双正交性源自多部专著中介绍的多重正交性的思想（参见 [13, 17, 19]）。

在本文中，我们将重点研究与离散马尔可夫链相关的直接问题，该离散马尔可夫链源自简单随机游走的推广，并与四对角转移随机矩阵相关。我们建立了Karlin–McGregor表示定理，刻画了暂留和常返情形，并介绍了该模型的一些例子（与所谓的Jacobi–Piñeiro和超几何多重正交多项式有关），这些例子源自多重正交多项式理论。我们注意到，这些结果在抽签模型中的一些有趣应用可以在 [12]中找到。

本文结构如下：第 2 节简要概述正交多项式理论中的重要结果，这些结果是理解随机游走模型的基础。第 3 节说明如何将多重正交多项式理论应用于 Hessenberg、稀疏且正的转移矩阵，以得到随机矩阵。我们重点研究四对角情形，并找出转移随机矩阵的两种构型。第 4 节介绍 Karlin–McGregor表示定理，并应用 Poincaré定理，得到此前获得的两个转移随机矩阵之间的极限关系。

2. 正交多项式

在他们关于随机游走的论文中（参见 [15]），Karlin 和 McGregor 考虑了一类 Jacobi 型、非负、随机的半无限转移矩阵，其类型为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} q_0 & r_0 & 0 & \cdots \\ p_1 & q_1 & r_1 & \\ 0 & p_2 & q_2 & r_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

其中 $(q_n)\subset[0,+\infty[$，和 (p_n)、$(r_n)\subset]0,\ +\infty[$，其中

$$q_0+r_0=1, \qquad p_n+q_n+r_n=1, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2.2}$$

例如，切比雪夫转移矩阵为

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

事实上，切比雪夫多项式定义为

$$T_n(x) = \cos(n\vartheta) \qquad \text{with} \qquad x = \cos(\vartheta), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

或者等价地，$T_{-1}(x) = 0$、$T_0(x) = 1$，以及

$$x\,T_n(x) = \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N}。$$

我们可以将所有这些信息概括为矩阵方程

$$x\,\mathscr{T} = \mathbf{T}\,\mathscr{T} \quad \text{where} \quad \mathscr{T} = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) \cdots\cdots T_n(x) \cdots\cdots \end{bmatrix}^\top. \tag{2.3}$$

但我们知道，

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\,\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{N},$$

其断言 $\{T_n\}$ 是一个多项式序列，关于定义在 $[-1,1]$ 上的权函数 $w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$，正交。正交性使我们能够描述转移矩阵的演化。事实上，由 (2.3) 可得

$$x^k\,\mathscr{T} = \mathbf{T}^k\,\mathscr{T}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

因此，$\mathrm{TTT}^k = \begin{bmatrix} \mathrm{TTT}^k{}_{n,m} \end{bmatrix}$，其中

$$\mathbf{T}^k_{n,m} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k\,T_n(x)\,T_m(x)\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k\,T_n^2(x)\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}, \qquad n, m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

现在，我们将看到，切比雪夫正交多项式序列是描述雅可比转移矩阵的一个模型。事实上，与（2.1）中的转移矩阵 PPP 相关联，我们可以通过一种方式定义多项式序列 $\{P_n\}$

$$x\,\mathscr{P} = \mathbf{P}\,\mathscr{P} \quad \text{where} \quad \mathscr{P} = \begin{bmatrix} P_0(x) & P_1(x) \cdots\cdots P_n(x) \cdots\cdots \end{bmatrix}^\top, \tag{2.4}$$

因此，取，$P_{-1}(x) = 0$，$P_0(x) = 1$

$$x\,P_n(x) = r_n\,P_{n+1}(x) + q_n\,P_n(x) + p_n\,P_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

现在我们陈述正交多项式理论中的一个主要定理。

定理 2.1 (Stone–Shohat–Favard)。 设 $\{P_n\}$ 是由 (2.5) 定义且满足初始条件 $P_{-1}(x)=0$、$P_0(x)=1$ 的多项式序列。若 p_n， q_n， r_n 满足 (2.2) ，则存在一个定义在 $[-1,1]$ 上的正测度$\mathrm{d}\mu$，使得 $\{P_n\}$ 是关于$\mathrm{d}\mu$的多项式序列，即

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\kappa_n\,\delta_{n,m}, \qquad n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

其中 $\kappa_n>0$， $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

该定理的逆命题可由傅里叶展开轻易推出：将$x\,P_n$ 表示为序列 $\{P_n\}$中各元素的线性组合。

尽管该定理给出了一个描述随机转移矩阵的测度的存在性，但没有解释如何从数据中确定该测度。然而，我们可以从 (2.5) 中确定该测度的矩序列（例如参见 [7]）。

在这些著作中， [14, 15], 作者解释说，与这类转移矩阵相关联的矩问题是确定的，并且可以由其绝对连续部分表示，至多相差一个离散部分（该部分完全由数据确定）。这是一个关键事实，因为借助 Markov–Stieltjes定理（弱形式），我们可以得到 PPP 的谱测度。

定理 2.2 (Markov–Stieltjes)。 设 $\{P_n\}$ 是关于定义在 $[-1,1]$ 上的正测度的一列多项式；则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x},$$

在 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ 的紧集上一致成立。

由下式定义的多项式序列， $\{P^{(1)}{}_n\}$

$$P_{n-1}^{(1)}(z)=\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(z)-P_{n+1}(x)}{z-x}\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad n\in\mathbb{N},$$

假设 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu(x)=1$, 它是 $\{P_n\}$和 μ 在 $[-1,1]$ 上的相伴多项式序列。需要注意的是，Markov–Stieltjes函数,

$$S(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x}, \qquad \text{analytic in} \qquad \mathbb{C}\setminus[-1,1], \tag{2.6}$$

是由随机转移矩阵 PPP 定义的算子的谱测度。此外，我们可以恢复其绝对连续部分。

通过使用索霍茨基–普莱梅利公式（参见 [8]）测度 μ，如

$$\big(S(z)\big)_+ - \big(S(z)\big)_- = 2\pi\mathbf{i}\,w(x), \quad \text{where} \quad \big(S(z)\big)_\pm = \lim_{\varepsilon\to 0^\pm} f(x+\mathbf{i}\,\varepsilon).$$

事实上，该函数可被视为关于 $\{P_n\}$ 在圆盘 $D \subset \mathbb{C}\setminus[-1,1]$ 上、取正向的正交性的复测度：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial D} P_n(z)\,P_m(z)\,S(z)\,\mathrm{d}z \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial D} P_n(z)\,P_m(z)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x}\,\mathrm{d}z \qquad \text{by (2.6)} \\
&\qquad = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu(x)\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial D}\frac{P_n(z)\,P_m(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Fubini Theorem)} \\
&\qquad = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \qquad \text{(Cauchy Theorem)}
\end{aligned}$$

我们可以说，雅可比算子的谱测度将正交多项式理论与算子理论联系起来。

在 Markov–Stieltjes定理的证明中，大量使用了这样的事实：正交多项式P_n 的零点是实数、单根，位于 $[-1,1]$ 上，并且具有交错性质。注意，对于每个 P_n，$n \in \mathbb{N}$ 次正交多项式的零点是PPP 的主截断矩阵的特征值。所有这些都源于以下事实：对于随机正矩阵 PPP，存在一个实数 c，使得 PPP $-c$III 是振荡的（这是关于雅可比矩阵的甘特马赫和克雷因判据的推论，参见 [5, 定理 1.7]）。关于振荡矩阵的介绍，可参见例如 [9, 11]。

定理 2.3。 式(2.1) 中的算子PPP 的谱测度可表示为

$$S(z) = \ell_0^\top\big(z\mathbf{I}-\mathbf{P}\big)^{-1}\ell_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell_0^\top\mathbf{P}^n\,\ell_0}{z^{n+1}}, \qquad |z|>1,$$

其中 $\ell_0^\top = \begin{bmatrix}1 & 0\cdots\cdots\end{bmatrix}$。

该结果可由矩的表示$w_n = \int z^n\,S(z)\,\mathrm{d}z$、$n \in \mathbb{N}$、 $\{P_n\}$ 的三项递推关系式 (2.4) 以及谱测度的表示式 (2.6) 轻易推出。

现在，我们可以通过以下方式描述转移矩阵 $\mathrm{PPP}^k = \left[\mathrm{PPP}^k{}_{n,m}\right]$的演化：

$$\mathbf{P}^k_{n,m} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) P_m(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_n^2(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}, \qquad n,m,k \in \mathbb{N}.$$

3. 多重正交多项式

本节将展示如何应用多重正交多项式理论来构造随机矩阵。本文主要遵循文献 [1, 6]中的研究。

当处理阶梯线上的首一多重正交多项式时，我们需要考虑有界、非负的 Hessenberg 矩阵，其类型为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} c_0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ b_1 & c_1 & 1 & \ddots & \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 & \ddots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \text{with} \qquad a_n > 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

（不失一般性，我们将范围限制在四对角情形）。与 HHH 相关联，我们通过以下方式形式化地定义三个多项式序列，$\{B_n\}$、$\{A^1{}_n\}$ 和 $\{A^2{}_n\}$

$$x\,\mathscr{B} = \mathbf{H}\,\mathscr{B} \quad \text{where} \quad \mathscr{B} = \left[B_0(x) \;\; B_1(x) \cdots\cdots B_n(x) \cdots\cdots\right]^\top, \tag{3.7}$$

$$x\,\mathscr{A}^1 = \mathscr{A}^1\mathbf{H} \quad \text{where} \quad \mathscr{A}^1 = \left[A^1_0(x) \;\; A^1_1(x) \cdots\cdots A^1_n(x) \cdots\cdots\right], \tag{3.8}$$

$$x\,\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}^2\mathbf{H} \quad \text{where} \quad \mathscr{A}^2 = \left[A^2_0(x) \;\; A^2_1(x) \cdots\cdots A^2_n(x) \cdots\cdots\right], \tag{3.9}$$

其初始条件为

$$B_0(x) = 1, \quad A^1_{-1}(x) = 0, \quad A^1_0(x) = 1, \quad A^2_{-1}(x) = 1, \quad A^2_0(x) = 0.$$

让我们考虑一对权函数 (w_1, w_2)，即半无限单项式向量

$$\chi = \left[1 \;\; x \;\; x^2 \cdots\cdots\right]^\top,$$
$$\chi_1 = \left[1 \;\; 0 \;\; x \;\; 0 \;\; x^2 \cdots\cdots\right]^\top,$$
$$\chi_2 = \left[0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; x \;\; 0 \;\; x^2 \cdots\cdots\right]^\top,$$

以及以下未修饰线性形式向量

$$\xi := \chi_1 w_1 + \chi_2 w_2 = \left[w_1 \;\; w_2 \;\; xw_1 \;\; xw_2 \;\; x^2 w_1 \;\; x^2 w_2 \cdots\cdots\right]^\top.$$

给定一个支撑于闭区间 $\Delta \subset \mathbb{R}$ 上的 Borel正测度 $\mathrm{d}\mu$ ， 我们的矩阵矩为

$$g = \int_{\Delta} \chi(x) \big(\xi(x)\big)^{\top} \mathrm{d}\mu(x).$$

矩阵矩 g 的 Gauss–Borel分解（当其所有主子式均非奇异时，该分解存在且唯一）是求解以下问题:

$$g = S^{-1} H \tilde{S}^{-\top},$$

其中 S、 $\tilde{S}$ 为下三角单位半无限矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ S_{1,0} & 1 & \ddots \\ S_{2,0} & S_{2,1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \tilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ \tilde{S}_{1,0} & 1 & \ddots \\ \tilde{S}_{2,0} & \tilde{S}_{2,1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

以及 H 为可逆的半无限对角矩阵 $H = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \cdots \end{bmatrix}$。II型多重正交多项式 $\{B_n\}$，以及 I型线性形式 $\{Q_n\}$，定义为

$$Q_n(x) = A_n^1(x)\, w_1(x) + A_n^2(x)\, w_2(x), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

定义如下:

$$\mathscr{B} = S\,\chi, \qquad \mathscr{Q} = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & \cdots & Q_n(x) & \cdots \end{bmatrix} = H^{-1} \tilde{S}\, \xi,$$

它们满足以下 I 型

$$\int_{\Delta} x^j Q_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 0, \qquad j \in \{0, \ldots, n-1\},$$

和 II 型正交关系

$$\int_{\Delta} B_n(x)\, w_a(x)\, x^{j_a}\, \mathrm{d}\mu(x) = 0, \qquad j_a = 0, \ldots, \left\lfloor \frac{n-a}{2} \right\rfloor, \qquad a = 1, 2.$$

我们还有以下多重双正交关系

$$\int_{\Delta} B_m(x) Q_k(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \delta_{m,k}, \qquad m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

我们还可以证明，与这些族 $\{B_n\}$ 和 $\{Q_m\}$ 相关联的矩阵 HHH 定义为

$$\mathrm{HHH} := S\,\Lambda S^{-1} \qquad \text{where} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

当我们面对代数切比雪夫系统 $(w_1\,\mathrm{d}\mu, w_2\,\mathrm{d}\mu)$（简称 AT 系统）时，可以看到，II 型多项式或 I 型线性形式的零点包含在 $\mathbb{B}(0, \|\mathrm{HHH}\|) = \{x \in \mathbb{C} : |x| < \|\mathrm{HHH}\|\}$（其中 $\|\mathrm{HHH}\|$ 是 HHH 的通常算子范数）内，并且具有交错性质（参见 [13, 17, 19]）。由此可证明（参见 [6, 引理 2 和 3]），

$$Q_n(\lambda) > 0, \qquad B_n(\lambda) > 0, \qquad \lambda \geq \|\mathbf{H}\|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

因此，在 (3.7) 中取 $x = \|\mathrm{HHH}\| t$，得到：

$$a_n B_{n-2}(\|\mathbf{H}\| t) + b_n B_{n-1}(\|\mathbf{H}\| t) + c_n B_n(\|\mathbf{H}\| t) + B_{n+1}(\|\mathbf{H}\| t) = \|\mathbf{H}\| t\, B_n(\|\mathbf{H}\| t)$$

并除以 $\|\mathrm{HHH}\|^{n+1}$，得到

$$\tilde{a}_n \tilde{B}_{n-2}(t) + \tilde{b}_n \tilde{B}_{n-1}(t) + \tilde{c}_n \tilde{B}_n(t) + \tilde{B}_{n+1}(t) = t\, \tilde{B}_n(t),$$

with

$$\tilde{a}_n = \frac{a_n}{\|\mathbf{H}\|^3}, \qquad \tilde{b}_n = \frac{b_n}{\|\mathbf{H}\|^2}, \qquad \tilde{c}_n = \frac{c_n}{\|\mathbf{H}\|}, \qquad \tilde{B}_n(t) = \frac{B_n(\|\mathbf{H}\| t)}{\|\mathbf{H}\|^n},$$

由此可见，当 HHH 有界时，我们可以取一个类似的算˜子 HHH，使其范数为 1，即

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sigma^{-1} \frac{1}{\lambda} \mathbf{H}\, \sigma, \qquad \text{with} \qquad \sigma = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1 & \|\mathbf{H}\| & \cdots & \|\mathbf{H}\|^n & \cdots \end{bmatrix}.$$

注意，新的特征向量为

$$\tilde{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_0(x) & \tilde{B}_1(x) & \cdots & \tilde{B}_n(x) & \cdots \end{bmatrix}^\top, \qquad \text{(right eigenvector)}$$

$$\tilde{\mathscr{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_0(x) & \tilde{Q}_1(x) & \cdots & \tilde{Q}_n(x) & \cdots \end{bmatrix}, \qquad \text{(left eigenvector)}$$

其中 $\tilde{Q}_n(x) = Q_n(\|\mathrm{HHH}\| t)$。

从现在起，不失一般性，我们考虑范数为 1 的 Hessenberg 矩阵 HHH。

现在我们将看到如何通过相似变换构造与 HHH 相关联的随机转移矩阵。该过程是构造性的。

根据 (3.10)，我们知道可以将方程 (3.7) 乘以 $B_n(1)$（或者，将 (3.8) 和 (3.9) 的线性组合分别乘以 w_1 和 w_2，再乘以 $Q_n(1)$），从而得到

$$\hat{a}_n\hat{B}_{n-2}(x)+\hat{b}_n\hat{B}_{n-1}(x)+c_n\hat{B}_n(x)+\hat{d}_n\hat{B}_{n+1}(x)=x\hat{B}_n(x),$$
$$\alpha_n\check{Q}_{n-1}(x)+c_n\check{Q}_n(x)+\beta_n\check{Q}_{n+1}(x)+\gamma_n\check{Q}_{n+2}(x)=x\check{Q}_n(x),$$

with

$$\hat{a}_n=\frac{a_nB_{n-2}(1)}{B_n(1)},\quad \hat{b}_n=\frac{b_nB_{n-1}(1)}{B_n(1)},\qquad \hat{d}_n=\frac{B_{n+1}(1)}{B_n(1)},\qquad \hat{B}_n(t)=\frac{B_n(x)}{B_n(1)},$$
$$\alpha_n=\frac{Q_{n-1}(1)}{B_n(1)},\qquad \beta_n=\frac{b_{n+1}Q_{n+1}(1)}{Q_n(1)},\quad \gamma_n=\frac{a_{n+2}Q_{n+2}(1)}{Q_n(1)},\quad \check{Q}_n(x)=\frac{Q_n(x)}{Q_n(1)}.$$

根据构造，我们有

$$\hat{a}_n+\hat{b}_n+c_n+\hat{d}_n=1,\qquad \text{as well as,}\qquad \alpha_n+c_n+\beta_n+\gamma_n=1.$$

因此，我们面对的是与 HHH 相关联的两个随机矩阵

$$\hat{\mathbf{H}}=\sigma_{II}^{-1}\mathbf{H}\sigma_{II},\quad \text{with}\quad \sigma_{II}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}1 & B_1(1)\cdots\cdots B_n(1)\cdots\cdots\end{bmatrix},\tag{3.11}$$

$$\check{\mathbf{H}}=\sigma_{I}^{-1}\mathbf{H}^{\top}\sigma_{I},\quad \text{with}\quad \sigma_{I}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}1 & Q_1(1)\cdots\cdots Q_n(1)\cdots\cdots\end{bmatrix}.\tag{3.12}$$

这些矩阵的右特征向量为

$$\hat{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}\hat{B}_0(x) & \hat{B}_1(x)\cdots\cdots\hat{B}_n(x)\cdots\cdots\end{bmatrix}^{\top},$$
$$\check{\mathscr{Q}}=\begin{bmatrix}\check{Q}_0(x) & \check{Q}_1(x)\cdots\cdots\check{Q}_n(x)\cdots\cdots\end{bmatrix}^{\top},$$

即，$x\,\hat{}\,\mathscr{B}=\hat{}\,\mathrm{HHH}\,\hat{}\,\mathscr{B}$，以及，$x\,\check{}\,\mathscr{Q}=\check{}\,\mathrm{HHH}\,\check{}\,\mathscr{Q}$。

例 3.1（Jacobi–Piñeiro）。考虑 $[0,1]$ 上的测度系统：

$$w_1(x)=x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_0}\,\mathrm{d}x,\qquad w_2(x)=x^{\alpha_2}(1-x)^{\alpha_0}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2>-1$, $\alpha_1-\alpha_2\notin\mathbb{Z}$。

第二类 Jacobi–Piñeiro 多重正交多项式由 Rodrigues 型公式定义（参见 [2]）

$$B_{n_1+n}(x)=\frac{(1-x)^{-\alpha_0}}{M_{n_1+n}}\Big(x^{-\alpha_2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{n+\alpha_2}\Big)\Big(x^{-\alpha_1}\frac{\mathrm{d}^{n_1}}{\mathrm{d}x^{n_1}}x^{n_1+\alpha_1}\Big)(1-x)^{n_1+n+\alpha_0},$$

with $M_{n_1+n}=(-1)^{n_1+n}\dfrac{\Gamma(2n_1+n+\alpha_1+\alpha_0+1)\,\Gamma(n_1+2n+\alpha_2+\alpha_0+1)}{\Gamma(n_1+n+\alpha_1+\alpha_0+1)\,\Gamma(n_1+n+\alpha_2+\alpha_0+1)}$, and $n_1=n$ or $n_1=n+1$, $n\in\mathbb{N}$. We can write

$$a_{n+2}=\lambda_{3n+2}\lambda_{3n+4}\lambda_{3n+6}$$
$$b_{n+1}=\lambda_{3n+1}\lambda_{3n+3}+\lambda_{3n+2}\lambda_{3n+3}+\lambda_{3n+2}\lambda_{3n+4}$$

$$c_n = \lambda_{3n} + \lambda_{3n+1} + \lambda_{3n+2},$$

其中，对所有$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们有（参见 [3]）

$$\begin{aligned}
\lambda_{6n+1} &= \frac{(2n+1+\alpha_1+\alpha_0)(2n+1+\alpha_2+\alpha_0)(n+1+\alpha_1)}{(3n+1+\alpha_1+\alpha_0)(3n+2+\alpha_1+\alpha_0)(3n+1+\alpha_2+\alpha_0)},\\
\lambda_{6n+2} &= \frac{(2n+1+\alpha_2+\alpha_0)(2n+1+\alpha_0)(n+\alpha_2-\alpha_1)}{(3n+1+\alpha_2+\alpha_0)(3n+2+\alpha_2+\alpha_0)(3n+2+\alpha_1+\alpha_0)},\\
\lambda_{6n+3} &= \frac{(2n+2+1+\alpha_0)(2n+1+\alpha_0)(n+1+\alpha_1-\alpha_2)}{(3n+2+\alpha_1+\alpha_0)(3n+3+\alpha_1+\alpha_0)(3n+2+\alpha_2+\alpha_0)},\\
\lambda_{6n+4} &= \frac{(n+1+\alpha_2)(2n+2+\alpha_2+\alpha_0)(2n+2+\alpha_1+\alpha_0)}{(3n+2+\alpha_2+\alpha_0)(3n+3+\alpha_2+\alpha_0)(3n+3+\alpha_1+\alpha_0)},\\
\lambda_{6n+5} &= \frac{(n+1)(2n+2+\alpha_2+\alpha_0)(2n+2+\alpha_0)}{(3n+3+\alpha_2+\alpha_0)(3n+3+\alpha_1+\alpha_0)(3n+4+\alpha_1+\alpha_0)},\\
\lambda_{6n} &= \frac{n(2n+1+\alpha_1+\alpha_0)(2n+\alpha_0)}{(3n+\alpha_2+\alpha_0)(3n+1+\alpha_2+\alpha_0)(3n+1+\alpha_1+\alpha_0)}.
\end{aligned}$$

在 [6] 中，我们证明了相关海森堡矩阵的系数为正，当且仅当 Jacobi–Piñeiro 参数 $\alpha_1\alpha_2$ 满足 $|\alpha_1-\alpha_2|<1$。但是，II 型 Jacobi–Piñeiro 多重正交多项式在 1 处的值为

$$B_{n_1+n}(1) = \frac{(\gamma+1)_{n_1+n}}{(\alpha+\gamma+n_1+n+1)_{n_1}(\beta+\gamma+n_1+n+1)_n}, \tag{3.13}$$

其中 $n_1 = n$ 或 $n_1 = n+1$，$n \in \mathbb{N}$。我们还有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \kappa^3, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 3\kappa^2, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 3\kappa, \quad \text{with} \quad \kappa = \frac{4}{27}. \tag{3.14}$$

现在，我们可以利用 (3.11) 构造 Jacobi–Piñeiro 多项式的随机转移矩阵 $\hat{}$HHH。要构造 $\check{}$HHH，我们需要第一类多重正交多项式的一个紧致表达式。在 [6] 中，我们得到了适用于所有 $n \in \mathbb{N}$ 的表达式，

$$\begin{aligned}
A^1_{2n}(x) = A^2_{2n}(x) = {} & \frac{(2n+\alpha+\gamma)_n (2n+\beta+\gamma)_n}{(n-1)!\,\Gamma(2n+\gamma)}\\
& \times \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{\Gamma(3n-(j+1)+\alpha+\gamma)}{\Gamma(n-j+\alpha)(\alpha-\beta-j)_n}\, x^{n-1-j},
\end{aligned}$$

$$A^{1}_{2n-1}(x) = \frac{\Gamma(3n-1+\alpha+\gamma)\,(2n-1+\beta+\gamma)_n}{(n-1)!\,\Gamma(2n-1+\gamma)} \times \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\frac{(2n-1+\alpha+\gamma)_{n-1-j}}{\Gamma(\alpha+n-j)\,(\alpha-\beta+1-j)_{n-1}}\,x^{n-1-j},$$

$$A^{2}_{2n+1}(x) = (-1)^{n-1}\frac{\Gamma(3n+1+\beta+\gamma)\,(2n+1+\alpha+\gamma)_{n+1}}{(n-1)!\,\Gamma(2n+1+\gamma)} \times \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\frac{(2n+1+\beta+\gamma)_{n-1-j}}{\Gamma(\beta+n-j)\,(\alpha-\beta-(n-1)+j)_{n+1}}\,x^{n-1-j}.$$

对于 $\alpha_1 = -\frac{1}{4}$、 $\alpha_2 = \alpha_0 = -\frac{1}{2}$，利用 (3.11) 和 (3.12)，我们得到以下以十进制形式表示的近似转移矩阵，精确到四位有效数字（目前无法求得闭合的有理表达式，并且需要计算若干涉及欧拉伽马函数的求和）

$$\check{\mathbf{H}} \approx \begin{bmatrix} 0.6000 & 0.2531 & 0.1469 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.4215 & 0.3167 & 0.2419 & 0.0199 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0.2760 & 0.4657 & 0.2036 & 0.0547 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0.3223 & 0.4176 & 0.2341 & 0.0260 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0.2826 & 0.4586 & 0.2110 & 0.0478 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}} \approx \begin{bmatrix} 0.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.2667 & 0.3167 & 0.4167 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.1026 & 0.1603 & 0.4657 & 0.2715 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0.0156 & 0.2417 & 0.4176 & 0.3250 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0.0565 & 0.2035 & 0.4586 & 0.2814 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0.0250 & 0.2336 & 0.4289 & 0.3125 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

正如我们所见，这些矩阵并非互为转置。我们将在接下来的几节中尝试解释这一现象。

4. Karlin–McGregor表示定理

现在，我们将 Karlin 和 McGregor 关于三对角随机矩阵 [14] 的结果推广到多正交多项式的多对角情形。

我们在第 3 节中看到，某些多重正交多项式集合给出了两族随机矩阵 $\hat{}\mathrm{HHH}$ 和 $\check{}\mathrm{HHH}$。这里，$\hat{}\mathrm{HHH}$ 描述了一条允许向后跳跃超过最近邻范围的马尔可夫链，而 $\check{}\mathrm{HHH}$ 描述了一种允许向前跳跃超过最近邻范围的随机游走。

定理 4.1 （Karlin–McGregor 表示公式）。 设 $(w_1\mathrm{d}\mu, w_2\mathrm{d}\mu)$ 是一个 AT 系统。那么，对于转移矩阵为 $\hat{}\mathrm{HHH}$ （分别为 $\check{}\mathrm{HHH}$）的马尔可夫链，从状态 n 出发经过 r 步到达状态 m 的概率为

$$\hat{\mathbf{H}}^{r}_{nm} = \frac{B_m(1)}{B_n(1)}\int_{\Delta} x^r\,B_n(x)\,Q_m(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\check{\mathbf{H}}^{r}_{nm} = \frac{Q_m(1)}{Q_n(1)}\int_{\Delta} x^r\,B_m(x)\,Q_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

我们还可以在 [6] 中得到对暂留和常返马尔可夫链的一个非常简单的刻画。

定理 4.2。假设两个对偶马尔可夫链都是不可约的。那么，当且仅当积分

$$\int_{\Delta} \frac{w_1(x)}{1-x}\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \text{发散。}$$

只要该积分收敛，两个对偶马尔可夫链都是暂留的。

推论4.3 （常返和暂留的 Jacobi–Piñeiro 马尔可夫链）。两种对偶*Jacobi–Piñeiro* 马尔可夫链在 $-1 < \alpha_0 < 0$ 时均为常返，而在 $\alpha_0 \geq 0$ 时为暂留。

应用这一结果可知，具有参数$\alpha_1 = -\frac{1}{4}$、 $\alpha_2 = \alpha_0 = -\frac{1}{2}$的例 3.1 是一条常返马尔可夫链。再来看一个与 Jacobi–Piñeiros 多重正交多项式相关的马尔可夫链示例，该链具有参数 $\alpha_1 = -\frac{1}{4}$、 $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$、 $\alpha_0 = \frac{1}{2}$，并且是暂留马尔可夫链。相应的转移矩阵 (3.11) 和 (3.12) 为

$$\hat{\mathbf{H}} \approx \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.6666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.1026 & 0.3205 & 0.5769 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.0302 & 0.1163 & 0.4712 & 0.3824 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0.0062 & 0.1707 & 0.4150 & 0.4080 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1621 & 0.4600 & 0.3448 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0.0156 & 0.1905 & 0.4279 & 0.3660 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{H}} \approx \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3198 & 0.3469 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.2138 & 0.3205 & 0.4289 & 0.0368 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0.1565 & 0.4711 & 0.2726 & 0.0998 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0.2395 & 0.4150 & 0.3061 & 0.0394 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0.2160 & 0.4600 & 0.2542 & 0.0697 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2583 & 0.4279 & 0.2746 & 0.0391 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

观察这两个转移矩阵可知，在含有 $\gamma = -\frac{1}{2}$ 的常返情形中，向左转移的概率大于含有 $\gamma = \frac{1}{2}$ 的暂留情形。

如前所见，与一个四对角海森堡矩阵（来自一个 AT 系统）相联系，我们得到两个随机矩阵 $\hat{}\mathrm{HHH}$ 和 $\check{}\mathrm{HHH}$，称为对偶随机矩阵。从这个意义上说，相应的马尔可夫链称为对偶链。

定理 4.4. 两个对偶随机矩阵 $\hat{}\mathrm{HHH}$和 $\check{}\mathrm{HHH}$由下式联系

$$\sigma_I^{-1}\check{\mathbf{H}}\sigma_I = \left(\sigma_{II}\hat{\mathbf{H}}\sigma_{II}^{-1}\right)^{\top}$$

也就是说，随机矩阵的系数满足

$$\check{\mathbf{H}}_{n,n-k} = \frac{B_{n-k}(1)Q_{n-k}(1)}{B_n(1)Q_n(1)}\hat{\mathbf{H}}_{n-k,n},$$

其中 $m = n-k$，$k \in \{-1,0,1,2\}$。

现在，我们将分析对偶 Jacobi–Piñeiro 马尔可夫链的大 n 极限。

定理 4.5. *I* 型和 *II* 型 *Jacobi–Piñeiro* 随机矩阵的大 n 极限在转置后相同，即

$$\lim_{n\to\infty} \check{\mathbf{H}}_{n,n+k} = \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbf{H}}_{n+k,n}, \qquad k \in \{-2,-1,0,1\}.$$

证明. 正如我们刚才所见，我们需要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^{(n-k)}(1)Q^{(n-k)}(1)}{B^{(n)}(1)Q^{(n)}(1)} = 1, \qquad k = 2,1,-1. \tag{4.15}$$

由 (3.13) 可直接推出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^{(2n+1)}(1)}{B^{(2n)}(1)} = \frac{8}{27} = \lim_{n\to\infty} \frac{B^{(2n+2)}(1)}{B^{(2n+1)}(1)}. \tag{4.16}$$

现在，由多重正交多项式的 Christoffel–Darboux 公式（参见 [6]），我们得到

$$Q^{(n-1)}(1)B^{(n)}(1) = Q^{(n)}(1)\left(a_n B^{(n-2)}(1) + b_n B^{(n-1)}(1)\right) + Q^{(n+1)}(1)\,a_{n+1}B^{(n-1)}(1),$$

因此，I 型线性形式满足以下次数更低的齐次线性递推

$$-Q^{(n-1)}(1) + s_n Q^{(n)}(1) + t_n Q^{(n+1)}(1) = 0,$$

with

$$s_n = a_n \frac{B^{(n-2)}(1)}{B^{(n)}(1)} + b_n \frac{B^{(n-1)}(1)}{B^{(n)}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4^3}{27^3}\frac{27^2}{8^2} + 3\frac{4^2}{27^2}\frac{27}{8} = \frac{7}{27},$$
$$t_n = a_{n+1} \frac{B^{(n-1)}(1)}{B^{(n)}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4^3}{27^3}\frac{27}{8} = \frac{8}{729},$$

其中我们使用了 (4.16) 和 (3.14)。特征多项式为

$$-1 + \frac{7}{27}r + \frac{8}{729}r^2 = \frac{8}{729}(r+27)\Big(r - \frac{27}{8}\Big).$$

因此，根据庞加莱定理，由于其$\{-27、\frac{27}{8}\}$特征根具有不同的绝对值，并且 I 型线性形式在 1 处为正，我们得到$\lim_{n\to\infty} Q^{(n+1)}(1)\,Q^{(n)}(1) = \frac{27}{8}$，于是 (4.15) 得以满足。 □

我们以一个来自近期在 [16] 中给出的超几何权重的例子结束本文。

示例4.6。 我们考虑 (W_1,W_2)，其中权函数由

$$W_1(x)=\omega(x,a,b;c,d),\qquad W_2(x)=\omega(x,a,b+1;c+1,d),$$

其中 ω 定义在 $[0,1]$ 上，如下：

$$\omega(x,a,b;c,d)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\delta)}x^{a-1}(1-x)^{\delta-1}\,{}_2F_1\Big[{}^{c-b,d-b}_{\delta};1-x\Big],$$

其中 ${}_2F_1\Big[{}^{a_1,a_2}_{b_1};x\Big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k}{(b_1)_k}\frac{x^k}{k!}$ 其中 $\delta=c+d-a-b$，以及 a，b，$\delta>0$，$d-a$，$d-b$，$c+1-a$，$c-b\notin-\mathbb{N}\cup\{0\}$。

根据 [16]，我们看到，对于超几何组 $\left(\frac{4}{3},\ 5_3,2,\frac{5}{2}\right)$，有 $c_n=3\kappa$、$b_{n+1}=3\kappa^2$、$a_{n+2}=\kappa^3$、$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，其中 $\kappa=\frac{4}{27}$。也就是说，海森堡矩阵沿其各条对角线都是均匀的，即是一个托普利兹矩阵。

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}3\kappa & 1 & 0 & \cdots\\ 3\kappa^2 & 3\kappa & 1 & \ddots\\ \kappa^3 & 3\kappa^2 & 3\kappa & 1 & \ddots\\ 0 & \kappa^3 & 3\kappa^2 & 3\kappa & 1 & \ddots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

我们将此矩阵称为渐近一致 *Hessenberg* 矩阵。AT 系统 $(W_1,W_2,\mathrm{d}x)$ 适用于这一一致情形。

$$W_1(x)=\frac{81\sqrt{3}}{16\pi}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}\right),$$
$$W_2(x)=\frac{243\sqrt{3}}{160\pi}\sqrt[3]{x}\left(\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}\right)^4-\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}\right)^4\right).$$

注意，在 [4] 中我们找到了十二种一致情形。我们还在 [4] 中证明了一个类似于定理 4.5 的定理，适用于超几何情形。此外，我们可以证明，只要 $0<\delta\le 1$，这两种对偶超几何马尔可夫链都是常返的；而当 $\delta>1$ 时，它们是暂留的。在这种一致情形下 $\delta=\frac{7}{2}$，因此是暂留的。

我们可以证明，对于十二个一致元组中的某些元组（参见 [4]）

$$Q_n(1)=\frac{1}{(2\kappa)^n},\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

使用这一归一化，结合 $B_n(1)=(2\kappa)^n$、$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，我们成功找到了与式（4.17）中的 HHH 相关联的以下半随机对偶矩阵，并利用式（3.11）和式（3.12），得到的是

$$\hat{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} & 0 & \cdots\\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} & \ddots\\ 0 & \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} & \ddots\\ & \ddots & \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27}\\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix},\qquad \check{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\frac{12}{27} & \frac{8}{27} & 0 & \cdots\\ \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} & \ddots\\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} & \ddots\\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} & \ddots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix},$$

它们再次是托普利兹-黑森伯格矩阵。

致谢

第一作者感谢科英布拉大学数学中心——UIDB/00324/2020 （由葡萄牙政府通过 FCT/MCTES 资助）。第二和第三作者感谢数学与应用数学研究与发展中心，该中心由葡萄牙科学技术基金会（FCT–科学与技术基金会）资助，项目编号为 UIDB/04106/2020 和 UIDP/04106/2020。第四作者获得西班牙“国家研究局”研究项目 [PGC2018-096504- B-C33], 正交性与逼近：数学物理中的理论与应用 以及研究项目 [PID2021-122154NB-I00], 正交性与逼近及其在机器学习与概率论中的应用的部分资助。

参考文献

[1] Carlos Álvarez-Fernández、Ulises Fidalgo 和 Manuel Mañas，混合型多重正交多项式：*Gauss–Borel*分解与多分量二维*Toda*层级，《数学进展》**227** （2011）1451–1525。[2] Alexander I. Aptekarev、Amílcar Branquinho 和 Walter Van Assche，经典权函数的多重正交多项式，《美国数学会会刊》**355** （2003）3887–3914。[3] Alexander Aptekarev、Valery Kaliaguine 和 Jeannette Van Iseghem，斯蒂尔切斯函数系统的矩的遗传和表示及其应用，《构造性逼近》**16** （2000）487–524。[4] Amílcar Branquinho、Juan E. Fernández-Díaz、Ana Foulquié-Moreno 和 Manuel Mañas，超几何多重正交多项式与随机游走，arXiv:2107.00770。[5] Amílcar Branquinho、Ana Foulquié-Moreno、Manuel Mañas，具有正双对角分解的有界带状矩阵的谱理论与混合型多重正交多项式， arXiv:2212.10235。[6]Amílcar Branquinho、Ana Foulquié-Moreno、Manuel Mañas、Carlos Álvarez-Fernández、Juan E. Fernández-Díaz，多重正交多项式与随机游走，arXiv:2103.13715。[7] Theodore S. Chihara，正交多项式导论，Gordon & Breach，1978，纽约。Dover于2011年再版。[8] Percy Deift，正交多项式与随机矩阵：黎曼–希尔伯特方法，美国数学会，第3卷，1999。[9] Shaun M. Fallat 和 Charles R. Johnson，全非负矩阵，《普林斯顿应用数学丛书》，普林斯顿大学出版社，2011，普林斯顿。[10] Robert G. Gallager，随机过程：应用理论，剑桥大学出版社，2013。

[11] Felix P. Gantmacher 和 Mark G. Krein，机械系统的振荡、核与微小振动，修订第二版，AMS Chelsea Publishing，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。[12] F. Alberto Grünbaum 和 Manuel D. de la Iglesia，雅可比-皮涅罗多项式的一个罐子模型，《美国数学会会刊》，2022，DOI:10.1090/proc/15910.[13] Mourad E. H. Ismail，单变量中的经典与量子正交多项式，《数学及其应用百科全书》**98**，剑桥大学出版社，2009。[14] Samuel Karlin 和 James McGregor，生灭过程的分类，《美国数学会汇刊》，**86**(2) 366–400。[15] Samuel Karlin 和 James McGregor，随机游走，《伊利诺伊数学杂志》**3**(1959) 66–81。[16]Hélder Lima 和 Ana Loureiro，关于高斯超几何函数的多重正交多项式，《应用数学研究》2021，DOI:/10.1111/sapm.12437。[17] Evgenii M. Nikishin 和 Vladimir N. Sorokin，有理逼近与正交性，《数学专著译丛》**92**，美国数学会，普罗维登斯，1991。[18] Barry Simon，算子理论：分析综合课程第四部分，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015。[19] Walter Van Assche，多重正交多项式，载于 Mourad E. H. Ismail，单变量中的经典与量子正交多项式，《数学及其应用百科全书》**98** ，剑桥大学出版社，2005。科英布拉大学数学系 CMUC，葡萄牙科英布拉 3000-143电子邮箱： ajplb@mat.uc.pt阿威罗大学数学系 CIDMA，葡萄牙阿威罗 3810-193电子邮箱： juan.enri@ua.pt阿威罗大学数学系 CIDMA，葡萄牙阿威罗 3810-193电子邮箱： foulquie@ua.pt马德里康普顿斯大学理论物理系，西班牙马德里科学广场 1 号，28040；以及数学科学研究所（ICMAT），UAM 坎托布兰科校区，西班牙马德里 28049电子邮箱： manuel.manas@ucm.es