arXiv:2304.04438v1 [math.AT] 10 Apr 2023

幂零流形上仿射 n 值映射的 Nielsen 数

C. Deconinck, K.Dekimpe*比利时科特赖克，KULeuven
Campus Kulak Kortrijk，邮编 8500 电子邮箱：
Charlotte.Deconinck@kuleuven.be, Karel.Dekimpe@kuleuven.be

2023 年 4 月 11 日

摘要

幂零流形是连通单连通幂零李群G 关于一致格 N的商 ${}_{N}\backslash^{G}$ 。本文确定了此类幂零流形上仿射 n 值映射的 Reidemeister 数和尼尔森数。这类映射是指其给定的提升到 G可分解为 n 李群 G的仿射映射。为得到这一结果，我们还建立了一种计算有限生成无挠幂零群上广义扭结共轭类数量的方法。

1 引言

设 $f\colon X \to X$ 是一个定义在相当良好的拓扑空间 X （例如， X 是一个有限多面体）上的连续映射。尼尔森不动点理论（参见 [12], [13], [14] 和 [15]）是代数拓扑学的一个分支，它提供了一个框架来确定

$$\mathrm{MF}(f) = \min \#\{\mathrm{Fix}(g) \mid g \simeq f\},$$

其中，Fix(g) $= \{x \in X \mid g(x) = x\}$ 是 g 的不动点集合，而 $g \simeq f$ 表示 g与 f同伦。这通过为映射 f赋予两个数来实现。首先，将集合 Fix(f)划分为所谓的不动点类。划分方式保证：对于与 f同伦的映射 g， g的不动点类与 f的不动点类一一对应。由此，不动点类的数量（称为 f的 Reidemeister 数 $R(f)$）在同伦下保持不变。请注意， f （或 g）的某些不动点类可能为空。第二步，为每个不动点类赋予一个整数，称为该不动点类的指数；指数非零的不动点类称为本质不动点类。其思想是，在考虑同伦时，本质不动点类永远不会变为空，而非本质不动点类则可能变为空。映射 f的尼尔森数 $N(f)$就是 f的本质不动点类的数量。此外， $N(f)$也是同伦不变量。这个尼尔森数是 MF(f)的一个非常好的估计；事实上，根据 F. Wecken 的一个结果，当 X 是维数不为二的紧流形时，对于 X的所有自映射，都有 $N(f) =$MF(f)（参见 [24]）。

一般来说，利用代数工具很容易计算 $R(f)$（$R(f)$ 等于基本群 $\pi(X)$ 上诱导端同态的扭共轭类数，参见第 4 节），但遗憾的是， $N(f)$ 往往很难计算。不过，对于某些流形类，人们已经能够推导出便于计算该尼尔森数的公式。幂零流形就是其中一个例子。我们将在第 3 节详细介绍这类流形；目前只需说明，它们具有如下形式： ${}_{N}\backslash^{G}$，其中 N 是连通单连通幂零李群 G 的一致格。已知，任意映射 f 在这样的

*研究获得佛兰德政府长期结构性资金——Methusalem资助。

幂零流形上都同伦于一个由端同态 $\varphi: G \to G$ 诱导的映射；D. Anosov（[1],，另见 [9]）证明了 $N(f) = |\det(I - \varphi_*)|$。这里， $\varphi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是 φ 在 G 单位元处的微分（因此它是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上诱导的端同态）。

在八十年代，H. Schirmer 将尼尔森理论（包括 Wecken 的结果）推广到了 n 值映射 f 的情形： $X \multimap X$ ([19], [20])。这类映射为每个 $x \in X$ 关联 X 的一个子集$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，且该子集恰有 n 个元素。这里同样要求某种连续性（见第 2 节）。在 [2], 中，R.F. Brown 证明了，圆上的任意 n 值映射都同伦于一个仿射n 值映射（这是幂零流形上单值线性映射的自然类比），并且他还计算出了这一情形下的尼尔森数。

本文将展示如何计算任意幂零流形上任意仿射 n 值映射的尼尔森数。事实上，本文的主要结果是定理 6.13，它很好地推广了 Anosov 关于单值情形的公式。我们确实要指出，与单值情形不同，并非任意 n 值映射都同伦于仿射 n 值映射，但仿射 n 值映射这一类仍然非常广泛且颇有研究价值。

本文组织如下。在第 2 节中，我们描述了 [3] 中所发展出的针对 n 值映射的不动点类研究方法。在下一节中，我们回顾关于幂零李群和幂零流形的基本事实。第 4 节纯粹属于群论范畴，因为我们构造了一种方法，用于计算有限生成无挠幂零群中广义扭结共轭类的数量。事实上，这是一种计算 n 值映射的不动点类数量的代数方法（因此也可用于计算 $R(f)$）。在第 5 节中，我们引入仿射 n 值映射这一类映射，然后应用前一节的结果，找出一个易于计算此类仿射 n 值映射的 Reidemeister 数的公式。最后一节中，我们计算所有可能的不动点类的指标，并由此得到本文的主要结果，即计算仿射 n 值映射的尼尔森数 $N(f)$ 的公式。

2 n值映射的不动点类

下面，我们将使用 [3]中发展起来的理论。本节回顾该论文中的一些结果。

设空间 X 是一个连通有限多面体。 n 个有序点在X 上的配置空间为

$$F_n(X) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

并赋予其作为乘积空间 X^n. 的子空间所继承的拓扑。 n 个无序点在 X 上的配置空间为

$$D_n(X) = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

并且可以看作对称群 Σ_n.在 $F_n(X)$上的自由作用所产生的轨道空间。商映射 $q: F_n(X) \to D_n(X)$在 $D_n(X)$上诱导商拓扑。

对于自然数 $n > 0$， n值映射 $f: X \multimap X$ 是一个连续的集值函数，即同时下半连续和上半连续，并且对每个 $x.$ ， $f(x)$恰好包含n 个元素。我们不区分 n–值映射 $f: X \multimap X$ 与相应的单值函数 $f: X \to D_n(X)$，后者是连续的（如 [4]中所证明）。 f 的不动点是满足 $x \in f(x)$的元素 x 。 f 的所有不动点的集合记为Fix(f)。

˜设 $p: X \to X$ 是 X 的万有覆盖，其覆盖群为 $\pi.$ 。轨道构形空间定义为

$$\begin{aligned} F_n(\tilde{X}, \pi) &= \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{X}^n \mid p(\tilde{x}_i) \neq p(\tilde{x}_j) \text{ if } i \neq j\} \\ &= \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{X}^n \mid \pi \cdot \tilde{x}_i \neq \pi \cdot \tilde{x}_j \text{ if } i \neq j\}. \end{aligned}$$

Xicot´encatl 证明了 [25]

$$p^n : F_n(\tilde{X}, \pi) \to D_n(X) : (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \mapsto \{p(\tilde{x}_1), p(\tilde{x}_2), \ldots, p(\tilde{x}_n)\}$$

是一个覆盖映射，其覆盖群为 $\pi^n \rtimes \Sigma_n$，且该群中的乘积定义如下

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \sigma)(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n; \rho) = (\alpha_1\beta_{\sigma^{-1}(1)}, \alpha_2\beta_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, \alpha_n\beta_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma \circ \rho).$$

现在，我们可以将任意 n 值映射 $f\colon X \to D_n(X)$ 提升为映射 $\tilde{f}\colon X \to F_n(X, \pi)$。由于 $F_n(X, \pi) \subset X^n$，该提升 $\tilde{f}$ 可分解为 n 个单值映射：$\tilde{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$。映射 $f_i\colon X \to X$ 称为提升因子。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\bar{f}=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n)} & F_n(\tilde{X}, \pi) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^n} \\ X & \xrightarrow[f]{} & D_n(X) \end{array}$$

与单值情形类似，在所有提升的集合上存在一个等价关系，我们在 n 值映射 f 的所有提升因子集合上定义一个等价关系：

$$\bar{f}_i \sim_{lf} \bar{f}'_j \Leftrightarrow \exists \gamma \in \pi : \bar{f}_i = \gamma \bar{f}'_j \gamma^{-1}.$$

这些等价类称为提升因子类，f 的 Reidemeister 数 $R(f)$ 定义为提升因子类的数量。如果两个 n 值映射同伦，则它们具有相同的 Reidemeister 数。

类似于单值情形（其中我们有一个关于提升而非提升因子的类似性质），以下结论在 n 值情形中成立：

定理 2.1。设 $f\colon X \to D_n(X)$ 是一个 n 值映射，且 f_i、f'_j 是 f. 的两个提升因子

(a) If $\bar{f}_i \sim_{lf} \bar{f}'_j$, *then* $p\,\mathrm{Fix}(\bar{f}_i) = p\,\mathrm{Fix}(\bar{f}'_j)$.

(b) If $p\,\mathrm{Fix}(\bar{f}_i) \cap p\,\mathrm{Fix}(\bar{f}'_j) \neq \emptyset$ *then* $\bar{f}_i \sim_{lf} \bar{f}'_j$.

因此，我们可以将不动点集 $\mathrm{Fix}(f) = \bigcup_{\bar{f}_i} p\,\mathrm{Fix}(f_i)$ 写成不相交并集

$$\mathrm{Fix}(f) = \bigcup_{[\bar{f}_i]} p\,\mathrm{Fix}(\bar{f}_i),$$

其中并集取遍所有提升因子类。集合 $p\mathrm{Fix}(f_i)$ 称为 f. 的不动点类。由此可知，Reidemeister 数（定义为提升因子类的数量）也等于不动点类的数量。Schirmer 于 1984 年已经定义了 n-值映射的不动点类，且未使用覆盖空间（[19]）。在我们考虑非空不动点类的情形下，前述不动点类的定义与 Schirmer 的定义一致。此外，Schirmer 还将指数和尼尔森数的概念推广到了 $n-$ 值情形。f 的尼尔森数 $N(f)$ 定义为非零指数的不动点类的数量，因此 $N(f) \leq R(f)$。

我们固定 f的一个提升 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$，称其为基本提升。成立：$f$的每个提升因子都可以写成 αf_i^*，其中 $\alpha \in \pi$和 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.。$f$ 的基本提升通过以下要求定义了一个函数 $\psi_f\colon \pi \to \pi^n \rtimes \Sigma_n$

$$\forall \gamma \in \pi : \bar{f}^* \circ \gamma = \psi_f(\gamma) \circ \bar{f}^*.$$

我们将其记作 $\psi_f(\gamma) = (\phi_1(\gamma)\ \phi_2(\gamma) \ldots, \phi_n(\gamma); \sigma_\gamma)$，结果证明 ψ_f是一个同态映射。映射 $\sigma : \pi \to \Sigma_n : \gamma \mapsto \sigma_\gamma$ 也是一个同态映射，但映射 $\phi_i : \pi \to \pi$ 不是。

一般的同态映射。利用 $\pi^n \rtimes \Sigma_n$ 的乘积结构，可以发现映射 ϕ_i满足该关系

$$\bar{f}_i^* \circ \gamma = \phi_i(\gamma) \circ \bar{f}^*_{\sigma_\gamma^{-1}(i)}. \tag{1}$$

我们可以将提升因子集合上的等价关系 $\sim_{lf}$ 转化为 $\pi \times \{1, 2, \ldots, n\}$ 上的等价关系：

$$\alpha \bar{f}_i^* \sim \beta \bar{f}_j^* \iff \exists \gamma \in \pi : \begin{cases} \sigma_\gamma(j) = i \\ \alpha = \gamma\beta\phi_j(\gamma^{-1}). \end{cases}$$

由于映射 $\sigma\colon \pi \to \Sigma_n\colon \gamma \mapsto \sigma_\gamma$ 是一个同态映射，关系

$$i \sim j \iff \exists \gamma \in \pi : \sigma_\gamma(j) = i$$

在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上是一个等价关系。它将基本提升的提升因子划分为若干等价类；若 $i \sim j.$，则 f_i^* 和 f_j^*属于同一个等价类。这些等价类称为基本提升的 σ–类$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$。设 $f_{i_1}^*$、$f_{i_2}^*$、.....、$f_{i_r}^*$为这些 σ–类的代表元。则有

$$R(f) = R_{i_1}(f) + R_{i_2}(f) + \cdots + R_{i_r}(f) \tag{2}$$

其中 $R_{i_k}(f)$ 是由下式给出的 π上的等价关系的等价类数

$$\alpha \sim_{i_k} \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \in S_{i_k} : \alpha = \gamma\beta\phi_{i_k}(\gamma^{-1}),$$

对于 $S_{i_k} = \{\gamma \in \pi \mid \sigma_\gamma(i_k) = i_k\}$. 尽管映射 $\phi_{i_k}\colon \pi \to \pi$ 通常不是同态映射，但将定义域限制为 S_{i_k}（它是 π的有限指数子群）后，它就是一个同态映射。将 $\gamma \in \pi$ 在关系 $\sim_{i_k}$（其中 $[\gamma]_{i_k}$）下的等价类记为

$$\mathrm{Fix}(f) = \bigcup_{k=1}^{r} \bigcup_{[\gamma]_{i_k}} p\,\mathrm{Fix}(\gamma \bar{f}_{i_k}^*),$$

其中，最后一个并集取遍所有满足 $\gamma \in \pi.$ 的类 $[\gamma]_{i_k}$。这是一个不交并，某些集合可能为空。

3 幂零群、Mal'cev完备化与幂零流形

本节将回顾有限生成无挠幂零群及其 Mal'cev 完备化的一些基本事实。更多细节请参阅 [5], [6], [17] 和 [21]。

对于群 N，我们用 $\gamma_i(N)$（$i = 1$，2，.....）表示 N的下中心列各项。这些项递归定义为 $\gamma_1(N) = N$以及 $\gamma_{i+1}(N) = [N, \gamma_i(N)]$。回忆一下，如果存在正整数 c 使得 $\gamma_{c+1}(N) = 1$，则称群为幂零群。使得 $\gamma_{c+1}(N) = 1$ 成立的最小可能的 c 称为 N.的幂零类

在本文中，我们将研究有限生成无挠幂零群。给定这样的群 N，存在唯一的连通单连通幂零李群 G，其中包含N 作为一致格（即离散且余紧的子群）。这个李群 G 称为 N的Mal'cev完备化。反之，如果 N 是连通单连通幂零李群 G的一致格，那么 N 是有限生成且无挠的。本文所研究的空间是幂零流形。这些空间恰好是商空间 $_N\backslash^G$，其中N 是连通单连通幂零李群 G的一致格。因此，幂零流形与有限生成无挠幂零群之间存在一一对应关系。

现在，设 N_1 和 N_2 是这样两个有限生成无挠幂零群，其Mal'cev完备化分别为 G_1 和 G_2。那么任意态射 $\varphi\colon N_1 \to N_2$ 都唯一延拓为一个李

群同态 $\tilde{\varphi}$: $G_1 \to G_2$。此外，当 φ 是同构（或单射或满射）时， $\tilde{\varphi}$也是如此。

令 $\mathfrak{g}$ 表示连通单连通幂零李群 G 的李代数。众所周知，在此情况下指数映射 exp: $\mathfrak{g} \to G$ 是双射，我们将其逆映射记为log: $G \to \mathfrak{g}$。当 φ: $G \to G$ 是幂零李群 G 的端同态时，我们将使用 φ_*: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 表示 φ 的微分，并且有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \log} & & {\scriptstyle \exp}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \log} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\varphi_*]{} & \mathfrak{g} \end{array}$$

在本文中，我们将需要对与给定的有限生成幂零群 N 相关联的 Mal'cev完备化作出更为具体的描述。就我们的目的而言，事实证明，研究 N 的下中心列各项的隔离子是有益的。

定义。令 H 为群 K的一个子群。我们将 H 在 K中的隔离子称为 K的以下子集:

$$\sqrt[K]{H} = \{x \in K \mid \exists m > 0 : \ x^k \in H\}.$$

当 N 是一个类为 c 的有限生成无挠幂零群时，我们将用 $N_i = \sqrt[N]{\gamma_i(N)}$表示 N 的下中心列的第 i 项的隔离子群。 N_i 是 N 的全特征子群，并且它们构成一个中心列

$$1 = N_{c+1} \le N_c \le N_{c-1} \le \cdots \le N_2 \le N_1 = N$$

其中每个商群 N_i/N_{i+1} 都是无挠的，事实上是有限秩的自由阿贝尔群，设为 k_i。注意到N_i是 N 的最小子群，包含 $\gamma_i(N)$，且 N/N_i是无挠的。事实上， N_i是 $N/\gamma_i(N)$的挠群在自然投影 $N \to N/\gamma_i(N)$下的逆像。因此 $[N_i: \ \gamma_i(N)] < \infty$。当 G是 N的Mal'cev完备化时， $N_i = \gamma_i(G) \cap N$（因为 [7]中的引理1.2.6）。

现在，选择元素 $a_{i,j} \in N_i (1 \le i \le c, 1 \le j \le k_i)$，使得 $\overline{a}_{i,1} = a_{i,1}N_{i+1}, \overline{a}_{i,2} = a_{i,2}N_{i+1}, \ldots, \overline{a}_{i,k_i} = a_{i,k_i}N_{i+1}$ 构成自由阿贝尔群 $N_i/N_{i+1} \cong \mathbb{Z}^{k_i}$.的一组自由生成元
元素 $a_{1,\ 1}$、 $a_{1,\ 2}$、.....、$a_{c,\ k_c}$构成所谓的 Mal'cev基，我们称该 Mal'cev基与下中心列的隔离子相容。现在，任意元素 $x \in N$ 都可以唯一地写成如下形式

$$x = a_{1,1}^{z_{1,1}} a_{1,2}^{z_{1,2}} \cdots a_{1,k_1}^{z_{1,k_1}} a_{2,1}^{z_{2,1}} \cdots a_{c,k_c}^{z_{c,k_c}} \tag{3}$$

对于某些整数 $z_{i,\ j} \in \mathbb{Z}$. 为简化记号，我们将使用元组 $z_1 = (z_{1,\ 1}, \ z_{1,\ 2}, \ \ldots\ldots, \ z_{1,\ k_1})$ $z_2 = (z_{2,\ 1}, \ z_{2,\ 2}, \ \ldots\ldots, \ z_{2,\ k_2})$ ....., $z_c = (z_{c,\ 1}, \ z_{c,\ 2}, \ \ldots\ldots, \ z_{c,\ k_c})$ 并记作

$$x = a_1^{z_1} a_2^{z_2} \cdots a_c^{z_c} \tag{4}$$

而不是上面的（3）。
以下性质众所周知。

定理 3.1. 设 N 是有限生成无挠幂零群，且 $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{c,k_c}$ 是 N 的 Mal'cev 基，与下中心列的隔离子相容。则

1. $N_i = \mathrm{grp}\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{c,k_c}\}$。 2. 存在多项式函数 p_i : $\mathbb{Q}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}} \times \mathbb{Q}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}} \to \mathbb{Q}^{k_i}$ $(2 \le i \le c)$，使得 $\forall x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^{k_1}, \forall x_2, y_2 \in \mathbb{Z}^{k_2}, \ldots,$ $\forall x_c, y_c \in \mathbb{Z}^{k_c}$:

$$\begin{aligned} &a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_c^{x_c} a_1^{y_1} a_2^{y_2} \cdots a_c^{y_c} \\ &= a_1^{x_1+y_1} a_2^{x_2+y_2+p_2(x_1,y_1)} \cdots a_i^{x_i+y_i+p_i(x_1,\ldots,x_{i-1},y_1,\ldots,y_{i-1})} \cdots a_c^{x_c+y_c+p_c(x_1,\ldots,x_{c-1},y_1,\ldots,y_{c-1})}. \end{aligned}$$

3. 存在多项式函数 q_i ： $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}\to\mathbb{Q}^{k_i}$ $(2\le i\le c)$，使得$\forall z_1\in\mathbb{Z}^{k_1}$、 $\forall z_2\in\mathbb{Z}^{k_2}$、 ……、 $\forall z_c\in\mathbb{Z}^{k_c}$、 $\forall m\in\mathbb{Z}$：

$$(a_1^{z_1}a_2^{z_2}\cdots a_c^{z_c})^m=a_1^{mz_1}a_2^{mz_2+q_2(m,z_1)}\cdots a_c^{mz_c+q_c(m,z_1,\ldots,z_{c-1})}.$$

利用多项式 p_i，我们可以通过将乘积定义为以下形式，在 $\mathbb{R}^{k_1+k_2+\cdots+k_c}$ 上定义群结构：

$$\begin{aligned}&(x_1,x_2,\ldots,x_c)(y_1,y_2,\ldots,y_c)\\&\quad=\quad\big(x_1+y_1,x_2+y_2+p_2(x_1,y_1),\ldots,x_c+y_c+p_c(x_1,\ldots,x_{c-1},y_1,\ldots,y_{c-1})\big).\end{aligned}$$

这样我们就得到一个李群 G，它是连通、单连通且幂零的。将 $a_1^{z_1}a_2^{z_2}\cdots a_c^{z_c}\in N$ 与 $(z_1,z_2,\ldots,z_c)\in G$. 对应起来后，群 N 是群 G 的一致格。因此， G 是 N. 的 Mal'cev完备化。为简化记号，我们用 $a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_c^{x_c}$ 表示 G 中的元素 $(x_1,x_2,\ldots,x_c)$。

设 $\mathfrak{g}$ 是 G. 的李代数。若令 $A_{i,\ j}=\log(a_{i,\ j})$ $(1\le i\le c,1\le j\le k_i)$，则集合 $A_{1,\ 1},A_{1,\ 2},\ldots,A_{1,\ k_1},A_{2,\ 1},\ldots,A_{c,\ k_c}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基（作为向量空间）。与上文类似，我们用 x_iA_i 作为 $x_{i,\ 1}A_{i,\ 1}+x_{i,\ 2}A_{i,\ 2}+\cdots+x_{i,\ k_i}A_{i,\ k_i}$ 的简写。

$\mathfrak{g}$ 的下中心列定义与群的情况类似，即 $\gamma_1(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$ 和 $\gamma_{i+1}(\mathfrak{g})=[\mathfrak{g},\gamma_i(\mathfrak{g})]$. 成立。$\gamma_i(\mathfrak{g})$的指数为 $=\gamma_i(G)$。态射 $\varphi:G\to G$ 在$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)\cong\mathbb{R}^{k_i}$上诱导出一个态射，其中同构 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)\to\mathbb{R}^{k_i}$ 由 $a_{i,j}\gamma_{i+1}(G)\mapsto(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$给出，其中“1”位于第 j^{th} 个位置。我们用 M_i 表示该诱导态射在 $\mathbb{R}^{k_i\times k_i}$中的矩阵。类似地， φ 的微分 $\varphi_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 在$\gamma_i(\mathfrak{g})/\gamma_{i+1}(\mathfrak{g})\cong\mathbb{R}^{k_i}$ 上诱导出一个态射，其中同构 $\gamma_i(\mathfrak{g})/\gamma_{i+1}(\mathfrak{g})\to\mathbb{R}^{k_i}$ 由 $A_{i,j}+\gamma_{i+1}(\mathfrak{g})\mapsto(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ 给出，其中“1”位于第 j^{th} 个位置。结果表明，该诱导态射的矩阵也等于 M_i.

定理 3.2。使用上文引入的记号，我们有以下性质 $s.$

1. $\gamma_i(\mathfrak{g})=\mathrm{vct}\{A_{i,1},A_{i,2},\ldots,A_{c,k_c}\}$。

2. 存在多项式函数 $r_i:\mathbb{R}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}\to\mathbb{R}^{k_i}$ $(2\le i\le c)$，使得 $\forall x_1\in\mathbb{R}^{k_1},\forall x_2\in\mathbb{R}^{k_2},\ldots,$ $\forall x_c\in\mathbb{R}^{k_c}$：

$$\exp(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_cA_c)=a_1^{x_1}a_2^{x_2+r_2(x_1)}\cdots a_c^{x_c+r_c(x_1,x_2,\ldots,x_{c-1})}.$$

3. 存在多项式函数 $s_i:\mathbb{R}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}\to\mathbb{R}^{k_i}$ $(2\le i\le c)$，使得 $\forall x_1\in\mathbb{R}^{k_1},\forall x_2\in\mathbb{R}^{k_2},\ldots,$ $\forall x_c\in\mathbb{R}^{k_c}$：

$$\log(a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_c^{x_c})=x_1A_1+\big(x_2+s_2(x_1)\big)A_2+\cdots+\big(x_c+s_c(x_1,x_2,\ldots,x_{c-1})\big)A_c.$$

4. 如果 φ：$G\to G$是一个态射，那么存在多项式函数 P_i：$\mathbb{R}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}\to\mathbb{R}^{k_i}$和线性函数 P_i'：$\mathbb{R}^{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}\to\mathbb{R}^{k_i}$ $(2\le i\le c)$，使得 $\forall x_1\in\mathbb{R}^{k_1},\forall x_2\in\mathbb{R}^{k_2},\ldots,\ \forall x_c\in\mathbb{R}^{k_c}$：

$$\varphi(a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_c^{x_c})=a_1^{M_1x_1}a_2^{M_2x_2+P_2(x_1)}\cdots a_c^{M_cx_c+P_c(x_1,x_2,\ldots,x_{c-1})}$$

and

$$\begin{aligned}&\varphi_*(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_cA_c)\\&\qquad=M_1x_1A_1+\big(M_2x_2+P_2'(x_1)\big)A_2+\cdots+\big(M_cx_c+P_c'(x_1,x_2,\ldots,x_{c-1})\big)A_c.\end{aligned}$$

4 幂零群的广义扭结共轭

对于单值自映射 f，Reidemeister 数 $R(f)$ 可以通过代数方法计算，即统计空间基本群上由态射f_* 诱导的扭共轭类的数量，记作 $R(f_*)$。在 n 值映射的情形下，我们需要对这一概念进行推广。

设 N 是一个群（在我们的情形中，它总是有限生成、无挠的幂零群）。假设 $H \leq_f N$ 是 N 的有限指数子群，并且有一个态射 $\phi\colon H \to N$。那么，通过设定 ϕ，它在 N 上确定了一个等价关系 $\sim_\phi$。

$$\forall \alpha, \beta \in N\colon\ \alpha \sim_\phi \beta \iff \exists \gamma \in H : \alpha = \gamma\beta\phi(\gamma^{-1}).$$

注意，当 $H = G$ 时，这就是通常的扭曲共轭关系（参见例如 [8], [10], [11], [18] 以及 [22]），因此我们将这种关系称为广义扭结共轭关系。
我们将使用 $R(\phi)$表示广义扭结共轭关系 $\sim_\phi$ and 的等价类数量，并将此数称为 ϕ 的 Reidemeister 数，就像对普通扭曲共轭关系一样。这个 Reidemeister 数 $R(\phi)$ 要么是正整数，要么是 ∞。

注意，我们已经在第2 节遇到过这一概念，当时我们看到 $R(f_{i_k})$ 等于态射 $\phi_{i_k}\colon S_{i_k} \to \pi$ 的广义扭共轭类的数量。因此，我们可以将公式 (2) 重写为

$$R(f) = R_{i_1}(f) + R_{i_2}(f) + \cdots + R_{i_r}(f) = R(\phi_{i_1}) + R(\phi_{i_2}) + \cdots + R(\phi_{i_r}).$$

由于我们需要计算幂零流形上一个 n–值映射的不动点类数量，因此，对我们来说，理解当 N 是一个有限生成无挠幂零群时如何计算广义扭共轭类的数量至关重要。本节相当技术性，本节的主要结果定理 4.14 给出了计算这一数量的公式。但在我们开始推导这一公式之前，首先让我们给出一个小例子来说明这一概念。

例4.1。令 $N = \mathbb{Z}$ 为整数的加法群，并令 $H = n\mathbb{Z}$，其中 $n = dm$、 d 和 m 为正整数。取 $\phi\colon H \to N\colon\ z \mapsto \frac{z}{m}$。那么我们有$m$

$$\begin{aligned}\forall z_1, z_2 \in N = \mathbb{Z}\colon\ z_1 \sim_\phi z_2 \quad &\iff \quad \exists nz \in H = n\mathbb{Z}\colon\ z_1 = nz + z_2 - \frac{nz}{m} \\ &\iff \quad \exists z \in \mathbb{Z}\colon\ z_1 - z_2 = \left(n - \frac{n}{m}\right) z = (n-d)z.\end{aligned}$$

在 $m \neq 1$ 的情况下（因此 $d \neq n$），我们看到 $z_1 \sim_\phi z_2 \iff z_1 \equiv z_2$ 模 $n-d$，因此 $R(\phi) = n-d$。另一方面，当 $m = 1$（因此 $d = n$）时，我们得到 $z_1 \sim_\phi z_2 \iff z_1 = z_2$，因此 $R(\phi) = \infty$。

如上所述，本节旨在为态射 $\phi\colon H \to N$ 开发一个计算 $R(\phi)$ 的公式，其中 H 是无挠有限生成c步幂零群 N. 的有限指数子群。我们再次使用记号 $N_i = \sqrt[N]{\gamma_i}(N)$ 表示 N 的下中心列各项的隔离子，并类似地，令 $H_i = \sqrt[H]{\gamma_i}(H)$。 H_i 群事实上与 N_i 密切相关，正如我们将在下面的引理中所展示的，这并不令人意外。我们将用 G 表示 N. 的 Mal'cev完备化。

引理4.2。使用上述引入的记号，我们有 $H_i = H \cap N_i$。由此可得 $H_i \leq_f N_i$ 并且
存在一个自然同构

$$\frac{H_i}{H_{i+1}} \cong \frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}}.$$

证明。注意到 G 也是 H 的 Mal'cev完备化（因为 H 在 N中具有有限指数），因此我们有 $H_i = H \cap \gamma_i(G) = H \cap N \cap \gamma_i(G) = H \cap N_i$。事实上， $H \leq_f N$意味着 that

$H \cap N_i \leq_f N_i$，因此 $H_i \leq_f N_i$。根据群的第二同构定理，我们有以下等式和自然同构：

$$\frac{H_i}{H_{i+1}} = \frac{H_i}{H \cap N_{i+1}} = \frac{H_i}{H_i \cap N_{i+1}} \cong \frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}}.$$

□

利用上述引理给出的自然同构 $\frac{H_i}{H_{i+1}} \cong \frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}}$，我们可以将 $\frac{H_i}{H_{i+1}}$ 视为 $\frac{N_i}{N_{i+1}}$ 的一个有限指数子群（因为 H_i，因此 $H_i N_{i+1}$也是 N_i的有限指数子群）。回想一下，在前一节中我们已经选定了一个固定同构 $\frac{N_i}{N_{i+1}} \cong \mathbb{Z}^{k_i}$。通过这个同构，子群 $\frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}}$（因此 $\frac{H_i}{H_{i+1}}$也）对应于 $\mathbb{Z}^{k_i}$ 中的一个有限指数子群，可写为 $B_i\mathbb{Z}^{k_i}$，其中 $B_i \in \mathbb{Z}^{k_i \times k_i}$是一个矩阵。其指数

$$\left[\frac{N_i}{N_{i+1}} : \frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}}\right] = [\mathbb{Z}^{k_i} : B_i\mathbb{Z}^{k_i}] = |\det(B_i)|.$$

引理 4.3. 态射 ϕ 为每个 $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$ 诱导出一个态射

$$\phi_i : \frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}} \to \frac{N_i}{N_{i+1}} : hN_{i+1} \mapsto \phi(h)N_{i+1}.$$

证明. 态射 $\phi\colon H \to N$ 有一个唯一延拓（见第 3 节），成为态射 $\phi\colon G \to G$。由于 $\phi(\gamma_i(G)) \subseteq \gamma_i(G)$，我们有 $\phi(H_i) = \phi(H \cap \gamma_i(G)) \subseteq \phi(H) \cap \gamma_i(G) \subseteq N \cap \gamma_i(G) = N_i$，因此对所有 $h \in H_i$，$\phi(h) \in N_i$。此外，若 $hN_{i+1} = h'N_{i+1}$，则 $h^{-1}h' \in N_{i+1}$ 且 $\phi(h^{-1}h') \in \tilde{\phi}(N_{i+1}) \subseteq N_{i+1}$，这表明 $\phi(h)N_{i+1} = \phi(h')N_{i+1}$，因此 ϕ_i 是一个良定义映射，现在很容易看出它是一个态射。 □

回顾一下，我们已将 N_i/N_{i+1} 与 $\mathbb{Z}^{k_i}$ 以及 $H_i N_{i+1}/N_{i+1}$ 与 $N_i/N_{i+1} = \mathbb{Z}^{k_i}$ 的子群$B_i\mathbb{Z}^{k_i}$ 识别。因此，我们将 ϕ_i 视为一个态射 ϕ_i： $B_i\mathbb{Z}^{k_i} \to \mathbb{Z}^{k_i}$。

我们将在本节证明乘积公式 $R(\phi) = R(\phi_1)R(\phi_2)\cdots R(\phi_c)$ 成立，因此我们首先着重计算以下情形中的 $R(\psi)$：ψ 是一个态射 $\psi\colon B\mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k$，其矩阵为 $B \in \mathbb{Z}^{k\times k}$，且 $\det B \neq 0$（这意味着 $[\mathbb{Z}^k\colon B\mathbb{Z}^k] = |\det(B)|$）。注意，在这种情况下，存在一个矩阵 $M \in \mathbb{Q}^{k\times k}$，使得 $\psi\colon B\mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k\colon \vec{z} \mapsto M\vec{z}$。下面的命题说明如何用 M 表示 $R(\psi)$。我们用 I_k 表示单位矩阵，并引入以下记号：

定义。令 $a \in \mathbb{R}$，则我们如下定义 $|a|_\infty$：

$$|a|_\infty = \begin{cases} |a| & \text{when } a \neq 0 \\ \infty & \text{when } a = 0. \end{cases}$$

命题 4.4.设 k 为一个正整数，且 $B \in \mathbb{Z}^{k\times k}$ 为一个矩阵，满足$\det(B) \neq 0$。设$\psi\colon B\mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k\colon \vec{z} \mapsto M\vec{z}$为由矩阵 $M \in \mathbb{Q}^{k\times k}$确定的态射。则

$$R(\psi) = [\mathbb{Z}^k : B\mathbb{Z}^k]|\det(I_k - M)|_\infty.$$

注记 4.5。

- 尽管矩阵 $M \in \mathbb{Q}^{k\times k}$，我们必须有 MB 是一个整数项矩阵，因为 ψ 的像是 $MB\mathbb{Z}^k \subseteq \mathbb{Z}^k$。

- 例 4.1 符合上述命题的背景，其中 $k = 1, \psi = \phi, B$ 是一个元素为 n 的 1×1矩阵，而 M 是一个元素为 1 的 1×1 矩阵。该命题预言，当 $\det(1 - \frac{1}{m}) \neq 0$（$\iff m \neq 1$）时，$mR(\psi) = [\mathbb{Z}\colon n\mathbb{Z}]|\det(1 - \frac{1}{m})| = n(1 - \frac{1}{m}) = n - d$；否则为$R(\psi) = \infty$。这与我们通过显式计算得到的结果一致。

命题 4.4 的证明。我们有，对于 $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in \mathbb{Z}^k$:

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 \sim_\psi \vec{z}_2 &\iff \exists \vec{z} \in B\mathbb{Z}^k : \ \vec{z}_1 = \vec{z} + \vec{z}_2 - \psi(\vec{z}) \\ &\iff \exists \vec{z} \in B\mathbb{Z}^k : \ \vec{z}_1 - \vec{z}_2 = (I_k - M)\vec{z}. \end{aligned}$$

因此，我们看到， $R(\psi)$ 是子群 $(I_k - M)B\mathbb{Z}^k$ 在 $\mathbb{Z}^k$ 中的陪集数，因此我们要找的是指数 $[\mathbb{Z}^k : (I_k - M)B\mathbb{Z}^k]$。众所周知，对于一个整数 $k \times k$ 矩阵A，有 $[\mathbb{Z}^k : A\mathbb{Z}^k] = |\det(A)|_\infty$。由于 $(I_k - M)B = B - MB$ 是一个整数矩阵，且 $\det(B) \neq 0$，我们得到

$$R(\psi) = |\det((I_k - M)B)|_\infty = |\det(B)||\det(I_k - M)|_\infty = [\mathbb{Z}^k : B\mathbb{Z}^k]|\det(I_k - M)|_\infty.$$

□

注 4.6. 对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$，我们将 ϕ_i 视为一个态射 $B_i\mathbb{Z}^{k_i} \to \mathbb{Z}^{k_i}$.。我们引入记号 M_i，表示与该态射相关联的 $\mathbb{Q}^{k_i \times k_i}$ 中的矩阵:

$$\phi_i : B_i\mathbb{Z}^{k_i} \to \mathbb{Z}^{k_i} : \vec{z} \mapsto M_i\vec{z}.$$

由命题 4.4 可知

$$R(\phi_i) = [\mathbb{Z}^{k_i} : B_i\mathbb{Z}^{k_i}]|\det(I_{k_i} - M_i)|_\infty = \left[\frac{N_i}{N_{i+1}} : \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}}\right]|\det(I_{k_i} - M_i)|_\infty.$$

以下引理及其证明是 Gon.calves 和 Wong 在 [11] 中结果的直接推广。

引理 4.7. 考虑具有 $A_1 \trianglelefteq B_1$、$A_2 \trianglelefteq B_2$ 和 $A_1 = B_1 \cap A_2$. 的群 $A_1 \leq_f A_2$ 和 $B_1 \leq_f B_2$。假设我们有如下交换图，其行均为短正合列（并具有自然的包含态射和投影态射）。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & \frac{B_1}{A_1} \cong \frac{B_1A_2}{A_2} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}} & & \\ 1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \frac{B_2}{A_2} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

于是有:

1. 若 $R(\bar{\varphi}) = \infty$，则 $R(\varphi) = \infty$.2. 若 $R(\bar{\varphi}) < \infty$, $|\mathrm{Fix}(\bar{\varphi})| < \infty$ 且 $R(\varphi') = \infty$，则 $R(\varphi) = \infty$.3. 若 $A_2 \leq Z(B_2)$，则 $R(\varphi) \leq R(\bar{\varphi})R(\varphi')$。

注记4.8.在上面的第 3项中，乘积 $R(\bar{\varphi})R(\varphi')$被定义为 ∞，如果 $R(\bar{\varphi}) = \infty$或$R(\varphi') = \infty$。在 [11] 关于通常扭曲共轭的类似结果中，第 3 项使用了等号（=），但这里应为不等号（≤）。

由于 ϕ_i 可视为一个态射 ϕ： $B_i\mathbb{Z}^{k_i} \to \mathbb{Z}^{k_i} : \vec{z} \mapsto M_i\vec{z}$我们可以将此类态射 ϕ_i 的特征值定义为有理矩阵 M_i的特征值。注意，这与 N_i/N_{i+1} 和 $\mathbb{Z}^{k_i}$之间同构的选择无关。

显然， $|\mathrm{Fix}(\phi_i)| = \infty$ 当且仅当 M_i （因此根据定义， ϕ_i也如此）具有特征值 1。对于幂零群，我们现在有

引理 4.9. 设 N 是一个幂零类为 c 的有限生成无挠幂零群，$H \leq_f N$ 和 ϕ 是态射。如果 $|\mathrm{Fix}(\phi)| = \infty$，那么存在一个 $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$，使得 ϕ_i: $\frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}} \to \frac{N_i}{N_{i+1}}$ 有特征值 1。

证明。令 $h \in$ 固定$(\phi) \setminus \{1_H\}$，并令 $i \in \{1,2,\ldots,c\}$ 为满足 i 的最大者，使得 $h \in H_i$. 那么 $hN_{i+1} \neq 1N_{i+1}$，因为否则 $h \in N_{i+1} \cap H = H_{i+1}$. 因此 hN_{i+1} 不是单位元，并且 $\phi_i(hN_{i+1}) = hN_{i+1}$. 由此可知，$\phi_i$ 具有特征值 1。 □

令 $X \leq N$. 我们将使用 $\overline{X}$ 表示群 $\overline{X} := \frac{XN_c}{N_c}$. 因此，$\overline{N} = \frac{NN_c}{N_c} = \frac{N}{N_c}$ 是一个有限生成、无挠（$c-1$）–步幂零群，$(N_i) = \frac{N_iN_c}{N_c} = \frac{N_i}{N_c}$ 并且 $\overline{H} = \frac{HN_c}{N_c}$. 注意，我们在记号（$N_i$）中引入了括号，以清楚地显示其与（$\overline{N}$）$_i$. 的区别。最后一个群是（$\overline{N}$）$_i = \left(\frac{N}{N_c}\right)_i = \sqrt[\frac{N}{N_c}]{\gamma_i\left(\frac{N}{N_c}\right)}$. 然而，实际上并不会产生混淆，因为我们有如下引理。

引理 4.10. 设 N 是一个有限生成的无挠幂零群，其幂零类为 c，且 $H \leq_f N$.。那么 $\overline{H} \leq_f \overline{N}$，并且我们有 $(N_i) = (\overline{N})_i$，以及 $(H_i) = (\overline{H})_i$，对所有 $i \in \{1,2,\ldots,c-1\}$. 均成立。

证明。为了证明 $(N_i) \supseteq (\overline{N})_i$，我们任取一个 $x \in \left(\frac{N}{N_c}\right)_i = \sqrt[\frac{N}{N_c}]{\gamma_i\left(\frac{N}{N_c}\right)}$. 然后 $x = yN_c$，其中 $y \in N$，并且 $(yN_c)^k = y^kN_c \in \gamma_i\left(\frac{N}{N_c}\right)$，对于一个正整数 k.。由于 $\gamma_i\left(\frac{N}{N_c}\right) = \frac{\gamma_i(N\ N_c)}{N_c}$，可知 $y^k \in \gamma_i(N)\ N_c$，因此对于某些 $\alpha \in \gamma_i(N)$ 和 $\beta \in N_c = \sqrt[N]{\gamma_c(N)}$，有 $y^k = \alpha\beta$。令 l 为满足 $\beta^l \in \gamma_c(N)$ 的正整数。由于 $N_c \subseteq Z(N)$，我们知道 $[\alpha,\beta] = 1$，所以

$$y^{kl} = (y^k)^l = (\alpha\beta)^l = \alpha^l\beta^l \in \gamma_i(N)\gamma_c(N) = \gamma_i(N).$$

由此可得 $y \in \sqrt[N]{\gamma_i(N)} = N_i$，并且我们得出 $x = yN_c \in \frac{N_i}{N_c} = (N_i)$。为证明 $\overline{(N_i)} \subseteq (\overline{N})_i$，我们任取一个 $zN_c \in (N_i) = \frac{N_i}{N_c}$.。由于 $z \in N_i = \sqrt[N]{\gamma_i(N)}$，存在一个正整数 m，使得 $z^m \in \gamma_i(N)$。于是 $(zN_c)^m = z^mN_c \in \frac{\gamma_i(N\ N_c}{N_c} = \gamma_i\left(\frac{N}{N_c}\right)$，所以 $zN_c \in \sqrt[\frac{N}{N_c}]{\gamma_i\left(\frac{N}{N_c}\right)} = \left(\frac{N}{N_c}\right)_i = (\overline{N})_i$.。因此我们证明了 $(N_i) = (\overline{N})_i$.。这就给出了我们所需结果。

$$(\overline{H})_i = \overline{H} \cap (\overline{N})_i = \overline{H} \cap \overline{(N_i)} = \frac{HN_c}{N_c} \cap \frac{N_iN_c}{N_c} = \frac{(H \cap N_i)N_c}{N_c} = \frac{H_iN_c}{N_c} = \overline{(H_i)}.$$

□

回顾一下，对于态射 $\phi\colon H \to N$，我们定义了诱导态射 $\phi_i\colon \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}} \to \frac{N_i}{N_{i+1}}$（见引理 4.3）。类似地，也存在一个诱导态射 $\overline{\phi}\colon \overline{H} = \frac{HN_c}{N_c} \to \overline{N} = \frac{N}{N_c}$:$hN_c \mapsto \phi(h)N_c$，因此也有诱导态射 $(\overline{\phi})_i$: $\frac{\overline{H_i}\,\overline{N_{i+1}}}{\overline{N}_{i+1}} \to \frac{\overline{N}_i}{\overline{N}_{i+1}}$: $\overline{h}\,\overline{N}_{i+1} \mapsto \bar{\phi}(\bar{h})\overline{N}_{i+1}$.

引理 4.11. 使用上文引入的记号，对于所有 $i \in \{1,2,\ldots,c-1\}$，有 $R((\phi)_i) = R(\phi_i)$

证明. 我们知道

$$\frac{\overline{H_i}\,\overline{N_{i+1}}}{\overline{N_{i+1}}} = \frac{\frac{H_iN_c}{N_c}\frac{N_{i+1}}{N_c}}{\frac{N_{i+1}}{N_c}} = \frac{\frac{H_iN_{i+1}N_c}{N_c}}{\frac{N_{i+1}}{N_c}} \cong \frac{H_iN_{i+1}N_c}{N_{i+1}} = \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}},$$

其中，该同构成立是因为第三同构定理。由于 $\frac{\overline{N_i}}{\overline{N_{i+1}}} = \frac{\frac{N_i}{N_c}}{\frac{N_{i+1}}{N_c}} \cong \frac{N_i}{N_{i+1}}$，我们得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}} & \xrightarrow{\cong} & \frac{(\overline{H})_i}{(\overline{N})_{i+1}} & \xrightarrow{(\bar{\phi})_i} & \frac{(\overline{N})_i}{(\overline{N})_{i+1}} & \xrightarrow{\cong} & \frac{N_i}{N_{i+1}} \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & & \phi_i & & & \end{array}$$

因此我们得出 $R((\phi)_i) = R(\phi_i)$。 □

命题 4.12. 使用前面的记号， $R(\phi) = \infty$ 当且仅当存在一个 $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$ 使得 ϕ_i 具有特征值 1。

证明。由于对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\phi_i \text{ has eigenvalue } 1 &\iff \exists \bar{\gamma} \in B_i \mathbb{Z}^{k_i} \setminus \{0\} : M_i \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \\
&\iff \exists \bar{\gamma} \in B_i \mathbb{Z}^{k_i} \setminus \{0\} : (I_{k_i} - M_i)\bar{\gamma} = 0 \\
&\iff \det(I_{k_i} - M_i) = 0 \\
&\iff |\det(I_{k_i} - M_i)|_\infty = \infty \\
&\iff R(\phi_i) = \infty,
\end{aligned}$$

其中最后一个等价关系由注 4.6 得出，我们必须证明

$$R(\phi) = \infty \iff \exists i \in \{1, 2, \ldots, c\} : R(\phi_i) = \infty. \tag{5}$$

我们通过对群 N. 的幂零类 c 进行归纳法来证明(5)。情形 $c = 1$ 是平凡的。假设对于所有有限生成、无挠幂零群 N，其幂零类为$\leq c-1$，对于所有 $H \leq_f N$ 和态射 $\phi\colon\ H \to N.$，(5)均成立。现令 N 为一个类为 c的有限生成、无挠幂零群， $H \leq_f N$ 以及 $\phi\colon\ H \to N$ 一个态射。考虑如下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & H_c & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \frac{H}{H_c} \cong \frac{HN_c}{N_c} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi' = \phi_c} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\phi}} & & \\
1 & \longrightarrow & N_c & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \frac{N}{N_c} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

群 $\frac{N}{N_c} = \overline{N}$ 是有限生成、无挠且类为 $c-1$ 的幂零群，并具有中心列

$$1 \leq \frac{N_{c-1}}{N_c} \leq \cdots \leq \overline{N}_i = \frac{N_i}{N_c} \leq \cdots \leq \frac{N_2}{N_c} \leq \frac{N}{N_c} = \overline{N}.$$

¯设 $R(\phi) = \infty$. 若 $R(\phi) = \infty$，则归纳法假设意味着存在一个 $i \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$ 使得 $R((\phi)_i) = \infty$，因此根据引理 4.11， $R(\phi_i) = \infty$。若 $R(\phi) < \infty$，¯则 $R(\phi_c)$ 必须是无限的，因为如果 $R(\phi_c) < \infty$，那么由于引理 4.7(3)， $\infty = R(\phi) \leq R(\phi) \cdot R(\phi_c) < \infty$。

现在假设存在一个 $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$，满足 $R(\phi_i) = \infty$.

¯如果 $i \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$，那么由引理 4.11可知， $R((\phi)_i) = \infty$. 归纳假-¯设意味着 $R(\phi) = \infty$，因此根据引理 4.7(1)， $R(\phi) = \infty$。

如果对于所有 $k \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$， $i = c$ 和 $R(\phi_k) < \infty$，那么通过在群 $\overline{N} = \frac{N}{N_c}$ 上应用引理 4.9，可得 $|\mathrm{Fix}(\bar{\phi})| < \infty$.。由引理 4.7(2)，我们最终可以得出结论：$R(\phi) = \infty$。 □

现在我们可以证明乘积公式:

定理4.13。设 N 为一个有限生成、无挠、幂零类为c的幂零群， $H \leq_f N$ 以及 $\phi\colon\ H \to N$ 为一个态射。对每个$i \in \{1, 2, \ldots, c\}$ 定义$N_i = \sqrt[N]{\gamma_i(N)}$和 $H_i = \sqrt[H]{\gamma_i(H)}$，并令 $\phi_i\colon\ \frac{H_i N_{i+1}}{N_{i+1}} \to \frac{N_i}{N_{i+1}}$为诱导的态射。那么

$$R(\phi) = \prod_{i=1}^{c} R(\phi_i).$$

证明。若对于某些 $i.$， $R(\phi)$ 或 $R(\phi_i)$是无限的，则这由命题 4.12 得出。因此，我们可以假设 $R(\phi)$ 和所有 $R(\phi_i)$ 都是有限的。
情形 $c = 1$ 是平凡的。令 $c > 1$ 并考虑 $\bar{\phi}$： $\frac{HN_c}{N_c} \to \frac{N}{N_c}$. 根据引理4.11，只需证明 $R(\phi) = R(\phi_c)R(\phi)$。

如果 $R(\phi)$ 是无限的，那么由引理 4.7(1) 可得 $R(\phi) = \infty$，这就产生了矛盾，因此 $R(\phi)$ 必须是有限的。
选择 y_1、 y_2、.....、 $y_{m_1} \in N$，使得 $\bar{y}_1 = y_1N_c$、 $\bar{y}_2 = y_2N_c$、.....、 $\bar{y}_{m_1} = y_{m_1}N_c$是 $\sim_{\bar{\phi}}$.的代表元。为 $\sim_{\phi_c}$.选择代表元 x_1、 x_2、.....、 $x_{m_2} \in N_c$。我们声称， x_iy_j($i \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$) 是 $\phi.$的 Reidemeister 类的代表元。

首先，我们证明所有的 x_iy_j 都代表 $\phi.$ 的不同 Reidemeister 类。假设 $x_{i_1}y_{j_1} \sim_\phi x_{i_2}y_{j_2}$，则存在一个 $\gamma \in H$，使得

$$x_{i_1}y_{j_1} = \gamma x_{i_2}y_{j_2}\phi(\gamma^{-1}). \tag{6}$$

在$\frac{N}{N_c}$上的投影给出 $\bar{x}_{i_1}\bar{y}_{j_1} = \bar{\gamma}\bar{x}_{i_2}\bar{y}_{j_2}\bar{\phi}(\bar{\gamma}^{-1})$，因此 $\bar{y}_{j_1} \sim_{\bar{\phi}} \bar{y}_{j_2}$.这意味着 $y_{j_1}N_c \sim_{\bar{\phi}} y_{j_2}N_c$，所以 $j_1 = j_2$.
若 $\gamma \in H_c$，则得到 $\phi(\gamma^{-1}) \in N_c \leq Z(N)$，因此 $x_{i_1} = \gamma x_{i_2}\phi(\gamma^{-1})$。于是 $x_{i_1} \sim_{\phi_c} x_{i_2}$，故 $i_1 = i_2$.若 $\gamma \notin H_c$，令 $k \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$为满足 $\gamma \in H_k$的最大 k。由于 x_{i_1}， $x_{i_2} \in N_c \leq Z(N)$，由 (6) 可得

$$x_{i_1}x_{i_2}^{-1} = y_{j_1}^{-1}\gamma y_{j_1}\phi(\gamma^{-1}) = y_{j_1}^{-1}\gamma y_{j_1}\gamma^{-1}\gamma\phi(\gamma^{-1})$$

因此 $x_{i_1}x_{i_2}^{-1}N_{k+1} = y_{j_1}^{-1}\gamma y_{j_1}\gamma^{-1}\gamma\phi(\gamma^{-1})N_{k+1} = [y_{j_1}, \gamma^{-1}]\gamma\phi(\gamma^{-1})N_{k+1}$.。由于 $[y_{j_1}, \gamma^{-1}] \in [N, N_k] \leq N_{k+1}$ 且 $x_{i_1}x_{i_2}^{-1} \in N_c \leq N_{k+1}$，我们得到 $N_{k+1} = \gamma\phi(\gamma^{-1})N_{k+1}$，因此 γN_{k+1} 是 $\phi_k.$ 的不动点。根据命题 4.12，由于 $R(\phi) < \infty$， ϕ_k 没有非平凡不动点。因此 $\gamma N_{k+1} = N_{k+1}$，于是 $\gamma \in N_{k+1}$，矛盾。

我们发现所有 x_iy_j 代表 ϕ 的不同Reidemeister类，因此 $R(\phi) \geq m_1 \cdot m_2$. 由于引理 4.7(3)，有 $R(\phi) \leq R(\phi)R(\phi_c) = m_1 \cdot m_2$. 我们可以得出$R(\phi) = m_1 \cdot m_2 = R(\phi)R(\phi_c)$。

□

利用这个乘积公式，我们现在可以用指数 $[N$ 表示 $R(\phi)$: $H]$ 以及上文引入的矩阵 M_i 。

定理4.14。设 N 是一个有限生成、无挠幂零群，其幂零类为c， $H \leq_f N$ 和 $\phi : \frac{H}{H_iN_{i+1}} \to \frac{N_i}{N_{i+1}}$ 一个态射。对每个$i \in \{1, 2, \ldots, c\}$ 定义$N_i = \sqrt[N]{\gamma_i(N)}$和 $H_i = \sqrt[H]{\gamma_i(H)}$，并令 ϕ_i： $\frac{H}{H_iN_{i+1}} \to \frac{N_i}{N_{i+1}}$ 为诱导态射，其关联矩阵为 M_i，如注 4.6 中所述。那么

$$R(\phi) = [N : H] \cdot |\det(I_{\sum k_i} - M)|_\infty \text{ with } M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_c \end{pmatrix}.$$

证明。由于矩阵 $I_{\sum k_i} - M$是分块对角矩阵，我们有 $\det(I_{\sum k_i} - M)$ $\prod_{i=1}^{c} I_{k_i} - M_i$, $|$ $I_{\sum k_i} - M|_\infty = \prod_{i=1}^{c} |$ $I_{k_i} - M_i|_\infty$. 4 13 $=$ $\det(\,)$，因此 $\det(\,)$ $\det(\,)$。由定理 。和注 4.6 可知，

$$R(\phi) = \prod_{i=1}^{c} \left[\frac{N_i}{N_{i+1}} : \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}}\right] \cdot |\det(I_{k_i} - M_i)|_\infty = \left(\prod_{i=1}^{c} \left[\frac{N_i}{N_{i+1}} : \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}}\right]\right) \cdot |\det(I_{\sum k_i} - M)|_\infty.$$

我们仍需证明

$$[N : H] = \prod_{i=1}^{c} \left[\frac{N_i}{N_{i+1}} : \frac{H_iN_{i+1}}{N_{i+1}}\right]. \tag{7}$$

对于群 G 及其子群 S 和正规子群 N，我们知道

$$\big[G:S\big]=\left[\frac{G}{N}:\frac{SN}{N}\right]\cdot[N:S\cap N]. \tag{8}$$

我们利用这一点通过归纳法证明 (7)。由于 $H\leq N$ 和 $N_2\trianglelefteq N$，我们得到

$$\big[N:H\big]=\left[\frac{N}{N_2}:\frac{HN_2}{N_2}\right]\cdot[N_2:H\cap N_2]=\left[\frac{N}{N_2}:\frac{HN_2}{N_2}\right]\cdot[N_2:H_2],$$

因此，(7) 对 $c=2.$ 得证

现在我们假设

$$\begin{aligned}&[N:H]\\&=\left[\frac{N}{N_2}:\frac{HN_2}{N_2}\right]\cdot\left[\frac{N_2}{N_3}:\frac{H_2N_3}{N_3}\right]\cdots\left[\frac{N_{k-2}}{N_{k-1}}:\frac{H_{k-2}N_{k-1}}{N_{k-1}}\right]\cdot[N_{k-1}:H_{k-1}].\end{aligned} \tag{9}$$

由于（8），我们有

$$\begin{aligned}\big[N_{k-1}:H_{k-1}\big]&=\left[\frac{N_{k-1}}{N_k}:\frac{H_{k-1}N_k}{N_k}\right]\cdot[N_k:H_{k-1}\cap N_k]\\&=\left[\frac{N_{k-1}}{N_k}:\frac{H_{k-1}N_k}{N_k}\right]\cdot[N_k:H_k].\end{aligned}$$

将其代入（9），可得

$$\begin{aligned}&[N:H]\\&=\left[\frac{N}{N_2}:\frac{HN_2}{N_2}\right]\cdot\left[\frac{N_2}{N_3}:\frac{H_2N_3}{N_3}\right]\cdots\\&\qquad\cdots\left[\frac{N_{k-2}}{N_{k-1}}:\frac{H_{k-2}N_{k-1}}{N_{k-1}}\right]\cdot\left[\frac{N_{k-1}}{N_k}:\frac{H_{k-1}N_k}{N_k}\right]\cdot[N_k:H_k].\end{aligned}$$

持续这一过程直至 $k=c+1$，最终得到（7）。 □

5 仿射 n值映射的 Reidemeister 数

现在我们再次转向幂零流形 ${}_N\backslash^G$。这里 N 是一个连通单连通幂零李群 $G.$ 的一致格。自然投影 $p:G\to{}_N\backslash^G$ 是幂零流形 ${}_N\backslash^G$ 的万有覆盖，而 N 通过在 G 上的左平移作用，是该投影的覆盖群。

如前所述，一个 $n-$值映射 $f:{}_N\backslash^G\multimap{}_N\backslash^G$ 将写成一个单值映射 $f:{}_N\backslash^G\to D_n\left({}_N\backslash^G\right).$ 如第2节所述，映射 f 提升为分裂映射 $\bar{f}^*=(\bar{f}_1^*,\bar{f}_2^*,\ldots,\bar{f}_n^*):G\to F_n(G,N)$，也就是说，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}G & \xrightarrow{\bar{f}^*=(\bar{f}_1^*,\bar{f}_2^*,\ldots,\bar{f}_n^*)} & F_n(G,N)\\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^n}\\ {}_N\backslash^G & \xrightarrow[f]{} & D_n\left({}_N\backslash^G\right).\end{array}$$

¯这里每个 f_i^* 都是 $G.$的自映射。

在 G的自映射中，有所谓的仿射映射。 G 的仿射映射是形如 $h: G \to G: x \mapsto g\varphi(x)$的映射，其中 $\varphi: G \to G$ 是李群的态射（$\varphi \in \mathrm{End}(G)$），且$g \in G$. 请注意，当 $G = \mathbb{R}^n$ （阿贝尔李群）时，$\mathbb{R}^n$ 的仿射映射 h 将元素 x 映射为 $g + \varphi(x)$，其中 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$是线性映射，而 g 是 h.的平移部分。因此，这确实是 $\mathbb{R}^n$.上的通常仿射映射。

定义。令 $f: {}_N\backslash^G \to D_n\left({}_N\backslash^G\right)$ 为一个 n–值映射，并令 $\bar{f}^* = (\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \ldots, \bar{f}_n^*): G \to F_n(G, N)$ 为 f.的一个提升然后我们称 f是一个仿射 n–值映射，如果每个 f_i^*都是 G.的仿射映射

备注 5.1。 f 为仿射的定义与所选提升 f^*无关，因为对于另一个提升 $\bar{f}^{*'} = (\bar{f}_1^{*'}, \bar{f}_2^{*'}, \ldots, \bar{f}_n^{*'})$，我们将有 $\bar{f}_i^{*'} = \alpha \bar{f}_j^*$对于某个 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 以及 $\alpha \in N$. 由于假设 f_j^*为仿射的，与左平移 α 的复合仍为仿射的。

备注 5.2。回顾一下，我们关注的是同伦意义下的映射（因为Reidemeister数和尼尔森数都是同伦不变量）。从这个角度来看，特别关注仿射的 n–值映射类是有意义的。事实上，众所周知，(infra-)幂零流形上的任意映射都同伦于一个仿射映射（见 [16]），并且也已知圆上的任意 n–值映射都同伦于一个仿射映射（[2]）。尽管不再是所有幂零流形上的 n值映射都同伦于一个仿射 n值映射，但对于非常大一类 n值映射而言，这一结论仍然成立；此外，仿射 n值映射也是一类非常自然、值得研究的映射。

从现在起，我们考虑一个仿射 n–值映射 $f: {}_N\backslash^G \to D_n\left({}_N\backslash^G\right)$ 并固定一个提升 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*): G \to F_n(G, N)$。因此存在 $g_i \in G$ 和 $\varphi_i \in \mathrm{End}(G)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$，使得 $f_i^*: G \to G: x \mapsto g_i\varphi_i(x)$。从现在起，我们将使用记号 $f_i^* = (g_i, \varphi_i)$。

回顾一下，所选的提升 f^*决定了一个态射 $\psi_f: N \to N^n \rtimes \Sigma_n$满足 $\psi_f(\gamma) = (\phi_1(\gamma)\ \phi_2(\gamma) \ldots, \phi_n(\gamma); \sigma_\gamma)$ 使得 $f_i^* \circ \gamma = \phi_i(\gamma) \circ f^*_{\sigma_\gamma^{-1}(i)}$.

现在固定一个 i，并考虑其稳定子

$$H\ (= S_i) = \{\gamma \in N | \sigma_\gamma(i) = i\} \leq_f N.$$

我们要计算 $R_i(f)$，因此必须考虑态射 $\phi_i: H \to N$. 。因此，从现在起， ϕ_i将扮演第 4 节中态射 ϕ的角色。我们仍用 $N_1, N_2, \ldots, N_c$表示 N 下中心列各项的隔离子，而因子上的诱导态射现在记作

$$(\phi_i)_l : \frac{H_l N_{l+1}}{N_{l+1}} \to \frac{N_l}{N_{l+1}}.$$

我们固定一个 Mal'cev基 $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{c,k_c}$，它与下中心列的隔离子相容，并像之前一样使用 $A_{p,q} = \log(a_{p,q})$。该 Mal'cev基的选择决定了一个同构 $\frac{N_l}{N_{l+1}} \cong \mathbb{Z}^{k_l}$，在此同构下， $\frac{H_l N_{l+1}}{N_{l+1}}$对应于 $B_l\mathbb{Z}^{k_l}$，这使我们能够将 $(\phi_i)_l$ 与态射对应

$$(\phi_i)_l : B_l\mathbb{Z}^{k_l} \to \mathbb{Z}^{k_l} : \vec{z} \mapsto M_l\vec{z}$$

for 某些 $M_l \in \mathbb{Q}^{k_l \times k_l}$. M_l 中第 p^{th} 行、第 q^{th} 列的元素记作 $m_{p,q}^{(l)}$.

如 $H \leq_f N$，我们知道 N 的 Malcev完备化 G 也是 H.的 Malcev完备化。因此，态射 $\phi_i: H \to N$ 唯一地延拓为态射 $\phi_i: G \to G$ （我们滥用记号，仍用同一符号表示）。 ϕ_i 与 φ_i.之间有着密切的关系。

引理 5.3。设 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$和 $f_i^* = (g_i, \varphi_i)$。则对于所有 $\gamma \in H = \{\gamma \in N | \sigma_\gamma(i) = i\}$，都有

$$\phi_i(\gamma) = g_i\varphi_i(\gamma)g_i^{-1}.$$

证明。对于所有 $\gamma \in N$，我们都有 $f_i^* \circ \gamma = \phi_i(\gamma) \circ f^*_{\sigma_\gamma^{-1}(i)}$，因此对于每个 $\gamma \in H$，这给出 $f_i^* \circ \gamma = \phi_i(\gamma) \circ f_i^*$. 这意味着 $g_i\varphi_i(\gamma x) = \phi_i(\gamma) g_i \varphi_i(x)$对所有 $x \in G$ 都成立，因此，由于 φ_i 是一个态射，$g_i\varphi_i(\gamma)\varphi_i(x) = \phi_i(\gamma) g_i \varphi_i(x)$。我们得到 $g_i\varphi_i(\gamma)g_i^{-1} = \phi_i(\gamma)$对所有 $\gamma \in H$都成立，因为 g_i 和 $\varphi_i(x)$ 是可逆的。 □

由于我们有唯一延拓 $\phi_i : G \to G$ 我们可以考虑其微分 $\phi_{i*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

定理 5.4。使用上述记号，我们得到 ϕ_{i*} 关于基 $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{c,k_c}$ 的矩阵表达式由如下形式的矩阵给出。

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & & 0 \\ * & M_2 & & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & * & \ldots & * & M_c \end{pmatrix}.$$

证明。由于 H 是 N 的有限指数子群，因此存在 N 中的有限指数正规子群 H_0，满足 $H_0 \leq H.$。如果 $m = [N : H_0]$，那么对于所有 $\gamma \in N.$，$\gamma^m \in H_0 \leq H$。令 $p \in \{1, 2, \ldots, c\}$ 和 $q \in \{1, 2, \ldots, k_p\}$，则 $\log(a_{p,q}^m) = mA_{p,q}$.

在同构 $N_p/N_{p+1} \cong \mathbb{Z}^{k_p}$ 下，元素 $\bar{a}_{p,q} = a_{p,q}N_{p+1}$ 对应于列向量$(0,0,\ldots,0,\underset{q}{1},0,\ldots,0)^T$，其中 1位于第 q^{th} 位。由此可得 $(\phi_i)_p(\bar{a}_{p,q}^m) = \bar{a}_{p,1}^{m \cdot m_{1,q}^{(p)}} \bar{a}_{p,2}^{m \cdot m_{2,q}^{(p)}} \cdots \bar{a}_{p,k_p}^{m \cdot m_{k_p,q}^{(p)}}$，因此存在元素 $n_{p+1} \in N_{p+1}$ 使得

$$\phi_i(a_{p,q}^m) = a_{p,1}^{m \cdot m_{1,q}^{(p)}} a_{p,2}^{m \cdot m_{2,q}^{(p)}} \cdots a_{p,k_p}^{m \cdot m_{k_p,q}^{(p)}} n_{p+1}.$$

这意味着，对于某个$x \in \gamma_{p+1}(\mathfrak{g})$，$\phi_{i*}(mA_{p,q}) = m(m_1^{(p)}, {}_qA_{p,1} + m_2^{(p)}, {}_qA_{p,2} + \cdots + m_{k_p}^{(p)}, {}_qA_{p,k_p})$，因此

$$\phi_{i*}(A_{p,q}) = m_{1,q}^{(p)} A_{p,1} + m_{2,q}^{(p)} A_{p,2} + \cdots + m_{k_p,q}^{(p)} A_{p,k_p} + x'$$

对于一个 $x' \in \gamma_{p+1}(\mathfrak{g})$。

□

定理 5.5。设 $N\backslash G$ 为幂零流形，$f : N\backslash G \to D_n\left(N\backslash G\right)$ 为一个仿射 $n-$值映射。选择一个基本提升 $f^* = (f_1^* = (g_1, \varphi_1)\ f_2^* = (g_2, \varphi_2)\ \ldots, f_n^* = (g_n, \varphi_n))$，其中 $g_i \in G$和$\varphi_i \in \mathrm{End}(G)$ 诱导一个态射 $\psi_f : N \to N^n \rtimes \Sigma_n$，满足 $\psi_f(\gamma) = (\phi_1(\gamma)\ \phi_2(\gamma)\ \ldots, \phi_n(\gamma); \sigma_\gamma)$。我们有，对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$R_i(f) = [N : S_i] \cdot |\det(I - \varphi_{i*})|_\infty$$

其中 $S_i = \{\gamma \in N \mid \sigma_\gamma(i) = i\}$ 和

$$R(f) = \sum_{i=1}^{n} |\det(I - \varphi_{i*})|_\infty.$$

在上述公式中，$\det(I - \varphi_{i*})$ 是通过使用 $\mathfrak{g}$ 的选定基下 φ_{i*} 的矩阵表示计算得出的。

证明。由于行列式 $\det(I - \varphi_{i*})$ 不依赖于向量空间$\mathfrak{g}$ 所选取的基，我们可以固定一个与下中心列的隔离子相容的 Mal'cev基 $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{c,k_c}$，并像之前一样使用$A_{i,j} = \log(a_{i,j})$作为 $\mathfrak{g}$ 的基。令 i 属于 $\{1, 2, \ldots, n\}$。如果我们记 con jug与一个元素的关系 $g \in G$ 作为 $\mu(g) : G \to G : x \mapsto$

$\mu(g)(x) = gxg^{-1}$，然后，根据引理5.3，态射 $\phi_i\colon\ G \to G$ 等于 $\phi_i = \mu(g_i) \circ \varphi_i$，因此$\varphi_i = \mu(g_i^{-1}) \circ \phi_i$. 由此可得 $\varphi_{i*} = \mu(g_i^{-1})_* \circ \phi_{i*}\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，因此 φ_{i*}关于基 $A_{1,\ 1}$，$A_{1,\ 2}$，…，$A_{c,\ k_c}$的矩阵表达式为

$$\begin{pmatrix} I_{k_1} & 0 & \dots & & 0 \\ * & I_{k_2} & & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & * & I_{k_c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & & 0 \\ * & M_2 & & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & * & M_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & & 0 \\ *' & M_2 & & & 0 \\ \vdots & *' & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ *' & *' & \dots & *' & M_c \end{pmatrix},$$

因为 g_i^{-1} 的共轭在每个因子 $\gamma_l(G)/\gamma_{l+1}(G)$上都诱导恒等映射。结合定理4.14，
这意味着

$$R_i(f) = [N : S_i] \cdot \left| \det\left(I - \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_c \end{pmatrix}\right)\right|_\infty = [N : S_i] \cdot \left| \det\left(I - \varphi_{i*}\right)\right|_\infty.$$

现在令 $f_{i_1}^*$、$f_{i_2}^*$、……、$f_{i_r}^*$ 为 $\sigma-$个 f^*. 类的代表元。正如第 2 节中所讨论的，我们得到

$$R(f) = \sum_{k=1}^{r} R_{i_k}(f) = \sum_{k=1}^{r} [N : S_{i_k}] \cdot \left| \det\left(I - \varphi_{i_k *}\right)\right|_\infty = \sum_{i=1}^{n} \left| \det\left(I - \varphi_{i*}\right)\right|_\infty,$$

其中，最后一个等式成立是因为指数 $[N\colon\ S_{i_k}]$ 等于$\sigma-$类中 i_k.的元素数量

□

6 仿射 n值映射的尼尔森数

为了计算一个 n值仿射映射 f的尼尔森数，我们将按照 Staecker 在 [23] 的第 4 节中所述的方法，将 f 分解为其不可约分支。设 $f\colon X \to D_n(X)$ 是一个n值映射。一个 m值映射 $g\colon X \to D_m(X)$（其中 $1 \le m \le n$）是 f 的子映射，当对于所有 $x \in X$，$g(x) \subseteq f(x)$时成立。若 f 不具有满足 $m < n$ 的 m值子映射，则称映射 f 是不可约的。
对于任意 n 值映射 $f\colon\ X \to D_n(X)$，都存在 r 个（除顺序外唯一的）不可约 n_i 值映射 $f_i\colon\ X \to D_{n_i}(X)$，满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$，其中某个 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得$f(x) = f_1(x) \cup f_2(x) \cup \cdots \cup f_r(x)$ 对所有 $x \in X$ 均成立。我们将 f_i 称为 f 的不可约分支。

令 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)\colon\ X \to F_n(X, \pi)$ 为 f的一个固定基本提升，它如前所述确定一个态射$\psi_f\colon\ \pi \to \pi^n \rtimes \Sigma_n\colon\ \gamma \mapsto \psi_f(\gamma) = (\phi_1(\gamma)\ \phi_2(\gamma) \dots, \phi_n(\gamma); \sigma_\gamma)$。回想一下，我们将提升因子 f_i^*划分为等价类，称为 $\sigma-$类，划分方式为令 $f_i^* \sim f_j^* \Leftrightarrow i \sim j \Leftrightarrow \exists \gamma \in \pi\colon \sigma_\gamma(j) = i$。当给定 f_i^* 的 $\sigma-$类为 $\{f_{j_1}^* = f_i^*, f_{j_2}^*, \dots, f_{j_m}^*\}$ 时，映射 $g\colon\ X \to D_m(X)\colon$ $x \mapsto \{p(f_{j_1}^*(\tilde{x}))\ p(f_{j_2}^*(\tilde{x})) \dots, p(f_{j_m}^*(\tilde{x}))\}$ 是一个定义良好的不可约 m 值映射，也是 f 的一个不可约分支；而 f 的所有不可约分支均可由此方式得到。因此，f 的不可约分支数等于 $\sigma-$类的数量。

注意，当 f_1、f_2、……、f_r 是 n值映射 $f\colon\ X \to D_n(X)$ 的不可约分支时，公式（2）现在也可以解释为

$$R(f) = R(f_1) + R(f_2) + \ldots + R(f_r).$$

我们还有以下结果。

命题6.1。（来自 *[23]* 的推论 4.7）设 $f\colon X \to D_n(X)$ 是一个 n 值映射，其不可约分支为 f_1、f_2 ……、f_r，则

$$N(f) = N(f_1) + N(f_2) + \cdots + N(f_r).$$

现在我们将其应用于幂零流形上的仿射 n 值映射。我们从以下观察开始。

引理 6.2. 设 $N\backslash G$ 是一个幂零流形，并设 $f\colon N\backslash G \to D_n\left(N\backslash G\right)$ 是一个仿射 $n-$ 值映射，其基本提升为 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$。若 $f_i^* = (g_i, \varphi_i)$ 和 $f_j^* = (g_j, \varphi_j)$ 属于同一个 $\sigma-$ 类，则 $\varphi_i = \varphi_j$.

证明。提升因子 f_i^* 和 f_j^* 属于同一个 $\sigma-$ 类，当且仅当存在一个 $\gamma \in N$ 使得 $\sigma_\gamma^{-1}(i) = j$. 对于元素 γ，有 $\bar{f}_i^* \circ \gamma = \phi_i(\gamma) \circ \bar{f}_j^*$. 令 $\gamma' = \phi_i(\gamma)$。那么对所有 $x \in G$，有 $(f_i^* \circ \gamma)(x) = (\gamma' \circ f_j^*)(x)$，因此 $g_i\varphi_i(\gamma x) = \gamma' g_j \varphi_j(x)$。取 $x = 1$，得到 $g_i\varphi_i(\gamma) = \gamma' g_j$. 由此可得 $g_i\varphi_i(\gamma x) = g_i\varphi_i(\gamma)\varphi_i(x) = \gamma' g_j \varphi_i(x)$，因此 $g_i\varphi_i(\gamma x) = \gamma' g_j \varphi_j(x)$ 可化为 $\gamma' g_j \varphi_i(x) = \gamma' g_j \varphi_j(x)$，由此可得，对所有 $x \in G$，$\varphi_i(x) = \varphi_j(x)$，因此 $\varphi_i = \varphi_j$. □

注记6.3。注意，当 f 是一个不可约仿射 n 值映射时，只有一个 σ–类，因此所有提升因子的线性部分 φ_i 都彼此相等，所以我们只需要一个端同态 $\varphi = \varphi_i \in \mathrm{End}(G)$即可。根据命题6.1，只要能够计算不可约仿射 n值映射的尼尔森数就足够了。为此，我们将根据线性部分的微分 φ_* 是否具有特征值 1，分两种情况进行讨论。

在我们之前 在开始考虑这两种情形时，我们再证明一个对二者都很有用的结果。

引理 6.4.设 G 为一个连通单连通幂零李群。假设 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$使得 $\varphi_* \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$不具有特征值 1。则映射 $\psi\colon G \to G\colon x \mapsto \varphi(x)x^{-1}$ 是双射。

证明。我们通过对 c 的幂零类进行归纳法来证明这一点。G. 若 $c = 1$，则 $G \cong \mathbb{R}^k$ 且 $\varphi = \varphi_*$. 在这种情况下，映射 ψ是 $\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$，由于 $\det(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}) \neq 0.$，它是双射。假设$c > 1$，并且当 G 的幂零类为 $c-1.$ 时，ψ 是双射。注意，$\varphi(\gamma_c(G)) \subseteq \gamma_c(G)$，因此 ψ 诱导出一个映射

$$\bar{\psi} : \frac{G}{\gamma_c(G)} \to \frac{G}{\gamma_c(G)} : x\gamma_c(G) \mapsto \varphi(x)x^{-1}\gamma_c(G).$$

事实上，ψ 是与该端同态相对应的映射

$$\bar{\varphi} : \frac{G}{\gamma_c(G)} \to \frac{G}{\gamma_c(G)} : x\gamma_c(G) \mapsto \varphi(x)\gamma_c(G)$$

因此，由于 $\bar{\varphi}_*$ 的特征值也不为 1，ψ 是双射。令 $\varphi' = \varphi|_{\gamma_c(G)}$，则$\varphi'(= \varphi'_*)$的特征值不为 1，并且也

$$\psi' : \gamma_c(G) \to \gamma_c(G) : x \mapsto \varphi'(x)x^{-1}$$

是双射。为证明 ψ的满射性，假设 $y \in G.$。于是存在一个 $x'\gamma_c(G)$，使得$\bar{\psi}(x'\gamma_c(G)) = y\gamma_c(G)$。这意味着，对于某个 $z \in \gamma_c(G)$，有 $\varphi(x')x'^{-1} = yz$。由于 ψ' 是双射，存在一个 $z_1 \in \gamma_c(G)$，满足 $\varphi(z_1)z_1^{-1} = z^{-1}.$。由于 z_1，$\varphi(z_1) \in \gamma_c(G) \subseteq Z(G)$，我们有

$$\varphi(x'z_1)(x'z_1)^{-1} = \varphi(x')x'^{-1}\varphi(z_1)z_1^{-1} = yzz^{-1} = y.$$

因此，对于 $x = x'z_1$，我们有 $\psi(x) = y$，这表明 ψ 是满射。为证明 ψ的单射性，假设 $\psi(x) = \psi(y)$。那么 $\varphi(x)x^{-1} = \varphi(y)y^{-1}$，因此 $\varphi(x)x^{-1}\gamma_c(G) = \varphi(y)y^{-1}\gamma_c(G)$。由于 $\bar{\psi}$是双射，因此可得 $x\gamma_c(G) = y\gamma_c(G)$，从而对于某个 $z \in \gamma_c(G)$，有 $x = yz$。但是

$$\varphi(x)x^{-1} = \varphi(yz)(yz)^{-1} = \varphi(y)y^{-1}\varphi(z)z^{-1} = \varphi(x)x^{-1}\varphi(z)z^{-1},$$

这意味着 $\varphi(z)z^{-1} = 1.$。由此可得 $z = 1$，因为 ψ' 是双射，因此$x = y$，这正是我们要证明的。

□

6.1 在 φ_* 具有特征值 1 的情况下的 Nielsen 数

在本小节中，我们将证明 f 与一个没有不动点的 n-值映射同伦，由此可以得出 $N(f) = 0$。

引理 6.5. 设 l为一个正整数。对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$，设 $h_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是一个映射。那么存在一个 $\epsilon \in \mathbb{R}$，使得

$$h_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \epsilon \neq 0$$

对所有 z_1、z_2、...、$z_n \in \mathbb{Z}$以及所有 $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

证明. 集合

$$A = \bigcup_{i=1}^{l} \{h_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) | z_j \in \mathbb{Z}\}$$

是可数的，因此存在一个 $r \in \mathbb{R}$，使得 $r \notin A.$。设 $\epsilon = -r.$。若存在一个$i \in \{1, 2, \ldots, l\}$以及 z_1、z_2、...、$z_n \in \mathbb{Z}$，满足 $h_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \epsilon = 0$，则 $h_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = r$，因此 $r \in A$，矛盾。因此，我们找到了一个 $\epsilon \in \mathbb{R}$，使得对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$以及所有 z_1、z_2、...、$z_n \in \mathbb{Z}$：

$$h_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \epsilon \neq 0.$$

□

引理6.6.设 G 是一个连通且单连通的 c-步幂零李群。设 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$，其中 φ_*具有特征值 1。设 N是 G的一个格，并且 g_1、g_2、.....、$g_n \in G.$则存在一个 $\alpha \in G$，使得 $g_k\varphi(x)\alpha \neq \gamma x$对所有 $x \in G$、$\gamma \in N$以及 $k = 1$、2、.....、n.

证明。设$a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{c,k_c}$是通常所说的 Mal'cev基，并像之前一样用矩阵 M_i 表示在 $\gamma_i(\mathfrak{g})/\gamma_{i+1}(\mathfrak{g})$上的诱导端同态。由于 φ_* 有特征值 1，因此存在一个特征值为 1 的矩阵 M_i。设 r 为满足 M_r 有特征值 1 的最小指数。不失一般性，我们可以假设 $r = c$，因为我们可以证明 $\gamma_{r+1}^{G}(G)$ 的引理，进而得到 $G.$。因此我们假设 G 是 c 步幂零的，M_c 有特征值 1，而对于 $1 \leq i \leq c-1$，M_i 没有特征值 1。由于 $\gamma_c(G) \cong \mathbb{R}^{k_c}$，我们可以找到 $\mathbb{R}^{k_c}$ 的一个向量空间基 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k_c}\}$，使得 φ_c 的矩阵表示具有如下形式

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & * \end{array}\right)$$

关于此基。令 $V = \mathrm{span}\{v_1\}$ 和 $U = \mathrm{span}\{v_2, v_3, \ldots, v_{k_c}\}$，则 U 和 V 是 $\gamma_c(G)$ 的子群，因而也是 G 的子群，所以我们将继续使用乘法记号。我们得到 $\gamma_c(G) = VU$ 以及 $V = \{v_1^r | r \in \mathbb{R}\}.$。注意，根据基的选取，我们有 $\varphi(v_1) = \varphi_c(v_1) = v_1 u$，其中某个 u 属于 U，并且 $\varphi(u) = \varphi_c(u) \subseteq U.$。我们声称，通过适当地选择 ϵ，可以取$\alpha = v_1^{\epsilon}.$。设$x = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_c^{x_c}$、$\gamma = a_1^{z_1} a_2^{z_2} \cdots a_c^{z_c}$和 k 满足 $g_k\varphi(x)v_1^{\epsilon} = \gamma x.$。然后，考虑模 $\gamma_c(G)$ 的方程，可得 $\bar{g}_k\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\gamma}\bar{x}.$。由此可知

$$\bar{\varphi}(\bar{x})\bar{x}^{-1} = \bar{g}_k^{-1}\bar{\gamma}. \tag{10}$$

由引理 6.4 可知，$\bar{x} = \bar{a}_1^{x_1}\bar{a}_2^{x_2} \cdots \bar{a}_{c-1}^{x_{c-1}}$由 $\bar{g}_k$和 $\bar{\gamma}$唯一确定。因此，x_1、x_2、.....、x_{c-1}由 k和 z_1、z_2、.....、$z_{c-1}.$唯一确定。这意味着 $x' = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_{c-1}^{x_{c-1}}$由 k和 z_1、z_2、.....、z_{c-1}以及$x = x' a_c^{x_c}.$唯一确定。我们可以将$a_c^{x_c}$写作$a_c^{x_c} = v_1^{\alpha_1} u_1$，其中 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ 且 $u_1 \in U.$。现在，由 (10) 可得 $\varphi(x')x'^{-1} = g_k^{-1}\gamma v_1^{\alpha_2} u_2$，其中 $\alpha_2 \in \mathbb{R}$且 $u_2 \in U.$。还要注意，现在 α_2也完全由 k和 z_1、z_2、.....、z_c确定，因为 x'是如此。因此，对于某个映射 $h_k\colon \mathbb{R}^{k_1+k_2+\cdots+k_c} \to \mathbb{R}.$，有 $\alpha_2 = h_k(z_1, z_2, \ldots, z_c)$。现在，方程 $g_k\varphi(x)v_1^{\epsilon} = \gamma x$可以写成

$$g_k\varphi(x' v_1^{\alpha_1} u_1)v_1^{\epsilon} = \gamma x' v_1^{\alpha_1} u_1. \tag{11}$$

注意，对于某个 $u_3 \in U$， $\varphi(v_1^{\alpha_1}u_1)= v_1^{\alpha_1}u_3$，因此 (11) 可写为

$$\begin{aligned}
& g_k\varphi(x')v_1^{\alpha_1}u_3v_1^{\epsilon} = \gamma x' v_1^{\alpha_1}u_1 \\
\iff & \varphi(x')x'^{-1} = g_k^{-1}\gamma v_1^{-\epsilon}u_4 \text{ for some } u_4 \in U \\
\iff & g_k^{-1}\gamma v_1^{\alpha_2}u_2 = g_k^{-1}\gamma v_1^{-\epsilon}u_4 \\
\iff & v_1^{\alpha_2}u_2 = v_1^{-\epsilon}u_4 \\
\iff & v_1^{h_k(z_1,z_2,\ldots,z_c)}u_2 = v_1^{-\epsilon}u_4.
\end{aligned}$$

由引理 6.5 可知，我们可以选择 ϵ，使得以下方程均不成立： $h_k(z_1,\ldots,z_c) + \epsilon = 0$ 得到满足，这就证明了引理。 □

定理6.7.设 $f: {}_N\backslash G \to D_n\left({}_N\backslash G\right)$ 是一个具有基本提升 $f^* = (g_1\varphi, g_2\varphi, \ldots, g_n\varphi)$ 的不可约仿射 n–值映射，其中 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ 以及 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。如果 φ_* 具有特征值 1，则 $N(f) = 0$.

证明。应用引理 6.6 可得一个元素 $\alpha \in G$，使得对于所有 $x \in G$ 和 $\gamma \in N$，均有红黑大战

$$g_1\varphi(x)\alpha \neq \gamma x, g_2\varphi(x)\alpha \neq \gamma x, \ldots, g_n\varphi(x)\alpha \neq \gamma x. \tag{12}$$

定义

$$\bar{g}^* : G \to G^n : x \mapsto \left(g_1\varphi(x)\alpha, g_2\varphi(x)\alpha, \ldots, g_n\varphi(x)\alpha\right).$$

由于我们知道 $\bar{f}^*(x) = \left(g_1\varphi(x)\ g_2\varphi(x)\ldots, g_n\varphi(x)\right) \in F_n(G,N)$，很容易推出同样有 $\bar{g}^*(x) \in F_n(G,N)$，因此我们将把 $\bar{g}^*$ 视为从 G 到 $F_n(G,N)$ 的映射。令 $\gamma \in N$ 和 $x \in X$. 利用(1)，我们得到

$$\begin{aligned}
\bar{g}^*(\gamma x) &= \left(\bar{f}_1^*(\gamma x)\alpha, \bar{f}_2^*(\gamma x)\alpha, \ldots, \bar{f}_n^*(\gamma x)\alpha\right) \\
&= \left(\phi_1(\gamma)\bar{f}^*_{\sigma_\gamma^{-1}(1)}(x)\alpha, \phi_2(\gamma)\bar{f}^*_{\sigma_\gamma^{-1}(2)}(x)\alpha, \ldots, \phi_n(\gamma)\bar{f}^*_{\sigma_\gamma^{-1}(n)}(x)\alpha\right) \\
&= \psi_f(\gamma)\bar{g}^*(x).
\end{aligned}$$

由此可知，$\bar{g}^*$ 是良定义的 n 值映射 $g: {}_N\backslash G \to D_n\left({}_N\backslash G\right)$. 的基本提升。由于 (12)，映射 g 没有不动点。映射 f^* 和 $\bar{g}^*$ 同伦，因为

$$\bar{F}^* : G \times [0,1] \to F_n(G,N) : (x,t) \mapsto \left(g_1\varphi(x)\alpha^t, g_2\varphi(x)\alpha^t, \ldots, g_n\varphi(x)\alpha^t\right).$$

这个同伦在 f 和 g 之间诱导出一个同伦。由于 g 没有不动点， $N(g) = 0$，因此 $N(f) = 0$. □

注 6.8. 对于上一条定理中的 n 值仿射映射 f，我们有

$$R(f) = \sum_{i=1}^{n} \left|\det\left(I - \varphi_*\right)\right|_\infty = n\left|\det\left(I - \varphi_*\right)\right|_\infty = \infty.$$

因此， f 有无穷多个不动点类，且它们的指数均为 0。

6.2 在 φ_* 不具有特征值 1 的情况下的尼尔森数

在这种情况下，我们要证明每个不动点类都只包含一个不动点，且其指数非零。

引理6.9. 设 $f: {}_N\backslash G \to D_n\left({}_N\backslash G\right)$ 是一个不可约仿射 n– 值映射，其基本提升为 $f^* = (g_1\varphi, g_2\varphi, \ldots, g_n\varphi)$，其中 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ 且 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。如果 φ_* 没有特征值 1，则 f 的每个不动点类都只包含一个点。

证明. f 的任意提升因子都具有 $\gamma g_i\varphi$ 的形式，其中某个 $\gamma \in N$ 以及某个 $i = 1, 2, \ldots, n$。相应的不动点类为 $p\mathrm{Fix}(\gamma g_i\varphi)$。只需证明 $\mathrm{Fix}(\gamma g_i\varphi)$ 是单点集。注意，当且仅当 $\varphi(x)$ $x^{-1} = g_i^{-1}\gamma^{-1}$ 时， $x \in \mathrm{Fix}(\gamma g_i\varphi)$。由引理6.4，存在唯一这样的 $x \in G$。 □

现在我们证明，此类不动点类的指数永远不为 0。

引理6.10. 设 $f: {}_N\backslash^G \to D_n\left({}_N\backslash^G\right)$ 是一个不可约仿射 n–值映射，其基本提升 $_f^* = (g_1\varphi, g_2\varphi, \ldots, g_n\varphi)$，其中 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ 以及 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。如果 φ_* 没有特征值 1，那么 f 的每个不动点类的指数为 ± 1。

证明。与前一个引理一样，不动点类由一个提升因子确定，其形式为 $\gamma g_i\varphi$。对应的不动点类 f 的指数与映射 $\gamma g_i\varphi: G \to G$ 的唯一不动点的指数相同，该映射由 Schirmer 在 [19] 的第 210 页定义。与第 3 节一样，利用 Malcev 坐标，我们通过 $G \to \mathbb{R}^K: a_1^{x_1}a_2^{x_2}\ldots a_c^{x_c} \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_c)$ 将 G 识别为 $\mathbb{R}^K$ （其中 $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_c$），其中 $x_i \in \mathbb{R}^{k_i}$。回顾一下，Malcev 坐标还给出了同构 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) \to \mathbb{R}^{k_i}$，而 φ 在 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 上诱导的端同态由矩阵 M_i 表示。现在令 $\gamma g_i = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_c^{\alpha_c}$，由定理 3.2 可知，我们可以将映射 $\gamma g_i\varphi: G \to G$ 看作从 $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ 出发的映射，它将 $(x_1, x_2, \ldots, x_c)$ 映射到

$$(\alpha_1 + M_1x_1, \alpha_2 + M_2x_2 + q_2(x_1), \ldots, \alpha_c + M_cx_c + q_c(x_1, x_2, \ldots, x_{c-1})),$$

其中 $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ 是一个关于变量 $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$（以及 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ 和 $M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}$）的多项式。现在令 $x_0 \in \mathbb{R}^K$ 为该映射的唯一不动点。为了证明该不动点的指数非零，我们可以考察该映射在点 x_0 处的雅可比矩阵 J_{x_0}。这个雅可比矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & & 0 \\ * & M_2 & & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & * & \ldots & * & M_c \end{pmatrix}.$$

注意， φ_* 也具有这种形式，其对角线上恰好是相同的块 M_i （但对角线下方的项不同）。由于我们假设 1 不是 φ_* 的特征值，因此 1 也不是 J_{x_0} 的特征值，从而得到

$$\det\left(I - \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & & 0 \\ * & M_2 & & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & * & \ldots & * & M_c \end{pmatrix}\right) \neq 0.$$

由 [14], 第 12 页可知，指数等于上述行列式的符号，因此等于 ± 1。 □

备注 6.11。请注意，在上述引理中，雅可比矩阵块对角线上出现的 M_i 对所有提升因子都相同。这意味着不动点类的指数要么全部等于 1，要么全部等于 -1。

定理 6.12. 设 $f: {}_N\backslash^G \to D_n\left({}_N\backslash^G\right)$ 是一个不可约的仿射 n–值映射，其基本提升为 $_f^* = (g_1\varphi, g_2\varphi, \ldots, g_n\varphi)$，其中 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ 且 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。若 φ_* 没有特征值 1，则 $N(f) = n\left|\det\left(I - \varphi_*\right)\right|$.

证明。确实，存在

$$R(f)=\sum_{i=1}^{n}\left|\det\left(I-\varphi_*\right)\right|_{\infty}=n\left|\det\left(I-\varphi_*\right)\right|$$

不动点类的指数均为 ±1，因此它们都是本质的。由此可得，在这种情况下， $N(f)=R(f)=n\left|\det\left(I-\varphi_*\right)\right|$。□

6.3 一般情形

现在我们可以证明本文的主要结果了，该结果推广了 Anosov 关于计算幂零流形上单值映射的尼尔森数的著名公式。

定理 6.13. 设 $f: N\backslash^{G}\to D_n\left(N\backslash^{G}\right)$ 是一个仿射 $n-$值映射，其基本提升为 $\bar{f}^*=(g_1\varphi_1,g_2\varphi_2,\ldots,g_n\varphi_n)$，其中 $g_1,g_2,\ldots,g_n\in G$ 和 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\in$ 属于 End(G)。那么

$$R(f)=\sum_{i=1}^{n}\left|\det\left(I-\varphi_{i*}\right)\right|_{\infty}\ and\ N(f)=\sum_{i=1}^{n}\left|\det\left(I-\varphi_{i*}\right)\right|.$$

当 $R(f)<\infty$ 时， $R(f)=N(f)$】【。

证明。Reidemeister 数的公式已在定理 5.5 中得到，因此我们只需证明尼尔森数的公式。

通过将 f 分解为其不可约分支 f_1、 f_2、……、 f_r，并利用 $N(f)=N(f_1)+N(f_2)+\cdots+N(f_r)$ 这一事实，只需证明 f 不可约时的这个定理。注意在这种情况下，我们有 $\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_n$。

在 φ_{1*} 具有特征值 1的情况下，根据定理 6.7，我们知道 $N(f)=0$，但由于每一项都是0，我们也有 $\sum_{i=1}^{n}\left|\det\left(I-\varphi_{i*}\right)\right|=0$。在另一种情况下，定理 6.12 告诉我们，$N(f)=n\left|\det\left(I-\varphi_{1*}\right)\right|$，但由于所有 φ_i都相同，这也等于 $\sum_{i=1}^{n}\left|\det\left(I-\varphi_{i*}\right)\right|$。现在， $R(f)<\infty\Rightarrow R(f)=N(f)$ 的断言显然成立。

□

我们用一些例子来说明所得公式。 [3] 的第 4 节专门讨论环面上的 $3-$ 值映射的里德迈斯特数和尼尔森数的计算

$$f:T^2\multimap T^2:p(t,s)\mapsto\left\{p(\frac{t}{2},-s),p(\frac{t+1}{2},-s),p(-t,-s+\frac{1}{2})\right\}$$

$T^2=\mathbb{Z}^2\backslash^{\mathbb{R}^2}$，其中 p: $\mathbb{R}^2\to T^2$是万有覆盖空间。 f所选取的基本提升为 $\bar{f}^*=(\bar{f}_1^*,\bar{f}_2^*,\bar{f}_3^*):\mathbb{R}^2\to F_3(\mathbb{R}^2,\mathbb{Z}^2)$，其中映射 $\bar{f}_i^*$: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2(i=1,2,3)$ 定义如下

$$\begin{aligned}\bar{f}_1^*(t,s)&=(\frac{t}{2},-s),\\ \bar{f}_2^*(t,s)&=(\frac{t+1}{2},-s),\\ \bar{f}_3^*(t,s)&=(-t,-s+\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

映射 f 有六个不动点:

$$p(0,0),\ p(0,\frac{1}{2}),\ p(0,\frac{1}{4}),\ p(0,\frac{3}{4}),\ p(\frac{1}{2},\frac{1}{4}),\ p(\frac{1}{2},\frac{3}{4}).$$

在 [3] 中，我们已经发现 $R(f)=6$ （事实上，这是通过使用公式 (2) 得出的），并且我们还论证了在这种情况下尼尔森数也恰好相同： $N(f)=6$.现在我们

可以再次利用上述定理轻松计算出这些数。采用定理 6.13 中的记号，我们将仿射提升因子记为

$$\bar{f}_1^* = \left(g_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \varphi_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right),\ \bar{f}_2^* = \left(g_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$$
$$\text{and } \bar{f}_3^* = \left(g_3 = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right).$$

由于 $G = \mathbb{R}^2$，对于 $i = 1$、2、3， $\varphi_i = \varphi_{i*}$ 成立，因此我们得到

$$\sum_{i=1}^{3}\left|\det\left(I - \varphi_{i*}\right)\right|_\infty$$
$$= \left|\det\left(I - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)\right|_\infty + \left|\det\left(I - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)\right|_\infty + \left|\det\left(I - \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)\right|_\infty.$$

由此得到 $1+1+4=6$，这确实等于之前计算出的Reidemeister数 $R(f)$。由于 $R(f) < \infty$，定理 6.13意味着 $N(f) = R(f) = 6$，这再次与 [3]中计算出的尼尔森数相一致。对第三个分量中的映射 f 进行略微修改，我们得到另一个例子。考虑这个 3–值映射

$$g : T^2 \multimap T^2 : p(t,s) \mapsto \left\{p(\frac{t}{2}, -s), p(\frac{t+1}{2}, -s), p(t, -s+\frac{1}{2})\right\}$$

基本提升 $\bar{g}^* = (\bar{g}_1^*, \bar{g}_2^*, \bar{g}_3^*) : \mathbb{R}^2 \to F_3(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2)$，其中映射 $\bar{g}_i^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ (i = 1, 2, 3)$ 定义为

$$\bar{g}_1^*(t,s) = (\frac{t}{2}, -s),$$
$$\bar{g}_2^*(t,s) = (\frac{t+1}{2}, -s),$$
$$\bar{g}_3^*(t,s) = (t, -s+\frac{1}{2}).$$

该映射 g 有无穷多个不动点:

$$p(0,0),\ p(0,\frac{1}{2}) \text{ and } p(t,\frac{1}{4}),\ p(t,\frac{3}{4}) \text{ for } t \in \mathbb{R}.$$

对于映射 g，我们有

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \text{ and } \varphi_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

我们计算

$$\sum_{i=1}^{3}\left|\det\left(I - \varphi_{i*}\right)\right|_\infty$$
$$= \left|\det\left(I - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)\right|_\infty + \left|\det\left(I - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)\right|_\infty + \left|\det\left(I - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)\right|_\infty,$$

这意味着 $R(g) = |1|_\infty + |1|_\infty + |0|_\infty = 1 + 1 + \infty = \infty$。另一方面，对于 Nielsen 数，我们得到 $N(g) = |1| + |1| + |0| = 2.$。注意，本质不动点类为$\{p(0,0)\}$ 和 $\{p(0, \frac{1}{2})\}$。

参考文献

[1] Anosov, D. V.，《幂零流形上映射的 Nielsen 数》，Uspekhi Mat. Nauk 40, 4(244), 133 - 134 (1985)。[2] Brown, R.，《圆的 n 值多值映射的不动点》，Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 54, 2, 153 - 162 (2006)。[3] Brown, R., Deconinck, C., Dekimpe, K. 和 Staecker, P. C.，《 n 值映射的不动点理论中的提升类》，Topol. Appl. 274, 107125 (2020)。[4] Brown, R. 和 Gon˙calves, D.，《关于 n 值映射的拓扑》，Adv. Fixed Point Theory 8, 205 - 220 (2018)。[5] Corwin, L. G. 和 Greenleaf F. P.，《幂零李群的表示及其应用。第一部分》，剑桥高级数学研究丛书 18，剑桥大学出版社 (1990)。[6] Dekimpe, K.，《几乎幂零流形与几乎 Bieberbach 群使用指南》，《群作用手册》第 III 卷，Adv. Lect. Math. 40，Int. Press of Boston，215 - 262 (2018)。[7] Dekimpe, K.，《几乎 Bieberbach 群：仿射与多项式结构》，Springer (1996)。[8] Der´e, J. 和 Pengitore, M.，《幂零群的有效扭共轭可分性》，Math. Z. 292, 3 - 4, 763 - 790 (2019)。[9] Fadell, E. 和 Husseini, S.，《关于 Anosov 关于幂零流形 Nielsen 数的一个定理》，《非线性泛函分析及其应用》（Maratea, 1985），NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. 173，Reidel，47 - 53 (1986)。[10] Fel'shtyn, A., Gon˙calves, D. 和 Wong, P.，《多自由群的扭共轭类》，《代数通讯》42, 1, 130 - 138 (2014)。[11] Gon˙calves, D. 和 Wong, P.，《幂零群中的扭共轭类》，《纯粹与应用数学杂志》633, 11 - 27 (2009)。[12] Jezierski, J. 和 Marzantowicz, W.，《拓扑不动点与周期点理论中的同伦方法》，《拓扑不动点理论及其应用》3，Springer (2006)。[13] Jiang, B.，《尼尔森不动点理论入门》，《拓扑不动点理论手册》，Springer，617 - 645 (2005)。[14] Jiang, B.，《尼尔森不动点理论讲义》，《当代数学》14 (1983)。[15] Kiang, T.，《不动点类理论》，施普林格出版社 (1989)。[16] Lee, K. B.，《几乎幂零流形上的映射》，Pacific J. Math. 168, 1, 157 - 166 (1995)。[17] Malcev, A. I.，《一类齐性空间》，Amer. Math. Soc. Translation 39 (1951)。[18] Mitra, O. 和 Sankaran, P.，《有限域上的多项式代数上 GL_2 和 SL_2 中的扭共轭》，Geom. Dedicata 216, 2 (2022)。[19] Schirmer, H.，《 n 值多值函数的指数与 Nielsen 数》，Fund. Math. 121, 201 - 219 (1984)。[20] Schirmer, H.，《 n 值多值函数的定点有限逼近》，Fund. Math. 121, 1, 73 - 80 (1984)。[21] Segal, D.，《多循环群》，剑桥数学专著 82，剑桥大学出版社 (1983)。

[22] Senden,P.，《群的直积中的扭曲共轭》，《代数通讯》49，12，5402-5422（2021）。
[23] Staecker,P. C.，n–值映射的划分，arXiv:2101.09326 [math.GN]（2021）。[24] Wecken, F.，《不动点类》III.《不动点的最小数》，《数学年刊》118，544- 577（1942）。
[25] Xicot´encatl,M.，《轨道构形空间》，《当代数学》621，113 - 132（2014）。