布尔巴基研讨会
75e 年，第2022–2023年，第o 1206期
2023年4月

双曲群中的指数增长率[继 KojiFujiwara 和 Zlil Sela 的工作之后]

作者**Clara Löh**

arXiv:2304.04424v1 [math.GR] 10 Apr 2023

Jørgensen 和 Thurston 的一项经典结果表明，有限体积完备双曲三维流形的体积集合是实数中一个序型为 ω^ω 的良序子集；此外，每个体积至多由有限多个双曲三维流形的等距类型取得。

Fujiwara 和 Sela（2020）确立了这一结果的群论对应版本：若 Γ是一个非初等双曲群，那么 Γ 的指数增长率集合是良序的，其序型至少为 ω^ω，并且每个增长率至多只能由有限多个有限生成集（在自同构意义下）实现。

本次报告将概述 Fujiwara 和 Sela 的这项工作，并讨论相关结果。

目录

1. 主要结果.12. 背景：流形的体积与双曲性.33. 证明技巧.64. 应用与推广.
11附录A. 术语.12附录 B. 指数增长率的右可计算性。. . . . . 15参考文献.
16

1. 主要结果

几何群论在流形的黎曼几何与有限生成群的大尺度几何之间建立了丰富的联系。在负曲率的情形下，这种联系尤为紧密，并解释了各种刚性现象。闭双曲流形在群论中的对应物是双曲群；更一般地，有限体积完备双曲流形在群论中的对应物是相对双曲群。

紧黎曼流形的万有覆盖中黎曼球的体积增长行为，与基本群凯莱图中球的增长行为相同。根据定义，有限生成群的指数增长率衡量凯莱图中球的指数扩张率，并且

因此是熵型不变量。虽然双曲流形的体积 M 与 $\pi_1(M$的指数增长率2020之间没有直接联系，但 Fujiwara 和 Sela 的研究表明，这类数值的某些集合具有根本的结构相似性。

为陈述这些结果，对于有限生成群 Γ，我们用 $\mathrm{Exp}(\Gamma) \subset \mathbb{R}$ 表示相对于 Γ 的有限生成集 S 的所有指数增长率 $\mathrm{e}(\Gamma, S)$ 构成的（可数）集合。自同构群 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 在 Γ 的所有有限生成集构成的集合 $\mathrm{FG}(\Gamma)$ 上作用，并且对于所有 $S \in \mathrm{FG}(\Gamma)$ 及所有 $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，都有 $\mathrm{e}(\Gamma, f(S)) = \mathrm{e}(\Gamma, S)$。有关术语和记号的更多细节，请参见附录A。

定理 1.1 （良序性；Fujiwara 和 Sela，2020，定理 2.2）
如果 Γ 是双曲群，那么 $\mathrm{Exp}(\Gamma)$ 关于 $\mathbb{R}$ 上的标准序是良序的。

定理 1.2 （有限歧义；Fujiwara 和 Sela，2020，定理 3.1）
对于每个非初等双曲群 Γ 以及每个 $r \in \mathbb{R}$，集合 $\{S \in \mathrm{FG}(\Gamma) \mid \mathrm{e}(\Gamma, S) = r\}/\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 都是有限的。

定理 1.3 (增长序数；Fujiwara 和 Sela，2020，命题 4.3)
设 Γ 是一个非初等双曲群。则与 $\mathrm{Exp}(\Gamma)$ 相关的序数 $\mathrm{ord}^{\mathrm{Exp}}(\Gamma)$ 满足 $\mathrm{ord}^{\mathrm{Exp}}(\Gamma) \geq \omega^\omega$。

此外，Fujiwara 和 Sela（2020，命题 4.3）证明了 $\mathrm{ord}^{\mathrm{Exp}}(\Gamma) = \omega^\omega$ 如果 epi-极限群（以 Γ 为基）具有 Krull 维数。类比双曲 3-流形的情形，他们猜想 $\mathrm{ord}^{\mathrm{Exp}}(\Gamma) = \omega^\omega$ 对所有非初等双曲群 Γ （ Fujiwara 和 Sela，2020，第 4 节）都成立。

例 *1.4*。— 如果 F 是一个秩至少为 2 的有限生成自由群，那么关于 F 的极限群具有克鲁尔维数（Louder，2012）。因此，定理 1.1–1.3 表明，$\mathrm{ord}^{\mathrm{Exp}}(F) = \omega^\omega$ 以及 $\mathrm{Exp}(F)$ 中的每个值，都只由有限多个生成- 集实现（在 F的自同构意义下）。

定理证明的核心思想 1.1–1.3 受到 Thurston和Jørgensen 关于双曲三维流形体积集合的证明以及模型论的启发：从给定双曲群 Γ 转到其上的极限群 Γ ，并带有一个相应的有限生成集；也就是说，极限群在这里扮演着带尖点流形的角色。接下来的主要挑战，是根据原序列中出现的指数增长率，计算这一极限对象的指数增长率。

概述

附录中回顾了关于双曲群、指数增长率和可数良序集的基础知识A。我们在第2节简要解释上述结果的流形背景，重点介绍双曲的和单纯体积。第3节概述主要结果的证明。最后，在第4节中，我们提及主要结果的应用和推广。

2. C流形体积与双曲性

Fujiwara 和 Sela（2020）的结果与有限体积完备双曲三维流形体积的行为类似。我们在第 2.1 节回顾这一背景。单纯体积的情况将在第 2.2 节讨论。此外，我们还提及右可计算性这一“体积”集合的进一步结构性质（第 2.3 节）。

2.1. 双曲体积

Jørgensen 和 Thurston 的开创性工作分析了双曲三维流形的结构与体积。

定理 2.1 （双曲三维流形的体积；Thurston，1979年，第 6 章）集合

$$\{\mathrm{vol}(M) \mid M \text{ 是一个有限体积的完备双曲3维流形}\}$$

关于 $\mathbb{R}$上的标准序，它是良序的，其对应的序数为 ω^ω。此外，每个值仅来自有限多个有限体积双曲的3-流形的等距类。

我们简要概述证明的主要步骤（Gromov，1981）；关键在于研究双曲流形序列的收敛性，并理解带尖点的双曲流形作为这类序列的极限所起的作用：

1. 每个 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 个体积一致有界的完备双曲三维流形序列，都包含一个子序列，该子序列以强几何意义收敛于一个有限体积的完备双曲三维流形 M，且 $\lim_{n\to\infty}$ vol(M_n) =vol(M)。此外，对于“非平凡”的此类序列，可以证明，对于该子序列的所有成员 M_n，均有 vol(M) $>$ vol(M_n)。

   这可用于证明双曲体积的集合是良序的，并且每个值只能通过有限种方式获得。

2. 每个具有 $k \in \mathbb{N}$ 个尖点的有限体积完备双曲三维流形，对于每个 $p \in \{0, \ldots, k\}$，都可以作为一列恰好具有 p 个尖点的有限体积完备双曲三维流形的极限得到。

   这可用于证明体积序数至少为 ω^k。构造具有任意多尖点的双曲三维流形，从而表明体积序数至少为 ω^ω。结合第一部分，可以推导出体积序数等于 ω^ω。

相比之下，在高维中，有限体积完备双曲的流形的体积集合导出序数 ω。这源于王氏有限性定理以及双曲体积的无界性。

定理2.2（王氏有限性定理；Wang，1972）。— 设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ 和 $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。则有限体积完备双曲的$n$-流形 M 满足 $\mathrm{vol}(M) \leq v$。

2.2. 单纯体积

单纯体积是闭流形的同伦不变量。对于若干具有几何意义的黎曼流形类，单纯体积编码了黎曼体积的拓扑刚性性质。

定义 2.3 （单纯体积；Gromov，1982年）。——定向闭连通流形 M 的 ℓ^1-半范数，即其（奇异） $\mathbb{R}$-基本类：

$$\|M\| := \|[M]_{\mathbb{R}}\|_1 := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{k} |a_j| \;\Big|\; \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \sigma_j \ \textit{is a singular } \mathbb{R}\textit{-fundamental cycle of } M\Big\}$$

对于真正的双曲流形，单纯体积与双曲体积（第 2.1节）具有相同的排序和有限性特征：

例 *2.4* （双曲流形）。——如果 M 是一个维数为 n的定向闭连通双曲流形，那么

$$\|M\| = \frac{\mathrm{vol}(M)}{v_n},$$

其中 $v_n \in \mathbb{R}_{>0}$ 是双曲 n空间中理想正测地 n-单形的双曲体积（Thurston，1979年；Benedetti 和 Petronio，1992年）。在完备有限体积情形下，也存在类似的关系（Thurston，1979年；Fujiwara 和 Manning，2011年，附录A）。特别地，这一比例关系可用于证明双曲流形之间连续映射的映射度估计，使其以双曲体积表示（Gromov，1982年）。

转到固定的双曲基本群的情形，我们得到：

示例 *2.5* （双曲的基本群）。— 令 Γ 为有限表示群，并令 $n \in \mathbb{N}$。则该集合

$$\mathrm{SV}_\Gamma(n) := \{\|M\| \mid M\text{是一个定向的闭连通 } n\text{维流形，具有 } \pi_1(M) \cong \Gamma\}$$

是 $\{\|\alpha\|_1 \mid \alpha \in H_n(\Gamma;\mathbb{R})$ 的子集，且是整系数的$\}$，其中 $H_n(\Gamma;\mathbb{R})$ 中的一个类称为 整系数的，如果它属于系数变换映射 $H_n(\Gamma;\mathbb{Z}) \to H_n(\Gamma;\mathbb{R})$ 的像（Löh，2023年，第3.1节）。

如果 Γ 是双曲的，并且 $n \geq 2$，那么 $\|\cdot\|_1$ 是 $H_n(\Gamma;\ \mathbb{R})$（根据 Mineyev（2001年）关于有界上同调和对偶原理的结果）。特别是：集合 $\mathrm{SV}_\Gamma(n) \subset \mathbb{R}$ 是良序的，并且对于 $n \geq 4$ 与 SV 相关联的序数$_\Gamma(n)$ 是

– 若为0（如果 $H_n(\Gamma;\ \mathbb{R}) \cong 0$）；– 或者 ω （如果 $H_n(\Gamma;\ \mathbb{R}) \ncong 0$）：在这种情况下，赋范 Thom 实现表明，确实有无穷多个不同的值得以实现（Löh，2023年，第3.1节）。

对于 $n \geq 4$，在这种一般的拓扑情形下，有限歧义失效：如果 M 是一个定向闭连通 n-流形，那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$，流形 M 以及迭代连通和 $M_k := M\#(S^2 \times S^{n-2})^{\#k}$ 具有相同的单纯体积（格罗莫夫，1982年）和同构的基本群。然而，流形 M_0、M_1、...都具有不同的同伦类型（从 2 次同调群中可以看出）。

2.3. 右可计算性

在前面的讨论中，我们重点关注了体积和指数增长率的序结构。几何群论和几何拓扑中的许多实值不变量还具有另一种互补结构：它们往往在计算复杂度上存在内在的限制。特别是，这种限制为可能的取值集合提供了额外约束。

定义 2.6 （右可计算）—— 实数 α 若为右可计算，则集合 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \alpha\}$ 是递归可枚举的。

例如，定向闭连通流形的单纯体积是右可计算实数（Heuer 和 Löh，2023年）。在群论方面，对于递归呈示群的稳定交换子长度（Heuer，2019）或具有受控字问题的群的 L^2-Betti 数（Löh 和 Uschold，2022），右可计算性自然会出现。对于指数增长率，我们有如下结论：

命题 2.7（指数增长率的右可计算性）
存在一台图灵机，它

– 给定一个有限表示 $\langle S \mid R \rangle$ 和一个由 S' 中的字组成的有限集合，– 是否

- 不终止，如果 $S\prime$ 不表示由 $\langle S \mid R \rangle$描述的群 Γ 的生成集；
- 终止并返回 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \mathrm{e}(\Gamma, S\prime)\}$ 如果 $S\prime$ 表示 Γ的一个生成集。

推论 2.8. — 设 Γ 为有限表示群。

1. 对于每个 $S \in \mathrm{FG}(\Gamma)$，实数 $\mathrm{e}(\Gamma, S)$ 都是右可计算的。2. 对于每个 $r \in \mathbb{Q}$，截断集合 $\{S \in \mathrm{FG}(\Gamma) \mid \mathrm{e}(\Gamma, S) < r\}$ 是递归可枚举的。

这些观察结果的证明见附录 B。特别是，对于所有具有良序集合 Exp(Exp(Γ) 的有限表示群 Γ，这些结果可用于给出 ordΓ) 的一个粗略的先验上界，该上界是某个“较大”的可数序数。

3. 证明技术

我们概述 Fujiwara 和 Sela（1.1–1.3）定理的证明。这些证明大致遵循双曲三维流形情形（第 2.1 节）的蓝图，其中极限群将发挥带尖点流形的作用：

– 一种紧性现象将指数增长率的收敛转化为（子序列的）作用收敛到极限群的作用。– 主要的挑战在于，计算这些极限群的指数增长率，并将其视为给定指数增长率的极限。

在展开这些论证之前，我们首先回顾极限群的基本概念 .

3.1. 极限群

极限群是以各种意义作为群的“极限”而出现的群。这些群是群的模型论和几何群论中的便利工具（Kharlampovich 和 Myasnikov，1998a，b；Sela，2006；Groves 和 Wilton，2018）。与 3-流形类似，双曲群上的极限群具有 JSJ 分解（Sela，2009；Weidmann 和 Reinfeldt，2019，第4节）。给定群上的极限群 Γ 是非主超积的有限生成子群 Γ。更明确地说：

定义 3.1（极限群）。— 设 Γ 为一个群。

– 从群 Λ 到 Γ 的稳定同态 是一个同态序列$(f_n\colon \Lambda \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$，满足以下性质

$$\forall_{x\in\Lambda} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad (\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad f_n(x) = 1) \vee (\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad f_n(x) \neq 1).$$

稳定同态 f_*稳定核：$\Lambda \to \Gamma$ 定义为

$$\ker f_* := \left\{ x \in \Lambda \;\middle|\; \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad f_n(x) = 1 \right\} \subset \Lambda.$$

– Γ 上的极限群 是形如 $\Lambda/\ker f_*$的群，其中 Λ 是有限生成群，且 $f_*\colon \Lambda \to \Gamma$ 是稳定同态。典范投影 $f\colon \Lambda \to \Lambda/\ker f_*$ 是极限同态，我们称 f_* 收敛到 f。Γ 上的极限群若其中的 f_n 可取为满同态，则称为满同态极限群 Γ。– 极限群 是有限生成自由群上的极限群。

示例*3.2*。—若 Γ 是一个群，则 Γ 的每个有限生成子群都可以通过包含同态视为 Γ 上的极限群。特别地，若 Γ 是有限生成的，则 Γ 是 Γ 上的满同态极限群。

3.2. 极限及其指数增长率

定理 3.3 (紧致性；Fujiwara 和 Sela，2020，定理 2.2 的证明)

设 Γ 为双曲群，令(X,d) 为 Γ的凯莱图，并令$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Γ 的有限生成集序列，使得序列$(\mathrm{e}(\Gamma,S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。那么存在一个子序列（仍记为$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$），具有以下性质：

– 所有 S_n 具有相同的大小。令 S 为具有此基数的一个集合，并令 F 为由 S自由生成的自由群。– 存在满同态 $f_n\colon F\to\Gamma$，对所有 $n\in\mathbb{N}$，使得 $f_n(S)$ 与 S_n共轭。此外，f_* 是一个稳定同态 $F\to\Gamma$。记 L 为相应的极限群。– 该序列

$$\left(F\curvearrowright_{f_n}\left(X,\frac{1}{\max_{s\in S}d(1,f_n(s))}\cdot d\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

作用（由 $f_n\colon F\to\Gamma$ 以及 Γ 在 X上的平移作用所诱导）在 F-*Gromov–Hausdorff*距离下收敛到 L 在一棵实树上的忠实作用。

证明。——指数增长率的有界性使我们能够固定生成集的大小，因为根据 Arzhantseva 和 Lysenok 的估计（2006），指数增长率至少随生成集的大小线性增长。

然后，在进行适当的共轭和重新缩放后，可以应用 Bestvina–Paulin 方法（Fujiwara 和 Sela，2020，定理2.2的证明；Weidmann和 Reinfeldt，2019，第2节）。□

定理 3.4 （指数增长率的极限；Fujiwara 和 Sela，2020，命题 2.3）

令 Γ 为双曲群，令 Λ 为一个具有有限生成集 S 的有限生成群，并令 $(f_n\colon\Lambda\to\Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个由满同态组成的稳定同态，并且该同态收敛到极限群 $f\colon\Lambda\to L$，其在 Γ 上具有忠实作用于实树。于是，对于所有足够大的 $n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{e}(\Gamma,f_n(S))\le\mathrm{e}(L,f(S))$ 成立，并且

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}(\Gamma,f_n(S))=\mathrm{e}(L,f(S))$$

证明概要。——通过前复合，不妨假设Λ 是自由的，且 S 是一个自由生成集。

我们首先解释为什么“$\le$”成立（假设极限存在）：因为 Γ 是双曲的，对于所有充分大的 $n\in\mathbb{N}$，存在一个同态 $h_n\colon L\to\Gamma$ 满足 $f_n=h_n\circ f$（Weidmann 和 Reinfeldt，2019，引理 6.5，推论 7.13）：

$$\begin{array}{ccc}(\Lambda,S) & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \searrow^{f_n} & \\ (L,f(S)) & \overset{h_n}{\dashrightarrow} & (\Gamma,f_n(S))\end{array}$$

因此，指数增长率的单调性（备注 A.5）意味着 $\mathrm{e}(\Gamma, f_n(S)) \leq \mathrm{e}(L, f(S))$ 对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$成立。

艰难之处在于证明收敛性和“$\geq$”：给定 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，目标是证明对于所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\log \mathrm{e}(\Gamma, f_n(S)) \geq \log \mathrm{e}(L, f(S)) - \varepsilon.$$

如果给定 $N \in \mathbb{N}$，乘法-投影映射将会很简单

$$\begin{aligned} B_N(L, f(S))^q &\to B_{q\cdot N}(\Gamma, f_n(S)) \\ (w_1, \dots, w_q) &\mapsto h_n(w_1 \cdot \dots \cdot w_q) \end{aligned}$$

对所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $q \in \mathbb{N}$，它们都是单射。然而，这种情况一般不会发生。利用 L 在实树上的忠实极限作用，Fujiwara 和 Sela（2020，命题 2.3 的证明）在 L 中找到了足够多的自由性，并通过精细估计证明存在一个 $b \in \mathbb{N}$、一个四元素子集 $U \subset B_b(L, f(S))$，以及一个常数 $C \in \mathbb{R}_{>0}$满足：

> 对于所有 $q \in \mathbb{N}$，存在一个形如 $\varphi_q \colon L^q \to L$ 的映射。
>
> $$(w_1, \dots, w_q) \mapsto w_1 \cdot u_1 \cdot \dots \cdot w_q \cdot u_q,$$
>
> 其中“分隔元” $u_1, \dots, u_q \in U$可能依赖于 $w_1, \dots, w_q$，并满足一个“小消去条件”，该条件保证如下结论：给定 $N \in \mathbb{N}$，对于所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $q \in \mathbb{N}$，映射 $h_n \circ \varphi_q \colon L^q \to \Gamma$ 至少在 $A_{N,n,q}$的一个子集上是单射的，该子集的大小为 $(1/C \cdot \beta_N(L, f(S)))^q$，且它是 $B_N(L, f(S))^q$的子集。特别地，
>
> $$\beta_{q\cdot(N+b)}(\Gamma, f_n(S)) \geq \#A_{N,n,q} \geq \Big(\frac{1}{C} \cdot \beta_N(L, f(S))\Big)^q.$$
>
> 更具体地说，对于所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 h_n 在 $B_{2\cdot N}(L, f(S))$ 上是单射，这一结论都成立；由作用的收敛可知，这样的 n 存在。

给定 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，我们取足够大的 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{1}{N+b} \cdot (\log \beta_N(L, f(S)) - \log C) \geq \frac{1}{N} \cdot \log \beta_N(L, f(S)) - \varepsilon.$$

于是，对于所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\begin{aligned} \log \mathrm{e}(\Gamma, f_n(S)) &= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q \cdot (N+b)} \cdot \log \beta_{q\cdot(N+b)}(\Gamma, f_n(S)) \\ &\geq \frac{1}{N+b} \cdot \log \frac{\beta_N(L, f(S))}{C} \\ &\geq \frac{1}{N} \cdot \log \beta_N(L, f(S)) - \varepsilon \\ &\geq \log \mathrm{e}(L, f(S)) - \varepsilon, \end{aligned}$$

如所愿。 □

注记 *3.5*。——定理 3.4的证明主要基于极限作用在实树上的性质。事实上，在对 Γ（Fujiwara， 2021，命题 3.2）所作的以下较弱假设下，该定理同样成立：群 Γ 是有限生成的、方程诺特的，并且在一个满足一致弱适当不连续条件的双曲图上具有非初等的等距作用 X （Fujiwara， 2021，定义 2.1），且存在一个常数 N 使得对于每个 $S \in \mathrm{FG}(\Gamma)$，集合$S^N$ 包含一个在 X上作双曲作用的元素。

3.3. 良序性

定理证明概要*1.1*. — 如果给定的双曲群 Γ 是几乎循环，则 $\mathbf{Exp}(\Gamma) = \{1\}$，这显然是良序的。

在下文中，我们考虑 Γ为非初等双曲的情形。为导出矛盾，我们假设存在一个由 Γ 的有限生成集 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 组成的序列，使得 $(\mathbf{e}(\Gamma, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 严格单调递减。特别地，序列$(\mathbf{e}(\Gamma, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界的。鉴于紧致性定理（定理3.3）以及指数增长率在共轭下的不变性，不失一般性，我们可以假设存在一个自由群 F，其自由生成集为 S，以及满同态 $(f_n\colon F \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $f_n(S) = S_n$，并且 f_* 收敛于一个极限群 $f\colon F \to L$ over Γ，该极限群在一棵实树上具有忠实作用。

因此，我们由定理 3.4 得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}(\Gamma, S_n) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}(\Gamma, f_n(S)) \\ &= \mathrm{e}(L, f(S)) && \text{(Theorem 3.4)} \\ &\geq \mathrm{e}(\Gamma, S_N) > \mathrm{e}(\Gamma, S_{N+1}) > \dots, && \text{(for all } N \gg 0\text{; Theorem 3.4)}\end{aligned}$$

这是不可能的。这个矛盾表明，不存在这样的严格递减序列，因此 $\mathbf{Exp}(\Gamma)$ 是良序的。□

3.4. 有限歧义

定理 *1.2* 的证明概要。—— 设 $r \in \mathbb{R}_{>1}$，并反设存在一个由有限生成集 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 组成的序列，它们分别代表不同的 $\mathbf{Aut}(\Gamma)$-轨道，且满足 $\mathbf{e}(\Gamma, S_n) = r$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

像之前一样，利用紧致性定理（定理 3.3），不失一般性地假设存在一个自由群 F，其自由生成集为 S，并且存在满同态 $(f_n\colon F \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $f_n(S) = S_n$，且 f_* 收敛到一个极限群 $f\colon F \to L$，它在 Γ 上有一个对实树的忠实作用。因此，定理 3.4表明

$$\mathrm{e}(L, f(S)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}(\Gamma, f_n(S)) = r$$

另一方面，通过取子序列，我们还可以假设，对所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个同态 $h_n\colon L \to \Gamma$ 满足 $f_n = h_n \circ f$（如定理3.4的证明中所示），并且满同态 h_n 中至多有一个是同构（因为

这些 S_n 位于不同的 Aut(Γ)-轨道中），且 h_n 的核不含挠元。然后，对定理3.4 的证明进行仔细改进后可知，严格不等式

$$\mathrm{e}(L, f(S)) > \mathrm{e}(\Gamma, f_n(S)) = r$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ (Fujiwara 和 Sela，2020，命题 3.2)。这与先前的计算 e(L, $f(S)$) $= r$。 □

3.5. 增长序数

定理的证明概要*1.3*. —只需证明 $\mathrm{ord}_{\mathrm{Exp}}(\Gamma) \geq \omega^m$ 对每一个 $m \in \mathbb{N}$。令 $m \in \mathbb{N}$。我们考虑序列

$$L_1 := \Gamma * F_m \to L_2 := \Gamma * F_{m-1} \to \cdots \to L_m := \Gamma * \mathbb{Z} \to L_{m+1} := \Gamma$$

满同态，其中 F_j 是秩为 j 的自由群，且这些满同态依次消去自由生成元，同时保持 Γ因子不变。可以将 j 理解为尖点的数量。

我们首先聚焦于单个步骤：若 Λ 是非初等双曲群，则存在一个由满同态组成、收敛到 $\Lambda * \mathbb{Z}$ 的稳定同态 $(f_n\colon \Lambda * \mathbb{Z} \to \Lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ ~。设 S 是 Λ 的有限生成集，设 $S \subset \Lambda * \mathbb{Z}$ 是 $\Lambda * \mathbb{Z}$ 的生成集，例如通过添加 $\mathbb{Z}$ 的一个自由生成元得到。对 f_* 取子序列后，可以实现如下严格单调性：

~ ~–序列 $(\mathrm{e}(\Lambda, f_n(S)))_{n\in\mathbb{N}}$ 递增并收敛到 e($\Gamma * \mathbb{Z}, S$)；与前面一样，这里用到了定理 3.3 和定理 3.4。– 序列中的值彼此均不相同；这里用到了极限群在 Λ (Fujiwara 和 Sela，2020，定理 5.8）中关于有限生成子群的有限歧义定理。

为简化记号，我们现在将讨论范围限制在 $m = 2$ 的情形。我们选取 Γ 的一个有限~生成集 S，并取 $L_1 = \Gamma * F_2$ 的扩展有限生成集 S。对 $L_1 \to L_2$ 应用单步操作，可得到一个具有严格单调性的稳定同态 f^1_*。设 f^2_* 是 $L_2 \to L_3$ 的一个稳定同态。对于每个 $n_1 \in \mathbb{N}$，我们~对 $L_2 \to L_3$ 及生成集 $f_{n_1}(S)$ 应用单步操作，以选取 f^2_* 的一个严格单调子序列。通过与 f_{n_1} 复合，我们得到一个从 L_1 到 $L_3 = \Gamma$ 的序列 $f_{n_1,*}$~，使得 $(\mathrm{e}(\Gamma, f_{n_1,n}(S)))_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增并收敛到 e(L_2, $f_{n_1}(\widetilde{S})$)。通过改变 n_1，我们由此可知 $\mathrm{ord}_{\mathrm{Exp}}(\Gamma) \geq \omega^2$。

对于更大的 m值，可以适当地反复运用这些考量。 □

为了在附加假设下证明 $\mathrm{ord}_{\mathrm{Exp}}(\Gamma) \leq \omega^\omega$，Fujiwara 和Sela（2020，定理 4.2 的证明）从关于 Γ 的指数增长率的收敛序列的收敛序列等构造出极限群上的真满同态链；Krull 维数性质随后控制了此类链的最大长度，从而控制了 ω 在给定阈值以下出现的最大幂次。

4. 应用与扩展

指数增长率的良序性（定理 1.1）尤其包含以下事实：所有非初等双曲群都具有一致的指数增长。

4.1. 双曲群是 Hopf 群

一个群 Γ 是 *Hopf* 群，如果每个自满同态 $\Gamma \to \Gamma$ 都是一个自同构。这一性质在闭流形自映射的次数研究中有应用。众所周知，双曲群是 Hopf 群（Sela，1999；Weidmann 和 Reinfeldt，2019）。利用双曲群的指数增长率构成良序这一事实，Fujiwara 和 Sela（2020，推论 2.9）完成了 de la Harpe（2002）提出的证明双曲群是 Hopf 群的思路；这并非一种独立的替代证明，因为定理 1.1 当前的证明使用了极限群方面的结果，而这些结果也用于此前证明双曲群是 Hopf 群。

推论 4.1。— 每个双曲群都是 *Hopf* 群。

证明.— 初等双曲群是霍普夫群，因为它们是几乎循环群（因此有限生成且残余有限）。

设 Γ 是一个非初等双曲群，并设 $f\colon \Gamma \to \Gamma$ 是满同态。由于 Exp(Γ)是良序的（定理 1.1），存在一个有限生成集 S属于 Γ，使得 e(Γ) $= \mathrm{e}(\Gamma, S)$。反设 为导出矛盾，f 的核非平凡。那么，Arzhantseva 和 Lysenok（2002）证明存在一种严格的单调性。

$$\mathrm{e}(\Gamma, S) > \mathrm{e}(\Gamma, f(S)).$$

然而，这与 S的极小性相矛盾。因此，f 是一个自同构。

□

所有有限生成的残余有限群都是Hopf 群。尽管闭双曲流形的基本群是残余有限的双曲群，但所有双曲群是否都是残余有限的，仍是一个长期悬而未决的问题。

4.2. 推广形式

第 3 节中 Fujiwara 和 Sela（2020）讨论的方法也可扩展到以下推广：

– 如果 Γ 是一个双曲群，那么集合

$$\{\mathrm{e}(H, S) \mid H < \Gamma \text{ 有限生成且非初等 } \ S \in \mathrm{FG}(H)\}$$

是良序的（Fujiwara 和 Sela，2020，第 5.1 定理）。这可以视为对双曲群的 Tits 另一择一的补充。

–此外，在子群这一设定中，对于非初等双曲群，也有相应的有限歧义结论（Fujiwara 和 Sela，2020，定理 5.3）。

因此，他们也得到了关于非初等双曲群上的极限群的类似结果（Fujiwara 和 Sela，2020，推论 5.6–5.10）。此外，这种方法具有足够的稳健性，还可扩展到子半群的情形（Fujiwara 和 Sela，2020，第 6 节）。

Fujiwara（2021）采用该方法，以获得其他类别群的指数增长率集合的良序性，包括某些在双曲的空间上双曲作用的群、秩-1 格、严格负曲率黎曼流形的基本群，以及某些相对双曲群。这些结果例如可以应用于右角 Artin群的某些子群（Kerr，2021，推论 1.0.11）。

附录A. 术语

为了完整起见，我们回顾一下主要结果中出现的基本术语（第1节）。

A.1. 双曲群

有限生成群是双曲的，当它们的凯莱图在以下意义下是“负曲的”：其中的测地三角形是一致纤细的（Gromov，1987；Bridson和 Haefliger，1999）：

定义 A.1（双曲群）。— 一个有限生成群 Γ 是双曲的，如果相对于 Γ 的一个（因而每个（*Bridson* 和 *Haefliger*，*1999*，定理 *III.H.1.9*））有限生成集的 *Cayley* 图是一个双曲度量空间。若一个双曲群不是几乎循环的，则称其为非初等的。

例 *A.2*（双曲群）。——根据 Švarc–Milnor 引理以及 CAT(-1)-空间是双曲度量空间这一事实，具有负截面曲率黎曼度量的闭光滑流形的基本群是双曲群。特别地，这包括闭双曲流形的基本群。当且仅当维数至多为 1 时，这类基本群几乎循环。

有限生成自由群是双曲的。双曲群类在拟等距下封闭（Bridson and Haefliger，1999, 定理 III.H.1.9），并在某些 amalgamation 下封闭（Bestvina andFeighn, 1996）。

群 $\mathbb{Z}^2$ 是非双曲的。更一般地，所有包含与 $\mathbb{Z}^2$ 同构的子群的有限生成群都不是双曲的（Bridson 和 Haefliger，1999，推论 III.Γ.3.10）。一般而言，双曲群的子群未必是双曲的。

A.2. 群的指数增长率

群的指数增长率衡量凯莱图中球的大小的指数扩张率（de la Harpe，2000，第 VII.B 章）：

注释 *A.3.* — 设 Γ 是一个有限生成群，$S \subset \Gamma$ 是 Γ 的一个有限生成集。我们将 $\beta_n(\Gamma, S)$ 记作相对于 S 的 Γ 的 Cayley 图中 n-球 $B_n(\Gamma, S)$ 内元素的个数。那么对所有 $n, m \in \mathbb{N}$，都有 $\beta_{n+m}(\Gamma, S) \leq \beta_n(\Gamma, S) \cdot \beta_m(\Gamma, S)$。因此，费凯特引理表明，极限 $(\beta_n(\Gamma, S)^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ 存在，并且

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(\Gamma, S)^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \beta_n(\Gamma, S)^{1/n}.$$

定义A.4 （指数增长率）。— 令 Γ 为一个有限生成群。

– 设 $S \subset \Gamma$ 是 Γ 的有限生成集。Γ 关于 S 的指数增长率定义为

$$\mathrm{e}(\Gamma, S) := \lim_{n\to\infty} \beta_n(\Gamma, S)^{1/n}.$$

– 我们将$\mathrm{Exp}(\Gamma) := \{\mathrm{e}(\Gamma, S) \mid S \in \mathrm{FG}(\Gamma)\}$ 记作 Γ的所有指数增长率组成的（可数）集合，其中$\mathrm{FG}(\Gamma)$ 表示 Γ的有限生成集组成的集合。

– 的指数增长率 Γ 是下确界

$$\mathrm{e}(\Gamma) := \inf \mathrm{Exp}(\Gamma).$$

– 群 Γ 具有 指数增长，如果存在 $S \in \mathrm{FG}(\Gamma)$ 使得 $\mathrm{e}(\Gamma, S) > 1$。群 Γ 具有 一致指数增长，如果 $\mathrm{e}(\Gamma) > 1$。

注记 *A.5* （指数增长率的单调性）。——设 Γ 和 Λ 为有限生成群。

1. 如果 $f\colon \Gamma \to \Lambda$ 是一个满同态，且 $S \in \mathrm{FG}(\Gamma)$，那么 $\mathrm{e}(\Gamma, S) \geq \mathrm{e}(\Lambda, f(S))$。2. 如果 Λ 是 Γ 的一个子群，且 Λ 具有指数增长，那么 Γ 也具有指数增长。

例 *A.6* （指数增长）。——有限生成自由群具有指数增长，当且仅当其秩至少为 2。更确切地说（de la Harpe，2000，命题 VII.13）：若 F 是一个自由群，且 $S \in \mathrm{FG}(F)$，则

$$\mathrm{e}(F, S) \geq 2 \cdot \mathrm{rk}(F) - 1.$$

由于非初等双曲群 [一致地] 包含秩为 2 的自由群，单调性表明它们具有 [一致的] 指数增长（Koubi，1998）。

存在具有指数增长但没有一致指数增长的有限生成群（Wilson，2004）。特别地，对于此类群 Γ，集合 $\mathrm{Exp}(\Gamma)$是非良序的。

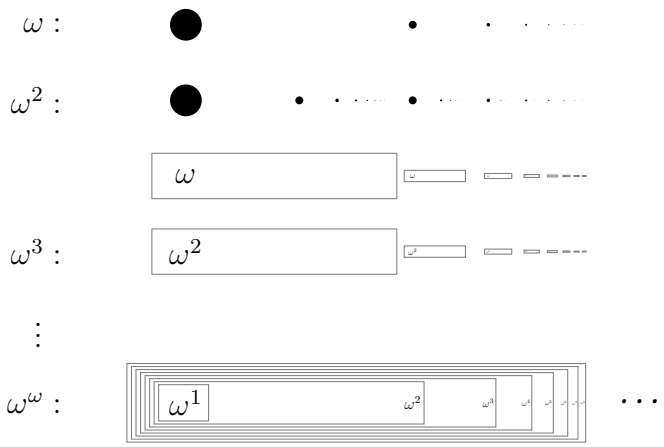

图 1. 序数 ω、ω^2、...、ω^ω，示意图

指数增长率在拟等距下似乎很脆弱：确定一致指数增长在拟等距下是否保持稳定，仍是一个悬而未决的问题。

A.3. 可数良序集与序数

良序是允许使用归纳原理的排序。此外，良序还具有一种算术，即序数算术。

定义 A.7 (良序集、序数)。——有序集 $(A, <)$ 是良序的，如果 A 的每个非空子集都包含一个 $<$-极小元素。一个序数 是良序有序集的同构类。如果其底集是可数的，则该序数称为可数序数。

在第 1 节的背景下，以下序数非常重要（图 1）：

示例 *A.8*(ω^ω)。——自然数 $\mathbb{N}$ 关于标准序是良序的。相应的序数记作 ω。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们用 ω^k表示带有字典序的 $\mathbb{N}^k$ 所表示的序数。给有限支撑函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 赋予字典序后得到一个良序集；其序数记作 ω^ω。序数 ω^ω 也可以描述为 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \omega^k$。

例 *A.9*。—— $\mathbb{R}$的子集 $A := \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ 和 $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n + A)$ 关于 $\mathbb{R}$上的标准序是良序的。集合 A 表示序数 ω，而 B 表示序数 ω^2。子集 $\mathbb{Q}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ 不是良序的。

附录 B. 指数增长率的右可计算性

我们在第 2.3节给出右可计算性相关论断的证明。

命题的证明 *2.7*。——令 $F(S)$ 为 $S \sqcup S^{-1}$ 上的约化词集合。特别地， $F(S)$ 是一个自由群，由 S自由生成，其运算为拼接和约化。众所周知，我们可以图灵枚举 $F(S)$ 的所有有限子集，这些子集表示 Γ 在典范投影 $F(S) \to \langle S \mid R\rangle = \Gamma$ 下的生成集（通过图灵枚举 R 在 $F(S)$ 中的正规闭包）。

因此，只需证明存在一台图灵机，该机器给定一个有限生成集 $S' \subset F(S)$ 的 Γ 枚举集合 $A(S') := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \mathrm{e}(\Gamma, S')\}$。根据费凯特引理（注 A.3），对于所有生成集 S'，我们有

$$A(S') = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \quad x^n > \beta_n(\Gamma, S') \right\}.$$

这些数 $\beta_n(\Gamma, S')$ 不一定能根据 n 和 S' 计算出来（因为字问题在 Γ 中可能不可解），但对 $F(S)$ 中 R 的正规闭包进行递归枚举，表明存在一台图灵机：给定 Γ 的有限生成集 $S' \subset F(S)$，即可枚举 $\{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N},\ m \geq \beta_n(\Gamma, S')\}$；因此，也存在一台计算 $A(\cdot)$ 的图灵机。 □

证明 推论*2.8*。——第一部分是命题2.7的直接推论。

对于第二部分，令 $r \in \mathbb{Q}$。对于所有 $S \in \mathrm{FG}(\Gamma)$，我们有

$$\mathrm{e}(\Gamma, S) < r \iff \exists_{x \in \mathbb{Q}} \quad (r > x \wedge x > \mathrm{e}(\Gamma, S)).$$

令 $\langle S \mid R\rangle$ 为 Γ的一个有限表示。利用命题2.7所提供的图灵机，我们因而可以构造一台图灵机，枚举所有有限的集合 S'，其中元素为 $S \sqcup S^{-1}$ 上的词，并满足 S' 表示 Γ 的一个生成集，且 $\mathrm{e}(\Gamma, S') < r$。 □

为简单起见，我们将讨论限定在有限表示群的范围内。类似的论证也适用于有限生成递归呈示群。反过来，人们可能会想知道，每个右可计算实数 ≥ 1 是否都能实现为某个有限生成集的某个有限表示群/递归呈示群的指数增长率。

致谢

本研究得到 CRC 1085高阶不变量 （雷根斯堡大学，DFG 资助）的支持。

参考文献

Goulnara N. Arzhantseva 和 Igor G. Lysenok（2002）。“字双曲群的增长紧性”，《数学杂志》**241**（3），第597–611页。（2006）。“字双曲群增长的下界”，《伦敦数学学会杂志》**73**（1），第109–125页。Riccardo Benedetti 和 Carlo Petronio（1992）。双曲几何讲义。Universitext。施普林格。Mladen Bestvina 和 Mark Feighn（1996）。“关于《负曲率群的组合定理》的补遗与更正”［《微分几何杂志》，35（1），85–101，1992］”，《微分几何杂志》**43**（4），第783–788页。Martin R. Bridson 和 André Haefliger（1999）。非正曲率度量空间。第319卷。数学科学基础丛书。施普林格。Pierre de la Harpe（2000）。几何群论专题。芝加哥数学讲座丛书。芝加哥大学出版社。（2002）。“指数增长群的一致增长”。载于：几何与组合群论会议论文集，第二部分（海法，*2000*）。第95卷，第1–17页。Koji Fujiwara（2021）。“轴双曲群中的增长率”。预印本，arXiv:2103.01430。Koji Fujiwara 和 Jason Fox Manning（2011）。“双曲流形的单纯体积与填充”，《代数与几何拓扑》**11**（4），第2237–2264页。Koji Fujiwara 和 Zlil Sela（2020）。“双曲群中的增长率”。预印本，arXiv:2002.10278。Mikhael Gromov（1981）。“双曲流形（据 Thurston 和 Jørgensen）”，载于：布尔巴基讨论班，*1979/80*年卷。第842卷。数学讲义。施普林格，第40–53页。（1982）。“体积与有界上同调”，《高等科学研究所数学出版物》**56**，第5–99页（1983）。（1987）。“双曲群”，载于：群论论文集。第8卷。数学科学研究所出版物。施普林格，第75–263页。Daniel Groves 和 Henry Wilton（2018）。“双曲群上的极限群的结构”，《以色列数学杂志》**226**（1），第119–176页。Nicolaus Heuer（2019）。“递归呈示群上 scl 的完整谱”。预印本，arXiv:1909.01309。Nicolaus Heuer 和 Clara Löh（2023）。“超越单纯体积”，《傅里叶研究所年刊》。即将发表。Alice Kerr（2021）。“映射类群中的乘积集增长”。预印本，arXiv:2103.12643。

Olga Kharlampovich 和 AlexeiMyasnikov（1998a）。“自由群上的不可约仿射簇。I.二次方程的不可约性与零点定理”，代数期刊**200**（2），第 472–516页。（1998b）。“自由群上的不可约仿射簇。II. 三角拟二次形式的系统与剩余自由群的描述”，代数期刊 **200**（2），第517–570 页。Malik Koubi（1998）。“双曲群中的一致增长”，傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔） **48**（5），第 1441–1453 页。Clara Löh（2023年）。“固定基本群的单纯体积谱”，几何学专论 **217**（2），第 16号论文。Clara Löh 和MatthiasUschold（2022）。“L^2-Betti数与实数的可计算性”。预印本，arXiv:2202.03159。Larsen Louder（2012）。“极限群的 Krull 维数”，几何与拓扑 **16**（1），第 219–299页。IgorMineyev（2001年）。“双曲群的整直化与有界上同调”，几何、泛函分析 **11**（4），第807–839 页。Zlil Sela（1999）。“双曲群的自同态。I. Hopf 性质”，拓扑学**38**（2），第 301–321 页。（2006）。“群上的丢番图几何。VI. 自由群的初等理论”，几何、泛函分析 **16**（3），第 707–730 页。（2009）。“群上的丢番图几何。VII.双曲群的初等理论”，伦敦数学学会会刊 **99**（1），第 217–273 页。William P.Thurston（1979年）。*3*流形的几何与拓扑。油印讲义。普林斯顿。HsienChung Wang（1972）。“关于全不连续群的主题”，载于：对称空间（短期课程，华盛顿大学，圣路易斯，密苏里州，*1969–1970*）。《纯粹与应用数学》，第 8 卷。Dekker，第 459–487 页。Richard Weidmann和 Cornelius Reinfeldt（2019）。“双曲群的 Makanin–Razborov 图”，布莱兹·帕斯卡数学年刊 **26**（2），第 119–208 页。John S.Wilson（2004）。“关于群的指数增长与一致指数增长”，数学发明 **155**（2），第 287–303 页。

Clara Löh 数学系 雷根斯堡大学 93040 雷根斯堡 德国电子邮件：
clara.loeh@ur.de