arXiv:2304.04444v1 [gr-qc] 10 Apr 2023

有界曲率下的强宇宙审查猜想

莫里茨·赖因特耶斯

2023年4月10日

摘要。本文提出一个较弱版本的彭罗斯备受关注的强宇宙审查（SCC）猜想，该猜想断言，极大柯西发展无法通过具有利普希茨连续洛伦兹度量且黎曼曲率在 L^p中有界的流形加以延拓。利普希茨连续性是因果结构的临界正则性，而曲率界排除了无限大的潮汐加速度，这说明了这一较弱 SCC 猜想的物理意义。本文的主要结果是在不存在具有更高联络正则性的延拓这一假设下 $W^{1,\,p}{}_{\text{局部}}$ 证明了，当 p 足够大时，这一有界曲率下的 SCC 猜想成立（$p > 4$ 具有一致有界性，$p > 2$ 不具有一致有界性）。

1. 引言

本文提出并探讨彭罗斯强宇宙审查（SCC）猜想的一种较弱形式，并要求曲率有界。为此，我们考察广义相对论爱因斯坦方程的解

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

其中，$g_{\mu\nu}$ 是时空上的洛伦兹度量，$R_{\mu\nu}$ 是其里奇张量，R 是其标量曲率，$T_{\mu\nu}$ 是物质场的能动张量，$\Lambda \in \mathbb{R}$是宇宙学常数 [10]。我们首先陈述彭罗斯最初提出的强宇宙审查猜想 [22], ，该猜想在过去25年中一直是众多研究的主题（见 [2, 7, 9, 32, 4, 5, 20, 12, 13, 18, 21, 8] 及其中的参考文献）。

猜想 1.1。（彭罗斯的 SSC 猜想）
对于一般的紧致、渐近平坦或渐近反德西特初始数据，式 (1.1) 的极大柯西发展作为带有洛伦兹度量的流形，在 C^0中不可延拓。

确定数据的合适“普遍性”概念（超越不存在对称性）本身就是问题的一部分；Kehle 最近的工作表明，SSC 猜想是否成立可能取决于所采用的普遍性概念 [18]。就本文而言，我们可以暂不明确数据的普遍性概念，也无需具体说明（1.1）中的物质场。下文将紧致、渐近平坦或渐近反德西特的普遍数据统称为普遍数据。

香港城市大学数学系，香港特别行政区 电子邮箱：moritzreintjes@gmail.com。

Dafermos 和 Luk 最近在 $\Lambda \geq 0$ 情形下，在假设外部 Kerr 时空稳定的条件下 [8], 否证了猜想 1.1。以下由 Christodoulou 提出的 Penrose SSC 猜想的较弱形式 [3], 仍未解决。

猜想 1.2。（Christodoulou 的强宇宙监督猜想）对于一般数据，方程 (1.1) 的极大柯西发展作为带有 C^0 洛伦兹度量和度量联络 Γ、局部属于 L^2 的流形是不可延拓的。

猜想 1.2 的 $W^{1,\ 2}$ 度量正则性，是能够引入爱因斯坦方程弱解的最低正则性，因此作为延拓具有物理意义所需的正则性下限，是有充分依据的。本文提出猜想 1.1 和 1.2 的以下较弱形式，讨论满足有界曲率条件的 Lipschitz 连续（$C^{0,\ 1}$）洛伦兹度量。

猜想 1.3。（带 L^p 曲率界的 SSC 猜想）
对于一般数据，(1.1) 的极大柯西发展作为一个具有 $C^{0,1}$ 洛伦兹度量且黎曼曲率局部属于 $L^p, p \geq 2$ 的流形是不可延拓的。

猜想 1.3 可视为建立猜想 1.1 或 1.2 的中间步骤。然而，猜想 1.3 也提出了这样一种可能性：适当的曲率界可作为判断极大柯西发展的延拓是否具有物理相关性的标准；需要注意的是，根据测地线偏离的雅可比方程，有界的黎曼曲率 L^∞ 可排除无限大的潮汐加速度。此外，Chruciel 和 Grant 已证明，洛伦兹度量的 Lipschitz 连续性是因果结构得以良好定义所需的最低正则性 [6,定理 1.20], ，因此洛伦兹度量的 Lipschitz 连续性可视为具有物理意义的正则性门槛。本文的主要结果（下文的定理 2.1 和 2.2）为肯定地证明猜想 1.3 提供了一步，并可用非技术性的方式概括如下：

主要结果（非技术性表述）。假设方程 (1.1) 的极大柯西发展$\mathcal{M}$ 作为一个带有度量联络 Γ、在 $W^{1,p}$中局部具有某种性质的洛伦兹流形是不可延拓的，其中 $p > 2$为某个参数。那么，根据定理 2.1， $\mathcal{M}$ 作为一个在 $C^{0,1}$ 中具有洛伦兹度量且黎曼曲率在 L^p中局部有界的流形，也是不可延拓的。此外，根据定理 2.2，在假设不存在具有一致 $W^{1,p}$ 联络界的延拓的情况下，具有度量一致 $C^{0,1}$ 界以及曲率一致 L^p 界的“通用”延拓族将被排除， $p > 4$。

由于证明更高正则性下的不可延拓性更为可行 [21], ，本文的结果为验证猜想 1.3 提供了关键一步。由于 $W^{1,p}$ 在 $p \geq 2$ 的有界区域上包含于 $W^{1,2}$ ，定理 2.1 和 2.2 可以很容易地与基于 L^2 的索博列夫空间的柯西问题相关结果结合起来；这些结果处于最低正则性的前沿 [19], ，符合我们所采用的假设。定理 2.1 和 2.2 的证明（见第 4 节）基于 Blake Temple 和我关于洛伦兹几何的最优正则性结果 [29], （见第 3 节）。

2. 结果陈述

设 $\mathcal{O}$ 为某个一般数据的开集。$\mathcal{O}$ 中的每个数据都是一对由黎曼度量 h_θ 和对称 (0, 2) 张量 K_θ [1] 组成的元组，为简洁起见，我们将其表示为 $\theta \in \mathcal{O}$。对于每个数据 $\theta \in \mathcal{O}$，我们考虑爱因斯坦方程 (1.1) 的极大柯西发展 $(\mathcal{M}_\theta, g_\theta)$，它是一个配备洛伦兹度量 g_θ 的四维流形 $\mathcal{M}_\theta$，且该度量满足 (1.1)。我们始终假设度量 g_θ 在覆盖 $\mathcal{M}_\theta$ 的每个坐标图中局部属于 $W^{2,\,p}$，其中 $p \geq 2$。我们将 $(\mathcal{M}_\theta, g_\theta)$ 的延拓记为 $(\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}, g_\theta)$。

为陈述我们的主要定理，我们现在引入所谓的泡延拓。也就是说，我们假设每个延拓 $(\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}, g_\theta)$ 都是一个赋有洛伦兹度量 g_θ 的流形 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}$，使得 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}} \setminus \mathring{\mathcal{M}}_\theta$ 可由 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}$ 的单个坐标图 $(\Omega_\theta, x_\theta^\mu)$ 覆盖。进一步假设，可以将所有这类坐标图 Ω_θ 识别为某个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$（有界且边界光滑），其上给定了一个坐标系 x^μ；并假设可以将所有坐标 x_θ^μ 识别为 x^μ。我们将每个这样的延拓 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}$ 称为泡延拓，将 $\left(\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}\right)_{\theta\in\mathcal{O}}$ 称为一组泡延拓。现在陈述本文的两个主要结果。

定理 2.1. 设 $(\mathcal{M}_\theta, g_\theta)$ 是某个 $\theta \in \mathcal{O}$ 的极大柯西发展。假设 $\mathcal{M}_\theta$ 不可延拓，其含义是不存在具有联络 $\Gamma_\theta \in W^{1,\,p}(\Omega)$（其中某个 $p > 2$）的泡延拓。则不存在这样的泡延拓 $\mathcal{M}_\theta^{ext}$：其具有 H¨older 连续的洛伦兹度量 $g_\theta \in C^{0,\,\alpha}(\Omega)$、($\alpha = 1 - \frac{2}{p}$)、度量联络 $\Gamma_\theta \in L^{2p}(\Omega)$，以及黎曼曲率 $\text{Riem}(\Gamma_\theta) \in L^p(\Omega)$。

定理 2.1 的初始假设相当强，而且对于内 Kerr 时空 [15] 确实不成立。因此，更值得考虑的是一族对一般数据 $\mathcal{O}$ 的延拓，其度量满足与 $\theta \in \mathcal{O}$ 无关的一致有界性。我们对定理 2.1 的改进建立了此类一致有界性，但需要更强的假设，即 $p > 4$，并由此推出度量为 Lipschitz 连续且具有 L^p 有界曲率时的不可延拓性。

定理 2.2. 考虑一组一般数据 $\mathcal{O}$，对每个 $\theta \in \mathcal{O}$，其最大柯西发展为 $(\mathcal{M}_\theta, g_\theta)$。假设这些柯西发展 $\mathcal{M}_\theta$ 在以下意义下不可延拓：不存在一组气泡延拓，其联络为$\Gamma_\theta \in W^{1,\,p}(\Omega)$，其中某个 $p > 4$ 满足一致有界性

$$\|\Gamma_\theta\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C, \tag{2.1}$$

对所有 $\theta \in \mathcal{O}$，存在某个与 $\theta \in \mathcal{O}$ 无关的常数 $C > 0$。那么，不存在一组气泡延拓 $\left(\mathcal{M}_\theta^{ext}, g_\theta\right)_{\theta\in\mathcal{O}}$，其洛伦兹度量为 $g_\theta \in C^{0,\,1}(\Omega)$，联络为 $\Gamma_\theta \in L^\infty(\Omega)$，且满足一致有界性[2]

$$\|g_\theta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Gamma_\theta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\text{Riem}(\Gamma_\theta)\|_{L^p(\Omega)} \leq M, \tag{2.2}$$

对于所有 $\theta \in \mathcal{O}$，存在一个与 θ 无关的常数 $M > 0$。

[1]将柯西曲面 Σ 嵌入时空后，K_θ 是 Σ上的第二基本形式。[2]由于度量的导数与联络分量通过克里斯托费尔公式一一对应，因此，(2.2) 中对 g_θ 和 Γ_θ 的 L^∞ 界等价于对 g_θ的 $W^{1,\,\infty}$ 界，而这又等价于对 g_θ的利普希茨界，参见 [11]。

2.1. 基于坐标的索博列夫范数与空间。我们用 $W^{m,p}(\Omega)$ 表示弱导数直到 m 阶均属于 $L^p(\Omega)$ 的函数所构成的索博列夫空间，($m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$)。如果张量或联络在某个坐标图 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ 中的所有分量，在各自的坐标表示下都是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数，则称该张量或联络属于 $W^{m,p}(\Omega)$。相应地，对于坐标表示下的张量和联络，我们在固定坐标系 x 下逐分量取索博列夫范数 $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$（除非另有说明，采用泡延拓）。例如，联络分量 Γ 的 $W^{1,p}$-范数为

$$\|\Gamma\|_{W^{1,p}(\Omega)} \equiv \|\Gamma\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\rho=0,\dots,3} \|\partial_\rho \Gamma\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \|\Gamma\|_{L^p(\Omega)} \equiv \sum_{\sigma,\mu,\nu} \left\|\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.3}$$

其中，$\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho}$ 表示在 x坐标中对张量和联络逐分量进行偏微分，并且积分是相对于 x坐标中欧几里得度量的体积元进行的。注意，$W^{m,p}$ 张量的正则性在 $W^{m+1,p}$ 坐标变换下保持不变，而 $W^{m,p}$ 联络的正则性在 $W^{m+2,p}$ 坐标变换下保持不变。然而，$W^{m,p}$-范数的值取决于坐标；在洛伦兹几何中，这是一个棘手的问题，而本文通过将考察范围限制于泡延拓来规避这一问题。

2.2. 证明策略。定理 2.1 和 2.2 的证明基于我们在 [29] 中的最优正则性结果。也就是说（以定理 2.2 为例），我们反设存在一个泡延拓 $\left(\mathcal{M}^{\text{ext}}_\theta\right)_{\theta\in\mathcal{O}}$，其具有度量联络$\Gamma_\theta \in L^\infty(\Omega)$ 和曲率 $\text{Riem}(\Gamma_\theta) \in L^p(\Omega)$，并满足一致有界性 (2.2)。那么，[29] 中的最优正则性结果意味着，局部存在一个坐标变换，将 Γ_θ 映射为最优正则性，$\Gamma_\theta \in W^{1,p}$，且在新的坐标系中具有一致的 $W^{1,p}$ 界。由此可以证明，这与定理 2.2 中我们关于不存在具有 $\Gamma_\theta \in W^{1,p}$ 的此类延拓的假设相矛盾。我们在第 4 节给出定理 2.1 和 2.2 的详细证明。为此，我们在第 3 节陈述 [29] 中的最优正则性结果（即定理 3.1），并概述其证明，该证明基于正则性变换（RT-）方程组，这是一组偏微分方程（PDE），无论度量正则性如何，均为椭圆型。

2.3. 备注。我们先前在 [27] 中的结果在更高层次的索博列夫正则性下给出了最优正则性，提供了坐标变换，将 $W^{m,p}$ 中具有 $W^{m,p}$黎曼曲率的非最优联络（$m \geq 1$, $p > 4$）映射为最优联络正则性 $W^{m+1,p}$。通过应用 [27], 中的这一结果，可以推广定理 2.1 和 2.2，从而断言：在假设不可延拓至具有 $W^{m+1,p}$正则性联络的洛伦兹流形（$m \geq 1$, $p > 4$）的情况下，最大柯西发展对于具有 $W^{m,p}$ 正则性联络且黎曼曲率在 $W^{m,p}$中有界的洛伦兹流形具有不可延拓性。

3. 通过RT方程实现洛伦兹几何中的最优正则性

现在我们介绍我与 Blake Temple 共同提出的最优正则性结果 [29, Thm 2.1], ，定理 2.1 和 2.2 的证明正是基于这一结果。为了陈述

在定理中，考虑 4维流形 $\mathcal{M}$上的一个固定图表$(\Omega\ x)$，使得$\Omega_x \equiv x(\Omega) \subset \mathbb{R}^4$（Ω在坐标映射下的像）是具有光滑边界的开有界集。[3] 令 Γ_x 表示 x-坐标中仿射联络 Γ 的分量集合，$\Gamma_x \equiv \Gamma^k_{ij}(x)$。我们将 Γ_x 视为 x-坐标中的矩阵值 1-形式，$(\Gamma_x)^\mu_\nu \equiv (\Gamma_x)^\mu_{\nu j} dx^j$。令 $d\Gamma_x$表示其外微分，$d(\Gamma_x)^\mu_\nu \equiv \partial_i(\Gamma_x)^\mu_{\nu j} dx^i \wedge dx^j$（使用 μ、ν 表示矩阵指标）。将黎曼曲率张量写成矩阵值2-形式 $\mathrm{Riem}(\Gamma_x) = d\Gamma_x + \Gamma_x \wedge \Gamma_x$，可知假设 $\Gamma_x \in L^{2p}(\Omega_x)$ 且 $\mathrm{Riem}(\Gamma_x) \in L^p(\Omega_x)$ 等价于假设 $\Gamma_x \in L^{2p}(\Omega_x)$且 $d\Gamma_x \in L^p(\Omega_x)$；下文我们均假设后者。现在我们陈述与本文相关的定理 2.1 版本。

定理 3.1。假设在 x-坐标中，$\Gamma_x \in L^{2p}(\Omega_x)$ 和 $d\Gamma_x \in L^p(\Omega_x)$，其中某个 $p > 2$。令 $M > 0$为一个常数，使得

$$\|\Gamma_x\|_{L^{2p}(\Omega_x)} + \|d\Gamma_x\|_{L^p(\Omega_x)} \le M. \tag{3.1}$$

然后，对于任意点 $q \in \Omega$，都存在一个 q的邻域$\Omega' \subset \Omega$，以及一个坐标变换 $x \to y$，其雅可比矩阵为 $J = \frac{\partial y}{\partial x} \in W^{1,\,2p}(\Omega'_x)$，使得联络分量 Γ_y 在 y 坐标中具有最优正则性$\Gamma_y \in W^{1,\,p}(\Omega'_y)$，其中 $\Omega_y \equiv y(\Omega)$。此外，$\Gamma_y$ 满足一致有界性

$$\|\Gamma_y\|_{W^{1,p}(\Omega'_y)} \le C(M), \tag{3.2}$$

以及雅可比矩阵 J及其逆矩阵 J^{-1}，二者均以 x坐标表示，满足

$$\|J\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)} + \|J^{-1}\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)} \le C(M), \tag{3.3}$$

对于某个常数 $C(M) > 0$，其仅取决于 Ω′、p 和 M。此外，若$p > 4$，且若 $\|\Gamma_x\|_{L^\infty(\Omega_x)} \le M$ 除了曲率界 (3.1) 外，那么 Ω'_x 的欧几里得体积有下界 $1/M$.[4]

[29] 中的定理 2.1 适用于 n 维流形 $\mathcal{M}$的切丛上具有 L^p 有界曲率的一般（仿射）联络，并将 Kazdan-DeTurck 的经典最优正则性结果 [17] 从黎曼度量推广到洛伦兹度量和仿射联络。[29] 中的定理 2.1 的证明历经多年才得以完成，[25, 26, 27, 28], 其动机源于早期关于爱因斯坦-欧拉方程激波解所对应的非最优正则性洛伦兹度量的研究；[16, 14, 23, 24], 这些研究均总结于 RSPA 文章 [31]，（其中包括在 [30]中向向量丛和杨-米尔斯规范理论的推广）。建立定理 3.1 的主要思路，是从联络变换律导出一个以正则化雅可比矩阵 J 为未知量的非不变椭圆型偏微分方程组；这一思路受到 [25]黎曼平坦条件的启发。该思路促成了 [26], RT方程的提出，其解给出了正则化变换。

[3]我们在此将 Ω 用作 $\mathcal{M}$ 上的图表，这与第2节中使用 Ω 的方式略有不同（在那里我们将 $\Omega \equiv \Omega_x \subset \mathbb{R}^4$ 视为同一对象），但由于我们的结果和方法都是局部的，这种歧义并无影响。邻域 Ω' 可取为 $\Omega' = \Omega \cap B_r(q)$，其中 $B_r(q)$ 是 x 坐标中的半径为 r 的欧氏球。只要 $\|\Gamma\|_{L^\infty(\Omega)} \le M$，半径 r 就一致地处于 $1/M$ 的量级。

3.1. RT方程的推导。我们先介绍 RT方程推导的主要步骤，然后说明它们如何实现最优正则性。为此，假设存在一个雅可比矩阵为 J 的坐标变换，将 Γ_x 映射到 Γ_y（即具有最优正则性的联络），我们将联络变换律写成如下形式

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma - J^{-1}dJ, \tag{3.4}$$

其中 $\Gamma \equiv \Gamma_x$和 $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = (J^{-1})^k_\gamma J^\alpha_i J^\beta_j (\Gamma_y)^\gamma_{\alpha\beta}$是将联络 Γ_y视为张量并变换到 x 坐标后得到的。随后对（3.4）取外微分d 和余微分 δ，经过仔细整理，（3.4）推出以下两个方程

$$\Delta\tilde{\Gamma} = \delta d\Gamma - \delta\big(dJ^{-1}\wedge dJ\big) + d\delta\tilde{\Gamma}, \tag{3.5}$$

$$\Delta J = \delta(J\Gamma) - \langle dJ;\tilde{\Gamma}\rangle - J\delta\tilde{\Gamma}, \tag{3.6}$$

其中 $\Delta \equiv \delta d + d\delta = \partial^2_{x^0} + \ldots + \partial^2_{x^3}$是欧几里得拉普拉斯算子，$\langle\cdot\,;\,\cdot\rangle$是矩阵值内积，而 $\wedge$是矩阵值微分形式上的楔积（详细定义见 [26, 第3]章或 [29, 第5] 章）。在目前阶段，方程（3.5）—（3.6）既看起来无法求解，也不清楚解 J 是否会是真正可积为坐标的雅可比矩阵，即是否满足 $\mathsf{Curl}(J) = 0$。~为克服这一障碍，我们将 $A \equiv \delta\Gamma$ 视为一个自由的矩阵值参数函数——这一选择似乎合理，因为在 [25] 中，为获得最优正则性所需的黎曼平坦条件仅涉及 $d\Gamma$，而不涉及 $\delta\Gamma$。将 $A \equiv \delta\Gamma$代入（3.5）—（3.6），并将 A 视为新的未知矩阵值函数，接下来我们对方程（3.6）施加条件 $\mathsf{Curl}(J) = 0$ 以保证可积性，其等价形式为对 J的向量化 $\vec{J}^\mu = J^\mu_\nu dx^\nu$施加条件 $d\vec{J} = 0$，从而使 $\mathsf{Curl}(J) \equiv d\vec{J}$。经过仔细整理，并利用一次偶然的消去，使方程中各项的正则性相匹配， [26] 中的计算导出了 RT方程，即以下可求解的偏微分方程组；该方程组不受度规符号的影响，始终为椭圆型:

$$\Delta\tilde{\Gamma} = \delta d\Gamma - \delta\big(dJ^{-1}\wedge dJ\big) + d(J^{-1}A), \tag{3.7}$$

$$\Delta J = \delta(J\Gamma) - \langle dJ;\tilde{\Gamma}\rangle - A, \tag{3.8}$$

$$d\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{div}}\big(dJ\wedge\Gamma\big) + \overrightarrow{\mathrm{div}}\big(J\,d\Gamma\big) - d\big(\overrightarrow{\langle dJ;\tilde{\Gamma}\rangle}\big), \tag{3.9}$$

$$\delta\vec{A} = v. \tag{3.10}$$

~关于辅助场 A 的方程 (3.9) 是通过对 (3.8) 施加 $dJ = 0$ 得到的，并且可以证明， J 的可积性可由耦合方程 (3.8) 和~(3.9)推出。RT方程中的未知量 (Γ, J, A)，连同给定的非最优联络分量 Γ，均视为矩阵值微分形式。箭头表示“向量化”，即将矩阵值 0-形式映射为向量值 0-形式（例如 $\vec{A}^\mu = A^\mu_i dx^i$）；而 $\overrightarrow{\ }$div 是一种散度运算，将矩阵值 k-形式映射为向量值 k-形式。方程 (3.10) 中的向量 v 可自由指定，代表方程中的一种“规范”型自由度，反映了光滑变换保持最优联络正则性这一事实。对.....的运算

右侧以基于 x 坐标中的欧几里得度量的矩阵值微分形式的嘉当代数来表述（有关详细定义和证明，参见 [26]）。

3.2. RT方程如何导出最优正则性。现在我们解释 RT方程的解如何提供具有最优正则性的坐标变换，定理 3.1 在 [29] 中的证明便以此为基础。由于我们早期用于以更高正则性求解 RT方程的迭代方案在 [27, 28], 中无法在 L^p 联络的低正则性下闭合，这是由 (3.7) 中的非线性项 $dJ^{-1}\wedge dJ$ 所致，最终我们发现了 RT方程 (3.7)–(3.10) 的解所具有的内部“规范”型变换，使我们能够将 (3.7) 与其余方程分离开来。我们将后一个方程组称为约化RT方程 [29],。

$$\Delta J = \delta(J\cdot\Gamma) - B, \tag{3.11}$$

$$d\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{div}}\big(dJ\wedge\Gamma\big) + \overrightarrow{\operatorname{div}}\big(J\,d\Gamma\big), \tag{3.12}$$

$$\delta\vec{B} = v'. \tag{3.13}$$

约化RT方程 (3.11) - (3.13) 关于 (J, B) 是线性的，而我们在 [29] 中基于泊松方程的迭代方案适用于具有 $d\Gamma\in L^p$ 的低正则性 L^p联络，并证明了在任意点的邻域 Ω' 中存在解 (J, B)，使得 J是一个逐点可逆矩阵。方程 (3.11) - (3.13) 的内在性质是，只要可积条件 $d\vec{J}\equiv$ 旋度 $(J) = 0$ 在边界 $\partial\Omega$ 上成立（由我们在 [29]中的存在性理论实现），任意解 J 都是一个可积为坐标的雅可比矩阵。也就是说，将~(3.11)与 (3.12)结合后，计算表明 $\omega\equiv dJ$ 是拉普拉斯方程 $\Delta\omega = 0$的一个解；这与我们的边界数据一起意味着 $\omega = 0$在整个 Ω 中成立。这意味着 J 是真正可积为坐标的雅可比矩阵。

现给定约化 RT方程 (3.11)-(3.13)的一个解(J, B)，其具有~可积的雅可比矩阵 J，则通过引入[5]可以得到完整 RT方程 (3.7) - (3.10) 的一个解 (J,Γ, A)

$$\tilde{\Gamma}\equiv\Gamma - J^{-1}dJ,\qquad A\equiv B - \langle dJ;\tilde{\Gamma}\rangle,\qquad \text{and}\qquad v\equiv v' - \delta\overrightarrow{\langle dJ;\tilde{\Gamma}\rangle}, \tag{3.14}$$

正如利用 (3.11) 消去涉及 $\delta\Gamma$的不可控项后通过直接计算所验证的那样。对第一组 RT方程 (3.7) 应用内部椭圆估计，可以证明 $\tilde{\Gamma}$ 属于 $W^{1,p}$，其正则性比 Γ 高一个导数阶。定义

$$(\Gamma_y)^{\gamma}_{\alpha\beta}\equiv J^{\gamma}_{k}(J^{-1})^{i}_{\alpha}(J^{-1})^{j}_{\beta}\,\tilde{\Gamma}^{k}_{ij}, \tag{3.15}$$

将 (3.14)与联络变换律(3.4) 进行比较表明，Γ_y确实是最优正则性的变换后的联络，$\Gamma_y\in W^{1,p}(\Omega)$。这些是定理3.1 证明所依据的基本思想，该证明在 [29] 中以弱解的层面完整展开。

[5](3.14)中的第二个和第三个方程定义了 RT方程的“规范”变换。

4. 定理 2.1 和 2.2 的证明

4.1. 定理 2.2 的证明。我们利用定理 3.1 的最优正则性结果，通过反证法证明定理 2.2。因此，假设存在一个泡延拓$\left(\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}\right)_{\theta\in\mathcal{O}}$ 具有 $C^{0,1}$ 洛伦兹度量和度量联络 $\Gamma_\theta \in L^\infty(\Omega)$，它们满足一致有界性 (2.2)，其中 $(\Omega\ x)$ 是假设在适当识别后覆盖 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}} \setminus \mathring{\mathcal{M}}_\theta$ 的单个坐标图；我们遵循第 3 节中的记号，在此用 $\Omega_x \equiv x(\Omega) \subset \mathbb{R}^4$ 表示 Ω 在坐标映射下的像。事实上，要应用定理 3.1，只需假设该有界性

$$\|\Gamma_\theta\|_{L^\infty(\Omega_x)} + \|\mathrm{Riem}(\Gamma_\theta)\|_{L^p(\Omega_x)} \leq M, \tag{4.1}$$

对于某个与 θ无关的常数 $M > 0$，某个 $p > 4$。方程 (4.1) 等价于定理 3.1 中的一致有界性(3.1)，这一点可通过将H¨older不等式与黎曼曲率张量作为矩阵值 2-形式的表达式 $\mathrm{Riem}(\Gamma_x) = d\Gamma_x + \Gamma_x \wedge \Gamma_x$ 结合使用直接证明。

因此，假设 (4.1) 成立，并令 $q \in \Omega$ 为 $\mathcal{M}_\theta$ 边界上的一点；（注意，这个 $q \in \Omega$ 存在，因为 Ω 是覆盖 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}} \setminus \mathring{\mathcal{M}}_\theta$ 的开集，其中 $\mathring{\mathcal{M}}_\theta$ 是极大柯西发展的内部）。定理 3.1 表明，存在 q 的一个邻域 $\Omega' \subset \Omega$（取决于 M，但独立于 θ），使得对于每个联络 Γ_θ，都存在一个坐标变换 $x \to y_\theta$，其雅可比矩阵 $(J_\theta)^\mu_\nu = \frac{\partial y^\mu_\theta}{\partial x^\nu} \in W^{1,\,2p}(\Omega'_x)$，使得 y_θ 坐标下的联络 Γ_{y_θ} 具有最优正则性，$\Gamma_{y_\theta} \in W^{1,\,p}(\Omega'_{y_\theta})$，其中 $\Omega'_{y_\theta} \equiv y_\theta(\Omega')$，并满足一致有界性。

$$\|\Gamma_{y_\theta}\|_{W^{1,p}(\Omega'_{y_\theta})} + \|J_\theta\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)} + \|J_\theta^{-1}\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)} < C(M), \tag{4.2}$$

其中某个常数为 $C(M) > 0$，且与 θ 无关。(4.2) 式中的第二项和第三项的范数是在 x 坐标下度量的，而第一项是在 y_θ 坐标下度量的；对于每个 Γ_θ，后者分别是其具有最优正则性的坐标。

为了将 (4.2) 表述为对联络 Γ_{y_θ} 的一致有界性，并使其在单个固定坐标系下得到恰当度量，我们首先将每个 Γ_{y_θ} 写成 x 坐标下的形式，方法是将联络分量作为标量函数进行变换：$\Gamma_{y_\theta}(x) \equiv \Gamma_{y_\theta}(y_\theta(x))$。现在，将积分变量从 x 坐标变换到 y_θ 坐标，我们得到

$$\int_{\Omega'_x} \Gamma_{y_\theta}(x)dx = \int_{\Omega'_{y_\theta}} \Gamma_{y_\theta}(y_\theta)\ |\det(J_\theta^{-1})|\ dy_\theta, \tag{4.3}$$

由标量变换下 L^∞ 范数在 x 坐标和 y_θ 坐标下相同可知，这意味着

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{L^p(\Omega'_x)} &\leq \|J_\theta^{-1}\|_{L^\infty(\Omega'_x)}\ \|\Gamma_{y_\theta}\|_{L^p(\Omega'_{y_\theta})} \\ &\leq C_M\|J_\theta^{-1}\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)}\ \|\Gamma_{y_\theta}\|_{L^p(\Omega'_{y_\theta})} \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中最后一行使用了莫雷不等式，且$C_M > 0$是一个仅依赖于 p 和 Ω'的常数，与 θ无关。[6] 类似地，链式法则意味着

[6]莫雷不等式给出了函数 f 的 H¨older 范数界：$\|f\|_{C^{0,\,\alpha}(\Omega)} \leq C_M\|f\|_{W^{1,\,p}(\Omega)}$，其中 $\alpha \equiv 1 - \frac{n}{p}$，且 $C_M > 0$ 是仅依赖于 n、p 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的常数，参见 [11]。

用于在 x 坐标与 y_θ 坐标中求导的差异，该

$$\partial_{x^\nu}\Gamma_{y_\theta}(x) = \sum_{\mu=0,\dots,3} (J_\theta)^\mu_\nu \, \partial_{y^\mu_\theta}\Gamma_{y_\theta}, \tag{4.5}$$

这使我们能够对每个联络导数作如下估计

$$\begin{aligned}\|\partial_x\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{L^p(\Omega'_x)} &\le C_p \, \|J_\theta\|_{L^\infty(\Omega'_x)} \, \|\partial_{y_\theta}\Gamma_{y_\theta}\|_{L^p(\Omega'_x)} \\ &\le C_M \, C_p \, \|J_\theta\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)} \, \|\partial_{y_\theta}\Gamma_{y_\theta}\|_{L^p(\Omega'_x)},\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中， $C_p > 1$是一个与 θ 无关的组合常数，用于计入式 (4.5) 中的求和； ∂_x 和 ∂_{y_θ} 分别表示相应坐标下偏导数的集合（对其范数求和，参见式 (2.3)），并且我们再次应用了莫雷不等式。将积分变量换为 y_θ 坐标后，式 (4.6) 推出

$$\|\partial_x\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{L^p(\Omega'_x)} \le C_M^2 \, C_p \, \|J_\theta\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)}\|J_\theta^{-1}\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)} \, \|\partial_{y_\theta}\Gamma_{y_\theta}\|_{L^p(\Omega'_{y_\theta})}, \tag{4.7}$$

按照式 (4.5) 中的推理。结合式 (4.4) 和 (4.7)，现在我们可以在 x坐标下对 $\Gamma_{y_\theta}($ x)的$_{W^{1,p}}$范数作如下估计

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{W^{1,p}(\Omega'_x)} \equiv \; &\|\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{L^p(\Omega'_x)} + \sum_{\nu=0,\dots,3} \|\partial_{x^\nu}\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{L^p(\Omega'_x)} \\ \le \; &C_M \, C_p \, \|J_\theta^{-1}\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)}\big(1 + C_M\|J_\theta\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)}\big) \, \|\Gamma_{y_\theta}\|_{W^{1,p}(\Omega'_{y_\theta})}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

最后利用式 (4.2) 对式 (4.8) 中的$\|J_\theta^{-1}\|_{W^{1,2p}(\Omega'_x)}$和$\|\Gamma_{y_\theta}\|_{W^{1,p}(\Omega'_{y_\theta})}$进行估计，我们得到所需的一致有界性

$$\|\Gamma_{y_\theta}(x)\|_{W^{1,p}(\Omega'_x)} \;\le\; C_M \, C_p \, \big(1 + C_M C(M)\big) \, C(M)^2 \equiv C, \tag{4.9}$$

其中 $C > 0$ 和 Ω' 均独立于 θ。

估计式 (4.9) 与定理 2.2 的假设矛盾。具体而言，连接 Γ_{y_θ} 构成了一组具有 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}} \equiv \mathcal{M}_\theta \cup \Omega'$ 的泡延拓，因为 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}} \setminus \mathring{\mathcal{M}}_\theta$ 可以由 Ω' 覆盖；并且可以将坐标 y_θ 与 x 以及 Ω'_{y_θ} 与 Ω'_x 进行识别。因此，根据 (4.9)，我们构造出了一组满足一致有界性条件 (2.1) 的泡延拓，这与定理 2.2 的假设矛盾。由此可知，对于 $p > 4$，不存在满足一致有界性条件 (2.2)、具有 L^p 有界黎曼曲率的 $C^{0,\,1}$ 洛伦兹度量延拓。这就完成了定理 2.2 的证明。□

4.2. 定理 2.1 的证明。设 $(\mathcal{M}_\theta, g_\theta)$ 是某个初始数据 $\theta \in \mathcal{O}$ 的极大柯西发展，且不存在联络为 Γ_θ、属于 $W^{1,\,p}(\Omega)$ 的 $(\mathcal{M}_\theta, g_\theta)$ 的泡延拓，其中 $p > 2$。反设存在泡延拓 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}}$，其洛伦兹度量为 $g_\theta \in C^{0,\,\alpha}(\Omega)$，度量联络为 $\Gamma_\theta \in L^{2p}(\Omega)$，黎曼曲率 Riem$(\Gamma_\theta)$ 属于 $\in L^p(\Omega)$，其中 $(\Omega\ x)$ 是覆盖 $\mathcal{M}_\theta^{\text{ext}} \setminus \mathring{\mathcal{M}}_\theta$ 的坐标图。现在，根据定理 3.1，对于边界 $\mathcal{M}_\theta$ 上的任意点 $q \in \Omega$，都存在 q 的一个邻域 Ω'，其上定义了坐标变换 $x \to y_\theta$，使得 Γ_{y_θ} 具有最优正则性， $\Gamma_{y_\theta} \in W^{1,\,p}(\Omega'_{y_\theta})$。这与我们先前假设不存在此类泡延拓相矛盾。定理 2.1 得证。□

结论

本文的结果在不存在具有更高联络正则性的延拓的假设下 $W^{1,p}_{\text{loc}}$，肯定地验证了具有有界曲率的强宇宙审查猜想。这一步朝着证实该猜想迈进，采用了椭圆型偏微分方程理论（应用于 RT方程），将问题从最低正则性（具有有界曲率的Lipschitz连续度量）提升一个层次，达到更易于采用双曲型偏微分方程方法处理的正则性。

资助

M. Reintjes 部分获得了城大新教师启动基金（7200748）和城大战略研究基金（7005839）的资助。

致谢

谨此感谢 Blake Temple 的宝贵讨论与鼓励。

REFERENCES

[1] Y. Choquet-Bruhat, 《广义相对论与爱因斯坦方程》，牛津大学出版社，（2009）。[2] D. Christodoulou, “标量场引力坍缩中的裸奇点不稳定性”, 《数学年刊》（第2辑），149.1, （1999），183-217。[3] D. Christodoulou, “广义相对论中的黑洞形成”, EMS 数学专著，欧洲数学会（EMS），苏黎世¨（2009）。[4] J. L. Costa、P. M. Gir˜ao、J. Nat´ario 和 J. D. Silva, “带宇宙学常数的爱因斯坦–麦克斯韦–标量场系统的整体唯一性——第二部分：解的结构与柯西视界的稳定性”, 《数学物理通讯》339(3), （2015），903-947。[5] J. L. Costa 、 P. M. Gir˜ao 、 J. Nat´ario 和 J. D. Silva, “ 带宇宙学常数的爱因斯坦 – 麦克斯韦–标量场系统的整体唯一性——第三部分：质量膨胀与解的可延拓性”, 《偏微分方程年刊》3(1), 第8篇, （2017），55。[6] P. T. Chruciel 和 J. D. E. Grant, “关于具有连续度量的洛伦兹因果性”, 《经典与量子引力》，第29卷, （2012），145001。[7] M. Dafermos, “球对称爱因斯坦–麦克斯韦–标量场方程的柯西视界稳定性与不稳定性”, 《数学年刊》（第2辑）158(3), （2003），875-928。[8] M. Dafermos 和 J. Luk, “动力学真空黑洞的内部 I：克尔柯西视界的 C^0稳定性”, （ 2017 1710 01722 ）。arXiv：。M. Dafermos、I. Rodnianski, “黑洞时空中的红移效应与辐射衰减”, 《纯粹与应用数学通讯》62(7), （2009），859-919。[10] A. Einstein, “《引力场方程》”, 《普鲁士科学院》，柏林，会议报告1915b，844-847。[11] L. C. Evans, 《偏微分方程》，伯克利数学讲义，3A, （1994）。[12] A. T. Franzen, “Reissner-Nordstr¨om 内部背景中的无质量标量波有界性”, 《数学物理通讯》343(2), （2016），601-650。[13] A. T. Franzen, “克尔内部背景中的无质量标量波有界性”, 《亨利·庞加莱年刊》21(4), （2020），第1045-1111页。 J. Groah 和 B. Temple, 《具有理想流体源的爱因斯坦方程激波解：通过局部惯性格利姆格式的存在性与一致性》，美国数学会回忆录，第172卷，第813号，（2004），ISSN 0065-9266。[14] S.W. Hawking 和 G.F.R. Ellis, 《时空的大尺度结构》，剑桥大学出版社，（1973）。

[16] W. Israel, 《广义相对论中的奇异超曲面与薄壳》, IlNuovo Cimento, 第XLIV B 卷, 第 1 期, 1-14, （1966）。[17] J. L. Kazdan 和 D. M. DeTurck, 《黎曼几何中的一些正则性定理》, Ann. scient. ´Ec. Norm. Sup., 4^e s´érie, 第14 卷, （1981）, 第 249 ´a 260页。[18] C. Kehle, 《丢番图逼近作为Kerr-AdS黑洞的宇宙审查》, Invent.Math., 227, （2022）, 1169-1321。[19] S. Klainermann、I. Rodnianski 和 J. Szeftel, 《有界L2 曲率猜想》, Invent.Math. 202 (1), （2015）, 91-216。[20] J.Luk 和 J. Sbierski, 《Kerr黑洞内部波动方程的不稳定性结果》, J. Funct.Anal. 271(7), 1948-1995, （2016）。[21] J.Luk和S.-J.Oh, 《具有两端渐近平坦初始数据的球对称中的强宇宙审查 I：黑洞区域的内部》, Ann. of Math.(2), 190.1, 第 1-111 页, （2019）。[22] R. Penrose, 《引力坍缩》, 载于《引力辐射与引力坍缩》, C. DeWitt-Morette 编。IAU Symposium 第 64 卷, Springer, （1974）, 第 82-91页。[23] M.Reintjes, 《广义相对论中来自不同特征族的激波之间发生激波相互作用的点处时空是局部惯性的》, Adv. Theor.Math. Phys.21.6（2017）, 1525-1611。arXiv:1409.5060[24] M.Reintjes和B. Temple, 《来自不同特征族的激波之间发生广义相对论激波相互作用的点处不存在正则性奇异性》, Proc. R. Soc.A 471:20140834。arXiv:1506.0408 [25] M.Reintjes和 B.Temple, 《激波相互作用与黎曼平坦条件：度量平滑背后的几何学以及广义相对论中局部惯性系的存在性》, Arch.Rat. Mech. Anal. 235 2020 1873 1904 1610 02390 ( ), - 。arXiv:。[26] M. Reintjes和B.Temple, 《正则性变换方程：用于平滑广义相对论中引力度量的椭圆型机制》, Adv.Theor. Math. Phys 24.5, （ 2020 1203 1245 1805 01004 ）, - 。arXiv: 。[27] M.Reintjes 和B. Temple, 《广义相对论中的最优度量正则性源于 RT方程的 L^p-空间椭圆型正则性理论》, Meth. Appl.Anal. 27.3（2020）, 第199-242 页。arXiv:1808.06455。[28] M.Reintjes和 B. Temple, 《如何平滑时空的皱褶映射： L^∞ 联络的 Uhlenbeck紧性，以及通过 Reintjes-Temple 方程获得的广义相对论激波的最优正则性》, Proc. R.Soc. A 476:20200177。arXiv:1812.06795。[29] M.Reintjes和 B. Temple, 《由几何假设所蕴含的最优正则性 I：切丛上的联络》, （2019/2021）, 即将在 Meth.Appl.Anal.发表，100 页。arXiv:1912.12997[30] M.Reintjes和B.Temple, 《由几何假设所蕴含的最优正则性II：向量丛上的联络》, 预印本（ 2021 40 2105 10765 ）, 页数。[31] arXiv: 。M. R. 和 B.Temple, 《广义相对论与 Yang-Mills 理论中的最优正则性和 Uhlenbeck 紧性》, （ 2022 479 20220444 2202 09535 ）, Proc. R. Soc. A: 。arXiv:。[32] H. Ringstrom, 《T 3 -Gowdy 时空中的强宇宙审查》, Ann.of Math. (2) 170.3, （2009）, 第 1181-1240 页。