arXiv:2304.04467v1 [math.LO] 10 Apr 2023

稳定框架与权重 E108

SAHARON SHELAH

Abstract. 这是作者列表中的第 839 篇论文，直到 2023 年冬季才被拆分为三篇。

第一部分：我们希望将 [She90, Ch.III,V,§4] 中的虚元素、ortp(a, M, N) 的权重、P-权重、P-简单类型等推广到优良框架的语境中。这要求允许词汇表包含无限元数的谓词和函数符号，不过看起来并不会因此遭受任何实质性损失。

第二部分：在 [She09d] 中，有人提出优良框架，认为它们是在抽象初等类中与超稳定理论（在初等类中）相对应的（基本）正确类比。在这里，我们将 (μ, λ, κ)-框架视为候选，考察它们是否是稳定理论的 $|T|^+$-饱和模型类（在初等类中）的正确类比。与超稳定情形相比，一个缺陷是，按基数归纳向上推进会遇到问题（对于余终性较小的基数）。但这只会在尝试提升时出现。对于这一语境，我们研究维数。

第三部分：在第二部分的背景下，我们考虑略微饱和模型的平行类的主间隙问题；并证明我们的情况不比一阶情形更差。

版本 2023-04-10。参见 https://shelah.logic.at/papers/E108/ 以了解可能的更新$Date$: 2015 年 12 月 23 日。主要分类号 03C45、03C48；次要分类号：03C55。*Key words and phrases.* 模型论、分类理论、稳定性、抽象初等类、稳定性、正交性、权重、主间隙。作者感谢 Alice Leonhardt 进行了精美的打字工作。作者谨此感谢以色列科学基金会对本研究的部分资助（资助编号：242/03）。首次打字日期：2002 年 9 月 10 日。论文 [839] 一直保留到 203 年冬季，后来应编辑要求被分为 [839]{1248], [1249]。

已注释内容

第一部分，第 4
页
§0 引言，第4页

§1 权重和 P-权重，第5页（标签 w(dot)、wp(dot) 以及不带点），第5页[对于 $\mathfrak{s}$ 一个良好的 λ-框架，具有一些附加属性我们定义位置和 P-权重。]

§2 虚元素、ess – (μ, λ)-抽象初等类与框架，（标签 $m(dot, e(dot)\ b)$，第9页

[定义一个允许无穷元函数的 ess – (μ, λ)-抽象初等类。然后得到 $\mathfrak{s}$ 及类型基。]

§3 P-简单类型，第18页（标签 3.1，关于（点）），第18页

第二部分 稳定类的推广，第23页

§4 引言，第23页

§5 在没有满连续性的情况下公理化抽象初等类，（标签 f），第24页[平滑化：推广 [She09c，§1]。]§(5A) 抽象初等类，第24页 §(5B) 基本概念，（标签 5.15 起），第28页 §(5C) 提升，（标签 5.20 起），第30页

§6 PR-框架，（标签 pr（点）），第35页[这里使用不分叉关系似乎更好，因此应提前；（a）支配关系出现（b）缺少引用（c）“P 基于 a”，参见第一部分，但根据（d）使用位置 $K_{(M,A)}$ 或怪兽模型 $\mathfrak{C}$。]

第三部分，第42页

§7 引言，（7.1-7.4 给出标签！），第42页

§8 P 的维数分析，（标签 g(dot)），第46页

[问题：使用不分叉关系？放置 a 还是 $\mathfrak{a}$？(a) K_A 或 $K_{(M,A)}$ 或$K_{M,\infty}$(b) 使用怪兽模型 $\mathfrak{C}$或运行.....(c) 定义 $M <_{\mathfrak{k}_A} N$(d) 多维候选项（多维）(e) 基于($< \kappa$)。]

第四部分, 第54页

§9 强稳定性：超稳定性的弱形式 [继续 [她14], (标签 uq(dot)), 第54页

§10 分解（关于主间隙 + 分解的更多内容，续见§7、§8）, （标签 h(dot)）, 第55页

§11 分解, （标签 dc(dot)）, 第58页

第一部分：美框架：权重与简单性

§0. 引言

我们在此考察摘要中列出的方向[1]

在第一部分中，我们假设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 λ-框架，具有 [She09e], 中的一些额外性质，例如 [She09e，§12], 的假设中所述。因此，我们将假定读者熟悉 [She09e]., 以及 λ-框架的基本事实，见 [She09c]。

我们可以考察 [She90] 中那些未能在美 λ-框架中重新得到的结果。当然，我们距离原始理论的主间隙还很远（ $\mathfrak{s}$ ([She90，第XIII章])），而且有些结果显然与初等类，尤其是超积，联系更为紧密。剩下的便是类型理论的若干部分：半正则类型、权重、P-简单 [2] 类型、“遗传地正交于 P”（最后两者的定义与研究见 [She78，第V章，§0 + 定义4.4—例4.15]{She90，第V章，§0，第226页，定义4.4—例4.15，第277页—284]）。

注意，“类型 q 是 p-简单（或 P-简单）”和“q 与 p （或 P）遗传正交”本质上对应于 Hrushovshi 深刻著作中的“内部”和“外来” [3] 概念。

---

[1]由于我们于 2002 年开始这项工作，且尚未投入太长时间，我们打算公开目前处于合理状态的内容。

[2]其动机是：对于合适的 P（例如单个正则类型），一方面，stp(a, A) $\pm$P $\Rightarrow$ stp($a/E, A$) 对某个在 A 上可定义的等价关系而言是 P-简单的；另一方面，如果 stp(a_i, A) 对 $i < \alpha$ 而言是 P-简单的，那么 $\Sigma\{w(a_i, A) \cup \{a_j : j < i\}) : i < \alpha\}$ 不依赖于我们列出这些 a_i 的顺序。请注意，这里的 P 就是 $\mathscr{P}$ 那里所指的 P。[3]注意，“foreign to P”和“遗传地正交于 P”是等价的。现在（为简便起见记作 P $= \{p\}$ ），(a) $q(x)$ 是 $p(x)$-简单的，当且仅当存在某个集合 A，使得在 $\mathfrak{C}$ 中我们有 $q(\mathfrak{C}) \subseteq \text{acl}(A \cup \bigcup p_i(\mathfrak{C}))$ (b)。$q(x)$ 是 $p(x)$-内的，当且仅当存在某个集合 A，使得在 $\mathfrak{C}$ 中我们有 $q(\mathfrak{C}) \subseteq \text{dcl}(A \cup p(\mathfrak{C}))$。注意，($\alpha$) 内蕴含简单性 ($\beta$)；如果我们的目标是计算权重，那么强调 acl 会更好，因为它涵盖更多内容 (γ)，但差别很小；而在 (δ) 存在性方面，强调 dcl 更好。此外，有用的一点是，$\{F \restriction (p(\mathfrak{C}) \cup q(\mathfrak{C}) : F$ 在 p 上固定 $\mathfrak{C}$ 的自同构 $(\mathfrak{C}) \cup \text{Dom}(p)\}$ 在 $q(x)$ 为 p-内时是平凡的，但对于 p-简单性则不然（尽管它们构成一个前有限群）。

§1. I, Weight and P-weight

回顾 [She09c], [She09e]

背景 1.1. 1) $\mathfrak{s}$ 是一个满的良好$^+$ λ-框架，带有素模型，$K^{3,\mathrm{vq}}_{\mathfrak{s}} = K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$，$\perp = \overset{\mathrm{wk}}{\perp}$ 和$p \perp M \Leftrightarrow p \overset{\mathrm{a}}{\perp} M$。注意，由于 $\mathfrak{s}$是满的，$\mathscr{S}^{\mathrm{bs}}(M) = \mathscr{S}^{\mathrm{na}}(M)$；此外，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{k}[\mathfrak{s}] = (K^{\mathfrak{s}}, \leq_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}})$ 是该抽象初等类。

2) $\mathfrak{C}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-怪兽模型，因此它在 λ 之上是 $K^{\mathfrak{s}}_{\lambda^+}$-饱和的，而 $M <_{\mathfrak{s}} \mathfrak{C}$ 表示 $M \leq_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$和 $M \in K_{\mathfrak{s}}$。由于 $\mathfrak{s}$ 是满的，它具有正则基数。

观察 1.2. $\mathfrak{s}^{\mathrm{reg}}$ 满足上述所有条件，满的性质除外。

证明。参见 [She09e, 10.18=L10.p19tex]，以及定义 [She09e, 10.17=L10.p18tex]。□

断言 1.3. 1) 若 $p \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}(M)$，则我们可以找到 b、N 和有限的 $\mathbf{J}$，使得：

⊛ (a) $M \leq_{\mathfrak{s}} N$ (b) $\mathbf{J} \subseteq N$ 是 (M, N) (c) 中的有限独立集 $c \in \mathbf{J} \Rightarrow \mathrm{ortp}(c, M, N)$ 是正则的；回想一下，ortp 表示轨道类型 (d) $(M, N, \mathbf{J}) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$ (e) $b \in N$ 实现了 p。

2) 若 M 是饱满的，我们还可以补充：

(f) $(M, N, b) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$.

3) 在 (2) 中，$\|\mathbf{J}\|$ 仅取决于 (p, M)。

4) 若 M 是饱满的，则我们可以在 $\mathfrak{s}$(饱满) 中进行，并得到相同的 $\|\mathbf{J}\|$，且 N (因此 $N \in K_{\mathfrak{s}}$) 是饱满的。

证明。1) 通过对 $\ell < \omega$ 使用归纳法，我们尝试选择 N_ℓ、a_ℓ、q_ℓ，使得：

$(*)$ (a) $N_0 = M$ (b) $N_\ell \leq_{\mathfrak{s}} N_{\ell+1}$ (c) $q_\ell \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$，因此可能 $q_\ell \notin \mathscr{S}^{\mathrm{na}}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$ (d) $q_0 = p$ (e) $q_{\ell+1} \restriction N_\ell = q_\ell$ (f) $q_{\ell+1}$ 在 N_ℓ 上分叉，所以现在必然 $q_\ell \notin \mathscr{S}^{\mathrm{na}}(N_\ell)$ (g) $(N_\ell, N_{\ell+1}, a_\ell) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$ (h) $r_\ell =$ 正交型$(a_\ell, N_\ell, N_{\ell+1})$ 是正则的 (i) r_ℓ 要么是 $\perp M$，要么不在 M上分叉。

如果我们成功地对所有 $\ell < \omega$ let $N = \cup\{N_\ell : \ell < \omega\}$; 进行归纳；由于这是一个可数链，存在 $q \in \mathscr{S}(N)$ 使得 $\ell < \omega \Rightarrow q \restriction N_\ell = q$，并且由于 q不是代数的（因为每个 q_n 都不是），且 $\mathfrak{s}$ 是满的，显然 $q \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(N)$；但 q与非分叉的有限特征矛盾。因此，对于某个 $n \geq 0$，我们会陷入困境，但若 $q_n \in \mathscr{S}^{\mathrm{na}}_{\mathfrak{s}}(N_n)$，这种情况就不会发生。 [为什么？根据 1.2，等价地，$\mathfrak{s}^{\mathrm{reg}}$ 有足够多的正则基数，因此我们可以应用 [She09e, 8.3=L6.1tex].] 所以，对某个 $b \in N_n$，我们有 $q_n = \mathrm{ortp}(b, N_n, N_n)$，即 b实现了 q_n，因此它实现了 p。

令 $\mathrm{J} = \{a_\ell : \mathrm{ortp}(a_\ell, N_\ell, N_{\ell+1})$ 不在 $N_0\}$ 上分叉。根据 [She09e, 6.2]，我们有 $(M, N_n, \mathrm{J}) = (N_0, N_n, \mathrm{J}) \in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm vq}$，因此 $\in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm qr}$。根据 [She09e]，于是得证。2) 令 N, b, J 与第 (1) 部分中的相同，且 $\|\mathrm{J}|$ 是极小的。我们可以找到 $N' \le_{\mathfrak{s}} N$，使得 $(M, N', b) \in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$；并且可以找到 J'，使 $\mathrm{J}' \subseteq N'$ 在 (M, N') 中是独立正则的，且在这些要求下极大。然后我们可以找到 $N'' \le_{\mathfrak{s}} N'$，使得 $(M, N'', \mathrm{J}') \in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm qr}$。如果 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N'', N') \in \mathscr{S}\mathrm{na}_{\mathfrak{s}}(N'')$ 不与 M 正交，我们就可以像第 (1) 部分的证明那样，导出与 N' 中 J' 的极大性相矛盾的结论，因此 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N'', N') \perp M$（或 $\notin \mathscr{S}\mathrm{na}_{\mathfrak{s}}(N)$）。此外，不失一般性，$(N'', N', b) \in_{K^3_{\mathfrak{s}}}{}^{\rm pr}$，因此根据 [She09e]，我们有 $(M, N', \mathrm{J}') \in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm qr}$。因此，存在一个同构 f，从 N' 到 N''，它在 $M \cup \mathrm{J}'$ 上是恒等映射（根据 $K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm qr}$ 的唯一性）。因此，用 $(N', f(b), \mathrm{J}')$ 替换 (N, b, J)，即可得证。

3) 若非如此，我们可以找到 $N_1, N_2, \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, b$，使得 $M \le_{\mathfrak{s}} N_\ell \le_{\mathfrak{s}} N$，且四元组 $(M, N_\ell, \mathrm{J}_\ell, b)$ 满足第 (1) 部分 (a)-(e)+(f) 中对 $\ell = 1, 2$ 的描述。假设 $\|\mathrm{J}_1| \ne \|\mathrm{J}_2|$，以导出矛盾，因此不失一般性地，$\|\mathrm{J}_1| < \|\mathrm{J}_2|$。

根据“$(M, N_\ell, b) \in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$”，不失一般性地，$N_2 \le_{\mathfrak{s}} N_1$。

根据 [She09e, 10.15=L10b.11tex(3)]，对于某个 $c \in \mathrm{J}_2 \backslash \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_1 \cup \{c\}$，其在 (M, N_1) 中独立，这与 $(M, N, \mathrm{J}_1) \in K^3_{\mathfrak{s}}{}^{\rm vq}$ 矛盾；依据 [She09e, 10.15=L10b.11tex(4)]。4) 类似地。$\square_{1.3}$

定义 1.4. 1) 对于 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M)$，令 $p, w(p)$ 的权重为满足以下条件的唯一自然数：若 $M \le_{\mathfrak{s}} M', M'$ 是饱满的，则 $p' \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M')$ 是 p 的非分叉扩张，那么它就是断言 1.3(3) 中唯一的~~$\|\mathrm{J}|$~~，且它是一个自然数。2) 令 $w_{\mathfrak{s}}(a, M, N) = w$(正交型$_{\mathfrak{s}}(a, M, N)$)。

断言 1.5. 1) 如果 $p \in \mathscr{S}^{bs}(M)$ 正则，则 $w(p) = 1$。2) 如果 J 在 (M, N) 中是独立的且 $c \in N$，那么对于某个 $\mathrm{J}' \subseteq \mathrm{J}$（具有 $\le w_{\mathfrak{s}}(c, M, N)$ 个元素），$\{c\} \cup (\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}')$ 在 (M, N) 中是独立的。

证明。现在显而易见。 $\square_{1.5}$

请注意，定义 1.6 中使用 $\mathfrak{C}$ 仅为使表述清晰，也可以避免使用，见下文 1.10。

定义 1.6。1）当满足以下条件时，我们称 P 为（$\mathfrak{C}$ 内的）M^*-基族：

（a） $M^* <_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$ 且 $M^* \in K_{\mathfrak{s}}$（b） $\mathrm{P} \subseteq \cup\{\mathscr{S}_{\rm bs}$

（M）：$M \le_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$ 且 $M \in K_{\mathfrak{s}}\}$（c） P 在 $\mathfrak{C}$ 上、

相对于 M^* 的自同构作用下保持不变。

2）设 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs}$（$M$），其中 $M \le_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$

（a）当满足以下条件时，我们称 p 遗传地正交于 P（或称 P-外来）：若 $M \le_{\mathfrak{s}} N \le_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}, q \in \mathscr{S}_{\rm bs}$（$N$） $q \restriction M = p$，则 ~~q 正~~交于 P。（b）当 p 正则、不正交于 P，且若 $q \in \mathscr{S}_{\rm bs}$~~（$M'$）~~ $M \le_{\mathfrak{s}} M' <_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$ 且 q 是 p 的一个分叉扩张，则 q 遗传地正交于 P 时，我们称 p 为 P-正则。（c）若 ~~p 正~~则且不正交于某个 P-正则p'，则称其为弱 P-正则。

3) 当 P 是一组正则类型，且其中每个类型都是 P-正则时，称 P 为正规。4) 令 $q \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M)$ $M <_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$ let $w_{\mathbf{P}}(q)$ 定义为满足以下条件的自然数

⊛若 $M \le_{\mathfrak{s}} M_1 \le_{\mathfrak{s}} M_2 \le_{\mathfrak{s}} \mathfrak{C}, M_\ell$ 是 $(\lambda,*)$-饱满的，$b \in M_2$，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, M_1, M_2)$ 是 q 的非分叉扩张，$(M_1, M_2, b) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$，$(M_1, M_2, \mathbf{J}) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$且 J 在 (M_1, M_2) 中正则，即独立，并且 $c \in \mathbf{J} \Rightarrow \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c, M_1, M_2)$ 是正则类型，则 $w_{\mathbf{P}}(q) = |\{c \in \mathbf{J} : \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c, M_1, M) \text{ 是弱 P-正则的}\}|$。

5) 我们将 P 替换为 p 如果 $\mathbf{P} = \{p\}$，其中 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}}(M^*)$ 是正则（见 1.7(1)）。

断言 1.7。1) 如果 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 是正则的，那么 $\{p\}$ 是一个 M-基族并且是正规的。

2) 假设 P 是一个基于 M^* 的族。如果 $q \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 且 $M^* \le_{\mathfrak{s}} M \le_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$然后$w_{\mathbf{P}}(q)$ 是良定义的（并且是一个自然数）。

3) 在定义 1.6(4) 中，我们可以找到 J，使得对于每个 $c \in \mathbf{J}_1$，都有：正交型(c, M_1, M) 是弱 P-正则的 $\Rightarrow$ 正交型(c, M_1, M) 是 P-正则的。

证明。应该很清楚。 $\square_{1.7}$

讨论 1.8。人们很容易想要尝试推广 P-简单（按 Hrushovski 的术语，即 P-内部）和半正则的概念。这些概念在一阶情形中的一个重要性质是：例如，若 $(\bar{a}/A) \pm p$，p 正则，那么存在某个在 A 上可定义的等价关系 E，使得 $\mathrm{ortp}(\bar{a}/E, A)$ 是 $\pm p$，并且是 $\{p\}$-简单。因此假设 $p, q \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 不正交，并且我们可以定义一个等价关系 $\mathscr{E}^{p,q}_M$ 在 $\{c \in \mathfrak{C}$ 上：c 实现 $p\}$，定义为

$$c_1 \mathscr{E}^{p,q}_M c_2 \quad \text{iff for every } d \in \mathfrak{C} \text{ realizing } q \text{ we have } \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c_1 d, M, \mathfrak{C}) = \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c_2 d, M, \mathfrak{C}).$$

即使在一阶情形中，这（所需的性质）也可能失败：假设 p、q 在 $a^* \in M$ 上可定义（关于这一点，见后文），并且我们有 $\langle c_\ell : \ell \le n\rangle$、$\langle M_\ell : \ell < n\rangle$，使得 $\mathrm{ortp}(c_\ell, M_\ell, \mathfrak{C}) = p_\ell$ 每个 p_ℓ 都与 p、$c_\ell \mathscr{E}^{p,q}_{M_\ell} c_{\ell+1}$ 平行，但 c_0、c_n 分别实现 p、q，并且 $\{c_0, c_n\}$ 在 M_0 上独立。这样的情形挫败了如 [She90, Ch.V] 中那样将 $\mathbf{P} - \{q\}$-简单类型 $p/\mathscr{E}$ 定义出来的尝试。

在一阶逻辑中，我们可以找到一个饱和的 N和 $a^* \in N$，使得 $\mathrm{ortp}(M, \bigcup M_\ell \cup \ell \{c_0, \ldots, c_n\})$ 不在 a^* 上分叉，并使用“在类型上关于超滤子c 对 $q(\mathfrak{C})$取平均 $+ a^*_t$”（对合适的 a^*_t而言）。但请看下文。

讨论 1.9.：1) 假设（$\mathfrak{s}$ 是满的，并且）每个 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{na}_{\mathfrak{s}}}(M)$都可由某个 $a_p \in M$ 表示（在 [She90], 中，例如典范基 $\mathrm{Cb}(p)$）。当 $\mathrm{ortp}(\bar{a}, b, \mathfrak{C})$ 是平稳的（和/或非分叉的）时，我们可以定义_ _$\bar{a}, b \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}$。我们应当检查其基本性质。见§3。

2) 假设 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$是正则的，且在 $\bar{a}^*$ 上可定义（按自然意义）。我们不妨思考，对于 $p \restriction \bar{a}^*$，依赖关系是否具有良好性质?

如果你觉得在我们的语境中使用怪兽模型并不自然，那么我们如何通过以下方式，使用一个由下式定义的“位置”，来“翻译” $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ 中一个被每个在 A上为恒等映射的自同构所保持的类型集合：

定义 1.10. 1) 局部位置是一个有序对 $\mathfrak{a} = (M, A)$，使得 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$（与 8.2. 相比较。

2) 若 $A_1 = A_2$，且存在 n和$N_\ell \in K_{\mathfrak{s}}$，使得对于 $\ell \le n$，满足 $A \subseteq N_\ell$（其中 $\ell = 0, \ldots, n$），并且 $M_1 = N_0, M_2 = N_n$，且对每个 $\ell < n$，$N_\ell \le_{\mathfrak{s}} N_{\ell+1}$ 或 $N_{\ell+1} \le_{\mathfrak{s}} N_\ell$，则位置 (M_1, A_1)、(M_2, A_2) 等价。我们将 $(M_1, A_1) \sim (M_2, A_2)$ 或$M_1 \sim_{A_1} M_2$记作。

3) 对于局部位置 $\mathfrak{a} = (M, A)$，令 $K_{\mathfrak{a}} = K_{(M,A)} = \{N : (N, A) \sim (M, A)\}$；因此，在 $(M, A)/\sim$ 中，我们将 A 作为集合固定下来，并固定它在 $\emptyset$上的 M 中实现的类型。
4）我们称这样的类 $K_{\mathfrak{a}}$ 为一个位置。
5）当满足以下条件时，我们称 $\mathbf{P}$ 为某个位置 $K_{(M,A)}$ 中的类型不变集[4]：

(a) $\mathbf{P} \subseteq \{\mathscr{S}_{\rm bss}(N) : N \sim_A M\}$ (b) $\mathbf{P}$ 中的成员资格在关于 A (c) 的同构下保持不变，若 $N_1 \le_{\mathfrak{s}} N_2$ 都属于 $K_{(M,A)}, p_2 \in \mathscr{S}_{\rm bss}(N_2)$ 不在 N_1 上分叉，则 $p_2 \in \mathbf{P} \Leftrightarrow p_2 \restriction N_1 \in \mathbf{P}$。

6）当存在某个 N 使得 $A \subseteq N \le_{\mathfrak{s}} M$，且 M 在 N 上饱满时，我们称 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 在 A 上饱满。

断言／定义 1.11。1）若 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$ 且 $\mathbf{P}_0 \subseteq \mathscr{S}_{\rm bss}(M)$，则在位置 $K_{(M,A)}$ 中，至多存在一个类型不变集 $\mathbf{P}'$，使得 $\mathbf{P}^+ \cap \mathscr{S}_{\rm bss}(M) = \mathbf{P}_0$ 且 $M \le_{\mathfrak{s}} N \wedge p \in \mathbf{P}^+ \cap \mathscr{S}_{\rm bss}(N) \Rightarrow (p$ 不在 M 上分叉)。
2)此外，如果 M 饱满[5] 超过 A，那么我们可以省略第 1 部分中的最后一个要求。
( )
3) If $\mathfrak{a} = (M_1, A), (M_2, A) \in K_{\mathfrak{a}}$ *then* $K_{(M_2,A)} = K_{\mathfrak{a}}$.

证明。很简单。 $\square_{1.11}$

定义 1.12. 1) 若 1.11 中存在这样的 $\mathbf{P}$，我们将其记为 $\mathrm{inv}(\mathbf{P}_0) = \mathrm{inv}(\mathbf{P}_0, M)$.

2)若 $\mathbf{P}_0 = \{p\}$，则令$\mathrm{inv}(p) = \mathrm{inv}(p, M) = \mathrm{inv}(\{p\})$。
3) 当 $\mathrm{inv}(p)$ 良定义时，我们称 $p \in \mathscr{S}_{\rm bss}(M)$ 在 A 上不分裂（或可定义）。

[4]确实，一个类[5]M 在 A 上饱满 M_1，意味着存在某个 M_1，使得 $A \subseteq M_1 \le_{\mathfrak{s}} M$ 和 M 在 M_1 上饱满。

§ 2. I Imaginary elements, an essential-(μ,λ)-a.e.c. and frames

§ 2(A)。本质上是抽象初等类。

我们考虑修订抽象初等类的定义 $\mathfrak{k}$，允许在$\tau_{\mathfrak{k}}$ 中使用具有无限多个位置的函数符号，同时保留局部特征，例如，如果 $M_n \leq M_{n+1}$，$M = \cup\{M_n : n < \omega\}$ 是唯一确定的。在此之前，我们介绍相关的等价关系。在这一语境下，我们可以为无限序列上的等价关系所对应的等价类命名。

定义2.1. 我们称 $\mathfrak{k}$ 是本质上的 $[\lambda,\mu)$-抽象初等类，或ess-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类；如果($\lambda < \mu$ 且) 它是一个由以下内容组成的对象，我们可以用 (μ,λ) 代替 $[\lambda,\mu)$:

$I(a)$ 一个词汇表 $\tau = \tau_{\mathfrak{k}}$，其中包含可能具有无限元数的谓词和函数符号，但 $\leq \lambda(b)$ 一个 $K = K_{\mathfrak{k}}$ 的 τ-模型类 (c) 一个二元关系 $\leq_{\mathfrak{k}}$ 在 K

使得

$II(a)$ 如果 $M_1 \cong M_2$ 那么 $M_1 \in K \Leftrightarrow M_2 \in K(b)$ 如果 $(N_1, M_1) \cong (N_2, M_2)$ 那么 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}} N_1 \Leftrightarrow M_2 \leq_{\mathfrak{k}} N_2(c)$ 每个 $M \in K$ 的基数为 $\in [\lambda,\mu)$ (d) $\leq_{\mathfrak{k}}$ 是 K III_1 上的偏序，如果 $\langle M_i : i < \delta\rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，且 $|\bigcup M_i| < \mu$，那么存在唯一的$_{i<\delta}M \in K$ 使得 $|M| = \cup\{|M_i| : i < \delta\}$ 且 $i < \delta \Rightarrow M_i \leq_{\mathfrak{k}} MIII_2$ 如果另外 $i < \delta \Rightarrow M_i \leq_{\mathfrak{k}} N$，那么 $M \leq_{\mathfrak{k}} NIV$如果 $M_1 \subseteq M_2$ 且 $M_\ell \leq_{\mathfrak{k}} N$ 对于 $\ell = 1$，2 那么 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_2V$如果 $A \subseteq N \in K$，那么存在 M满足 $A \subseteq M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 且 $\|M\| \leq \lambda + |A|$（这里我们只需将情况限制为 $|A| \leq \lambda$ 即可）。

定义 2.2. 1) 如果 $\mathfrak{k}$ 是 ess-λ-抽象初等类，则称其为 ess-$[\lambda,\lambda^+)$-抽象初等类。
2)我们称 $\mathfrak{k}$ 是一个本质上几乎处处闭合类，如果存在 λ 使得它是一个本质上-$[\lambda,\infty)$-抽象初等类，因此 $\lambda =$ 勒文海姆–斯科伦–塔斯基($\mathfrak{k}$)。
3)若 $\mathfrak{k}$ 是一个ess-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类，且 $\lambda \leq \lambda_1 < \mu_1 \leq \mu$ 则令 $K^{\mathfrak{k}}_{\lambda_1} = (K_{\mathfrak{k}})_{\lambda_1} = \{M \in K_{\mathfrak{k}} : \|M\| = \lambda_1\}$, $K^{\mathfrak{k}}_{\lambda_1,\mu_1} = \{M \in K_{\mathfrak{k}} : \lambda_1 \leq \|M\| < \mu_1\}$。
4)我们定义 $\Upsilon^{\rm or}_{\mathfrak{k}}$，如 [She09b, 0.8=L11.1.3A(2)]中所述。
5) 当元数($\tau_{\mathfrak{k}}$) $= \aleph_0$ 时，我们可以省略“本质上”，其中元数($\mathfrak{k}$) $=$ 元数($\tau_{\mathfrak{k}}$)，并且对于词汇表 τ，元数(τ) $=$ 最小$\{\kappa$: 每个谓词和函数符号的元数都是 $< \kappa\}$。

现在我们来讨论关于本质上几乎处处闭合的断言。

断言 2.3。设 $\mathfrak{k}$ 是一个本质上几乎处处闭合的 $[\lambda,\mu)$-a.e.c.

1) Ax$(III)_1$,$(III)_2$ 的平行结论对有向族 $\langle M_t : t \in I\rangle$ 成立。
2) 如果 $M \in K$，我们可以找到 $\langle M_{\bar a} : \bar a \in {}^{\omega>}M\rangle$，使得:

(a) $\bar a \subseteq M_{\bar a} \leq_{\mathfrak{k}} M(b)$ $\|M_{\bar a}\| = \lambda^-(c)$ 如果 b 是 $\bar a$ 的置换，则 $M_{\bar a} = M_{\bar b}$

$\bar{}$(d) 如果 $\bar{a}$ 是 b 的子序列，那么 $M_{\bar{a}} \le_{\mathfrak{k}} M_{\bar{b}}$。

3) 如果 $N \le_{\mathfrak{k}} M$ 我们可以在（2）中加入 $\bar{a} \in {}^{\omega>}N \Rightarrow M_{\bar{a}} \subseteq N$。
4）如果为简单起见，$\lambda_* = \lambda + \sup\{\Sigma\{|R^M|\colon R \in \tau_{\mathfrak{k}}\} + \Sigma\{|F^M|\colon F \in \tau_{\mathfrak{k}}\}\colon M \in K_{\mathfrak{k}}$ 的基数为 $\lambda\}$，那么~~$K_{\mathfrak{k}}$~~和 $\{(M,N)\colon N \le_{\mathfrak{k}} M\}$ 本质上是 $\mathrm{PC}_{\chi,\lambda_*}$-类，其中 $\chi = |\{M/\cong\colon M \in K^{\mathfrak{k}}_{\lambda}\}|$，注意到 $\chi \le 2^{2^\theta}$。也就是说，$\langle M_{\bar{a}}\colon \bar{a} \in {}^{\omega>}A\rangle$ 满足第（2）部分的 (b)、(c)、(d) 条款，使得 $A = \cup\{|M_{\bar{a}}|\colon \bar{a} \in {}^{\omega>}A\}$ 表示一个具有论域 A 的唯一 $M \in K_{\mathfrak{k}}$，对 $\le_{\mathfrak{k}}$也类似（关于 $\mathrm{PC}_{\chi,\lambda_*}$的定义，见 [She09a, 1.4(3)]）。注意，如果在 $\tau_{\mathfrak{k}}$ 中，没有两个不同的符号在每个 $M \in K_{\mathfrak{k}}$ 中的解释都相同，那么 $|\tau)k_*| \le 2^{2^\lambda}$。

5)关于省略类型在 [She99] 或 [She09b、0.9=L0n.8、0.2=0n.11] 中的结果成立，即如果 $\alpha < (2^{\lambda_*})^+ \Rightarrow K^{\mathfrak{k}}_{\supseteq_\alpha} \ne \emptyset$ 那么 $\theta \in \underline{[\lambda,\mu)} \Rightarrow K_\theta \ne \emptyset$，并且存在一个 EM-模型，即 $\Phi \in \Upsilon^{\mathrm{or}}_{\mathfrak{k}}$，其满足 $|\tau_\Phi| = |\tau_{\mathfrak{k}}| + \lambda$，且 EM($I,\Phi$) 对任意线性序 I 都具有基数 $\lambda + |I|$。

6）关于“是普遍模型齐次的”与“是饱和的”等价性的引理成立（参见 [She09f,3.18=3.10] 或 [She09c, 1.14=L0.19]）。

7）我们可以推广 [She09c, §1] 中的结果，即从 ess λ-抽象初等类导出 ess-(∞,λ)-抽象初等类。

证明。关于 2.3(7) 中推广情形的相同证明，见下文 §5。要点是，在 §5 的术语中，我们的 $\mathfrak{k}$ 是一个 (λ,μ,κ)-抽象初等类（自动带有素模型）。$\square_{2.3}$

备注 2.4。1) 在 2.3(4) 中，如果我们对 K_λ 有更好的定义，就可以降低 χ 的上界；例如，如果 arity(τ) $\le \kappa$，那么 $\chi = 2^{(\lambda^{<\kappa}+|\tau|)}$ 其中 arity(τ) $= \min\{\kappa\colon \tau$ 的每个谓词和函数符号的元数都是 $< \kappa\}$。
2) 我们可以使用上述 $|\tau_{\mathfrak{s}}| \le \lambda$，arity($\tau_{\mathfrak{k}}$) $= \aleph_0$，从而得到 $\{(M,\bar{a})/\cong M \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda, \bar{a} \in^\lambda M$ 列表的基数为 $\le 2^\lambda$。另见 2.18。
3) 在下面的 2.10 中，如果省略“$\mathbb{E}$ 很小”以及 $\lambda_1 = \sup\{|\mathrm{seq}(M)/\mathbb{E}_M|\colon M \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda\}$ 是$< \mu$，那么 $\mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu)}$ 是一个本质的-$[\lambda_1,\mu)$-抽象初等类。
4) 在定义 2.1 中，我们可以省略公理 V，并以自然的方式定义 LST($\mathfrak{k}$) $\in [\lambda,\mu]$；如果 $M \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda \Rightarrow \mu > |\mathrm{seq}(M)/\mathbb{E}_M|$，那么在下面的 2.10(1) 中，我们可以省略“$\mathbb{E}$ 很小”。
5) 在这种“变换”中，我们能否保留元数有限性？一个自然的候选方案是尝试用 $\{\bar{a}\colon \bar{a} \in {}^{\omega>}M\}$ 编码 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$，并且存在 $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_1$ 使得 $M \le_{\mathfrak{s}} M_1$，且 ortp(a_ℓ, M_0, M_1) 与 p 平行，而 $\bar{a}$ 在 $(M_0, M_1)\}$ 中独立。例如，如果 $K_{\mathfrak{s}}$ 是饱和的，这会有所帮助，但我们仍怀疑它可能行不通。

6)ess-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类是什么意思？我们能只考察 $\langle M_t\colon t \in I\rangle$，$I$有向，$t \le_I s \Rightarrow M_t \le_{\mathfrak{s}} M_s \in K_\lambda$吗？但对于同构类型，我们要进行某种完备化，从而使更多有序对同构，但 $\bigcup M_t$ 不能确定$_{t\in I}$。
$M = \langle M_t : t \in I\rangle$ 且补全可能取决于此表示。
7) 如果我们想避免这种情况，且该数为 λ'，那么我们应将 seq(N) 的定义（见 2.5(b)）改为 seq$'(N) = \{\bar{a}\colon \ell g(\bar{a}) = \lambda$并且对于某个 $M \le_{\mathfrak{s}} N$来自$K^{\mathfrak{k}}_\lambda, \langle a_{1+\alpha}\colon \alpha < \lambda\rangle$ 列出 M 的成员以及 $a_0 \in \{\gamma\colon \gamma < \mu_*\}$。

§ 2(B). 虚元素与光滑等价关系。

现在我们回到获取轨道类型的规范基这一目标。

定义 2.5. 设 $\mathfrak{k}=(K_{\mathfrak{k}},\le_{\mathfrak{k}})$ 为 λ-抽象初等类，或简称 ess-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类（如果 $\mathfrak{k}_\lambda=\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$我们可以写 $\mathfrak{s}$ 代替 $\mathfrak{k}_\lambda$，见 2.11）。当：时，我们称 $\mathbb{E}$ 为光滑的 $\mathfrak{k}_\lambda$-等价关系：

(a) $\mathbb{E}$ 是一个定义域为 $K_{\mathfrak{k}}$ 、将 M 映射到 $\mathbb{E}_M$(b)的函数，其中 $M\in K_{\mathfrak{k}}$，$\mathbb{E}_M$ 是M的一个子集上的等价关系，$\mathrm{seq}(M)=\{\bar a:\ \bar a\in{}^{\lambda}M$ 且 $M\restriction\mathrm{Rang}(\bar a)\le_{\mathfrak{k}}M\}$，因此 $\bar a$ 不一定无重复；注意，$\mathfrak{k}$ 确定了 λ，严格来说是在非空时 (c)。如果 $M_1\le_{\mathfrak{k}}M_2$，那么 $\mathbb{E}_{M_2}\restriction\mathrm{seq}(M_1)=\mathbb{E}_{M_1}$ (d)。如果 f 是从 $M_1\in K_{\mathfrak{s}}$ 到 M_2 的同构，那么f 将 $\mathbb{E}_{M_1}$ 映射到 $\mathbb{E}_{M_2}$ (e)。如果 $\langle M_\alpha:\ \alpha\le\delta\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-连续递增的，那么$\{\bar a/\mathbb{E}_{M_\delta}:\ \bar a\in\mathrm{seq}(M_\delta)\}=\{\overline{a/\mathbb{E}}_{M_\delta}:\ \bar a\in\bigcup_{\alpha<\delta}\mathrm{seq}(M_\alpha)\}$.

---

2) 如果每个 $\mathbb{E}_M$ 都有 $\le\|M\|$ 个等价类，我们就称 $\mathbb{E}$ 是小的。

注 2.6. 1) 注意，如果我们有 $\langle\mathbb{E}_i:\ i<i^*\rangle$，每个 $\mathbb{E}_i$ 都是一个光滑的 $\mathfrak{k}_\lambda$-等价关系，并且 $i^*<\lambda^+$，那么我们可以找到一个光滑的 $\mathfrak{k}_\lambda$-等价关系 $\mathbb{E}$，使得本质上 $\mathbb{E}_M$-等价类就是 $i<i^*$的 $\mathbb{E}_i$-等价类；具体地说：不失一般性，$i^*\le\lambda$，且 $\bar a\mathbb{E}_M b$ 当且仅当 $\ell g(\bar a)=\ell g(b)$，并且

$\circledast_1$ $i(\bar a)=i(\bar b)$ and if $i(\bar a)<i^*$ then $\bar a\restriction[1+i(\bar a)+1,\lambda)\mathbb{E}_{i(\bar a)}\bar b\restriction[1+i(\bar b)+1,\lambda)$ where $i(\bar a)=\mathrm{Min}\{j:(j+1<i(*))\wedge a_0\ne a_{1+j}$ or $j=\lambda\}$.

2) 实际上，$i^*\le 2^\lambda$ 是可以的，例如，选取一个函数 e，从 $\{e:\ e$ 上的一个等价关系到 i^*，并且对于 $\bar a,b\in\mathrm{seq}(M)$，我们令 $i(\bar a)=\mathrm{e}(\{(i,j):\ a_{2i+1}=a_{2j+1}\}$，并且

$\circledast_2$ $\bar a\in\mathbb{E}_M\bar b$ iff $i(\bar a)=i(\bar b)$ and $\langle a_{2i}:i<\lambda\rangle\mathbb{E}_{i(\bar a)}\langle b_{2i}:i<\lambda\rangle$.

3) 我们可以将 seq(M) 重新定义为 ${}^{\lambda\ge}M$，那么就必须对上面的内容做一些小的修改。

定义 2.7. 设 $\mathfrak{k}$ 为一个 λ-抽象初等类，或仅为本质-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类，且 $\mathbb{E}$ 为一个小的光滑$\mathfrak{k}$-等价关系。读者可为简单起见，假定词汇表$\tau_{\mathfrak{k}}$ 仅含谓词。另设 $F_*,c_*,P_*\notin\tau_{\mathfrak{k}}$。我们如下定义 τ_* 和 $\mathfrak{k}_*=\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle=(K_{\mathfrak{k}_*},\le_{\mathfrak{k}_*})$:

(a) $\tau^*=\tau\cup\{F_*,c_*,P_*\}$ 其中 P_* 为一元谓词，c_* 为个体常元，F_* 为一个 λ 元函数符号（b） $K_{\mathfrak{k}_*}$ 是满足以下条件的 $\tau^*_{\mathfrak{k}_*}$- 模型的类：对于某个模型 $M\in K_{\mathfrak{k}}$，我们有：(α) $|M|=P_*^{M^*}$ (β) 若 $R\in\tau$，则 $R^{M^*}=R^M$ (γ) 若 $F\in\tau$的元数为 α，则 $F^{M^*}\restriction M=F^M$；并且对于任意 $\bar a\in{}^{\alpha}$，(M^*) $\bar a\notin{}^{\alpha}M$，我们有 $F^{M^*}(\bar a)=c_*^{M^*}$（或者允许偏函数，或在 $\alpha>0$时使用 $F^{M^*}(\bar a)=a_0$，并在 $\alpha=0$时使用 $F^{M^*}(\langle\rangle)$，即 F是个体常元）；(δ) F_* 是一个 λ 元函数符号，且：(i) 若 $\bar a\in\mathrm{seq}(M)$，则 $F_*^{M^*}(\bar a)\in|M^*|\backslash|M|\backslash\{c_*^{M^*}\}(ii)$；若 $\bar a,\bar b\in\mathrm{Dom}(\mathbb{E})\subseteq\mathrm{seq}(M)$，则 $F_*^{M^*}(\bar a)=F_*^{M^*}(\bar b)\Leftrightarrow\bar a\mathbb{E}_M\bar b$

(iii) 若 $\bar{a} \in {}^{\lambda}(M^*)$ 且 $\bar{a} \notin \mathrm{Dom}(\mathbb{E}) \subseteq \mathrm{seq}(M)$，则 $F^{M^*}_*(\bar{a}) = c^{M^*}_*(\varepsilon)$ $c^{M^*}_* \notin |M|$；并且若 $b \in |M^*| \backslash |M| \backslash \{c^{M^*}_*\}$，则存在某个 $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(\mathbb{E}) \subseteq \mathrm{seq}(M)$，使得 $F^{M^*}_*(\bar{a}) = b(c)$。 $\leq_{\mathfrak{k}_*}$ 是定义在 $K_{\mathfrak{k}_*}$ 上的二元关系，定义如下：$M^* \leq_{\mathfrak{k}_*} N^*$ 当且仅当 (α) $M^* \subseteq N^*$，并且存在某个 $M, N \in \mathfrak{k}$ 如条款 (b) 所述，使得 (β) $M \leq_{\mathfrak{k}} N$。

定义 2.8。1）在 2.7(1) 中，如果 $M \in \mathfrak{k}$ 和 $M^* \in K_{\mathfrak{k}_*}$ 如上文条款 (b) 所述，我们就称 $M \in \mathfrak{k}$ 是 $M^* \in K_{\mathfrak{k}_*}$ 的一个见证。
2）如果 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 和 $M^* \leq_{\mathfrak{k}^*_\lambda} N^*$ 如上文条款 (c) 所述，我们就称 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 是 $M^* \leq_{\mathfrak{k}^*_\lambda} N^*$ 的见证。

讨论 2.9。到目前为止，我们只考虑每个谓词和函数符号都具有有限元数的词汇表，这一限制似乎非常合理。此外，先验看来，若要与超稳定性相平行，无限元数是相当不可取的。然而，我们希望拥有虚元素（尤其是类型的典范基），这迫使我们接受无限元数。代价是，在 τ-模型类中，递增的 τ-模型链的并并非良定义的 τ-模型；更准确地说，我们可以证明它存在，但无法证明其光滑性；然而，在类 $\mathfrak{k}$ 内，它将是良定义的。

断言 2.10。1) 如果 $\mathfrak{k}$ 是一个 $[\lambda, \mu)$-抽象初等类，或者只是一个本质 $[\lambda, \mu)$-抽象初等类，并且 $\mathbb{E}$ 是一个小的平滑 $\mathfrak{k}$-等价关系，那么 $\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle$ 是一个本质 $[\lambda, \mu)$-抽象初等类。2) 如果 $\mathfrak{k}$ 具有 amalgamation，且 $\mathbb{E}$ 是一个小的 $\mathfrak{k}$-等价类，那么 $\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle$ 具有 amalgamation 性质。

证明。同样的证明。留给读者作为练习。 $\square_{2.10}$

§ 2(C). 优良框架。

现在我们回到优良框架。

定义 2.11. 1) 如果满足定义 [She09c, 2.1=L1.1tex]，但以下情况除外：我们称 $\mathfrak{s}$ 为一个良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架：

(a) 在条款 (a)中，$\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}} = (K_{\mathfrak{s}}, \leq_{\mathfrak{s}})$ $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类，而 $\mathfrak{K}[\mathfrak{s}]$ 是一个 ess-(∞, λ)-抽象初等类。(b) $K_{\mathfrak{s}}$ 在 χ 中每个 $\chi \in [\lambda, \mu)$ 都有一个超极限模型 (c) $K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}/\cong$ 具有基数 $\leq 2^{\lambda}$，为方便起见。

讨论 2.12。我们可以自行选择其他相关概念，而且大多能得到类似的结果。具体而言：

(a) 我们可以降低要求：如 [SV, §2] 中所示，我们可以用 $\mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$ 的形式版本替代 $\mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$；($b$) 我们可以只要求 $\mathfrak{s}_\lambda$ 具有良好性，即将模型类限制为 $\mathfrak{s}$，并且只要求具备上述形式性质，因此 amalgamation 和联合嵌入性质只对基数为 λ 的模型有要求。

断言 2.13。这里 [She09c], [She09e] 和 §1 中的所有定义和结果，对良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架均成立。
证明。没问题。 $\square_{2.13}$

定义 2.14. 如果 $\mathfrak{s}$ 是一个 $[\lambda,\mu)$-框架，或者只是一个 ess-$[\lambda,\mu)$-框架，并且 $\mathbb{E}$ 是一个小的光滑 $\mathfrak{s}$-等价关系，那么令 ~~$\mathfrak{t}=\mathfrak{s}$~~$\langle\mathbb{E}\rangle$ 定义如下：

(a) $\mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}=\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}\langle\mathbb{E}\rangle$($b$) $\mathscr{S}_{\rm bst}(M^*)$ $=$ {正交型$\mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}(a,M^*,N^*)$：$M^*\le_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}}N^*$并且若 $M\le_{\mathfrak{k}}N$见证$M^*,N^*\in\mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}$则 $a\in N\backslash M$且正交型$_{\mathfrak{s}}(a,M,N)\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$}($c$) 非分叉同理。

注 2.15。我们还可以补充：如果 $\mathfrak{s}$ 是[6] 一个 NF框架，我们类似地将 $\mathfrak{t}=\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 定义为一个 NF 框架，见 [She09e]。

断言 2.16。1) 若 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda,\mu)$-框架，$\mathbb{E}$ 是一个小的、光滑的 $\mathfrak{s}$-等价关系~~，~~则 $\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 是一个良好的 ess-$[\lambda,\mu)$-框架。2) 在 (1) 中，对每个 κ, $\dot{I}(\kappa,K^{\mathfrak{s}<\mathbb{E}>})=\dot{I}(\kappa,K^{\mathfrak{s}})$。3) 若 $\mathfrak{s}$ 有素模型/正则基数，则 $\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 也有。

备注 2.17。我们还可以补充：如果 $\mathfrak{s}$ 是一个 NF 框架，那么 $\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$也是，因此 $(\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle)^{\rm full}$ 是一个满的 NF 框架；参见 [She09e]。

证明。显而易见。 $\square_{2.16}$

我们的目标是对 $\mathfrak{s}$ 做非本质的改变，使得对于每个 $p\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 都存在一个典范基底，等等。下面的断言表明，在我们所介绍的情境中，这一目标可以实现。

断言 2.18。虚元素 断言

假设 $\mathfrak{s}$ 一个良好的 λ-框架，或者只是一个良好的 ess-$[\lambda,\mu)$-框架。

1)若 $M_*\in K_{\mathfrak{s}}$ 以及 $p^*\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_*)$，那么[7] 存在一个小的、光滑的 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$-等价关系 $\mathbb{E}=\mathbb{E}_{\mathfrak{s},M_*,p^*}$ 以及函数 F，使得：

($*$) 若 $M_*\le_{\mathfrak{s}}N$ 且 $\bar a\in{\rm seq}(N)$使得 $M=:N\restriction{\rm Rang}(\bar a)\le_{\mathfrak{s}}N$ 且 $M\cong M_*$，则(α) ~~F(~~$N,\bar a$)是良定义的当且仅当 $\bar a\in{\rm Dom}(\mathbb{E}_N)$，且F$(N,\bar a)$属于$\mathscr{S}{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ (β) $S\subseteq\{(N,\bar a,p):N\in K_{\mathfrak{s}},\bar a\in{\rm Dom}(\mathbb{E}_N)\}$ 是满足以下条件的极小类：(i) 若 $\bar a\in{\rm seq}(M_*)$且 p 不在.....上分叉 $M_*\restriction{\rm Rang}(\bar a)$，则 $(M_*,\bar a,p)\in S$(ii) S 在同构下封闭 (iii) 若 $N_1\le_{\mathfrak{s}}N_2,p_2\in\mathscr{S}{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_2)$ 不在.....上分叉 $\bar a\in{\rm seq}(N_1)$，则 $(N_2,\bar a,p_2)\in S\Leftrightarrow(N_1,\bar a,p_2\restriction N_1)\in S$($iv$)若 $\bar a_1,\bar a_2\in{\rm seq}(N)$ $p\in\mathscr{S}{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 不在.....上分叉 $N\restriction{\rm Rang}(\bar a_\ell)$ 对于 $\ell=1$, 2 则 $(N_2,\bar a_1,p)\in S\Leftrightarrow(N_2,\bar a_2,p)\in S$

(γ) F$(N,\bar a)=p$当且仅当 $(N,\bar a,p)\in S$因此若 $\bar a,b\in{\rm seq}(N)$，则：$\bar a\mathbb{E}_Nb$当且仅当F$(\bar a,N)=$F(b,N)。

[6]读者可以忽略此版本。[7]注意，完全可能存在一个自同构，将 M^* 映射到某个 $p^{**}\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M^*)$，使得 $p^{**}\neq p^*$。

2）存在唯一的 small[8] 光滑 $\mathbb{E}$-等价关系 $\mathbb{E}$，称为 $\mathbb{E}_{\mathfrak{s}}$，以及函数 F，使得：

(∗∗)(α) F$(N,\bar{a})$ 是良定义的，当且仅当 $N \in K_{\mathfrak{s}}$ 且 $\bar{a} \in \mathrm{seq}(N)$ (β) F$(N,\bar{a})$ 若有定义，则属于 $\mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ (γ) 若 $N \in K_{\mathfrak{s}}$ 且 $p \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(N)$，则存在 $\bar{a} \in \mathrm{seq}(N)$，使得 Rang($\bar{a}$) $=N$ 且 F$(N,\bar{a}) = p$(δ) (~~$\bar{a} \in$~~) 若 $M\mathrm{seq}(M \le_{\mathfrak{s}} N)$ 且 N，则 F($\bar{a}$,M) 是 F($\bar{a}$,ε) 的（良定义且是）非分叉扩张 ($\bar{a}_\ell \in$) 若 $N\mathrm{seq}(N)$ 且对于 $\bar{a}_\ell$，F($\ell = 1$, $\bar{a}_1 \mathbb{E}_N \bar{a}_2 \Leftrightarrow$) 是良定义的，则 NF($\bar{a}_1$, =~~) NF~~($\bar{a}_2$,ζ) () F 与同构可交换。

---

3) 对于 $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$，其中 $\mathbb{E}$ 如第（2）部分所示，且 $M^* \in K_{\mathfrak{t}}$ 由 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 和 $p^* \in \mathscr{S}$ 见证，$\mathrm{bs}_{\mathfrak{t}}(M^*)$ 投影到 $p \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，令 bas($p^*$) =bas($p$) =F$(\bar{a}, M^*)/\mathbb{E}$，只要 F$(M,\bar{a})$ $= p$。也就是说，假设 M_ℓ 见证 $M^*_\ell \in K_{\mathfrak{t}}$，对于 $\ell = 1$，2 和 $(M^*_1, M^*_2, a) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{t}}$，则 $(M_1, M_2, a) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$，且 p^* =正交型$_{\mathfrak{t}}(a, M^*_1, M^*_2)$ p =正交型$_{\mathfrak{s}}(a, M_1, M_2)$；那么在 $\mathfrak{t}$ 中：

(α) 若 $M^*_\ell \le_{\mathfrak{s}} M^*, p_\ell \in \mathscr{S}_{\mathrm{bst}}(M^*_\ell)$，则 $p^*_1 \| p^*_2 \Leftrightarrow$bas($p^*_1$) =bas($p^*_2$) ($\beta$) $p^* \in \mathscr{S}_{\mathrm{bst}}(M^*)$ 不在 bas(p^*) 上分裂，参见定义 1.12(3) 或 [She09e, §2 末尾]。

证明。1）设 $M^{**} \le_{\mathfrak{s}} M^*$的基数为 λ，且 p^*不在 M^{**}上分叉。设 $\bar{a}^* = \langle a_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ 列出 M^{**}的元素。

当存在一个见证（M_0, M_2, p_2, f）时，我们称 $p_1 \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ 是 p^* 的一个弱副本，其含义如下：

$\circledast_1$ (a) $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_2$ 且 $M_1 \le_{\mathfrak{s}} M_2$($b$)，若 $\|M_1\| = \lambda$，
则 $\|M_2\| = \lambda$(c) f 是从 M^{**} 到 M_0(d) 的一个同构；
$p_2 \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_2)$ 是 p_1(e) 的一个非分叉扩张； p_2 不在 M_0(f) 上分叉；$f(p^* \restriction M^{**})$ 是 $p_2 \restriction M_0$。

对于 $M_1 \in K^{\mathfrak{s}}_\lambda, p_1 \in \mathscr{S}_{\mathrm{bss}}(M_1)$，若其为 p^* 的弱副本，我们称当存在某个见证 (M_0, M_2, p_2, f) 且 $\bar{c}$ 时，$\bar{b}$ 阐明其为何是弱副本

$\circledast_2$ (a) $b = \langle b_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ 列出 M_1(b)
$\bar{c} = \langle c_\alpha$ 的元素：$\alpha < \lambda\rangle$ 列出 M_2(c) $\{\alpha$ 的元素：
$b_{2\alpha} = b_{2\alpha+1}\}$ 为以下集合编码（α）（$M_2, \bar{c}$）的同构类型（β）$\{(\alpha,\beta)$：$b_\alpha = c_\beta\}$(γ) $\{(\alpha,\beta)$：$f(a^*_\alpha) = c_\beta\}$

Now

[8]对于较小的情形，我们在 λ 中使用稳定性

$\circledast_3$如果 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$是 p^*的弱副本，那么对于某个 $\bar a \in$seq(M)，存在一个 $M_1 \le_{\mathfrak{s}} M$，在其上 p 不分叉，使得 $\bar a$ list M_1 并且明确说明$p \restriction M_1$ 是 p^*的弱副本

$\circledast_4(a)$若 $M \in K^{\mathfrak{s}}_\lambda$ 且 $\bar b$ 阐明了 $p^* \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$是 p^*的弱副本，那么由 b 和 M 我们可以重构~~p_1~~(b)，称其为$p_{M,\,\bar b}(c)$若 $M \le_{\mathfrak{s}} N$令$p_{N,\,\bar b}$为其在 $\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(N)$中的非分叉扩张，我们也将其称为F$(N, b)$。

现在我们定义 $\mathbb{E}$，因此对于 $N \in K_{\mathfrak{s}}$，我们定义一个二元关系 $\mathbb{E}_N$

$\circledast_5(\alpha)\mathbb{E}_N$ 定义在 $\{\bar a$上：对于某个基数为 λ 的 $M \le_{\mathfrak{s}} N$ 以及 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$（它是 p^*的副本），序列 $\bar a$ 阐明 p 是 $p^*\}(\beta)$的弱副本，当且仅当（$\bar a_1$、$\bar a_2$ 如上所述，且）$p_{N,\,\bar a_1} = p_{N,\,\bar a_2}$。

Now

$\odot_1$对于 $N \in K_{\mathfrak{s}}$，$\mathbb{E}_N$是 Dom(E_N) 上的等价关系 $\subseteq$seq$(N)\odot_2$ 如果 $N_1 \le_{\mathfrak{s}} N_2$ 且 $\bar a \in$ seq(N_1)，那么 $\bar a \in$ Dom$(\mathbb{E}_{N_1})$ $\underline{\Leftrightarrow\ \bar a} \in$ Dom$(\mathbb{E}_{N_2})\odot_3$ 如果 $N_1 \le_{\mathfrak{s}} N_2$ 且 $\bar a_1$，$\bar a_2 \in$Dom$(\mathbb{E}_{N_1})$，那么 $\bar a_2 \mathbb{E}_{N_1} \bar a_2 \Leftrightarrow \bar a_1 \mathbb{E}_{N_2} \bar a_2 \odot_4$ 如果 $\langle N_\alpha : \alpha \le \delta\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增连续的，且 $\bar a_1 \in$ Dom$(\mathbb{E}_{N_\delta})$，那么存在某个 $\alpha < \delta$和 $\bar a_2 \in$Dom$(\mathbb{E}_{N_\alpha})$，使得 $\bar a_1 \mathbb{E}_{N_\delta} \bar a_2$。

[为什么？设 $\bar a_2$ 列出 $M_1 \le_{\mathfrak{s}} N_\delta$ 的元素，并设 $p = p_{N_\delta,\,\bar a_1}$ 于是 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_\delta)$，因此存在某个 $\alpha < \delta$，使得 p不在 M_α上分叉，因此存在某个基数为 λ的 $M'_1 \le_{\mathfrak{s}} M_\alpha$，使得类型 p不在 M'_1上分叉。设 $\bar a_2$列出 M'_1的元素，使其阐明 $p \restriction M'_1$是 p^*的一个弱副本。因此显然 $\bar a_2 \in$Dom$(\mathbb{E}_{N_\alpha}) \subseteq$Dom$(\mathbb{E}_{N_\delta})$ 且 $\bar a_1 \mathbb{E}_{N_\delta} \bar a_2$。]

显然，我们已经完成了。

2) 类似地，只是我们改变 (M^*, p^*)，但只需考虑 2^λ 这样的有序对。3) 这应该很明显。 $\square_{2.18}$

定义/断言 2.19. 假设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架，因此不失一般性，假设它是满的。我们可以重复 2.18(3) 和 2.16(2) 中的操作，因此经过 ω 次后，我们得到 $\mathfrak{t}_\omega$，它是满的（即 $\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{t}_\omega}(M^\omega) = \mathscr{S}_{\rm na\mathfrak{t}_\omega}(M^\omega)$），并且 $\mathfrak{t}_\omega$ 具有典范类型基，由函数 bas$_{\mathfrak{t}_\omega}$ 作为见证，见定义 2.20。

证明。显然。 $\square_{2.17}$

定义 2.20. 我们称 $\mathfrak{s}$ 具有类型基，如果存在函数 bas(–)，使得：

(a) 若 $M \in K_{\mathfrak{s}}$和 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，则 bas$(p)$ 是 $M(b)$ p 不在 bas(p) 上分裂的（良定义的）元素；也就是说，M 在 bas(p) 上的任意自同构[9] 都会将 p映射到自身。(c) 若 $M \le_{\mathfrak{s}} N$和 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(N)$，则：bas$(p) \in M$当且仅当 p不在 M 上分叉

[9]还有更强而合理的版本，但可推出函数 bas(–) 满足这些版本

(d) 若 f 是从 $M_1 \in K_{\mathfrak{s}}$ 到 $M_2 \in K_{\mathfrak{s}}$ 的同构，且 $p_1 \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_1)$，则 $f(\mathrm{bas}(p_1)) = \mathrm{bas}(f(p_1))$。

注 2.21. 在 §3 中，我们可以补充：

(e) 强唯一性：如果 $A \subseteq M \leq_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} \mathfrak{C}, p \in \mathscr{S}(A, \mathfrak{C})$ 良定义，那么至多存在一个 $q \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 满足：q 扩张 p 且 $\mathrm{bas}(p) \in A$。（非分叉扩张所需）。

定义 2.22. 当满足以下条件时，我们称 $\mathfrak{s}$ 是等价闭的：

(a) $\mathfrak{s}$ 具有类型基 $p \mapsto \mathrm{bas}(p)(b)$，如果 $\mathbb{E}_M$ 是一个在同构-态射和 $\leq_{\mathfrak{s}}$-扩张下保持不变的等价关系的定义（即 $M \leq_{\mathfrak{s}} N \Rightarrow \mathbb{E}_M = \mathbb{E}_N \restriction^{\omega >} M$），那么存在一个可定义函数 F 从 $^{\omega >}M$ 到 M，使得 $F^M(\bar{a}) = F^M(\bar{b})$ 当且仅当 $\bar{a} E_M b$（或在 $\mathfrak{C}$ 中工作）。

为了表述 $\mathfrak{k}$ 与 $\mathfrak{k}'$ 之间的关系，我们定义。

定义 2.23. 假设 $\mathfrak{k}_1$、$\mathfrak{k}_2$ 是本质 $[\lambda, \mu)$-抽象初等类。
1) 我们称 $\mathbf{i}$ 是 $\mathfrak{k}_2$ 中的解释，当 $\mathbf{i}$ 由以下内容组成。

(a) 一个谓词 $P^*_{\mathbf{i}}(b)$ 一个子集 $\tau_{\mathbf{i}}$，属于 $\tau_{\mathfrak{k}_2}$。

2) 在这种情况下，对于 $M_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$ let $M^{[\mathbf{i}_2]}$ be，令 $\tau_{\mathbf{i}}$-模型为 $M_1 = M_2^{[\mathbf{i}]}$ with

- 论域 $P^{M_2}_{\mathbf{i}}$
- $R^{M_1} = R^{M_2} \restriction |M_1|$ 为 $R \in \tau_{\mathbf{i}}$
- F^{M_1} 同样地，因此即使 F^{M_2} 是满的，F^{M_2} 也可以是偏函数。

3) 当 $\mathfrak{k}_1$ 由 $\mathbf{i}$ 在 $\mathfrak{k}_2$ 中解释时，我们称 $\mathfrak{k}_1$ 是 $\mathbf{i}$-解释的：

(a) $\mathbf{i}$ 是 $\mathfrak{k}_1$(b) $\tau_{\mathfrak{k}_1} = \tau_{\mathbf{i}}$($c$) $K_{\mathfrak{k}_1} = \{M_2^{[\mathbf{i}]}$ 中的解释：若 $M_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}\}$($d$)，且 $M_2 \leq_{\mathfrak{k}_2} N_2$，则 $M^{[\mathbf{i}]} \leq_{\mathfrak{k}_1} N_2^{[\mathbf{i}]}$($e$)；若 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}_1} N_1$ 且 $N_1 = N_2^{[\mathbf{i}]}$，则对于某个 $M_2 \leq_{\mathfrak{k}} N_2$，我们有 $M_1 = M_2^{[\mathbf{i}]}$ (f)；若 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}_1} N_1$ 且 $M_1 = M^{[\mathbf{i}_2]}$，则 $M_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$；于是，可能将 M_2 替换为一个在 M_1 上与其同构的模型，存在 $N_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$，使得我们有 $M_2 \leq_{\mathfrak{k}_2} N_2$ 和 $N_1 = N_2^{[\mathbf{i}]}$。

定义 2.24. 1) 假设 $\mathfrak{k}_1$ 在 $\mathfrak{k}_2$ 中由 $\mathbf{i}$ 解释。当满足以下条件时，我们称其为严格解释：如果 $M^{[\mathbf{i}_2]} = N_2^{[\mathbf{i}]}$，那么 M_2、N_2 在 $M^{[\mathbf{i}_2]}$ 上同构。
2) 如果存在 n 和 $\mathfrak{k}'_0$、……、$\mathfrak{k}'_n$，使得 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}'_0$、$\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}'_n$，且对于每个 $\ell < n$，$\mathfrak{k}_\ell$ 在 $\mathfrak{k}_{\ell+1}$ 中被严格解释，反之亦然，则称 $\mathfrak{k}_1$ 与 $\mathfrak{k}_2$ 等价。实际上，我们可以要求 $n = 2$，并且对于 $\ell = 1$，k_ℓ 在 $\mathfrak{k}'_1$ 中被严格解释，2。

定义 2.25. 同上，对于（良好的）ess-$[\lambda, \mu)$-框架。

断言2.26. 假设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess $-$ $[\lambda, \mu)$-框架。则存在 $\mathfrak{C}$ （称为对 $K_{\mathfrak{s}}$ 饱和的μ）使得：

(*a*) $\mathfrak{C}$ 是一个基数为 $\leq \mu$的 $\tau_{\mathfrak{s}}$-模型（*b*） $\mathfrak{C}$ 是某个 $\leq_{\mathfrak{s}}$-连续递增序列 $\langle M_\alpha$ 的并： $\alpha < \mu\rangle$（*c*）若 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 如此， $\lambda \leq \|M\| < \mu$ 那么 M 可嵌入到条款 (b) 中某个 M_α 里（*d*） $M_{\alpha+1}$ 在 $\alpha < \mu$上是饱满的。

§3. I P-simple types-简单型

我们定义集合上的基本类型，不一定是模型。请注意，在定义 3.5 中，使用基数为 $\in$ 的 C (λ,μ) 并无实质损失，因为我们可以将 λ 替换为$\lambda_1=\lambda+|C|$，从而将 $K_{\mathfrak{k}}$ 替换为 $K^{\mathfrak{k}}_{[\lambda_1,\mu)}$。

假设 3.1. 1) $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda,\mu)$-框架，见定义 2.11。
2) $\mathfrak{s}$ 具有类型基，参见定义2.20。3) $\mathfrak{C}$ 表示某个 μ-饱和模型，其 $K_{\mathfrak{s}}$ 的基数为 $\leq\mu$，参见2.26。4)但是 M、A、.....将分别为 $<_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}\mathfrak{C}$、$\subseteq\mathfrak{C}$，但基数为 $<\mu$。

定义 3.2。令 $A\subseteq M\in K_{\mathfrak{s}}$。
1)可定义闭包$(A,M)=\{a\in M$：如果 $M'\leq_{\mathfrak{s}}M''$、$M\leq_{\mathfrak{s}}M''$和 $A\subseteq M'$，那么 $a\in M'$，并且对于 M'的每个自同构 f，$f\restriction A=$恒等映射$_A\Rightarrow f(a)=a\}$。2) 代数闭包(A,M) 的定义类似，但仅包含第一个要求。

定义 3.3. 1) 对于 $A\subseteq M\in K_{\mathfrak{s}}$，令

$$\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(A,M)=\{q\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M):{\rm bas}(q)\in{\rm dcl}(A,\mathfrak{C})\}.$$

2) 若 p作为 $\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 的一个元素是正则的，则称 $p\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(A,M)$ 是正则的。

定义 3.4. 1) $\mathbb{E}_{\mathfrak{s}}$ 与断言 2.18(2) 中的相同。
2) 若 $A\subseteq M\in K_{\mathfrak{s}}$且 $p\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，则 $p\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(A,M)$ 当且仅当 p在 A 上可定义，见 1.12(3)；这又当且仅当定义 1.12 中的 inv(p) 是 $\subseteq A$ 且良定义。

定义 3.5. 设 $A\subseteq\mathfrak{C}$。
1) 我们在 good$(A,\mathfrak{C})$ $=\{c\in\mathfrak{C}$ 上定义一个依赖关系：对于某个 $M<_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}\mathfrak{C},A\subseteq M$，且 ortp$(c,M,\mathfrak{C})$ 在某个有限 $\bar a\subseteq A\}$ 上可定义，如下所示：

- $\circledast$ c在 $(A,\mathfrak{C})$ 中依赖于 J，当且仅当不存在 $M<_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}\mathfrak{C}$ 使得 $A\cup\mathrm{J}\subseteq M$，且 ortp$(c,M,\mathfrak{C})$ 是 ortp$(c,\bar a,\mathfrak{C})$ 的非分叉扩张，其中 $\bar a$ 见证了$c\in$ good$(A,\mathfrak{C})$。

2) 当存在一个饱满的 $M<_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}\mathfrak{C}$ 使得 $B\cup A\subseteq M$，且 ortp$(C,M,\mathfrak{C})$（见定义 1.12(3)）在A上可定义时，我们称 $C\in{}^{\mu>}[\mathfrak{C}]$ 在 (A,B) 上是良好的。（在一阶语境中，我们可以说 $\{c,B\}$ 在 A 上独立，但这里这样说有问题，因为 ortp$(B,A,\mathfrak{C})$ 不一定是基本的。）

3) 我们称 $\langle A_\alpha:\alpha<\alpha^*\rangle$ 在 $\mathfrak{C}$ 中独立于 A，见 [She09e, L8.8,6p.5(1)]，如果我们能找到 $M,\langle M_\alpha:\alpha<\alpha^*\rangle$ 使得：

$\circledast(a)$ $A\subseteq M\leq_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}M_\alpha<_{\mathfrak{s}}\mathfrak{C}$ 对于 $\alpha<\alpha^*(b)$ M 是饱满的（c）$A_\alpha\subseteq M_\alpha(d)$ 正交型（$A_\alpha,M,\mathfrak{C}$）在 A 上可定义（=不在 A 上分裂）（e）$\langle M_\alpha:\alpha<\alpha^*\rangle$ 在 M 上独立。

3A）类似地，“在（A,B）上”。
4）我们自然地定义局部独立，即每个有限子族都独立。

断言 3.6。假设 $a\in\mathfrak{C},A\subseteq\mathfrak{C}$。
1) $a\in$良好的$(A,\mathfrak{C})$ 当且仅当 a实现 $p\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 对某个 M满足 $A\subseteq M<_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}\mathfrak{C}$。

命题 3.7。1) 如果 $A_\alpha \subseteq \mathfrak{C}$ 在 $(A, \bigcup A_i)$ 上对于 $\alpha < \alpha^*, \alpha^* < \omega$ 是良好的，那么 $\langle A_\alpha : i<\alpha \alpha < \alpha^* \rangle$ 在 A 上独立。

2) 通过重新排序可保持独立性。
3) 如果 $p \in \mathscr{S}_{\rm bss}(\bar{a}, \mathfrak{C})$ 是正则的，那么在 $p(\mathfrak{C}) = \{c : c$ 实现 $p\}$ 独立关系满足：

（a）类似于（1）(b)，如果 b^1_ℓ 依赖于 $\{b^0_0, \dots, b^0_{n-1}\}$，对于 $\ell < k$，且 b^2 依赖于 $\{b^1_\ell : \ell < k\}$，那么 b^2 依赖于 $\{b^0_\ell : \ell < n\}$（c），如果 b 依赖于 J，J $\subseteq$ J′，那么 b 依赖于 J′。

备注 3.8。1) 不过，我们尚未提及有限特征，但局部独立性显然满足这一点。

证明。简单。 $\square_{3.7}$

定义 3.9. 1) 假设 $q \in \mathscr{S}_{\rm bss}(M)$ 且 $p \in \mathscr{S}_{\rm bss}(\bar{a}, \mathfrak{C})$。称 q 是显式的 (p, n)-简单，当且仅当 ,:

⊛ 存在 $b_0, \dots, b_{n-1}, c$，使得 [10]: (a) b_ℓ 实现 p(b) c 实现 q(c) b_ℓ 在 $(\bar{a}, c)$ 上不是良好的，针对 $\ell < n$(d) $\langle b_\ell : \ell < n\rangle$ 在 $\bar{a}$(e) 上独立 $\langle c, b_0, \dots, b_{n-1}\rangle$ 在 $\bar{a}$(f) 上是良好的，如果 [12] c' 实现了 q，那么 $c = c'$ 当且仅当对于每个 $b \in p(\mathfrak{C})$，我们有： b 在 $(\bar{a}, c)$ 上是良好的，当且仅当 b 在 $(\bar{a}, , c')$ 上是良好的。

1A) 称 a 在 A 上显式地 (p, n)-简单，如果 ortp$(a, A, \mathfrak{C})$ 是; 类似地，在其他定义中将 (p, n) 替换为 p，意为 " 对于某个 n"。
2) 假设 $q \in \mathscr{S}_{\rm bss}(\bar{a}, \mathfrak{C})$以及 P 如定义1.6中所述。我们称 q 为 P-简单，若可以找到 n 以及显式的 P-正则类型 $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathscr{S}_{\rm bss}(\bar{a}, \mathfrak{C})$，使得：每个 $c \in p(\mathfrak{C})$ 都可由其在 $\bar{a} \cup \bigcup_{\ell<n} p_\ell(\mathfrak{C})$ 上的类型定义，
3) 在 (1) 部分，如果存在 $k > a$ 和 $\langle \bar{a}^*_\ell : \ell < \omega\rangle$ 和 $r \in \mathscr{S}$≤style 恒等映射='7'>bss $(\bar{a}, \mathfrak{C})$, 使得 [仅在有限多个点上成立，见下文 3.9(3B)]，我们称其为强显式 (p, n)-简单：

(a) 对于任意 $c', c'' \in p(\mathfrak{C})$， $\{\bar{a}^*_\ell : \ell < \omega\} \in r(\mathfrak{C})$ 是独立的，我们有 $c' = c''$ 当且仅当对于无限多个 $m < \omega$ （≡ 对除有限多个 $\models$ 之外的所有情况成立，参见关于平均的断言），对于每个 $b \in p(\mathfrak{C})$，我们有：($*$) b 在 $(\bar{a}, \bar{a}, a^*_m, c)$ 上是良好的，当且仅当 b 在 $(\bar{a}, a, a^*_m, c)$ 上是良好的（与 3.13、3.17 比较！）。

3A）在第（1）部分中，如果将 ⊛ 中的条款（f）替换为以下内容，我们称其为弱（p， n）-简单：

(f)′ 如果 b 在$(\bar{a}, a^*_m)$上良好的，那么 c', c' 在 $\bar{a}a^*_m b$上实现相同的类型。

[10]条款（c） + （e）是对" c 在 $\bar{a} + \{b_\ell$ 上是代数的： $\ell < n\}$ 且每个 b_ℓ 都是必要的[11]"的替换[11]这里不适用"ortp(b_ℓ， $\bar{a} + c$， $\mathfrak{C}$)不在 $\bar{a}$ 上分叉"这一替换[12]这在这里似乎是合理的选择，但我们也可以采用其他选择；对于一阶情形，这一选择并不合理

3B) 在第(1) 部分中，如果对于某个 $\bar{a}^* \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}$ 良好的 $\bar{a}$ 对于每个$c \in q(\mathfrak{C})$ 都存在 $b_0, \ldots,$ $b_{n-1} \in p(\mathfrak{C})$，使得 $c \in$可定义闭包$(\bar{a}, \bar{a}^*, b_0, \ldots, b_{n-1})$并且$\bar{a}^\frown\langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle$ 对于 $\bar{a}$ 是良好的，则称 (p,n)-简单。

4）(2)中类似地。

5) 我们定义 $gw_p(b, \bar{a})$ p正则平行于某个 $p' \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a})$($gw$ 对于一般权重)。对于 gw_p (q) 也同样如此。

我们首先列出一些显而易见的性质。

断言 3.10. 1) 如果 c在 $\bar{a}$、 $\bar{a} \subseteq A \subset \mathfrak{C}$ 上是P-简单的，那么 $w_p(c, A)$ 是有限的。

2) 显然的蕴含。

断言 3.11. 1) $[$简单 bs$]$ 的闭包。

2) 假设 $p \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a}, \mathfrak{C})$。如果 $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ 在 A 上是 p-简单的，那么

(a) $\bar{b}_1{}^\frown\bar{b}_2$ 是 p-简单的（当然，即使 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(\bar{b}_\ell, \bar{a}, \mathfrak{C}) \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a}, \mathfrak{C})$ 对于 $\ell = 1$,

2)(b) 也是 P-简单的，在 $\mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a}, \mathfrak{C})$ 中，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(\bar{b}_2{}^\frown\bar{b}_2, \bar{a}, \mathfrak{C})$ 也不是必需的）。

2) 如果 b_α 在 $\bar{a}$ 上对于 $\alpha < \alpha^*, \pi$ 是 p-简单的：$\beta^* \to \alpha^*$ 一一映入，那么 $\sum_{\ell<\alpha} gw_p(b_\alpha, \bar{a}_* \cup \bigcup_{\beta<\beta^*} b_\alpha) = \sum_{i<\beta} gw(b_{\pi(\beta)})\bar{a} \cup \bigcup_{\alpha<\alpha^*} b_{\pi(i)})$。

断言 3.12. $[\mathfrak{s}$ 是等价闭合的$]$。

假设 $p, q \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bs}}(M)$不是弱正交（例如见 6.9）。那么对某个 $\bar{a} \in {}^{\omega>}M$，我们有：$p, q$ 在 $\bar{a}$ 上可定义（无需是平稳的），并且对于某个 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$-可定义函数 F，对于每个 $c \in q(\mathfrak{C})$，正交型$_{\mathfrak{s}}(F(c, \bar{a})\ \bar{a}, \mathfrak{C}) \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a}, \mathfrak{C})$，并且对于某个 n，它是显式的（p,n）-简单的（例如，如果 M是（$\lambda, *$）-饱满的，则 $n = w_p(q)$）。

证明。我们可以找到 n 以及 c_1、 b_0、.....、 $b_{-1} \in \mathfrak{C}$，其中 c实现 q， b_ℓ实现 p， $\{b_\ell, c\}$不在 M上独立且 n 是极大的。选取 $\bar{a} \in {}^{\omega>}M$使得正交型$_{\mathfrak{s}}(\langle c$、 b_0、.....、 $b_{n-1}\rangle$、 M、 $\mathfrak{C}\rangle)$在 $\bar{a}$上可定义。定义 $E_{\bar{a}}$，这是 $q(\mathfrak{C})$上的一个等价关系： $c_1 E_{\bar{a}} c_2$ 当且仅当对于每个$b \in p\mathfrak{C})$，我们都有 b 在$(a$、 $c_1)$上是良好的， $\Rightarrow b$ 在$(\bar{a}$、 $c_2)$上是良好的。根据“$\mathfrak{s}$ 是 eq-闭的”，我们就完成了。$\square_{3.12}$

断言 3.13. 1) 假设 $p, q \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(M)$ 弱正交（例如参见 6.9(1)），但不正交。那么我们可以找到 $\bar{a} \in {}^{\omega>}M$，使得 p, q 在其上可定义，并且 $r_1 \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a}, \mathfrak{C})$，从而令 $p_1 = p \restriction \bar{a}$, $q_1 = q \restriction \bar{a}, n =: w_p(q) \geq 1$，我们有：

$\circledast^n_{\bar{a}, p_1, q_1, r_2}(a)$ $p_1, q_1, r_1 \in \mathscr{S}_{\mathfrak{bss}}(\bar{a})$ $\bar{a} \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}(b)$ p_1, q_1 是弱正交的（参见例如定义 6.9(1)）（c），如果 $\{a^*_n : n < \omega\} \subseteq r_1(\mathfrak{C})$在 $\bar{a}$ 上独立，并且 c 实现 q，那么对于无穷多个 $m < \omega$，存在 $b \in p(\mathfrak{C})$，使得 b 在（$\bar{a}, a^*_n$）上是良好的，但不在（$\bar{a}, a^*_n, c$）上是良好的（d）。在 (c) 中实际上存在 n 独立，使得（但不存在 $n+1$）。

2) 若 $\circledast^n_{\bar{a}, p_1, q_1, r_1}$，则（关于某个可定义函数 F，参见定义 3.9(3)）；若 c实现了 q_1, $c^* = F(c, \bar{a})$ 和正交型 $_{\mathfrak{n}}(c^*, \bar{a}, \mathfrak{C})$ 是 (p_1, n)-简单的。

证明见下文。

断言 3.14. 0) 假设 $A \subseteq \mathfrak{C}$ 和 $a \in \mathfrak{C}$，当其在 $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ 上可定义，且每个 a_ℓ 都属于 $\mathfrak{C}$ 并在 $\mathfrak{C}$ 内部的 A 上良好时，称其为有限的。
1) 若 $a \in \mathrm{dcl}(\cup\{A_i : i < \alpha\} \cup A, \mathfrak{C})$，且 $\mathrm{ortp}(a, A, \mathfrak{C})$ 在 (A) 上是有限的，并且$\{A_i : i < \alpha\}$ 在 A 上独立，那么存在某个有限的 $u \subseteq \alpha$，使得 $a \in \mathrm{dcl}(\cup\{A_i : i \in u\} \cup A, \mathfrak{C})$。

2) 若 $\mathrm{ortp}(b, \bar{a}, \mathfrak{C})$ 是 P-简单的，则它是有限的。
3) 若 $\{A_i : i < \alpha\}$ 在 A 上独立，且 a 在 A 上是有限的，那么存在某个有限的 $u \subseteq \alpha$（甚至 $|u| < \mathrm{wg}(c, A)$），使得 $\{A_i : i \in \alpha \backslash u\}$ 在 $A, A \cup \{c\}$) 上独立（或使用 (A', A'')、$(A', A'' \cup \{c\})$）。

定义 3.15。1) $\mathrm{dcl}(A) = \{a$: 对于 $\mathfrak{C}$ 的每个自同构 f，$f(a) = a\}$。2) $\mathrm{dcl}_{\mathrm{fin}}(A) = \cup\{\mathrm{dcl}(B)$: $B \subseteq A$ 有限的$\}$。3) 若 a 在 A 上是有限的，则存在 $n < \omega$ 和 $c_0, \ldots, c_{n-1} \in$ 良好的 (A),– 使得 $a \in \mathrm{dcl}(A \cup \{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$ （或 $\mathrm{dcl}_{\mathrm{fin}}$? ）。4) 对于这样的 A，当定义良好时，令 $\mathrm{wg}(a, A)$ 为 $w(\mathrm{tp}(a, A, \mathfrak{C}))$。5) 强简单蕴含简单。

断言 3.16. 在定义 3.9(3) 中，对于足够大的某些 $m, k < \omega$，对每个$c \in q(\mathfrak{C})$，都存在 $b_0, \ldots, b_{m-1} \in \bigcup p_\ell(\mathfrak{C})$，使得 $c \in$ 可定义闭包($^{-}\mathrm{a} \cup \{\mathrm{a}^*_\ell$: $\ell < \mathrm{k}\} \cup \{\mathrm{b}_\ell : \ell < n$ $\ell < \mathrm{m}\}$)。

证明. 设 $M_1, M_2 \in K_{\mathfrak{s}(\mathrm{brim})}$ 满足：$M \leq_{\mathfrak{s}} M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_2, M_1$ $(\lambda, *)$ 在 $M, p_\ell \in \mathscr{S}$ 上饱满；$\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M_\ell)$ 是 $p, q_\ell \in \mathscr{S}$ 的非分叉扩张；$\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M_\ell)$ 是 $q, c \in M_2$ 的非分叉扩张；q_1 实现 M_1，M_2, c，且 $\in K^{3,\mathfrak{s}^{\mathrm{pr}}}$(饱满)。令 $b_\ell \in p_1(M_2)$ 对于 $\ell < n^* =$满足：$w_p(q)$，使得 $\{b_\ell : \ell < n^*\}$ 在 (M_1, M_2) 中独立。令$\bar{a}^* \in {}^{\omega>}(M_1)$ 满足：正交型$_{\mathfrak{s}}(\langle c, b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle, M_1, M_2)$ 在 $\bar{a}^*$ 上可定义，并且$r =$正交型$_{\mathfrak{s}}(\bar{a}^*, M_1, M_2)$ $r^+ =$正交型$(\bar{a}^* \hat{} \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle, M, M_2)$。

设 $\bar{a} \in {}^{\omega>}M$，使得正交型$_{\mathfrak{s}}(\bar{a}^*, \langle c, b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle, M, M_2)$ 在 $\bar{a}$ 上可定义。由于 M_1 在 M 上是 $(\lambda, *)$- 饱和的，存在 $\{\bar{a}^*_f : f < \omega\} \subseteq r(\mathfrak{C})$ 在 (M, M_1) 中独立；此外，令 $a^*_\omega = \bar{a}^*$，我们有 $\langle a^*_\alpha : \alpha \leq \omega\rangle$ 在 (M, M_1) 中独立。显然，正交型$_{\mathfrak{s}}(c\bar{a}^*_n, M, M_2)$ 不与 n 相关，因此我们可以找到$\langle\langle b^\alpha_\ell : \ell < n\rangle : \alpha \leq \omega\rangle$，使得 $b^\alpha_\ell \in M_2$、$b^\omega_\ell = b_\ell$ 以及 $\{c\bar{a}^*_\alpha, b^\alpha_0 \ldots b^\alpha_{n-1} : \alpha \leq \omega\}$（如通常一样，作为索引集在 (M_1, M_2) 中独立。
其余部分应当很清楚。 $\square_{3.13}$

定义 3.17. 假设 $\bar{a} \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}, n < \omega, p, q, r \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}}(M)$ 与 p-简单$^{[-]}$ 的定义中相同，但 p, q 弱正交（例如参见定义 6.9(1)）。设 p 是一个可定义的相关函数，使得对任意 $\bar{a}^\nu_\ell \in r(\mathfrak{C})$ $\ell < k^*$ 独立映射$c \mapsto \langle\{b \in q(\mathfrak{C})$: $R\mathfrak{C} \models R(b, c, \bar{a}^*_\ell)\}$，它都是从 $q(\mathfrak{C})$ 到 $\{\langle J_\ell$ 的单射：$\ell < k^*\rangle$： $J_\ell \subseteq p(\mathfrak{C})$ 在依赖下封闭，并具有 p- 权重 $n^*\}$
1) 我们可以在 $r(\mathfrak{C})$ 上定义二元关系 $E = E_{p,q,r}$：当且仅当 $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in r(\mathfrak{C})$ 具有 $p(\mathfrak{C})$ 和 $q(\mathfrak{C})$ 共有的相同投影。
2) 在 r/E 上定义无单位元群及其对 $q(\mathfrak{C})$的作用。

注 3.18. 1) 一个重要之处是：由于 q 是 p-简单的，$w_p(-)$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 上的作用“良好”，因此若 $c_1, c_2, c_3 \in q(\mathfrak{C})$，则 $w_p(\langle c_1, c_2, c_3\rangle \bar{a}) \leq 3n^*$。这使得我们可以用有限序列来定义平均，看起来相当令人满意。或者，可以进一步考察独立集的平均。

2) 奇怪的群：关于群的解释，请注意，在我们当前的语境中，对于每个可定义集 P^M，我们可以添加 P^M 的有限子集群，并以对称差作为加法。

3)上述公理化的原型为 $\mathfrak{s}$ 其中 $K_{\mathfrak{s}} = \{M : M$ 一个 κ-饱和模型，其 $T\}$、$\leq_{\mathfrak{s}} = \prec\restriction K_{\mathfrak{s}}$、$\bigcup$ 是非分叉的，T一个带有 $\kappa(T) \leq_{\mathfrak{s}}$余终性($\kappa$)的稳定的一阶理论。但我们或许更倾向于将有序对 $(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ $\mathfrak{s}$ 如上形式化，$K_{\mathfrak{t}} =$ 的模型T、$\leq_{\mathfrak{t}} = \prec\restriction K_{\mathfrak{t}}$、$\bigcup$ 是非分叉的。$\mathfrak{t}$

从 $\mathfrak{s}$ 我们可以通过在直接极限下对 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 取闭包来重构一个 $\mathfrak{t}$，但在有趣的情形下，我们最终得到一个更大的 $\mathfrak{t}$。

第二部分 稳定类的推广

§4. II Introduction

在本部分中，我们尝试处理诸如“一阶理论 T 的 $\aleph_1$-饱和模型，甚至是稳定的一阶理论”这样的类，而不是“ T 的一个模型”。对于“ T 的模型，甚至是超稳定模型”的平行问题，见 [She09d]。

* * *

现在，有些构造可以通过对基数作归纳法顺利进行，例如处理模型的 $(\lambda, \mathscr{P}(n))$-系统，但并非所有构造都可以。例如，从 $\aleph_0$ 开始，我们可以考虑 $\lambda > \aleph_0$，因此可以找到 F: $[\lambda]^{\aleph_0} \to \lambda$，使得存在 λ 的一个无限递减的 F-闭子集序列，$u \in [\lambda]^{<\aleph_0} \Rightarrow F(u) = 0$ 或许满足 $u \in [\lambda]^{\leq \aleph_0} \Rightarrow |c\ell_F(u)| \leq \aleph_0$。令 $\langle u_\alpha : \alpha < \alpha_* \rangle$ 列出 $\{c\ell_F(u) : u \in [\lambda]^{\leq \aleph_0}\}$，使得 $c\ell_F(u_\alpha) \subseteq c\ell_F(u_\beta) \Rightarrow \alpha \leq \beta$，我们尝试通过对 α 作归纳法来选择 M_{u_α}。

§5. II Axiomatizing a.e.c. without full continuity

§5(A). 抽象初等类。

类似"$\aleph_1$的一阶 T的饱和模型，但该 T并非超稳定"的类不属于抽象初等类，但它们很接近，下面我们为它们提出一个框架。因此，对于较短长度的递增序列，我们提出较弱的要求。

我们稍后将进一步讨论素模型。

我们将把一个 (μ,λ,κ)-抽象初等类提升为 (∞,λ,κ)-抽象初等类（见下文），因此实际上 k_λ 就足够了；但对于我们的主要对象——优良框架而言，情况更为复杂，因为其性质（例如 amalgamation 性质）未必会在提升过程中得到保留。

本节推广了 [She09c，§1]，在某些情况下，差异很小，有时差异本身就是全部要点。

约定 5.1。1) 在本节中，$\mathfrak{k}$ 表示一个有向抽象初等类，参见定义 5.2，也可写作 d.a.e.c.（d 代表有向）。

2) 我们将（在定义之外）写作 $\mu_{\mathfrak{k}},\lambda_{\mathfrak{k}},\kappa_{\mathfrak{k}}$。

定义 5.2. 假设 $\lambda<\mu$、$\lambda^{<\kappa}=\lambda$（为简单起见），且 $\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{<\kappa}<\mu$ 和 κ 是正则的。

当下述公理成立时，我们称 $\mathfrak{k}$是一个（μ，λ，κ）$-$1-d.a.e.c.（根据下面的Ax(0)(d)，我们可以省略或添加"（μ，λ，κ）"；类似地，在类似的定义中也如此；如果 $\kappa=\aleph_0$ 我们可以省略它，那么$\mu=\mu_1^+$ 我们可以写成 $\leq\mu_1$）；当省略 Ax(III)(b)、(IV)(b)时，我们写作 d.a.e.c. 或 0-d.a.e.c.；Ax(0) $\mathfrak{k}$ 由

- (a) $\tau_{\mathfrak{k}}$，一个词汇表，其中每个谓词和函数符号的元数为 $\leq\lambda(b)$ K，一个由 τ-模型组成的类（c）一个定义在 K 上的二元关系 $\leq_{\mathfrak{k}}$ (d) 基数 $\mu=\mu_{\mathfrak{k}},\mu(\mathfrak{k})$ $\lambda=\lambda_{\mathfrak{k}}=\lambda(\mathfrak{k})$ 和 $\kappa=\kappa_{\mathfrak{k}}=\kappa(\mathfrak{k})$（因此 $\mu>\lambda=\lambda^{<\kappa}\geq\kappa=\mathrm{cf}(\kappa)$ 和 $\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{<\kappa}<\mu$）

使得

(e) 若 $M_1\cong M_2$ 则 $M_1\in K\Leftrightarrow M_2\in K(f)$ 若 $(N_1,M_1)\cong(N_2,M_2)$，则 $M_1\leq_{\mathfrak{k}}N_1\Rightarrow M_2\leq_{\mathfrak{k}}N_2(g)$ 每个 $M\in K$ 的基数都是 $\geq\lambda$，但 $<\mu(Ax(I)(a))$ $M\leq_{\mathfrak{k}}N\Rightarrow M\subseteq N(Ax(II)(a))$ $\leq_{\mathfrak{k}}$ 是一个偏序$Ax(III)$ 假设 $\langle M_i:i<\delta\rangle$ 是一个 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增序列，且 $\|\cup\{M_i:i<\delta\}\|<\mu$，则 (a)（并的存在性）若余终性(δ) $\geq\kappa$，则存在 $M\in K$ 使得$i<\delta\Rightarrow M_i\leq_{\mathfrak{k}}M$ 且 $|M|=\cup\{|M_i|:i<\delta\}$，但不一定有 $M=\bigcup M_{ii<\delta}(b)$（极限的存在性）存在 $M\in K$ 使得 $i<\delta\Rightarrow M_i\leq_{\mathfrak{k}}MAx(IV)(a)$（极限 $=$的弱唯一性、弱光滑性）对于上述 $\langle M_i:i<\delta\rangle$，$(a)$ 若余终性(δ) $\geq\kappa$，且 M 如 Ax(III)(a) 中所述，并且 $i<\delta\Rightarrow M_i\leq_{\mathfrak{k}}N$，则$M\leq_{\mathfrak{k}}N$

(*b*) 若 $N_\ell \in K$ 且对于 $\ell = 1,2$ 有 $i < \delta \Rightarrow M_i \leq_{\mathfrak{k}} N_\ell$，则存在 $N \in K$ 和 f_1, f_2，使得对于 $\ell = 1, 2$， f_ℓ 是从 N_ℓ 到 N 的一个 $\leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入，且 $i < \delta \Rightarrow f_1 \restriction M_i = f_2 \restriction M_i Ax(V)$ 若对于 $\ell = 1,2$ 有 $N_\ell \leq_{\mathfrak{k}} M$ 且 $N_1 \subseteq N_2$，则 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}} N_2 Ax(VI)$（L.S.T.性质）若 $A \subseteq M \in K, |A| \leq \lambda$，则存在一个基数为 λ 的 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$，使得 $A \subseteq M$。

注5.3。其中还有一些公理列在5.4(5)中，但我们会在使用它们的任何断言中提及它们，因此无需记忆，所以5.4(1)-(4)省略了它们?

定义 5.4. 1) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 4-d.a.e.c.，或 d.a.e.c$^+$，即它是一个 $(\lambda, \mu, \kappa) - 1$-d.a.e.c.，并且满足下文的 Ax(III)(d)、Ax(IV)(e)，则称之为如此。 2) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 2-d.a.e.c.，或 d.a.e.c.$^\pm$，即它是一个 $(\lambda, \mu, \kappa) - 0$-d.a.e.c.，并且满足下文的 Ax(III)(d)、Ax(IV)(d)，则称之为如此。 3) 若 $\mathfrak{k}$ 是 1-d.a.e.c. 且 Ax(III)(f) 成立，则称 $\mathfrak{k}$ 为 5-d.a.e.c.。 4) 若 $\mathfrak{k}$ 是 1-d.a.e.c.，且 Ax(III)(f) + Ax(IV)(f)，则称 $\mathfrak{k}$ 为 6-d.a.e.c.。 5) 关于定义 5.2，我们考虑以下公理：¯Ax(III)(c) 若 I 是 κ- 有向的，且 $M = \langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的 $s \leq_I t \Rightarrow M_s \subseteq M_s$ 且 $\Sigma\{\|M_s\| : s \in I\} < \mu$，则 M 有一个$\leq_{\mathfrak{s}}$-上界， M，即 $s \in I \Rightarrow M_s \leq_{\mathfrak{k}} M$。 Ax(III)(d)（有向系统的并）若 I 是 κ-有向的， $|I| < \mu, \langle M_t : t \in I \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，且 $\| \cup \{M_t : t \in I\}\| < \mu$，则存在唯一一个 M，其论域为$\cup\{|M_t| : t \in I\}$，使得对每个 $s \in I$ 都有 $M_s \leq_{\mathfrak{k}} M$；我们称之为 $\langle M_t : t \in I \rangle$ 的¯$\leq_{\mathfrak{k}}$-并。 Ax(III)(e) 类似于 Ax(III)(c)，但 I 仅为有向的¯Ax(III)(f) 若 $M = \langle M_i : i < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，cf(δ) $< \kappa$ 且 $| \cup \{M_i : i <_\delta\}| < \mu$，则存在一个 M，它是 M 上的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-素对象，即 (∗) 若 $N \in K_{\mathfrak{k}}$ 且 $i < \delta \Rightarrow M_i \leq_{\mathfrak{k}} N$，则存在一个将 M 嵌入 M、且在 $\cup\{|M_i| \text{ 上的 } \leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入：$i < \delta\}$。¯Ax(IV)(c) 若 I 是 κ-有向的，且 $M = \langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，并且 N_1, N_2¯是 M 的 $\leq_{\mathfrak{s}}$-上界，则对于某个 (N_2', f)，有 $N_2 \leq_{\mathfrak{k}} N_2'$，并且 f 是将 N_1 嵌入 N_2 的 $\leq_{\mathfrak{k}}$- 嵌入，对每个 $s \in I$，它在 M_s 上是恒等映射（这是唯一性的一种弱形式）¯Ax(IV)(d) 若 I 是一个 κ-有向偏序， $M = \langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，$s \in I \Rightarrow M_s \leq_{\mathfrak{k}} M$ 且 $|M| = \cup|M_s| : s \in I\}$，则$\bigwedge M_s \leq_{\mathfrak{k}} N \Rightarrow M \leq_{\mathfrak{k}} N$。sAx(IV)(e) 类似于 Ax(IV)(c)，但 I 仅为有向的。¯Ax(IV)(f) 若 I 是有向的，且 $M = \langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的，则存在$_M$，它是 M 上的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-素对象，定义如 Ax(III)(f) 中所述。

命题 5.5。 假设[13] $\mathfrak{k}$ 是一个 d.a.e.c.

[13]根据 5.1，无需说明这一点

1) Ax(III)(d) 蕴含 Ax(III)(c)。
2) Ax(III)(e) 蕴含 Ax(III)(c)，并且蕴含 Ax(III)(b)。
3) Ax(IV)(d) 蕴含 Ax(IV)(c)。
4) Ax(IV)(e) 蕴含 Ax(IV)(c)，且蕴含 Ax(III)(b)。
5) 在定义 5.4 的所有公理中，必须有 $|\cup\{M_s: s\in I\}|<\mu_{\mathfrak{k}}$。
6) Ax(IV)(b) 表明 $\mathfrak{k}$ 具有 amalgamation。

定义 5.6. 我们称 $\langle M_i: i<\alpha\rangle$ 为 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增（$\ge\kappa$）-连续，当它是$\le_{\mathfrak{k}}$-递增且 $\delta<\alpha$，并且余终性(δ) $\ge\kappa\Rightarrow|M_i|=\cup\{|M_j|: j<\delta\}$。

作为练习，我们考虑带映射的有向系统。

定义 5.7. 1) 我们称 $M=\langle M_t,h_{s,\,t}: s\le_I t\rangle$ 为一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统，当 I 是有向偏序，且若 $t_0\le_I t_2\le_I t_2$，则 $h_{t_2,\,t_0}=h_{t_2,\,t_1}\circ h_{t_1,\,t_0}$。1A) 我们称 $M=\langle M_t,h_{s,\,t}: s\le_I t\rangle$ 为一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-θ-有向系统，当此外 I 是 θ-有向的。

2) 当 $s\le_I t\Rightarrow h_{s,\,t}=\mathrm{id}_{M_s}$ 时，我们省略 $h_{s,\,t}$，并写作 $M=\langle M_t: t\in I\rangle$。

3) 我们称 (M,h) 是 M 的 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入，且$s\le_I t\Rightarrow h_s=h_t\circ h_{t,\,s}$。

4) 我们称 $M=\langle M_\alpha: \alpha<\alpha^*\rangle$ 在以下情况下是 $\le_{\mathfrak{k}}$-半连续的：（参见 5.4 中的 Ax(III)(f)）

(a) M 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的（b）；若 $\alpha<\alpha^*$ 的余终性为 $\ge\kappa$，则 $M_\alpha=\cup\{M_\beta: \beta<\alpha\}$ (c) 若 $\alpha<\alpha^*$ 的余终性为 $<\kappa$，则 M_δ 是 $M\restriction\alpha$上的 $\le_{\mathfrak{k}}$-素。

观察 5.8。 [$\mathfrak{k}$是一个 d.a.e.c.]

1) 如果 $\bar M=\langle M_t,h_{s,t}: s\le_I t\rangle$ 是一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统，那么我们可以找到一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统 $\langle M'_t: t\in I\rangle$（因此 $s\le_I t\Rightarrow M'_s\le_{\mathfrak{k}} M'_t$）以及 $\bar g=\langle g_t: t\in I\rangle$ 使得：

(a) g_t 是从 M_t 到 M'_t(b)的同构，如果 $s\le_I t$ 则$g_s=g_t\circ h_{s,t}$。

2）因此，在定义 5.2 中的公理 (III)(a)、(b)、(IV)(a) 以及 5.4 的公理中，我们可以像那里一样使用 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统 $\langle M_s,h_{s,t}: s\le_I t\rangle$ with I。

3)如果 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-(μ,λ)-抽象初等类，参见§1，那么 $\mathfrak{k}$ 是一个$(\mu,\lambda,\aleph_0)$-d.a.e.c.，并满足 5.4 中的所有公理。

4）若（M,h）在 $M=\langle M_t,h_{s,t}$ 上是素的：$s\le_I t\rangle$ 且 $\chi=\Sigma\{\|M_t\|: t\in I\}$ 则$\|M\|\le\chi^{<\kappa}$。

证明。显然，例如我们可以使用“$\mathfrak{k}$ 具有（$\chi^{<\kappa}$）-勒文海姆–斯科伦–塔斯基”，即观察 5.9。□

5.8

证明我们内容中的勒文海姆–斯科伦–塔斯基定理则更为重要（回顾一下，在公理中，见公理（VI），我们只要求它下降到 λ）。

断言 5.9。 [$\mathfrak{k}$是一个（μ,λ,κ）-2-d.a.e.c.，见定义 5.4。]

若 $\lambda_{\mathfrak{k}}\le\chi=\chi^{<\kappa}<\mu_{\mathfrak{k}}$, $A\subseteq N\in\mathfrak{k}$ 且 $|A|\le\chi\le\|N\|$，则存在一个基数为 χ 的 $M\le_{\mathfrak{k}} N$，使得 $\|M\|=\chi$。

证明。令 $\langle u_\alpha: \alpha<\alpha(*)\rangle$ 列出 $[A]^{<\kappa(\mathfrak{k})}$，令 I 为如下偏序：

$(*)_1$ (α)个元素的集合是 $\{\alpha<\chi:$ 不存在 $\beta<\alpha$ 使得 $u_\alpha\subseteq u_\beta\}$($\beta$) $\alpha\le_I\beta$ 当且仅当 $u_\alpha\subseteq u_\beta$ （因此 $\alpha\le\beta$）。

轻松地

$(*)_2$ (a) I is κ-directed
(b) for every $\alpha<\alpha(*)$ for some $\beta<\alpha(*)$ we have $u_\alpha\subseteq u_\beta\wedge\beta\in I$
(c) $\cup\{u_\alpha:\alpha\in I\}=A$.

现在我们通过对 $\alpha<\chi$ 归纳法来选择 M_α，使得

$(*)_3$ (a) $M_\alpha\le_{\mathfrak{k}} N$ (b) $\|M_\alpha\|=\lambda_{\mathfrak{k}}$ (c) M_α 包含
$\cup\{M_\beta:\beta<_I\alpha\}\cup u_\alpha$。

注意 $|\{\beta\in I:\beta<_I\alpha\}|\le|\{u:\ u\subseteq u_\alpha\}|=2^{|u_\alpha|}\le 2^{<\kappa(\mathfrak{k})}\le\lambda_{\mathfrak{k}}$，并且根据归纳假设 $\beta<\alpha\Rightarrow\|M_\beta\|\le\lambda_{\mathfrak{k}}$，回顾 $|u_\alpha|<\kappa(\mathfrak{k})\le\lambda_{\mathfrak{k}}$，因此集合 $\cup\{M_\beta:\ \beta<\alpha\}\cup u_\alpha$ 是 N 的子集，其基数为 $\le\lambda$，因此根据公理（VI），存在 M_α，正如所要求的。

选定 $\langle M_\alpha:\alpha\in I\rangle$ 后，由公理（V）可知它显然是一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统，因此根据 Ax(III)(d)，$M=\cup\{M_\alpha:\alpha\in I\}$ 是良定义的，其论域为 $\cup\{|M_\alpha|:\alpha\in I\}$，并且根据 Ax(IV)(d)，我们有 $M\le_{\mathfrak{k}}N$。

显然 $\|M\|\le\Sigma\{\|M_\alpha\|:\alpha\in I\}\le|I|\cdot\lambda_{\mathfrak{k}}=\chi$，并且根据 $(*)_2(c)+(*)_3(c)$ 我们有 $A\subseteq\cup\{u_\alpha:\alpha<\chi\}=\cup\{u_\alpha:\alpha\in I\}\subseteq\cup\{|M_\alpha|:\alpha\in I\}=M$ 因此 M 满足要求。$\square_{5.9}$

记号5.10.1) 对于 $\chi\in[\lambda_{\mathfrak{k}},\mu_{\mathfrak{k}})$，令 $K_\chi=K^{\mathfrak{k}}_\chi=\{M\in K:\ \|M\|=\chi\}$ 和 $K_{<\chi}=\bigcup\limits_{\mu<\chi}K_\mu$。
2) $\mathfrak{k}_\chi=(K_\chi,\le_{\mathfrak{k}}\restriction K_\chi)$.
3) 若 $\lambda_{\mathfrak{k}}\le\lambda_1<\mu_1\le\mu_{\mathfrak{k}}$、$\lambda_1=\lambda_1^{<\kappa}$以及 $(\forall\alpha<\mu_1)(|\alpha|^{<\kappa}<\mu_1)$，则我们定义 $K_{[\lambda_1,\mu_1]}=K^{\mathfrak{s}}_{[\lambda_1,\mu_1)}$并且 $\mathfrak{k}_1=\mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu_1]}$类似地，即 $K_{\mathfrak{k}}=\{M\in K_{\mathfrak{k}}:\ \|M\|\in[\lambda_1,\mu_1)\}$以及 $\le_{\mathfrak{k}_1}=\le_{\mathfrak{k}}\restriction K_{\mathfrak{k}_1}$ 和 $\lambda_{\mathfrak{k}_1}=\lambda_1$、$\mu_{\mathfrak{k}_1}=\mu_1$、$\kappa_{\mathfrak{k}_1}=\kappa_{\mathfrak{k}}$。

定义 5.11。嵌入 $f:N\to M$ 是一个 $\mathfrak{k}$-嵌入或 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入，当且仅当其值域是模型 $N'\le_{\mathfrak{k}}M$ 的论域，（因此 $f:N\to N'$ 是到其上的同构）。

断言 5.12. *[$\mathfrak{k}$ 是一个 2-d.a.e.c.]*
对于每个 $N\in K$，存在一个 $\kappa_{\mathfrak{k}}$-有向偏序 I，其基数为 $\le\|N\|$，且 $M=\langle M_t:t\in I\rangle$ 使得 $t\in I\Rightarrow M_t\le_{\mathfrak{k}}N$，$\|M_t\|\le$勒文海姆–斯科伦–塔斯基$(\mathfrak{k})$
$I\models s<t\Rightarrow M_s\le_{\mathfrak{k}}M_t$ 且 $N=\bigcup\limits_{t\in I}M_t$。
2) 对于每个 $N_1\le_{\mathfrak{k}}N_2$，我们都可以找到 $\langle M^\ell_t:\ t\in I^*\rangle$，如第(1) 部分中对 N_ℓ 的情形，使得 $I_1\subseteq I_2$ 且 $t\in I_1\Rightarrow M^2_t=M^1_t$。

证明。1）与 5.9 的证明相同。
2）类似。 $\square_{5.12}$

断言 5.13。假设 $\lambda_{\mathfrak{k}}\le\lambda_1=\lambda_1^{<\kappa}<\mu_1\le\mu_{\mathfrak{k}}$ and $(\forall\alpha<\mu_1)(|\alpha|^{<\kappa}<\mu_1)$。
1) 那么，按照 5.10(3) 中的定义，$\mathfrak{k}^*_1:=\mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu_1)}$ 是一个（$\lambda_1,\mu_1,\kappa_{\mathfrak{k}}$）-d.a.e.c.2)对于以下各公理，如果 $\mathfrak{k}$满足其中某一公理，那么 $\mathfrak{k}_1$也满足该公理：Ax(III)(d)、(IV)(b)、(IV)(c)、(IV)(d)。 3) 如果此外 $\mathfrak{k}$ 满足Ax(III)(d)、(IV)(d)，那么第（2）部分适用于 5.2、5.4 中的所有公理。

命题5.14。1)如果 $\mathfrak{k}$ 满足 Ax(IV)(e)，那么只要 $\mu_{\mathfrak{k}}$是正则的，或者至少相关的 I 具有基数 <余终性($\mu_{\mathfrak{k}}$)， $\mathfrak{k}$ 就满足 Ax(III)(e)。2) 如果满足Ax(III)(d)、(IV)(d)，则可以不要求 $\mu_{\mathfrak{k}}$ 是正则的。

证明。我们对 $|I|$ 使用归纳法来证明这一点。

情形 1： I 是有限的。

因此存在 $t^* \in I$，使得 $t \in I \Rightarrow t \leq_I t^*$，所以这显然成立。

情形 2： I 是可数的。

因此，我们可以找到一个序列 $\langle t_n : n < \omega \rangle$，使得 $t_n \in I$、$t_n \leq_I t_{n+1}$ 和 $s \in I \Rightarrow \bigvee\limits_{n<\omega} s \leq_I t_n$。现在我们可以将公理应用于 $\langle M_{t_n}, h_{t_n,\, t_m} : m < n < \omega \rangle$。

情形 3： I 不可数。

首先，我们可以找到一个递增连续序列 $\langle I_\alpha : \alpha < |I| \rangle$ 使得$I_\alpha \subseteq I$是基数为 $\leq |\alpha| + \aleph_0$ 的有向集，并令 $I_{|I|} = I = \cup\{I_\alpha : \alpha < |I|\}$。 ¯其次，根据归纳假设，对于每个 $\alpha < |I|$，我们选择 N_α、$h^\alpha = \langle h_{\alpha,\, t} : t \in I_\alpha \rangle$ 使得：

(a) 如果 $N_\alpha \in \mathfrak{k}^{\rm s}_{\leq \chi}$($b$) $h_{\alpha,\, t}$ 是从 M_t 到 N_α(c) 的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入，那么如果 $s <_I t$ 属于 I_α，则 $h_{\alpha,\, s} = h_{\alpha,\, t} \circ h_{t,\, s}$($d$) 如果 $\beta < \alpha$，则 $N_\beta \leq_{\mathfrak{k}} N_\alpha$ 并且 $t \in I_\beta \Rightarrow h_{\alpha,\, t} = h_{\beta,\, t}$。

对于 $\alpha = 0$，使用归纳假设。

对于 α 这个极限序数，根据 Ax(III)(a)，存在所需的 N_α s，如 $I_\alpha = \cup\{I_\beta : \beta < \alpha\}$不存在新的 h_t；不过，我们必须检查 $\Sigma\{\|N_\beta\| : \beta < \alpha\} < \mu_{\mathfrak{k}}$ 但由于我们假设 $\mu_{\mathfrak{k}}$ 是正则的，这成立。

对于 $\alpha = \beta + 1$，由归纳假设，存在 $(N'_\alpha, \bar{g}^\alpha)$，它是$\langle M_s, h_{s,\, t}$ 的极限： $s \leq_{I_\alpha} t\rangle$。现在应用 Ax(IV)(e)；这正是有向系统版本，其中$\langle M_s, h_{s,\, t} : s \leq_{I_\beta} t\rangle$、$(N'_\alpha, \bar{g}_\alpha)$、$(N_\beta, \langle h_s : s \in I_\beta\rangle$ 分别代表 M, N_1, N_2。

因此，存在 $N_\alpha, f^\alpha_s (s \in I_\beta)$，使得 $N_\beta \leq_{\mathfrak{k}} N_\alpha$ 且 $s \in I_\beta \Rightarrow f^\alpha_s \cdot g_s = h_s$。最后，对于 $s \in I_\alpha \backslash I_\beta$，我们选择 $h_s = f^\alpha_s \circ g_s$，于是显然得证。

2) 由 5.9 或 5.13 可轻易得出。 $\square_{5.14}$

§5(B). 基本概念。

如 [She09c, §1], 所述，我们现在回顾轨道类型的定义（请注意，只在 amalgamation 基底上讨论类型是很自然的；回想 Ax(IV)(b) 蕴含每个 $M \in K_{\mathfrak{k}}$ 都是如此）。

定义 5.15. 1) 对于 $\chi \in [\lambda_{\mathfrak{k}}, \mu_{\mathfrak{k}})$ 和 $M \in K_\chi$，我们定义 $\mathscr{S}(M)$ 为 ortp(a, M, N) : $M \leq_{\mathfrak{k}} N \in K_\chi$和 $a \in N\}$，其中 ortp(a, M, N) $=(M, N, a)/\mathscr{E}_M$，其中 $\mathscr{E}_M$ 是 $\mathscr{E}^{\rm at}_M$ 的传递闭包，而二元关系 $\mathscr{E}^{\rm at}_M$ 定义如下：

$(M, N_1, a_1)\mathscr{E}^{\rm at}_M$ (M, N_2, a_2)iff $M \leq_{\mathfrak{k}} N_\ell, a_\ell \in N_\ell, \|M\| \leq \|N_\ell\| = \|M\|^{<\kappa}$ for $\ell = 1, 2$ and there is $N \in K_\chi$ and $\leq_{\mathfrak{k}}$-embeddings $f_\ell : N_\ell \to N$ for $\ell = 1, 2$ such that: $f_1 \restriction M = \mathrm{id}_M = f_2 \restriction M$ and $f_1(a_1) = f_2(a_2)$.

(当然 $M \le_{\mathfrak{k}} N_1, M \le_{\mathfrak{k}} N_2$ 以及 $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2$)

2) 我们称"a实现 p于 N"，当 $a \in N$、$p \in \mathscr{S}(M)$并令 $\chi = \|M\|^{<\kappa}$对于某个 $N' \in K_\chi$，我们有 $M \le_{\mathfrak{k}} N' \le_{\mathfrak{k}} N$和 $a \in N'$以及 $p =$正交型(a, M, N')；因此M，$N' \in K_\chi$但可能是 $N \notin K_\chi$。

3)当对于某个 N^2 我们有 $M \le_{\mathfrak{k}} N^2 \le_{\mathfrak{k}} N$ 且有 $a_2 \in N^2$，并且 (M, N^1, a_1) $\mathscr{E}$在$M$$(M, N^2, a_2)$时，我们称"$a_2$强 [14]实现$(M, N^1, a_1)/\mathscr{E}$在$M$ 中的 N"。

4) 如果此结论在 $\mathfrak{k}_{[\chi_0,\chi_1)}$ 中成立，我们称 M_0 是一个$\le_{\mathfrak{k}[\chi_0,\chi_1)}$-amalgamation 底，见下文。4A) 如果满足以下条件，我们称 $M_0 \in \mathfrak{k}$ 是一个 amalgamation 底或 $\le_{\mathfrak{k}}$-amalgamation 底：对于每个 M_1、$M_2 \in \mathfrak{k}$ 和 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入 f_ℓ：$M_0 \to M_\ell$（对于 $\ell = 1, 2$），都存在 $M_3 \in \mathfrak{k}_\lambda$ 和 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入 g_ℓ：$M_\ell \to M_3$（对于 $\ell = 1, 2$），使得 $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$。

5) 当满足以下条件时，我们称 $\mathfrak{k}$ 在 χ 中是稳定的：

(a) $\lambda_{\mathfrak{k}} \le \chi < \mu_{\mathfrak{k}}$(b) $M \in K_\chi \Rightarrow |\mathscr{S}(M)| \le \chi$(c) $\chi \in \mathrm{Car}_{\mathfrak{k}}$ 这意味着 $\chi = \chi^{<\kappa}$ 或者 5.9 的结论成立 (d) $\mathfrak{k}_\chi$ 具有 amalgamation。

6) 若 $p = q \restriction M$满足条件 $p \in \mathscr{S}(M)$ $q \in \mathscr{S}(N)$ $M \le_{\mathfrak{k}} N$，且对于某些 N^+、$N \le_{\mathfrak{k}} N^+$ 和 $a \in N^+$，有 $p =$正交型(a, M, N^+) $q =$正交型(a, N, N^+)，则称 $p = q \restriction M$；注意，若 $M \le_{\mathfrak{k}} N$，$p \in \mathscr{S}(N)$，则 $p \restriction M$是良定义的。

7) 对于有限的 m，对于 $M \le_{\mathfrak{k}} N$、$\bar{a} \in {}^m N$，我们可以类似地定义正交型$(\bar{a}, N, N)$和 $\mathscr{S}^m(M)$以及 $\mathscr{S}^{<\omega}(M) = \bigcup \mathscr{S}^m(M)$（但我们不会以任何实质性的$m<\omega$方式使用这一点，因此我们选择 $\mathscr{S}(M) = \mathscr{S}^1(M)$）。

定义 5.16。1) 我们称 N 在 M 之上或之上是 λ-泛的，如果对于每个 $M', M \le_{\mathfrak{k}} M' \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda$，都存在一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入，将 M' 嵌入到 N 中，并且在 M 之上。如果省略 λ，则意指 $\mathrm{rnd}_{\mathfrak{k}}(\lambda) = \min(\mathrm{Car})_{\mathfrak{k}} \backslash \lambda)$ 因而 $\le \|N\|^{<\kappa(\mathfrak{k})}$；显然，这意味着 M 是一个 $\le_{\mathfrak{k}_{[\chi_0,\chi_1]}}$-amalgamation 基，其中 $\chi_0 = \|M\|, \chi_1 = (\|N\|^{<\kappa})^+$。

2) $K^3_{\mathfrak{k}} = \{(M, N, a)$：$M \le_{\mathfrak{k}} N$、$a \in N \backslash M$和 M、$N \in K_{\mathfrak{k}}\}$，其中偏序$\le = \le_{\mathfrak{k}}$由$(M, N, a) \le (M', N', a')$ 当且仅当 $a = a'$、$M \le_{\mathfrak{k}} M'$和 $N \le_{\mathfrak{k}} N'$定义。我们称(M, N, a)为极小的，如果$(M, N, a) \le (M', N_\ell, a) \in K^3_{\mathfrak{k}}$对于 $\ell = 1$，2意味着正交型$(a, M', N_1) =$正交型(a, M', N_2)；此外，$(M', N_1, a)\mathscr{E}$在$\lambda(M', N_2, a)$处（如果每个 $M' \in K_\lambda$ 都是合并基，则不需要）。

2A) $K^{3,\mathfrak{k}}_\lambda$ 使用 $\mathfrak{k}_{[\lambda,\mathrm{rnd}(\lambda)]}$ 类似地定义。

推广超极限时，我们有不止一种合理的选择。

定义5.17. 1)对于 $\ell = 1$，2 我们称 $M^* \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda$ 是超极限$_\ell$或 $(\lambda, \ge \kappa)$- 超极限$_\ell$，当 5.15(5) 的~~条款~~ (c) 以及：

(a) 它是泛的（即每个 $M \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda$ 都可以适当地嵌入到 M^* 中），并且 (b) 情形 1：$\ell = 1$ 若 $\langle M_i : i \le \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$- 递增的，余终性 $(\delta) \ge \kappa, \delta < \lambda^+$ 和 $i < \delta \Rightarrow M_i \cong M^*$则 $M_\delta \cong M^*$ 情形 2：$\ell = 2$ 若 I 是一个基数为 $\le \chi$ 的 ($< \kappa$)-有向偏序，$\langle M_t : t \in I \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的且 $t \in I \Rightarrow M_t \cong M^*$，则 $\cup\{M_t : t \in I\} \cong M^*$。

[14]注意，$\mathscr{E}^{\mathrm{at}}_M$ 不是等价关系，而且通常当然也不是 $\mathscr{E}_M$

2) M 在 μ 之上是 λ-饱和的，当且仅当 $\|M\| \geq \lambda > \mu \geq$ 勒文海姆–斯科伦–塔斯基($\mathfrak{k}$) 且: $N \leq_{\mathfrak{k}} M, \mu \leq \|N\| < \lambda, p \in \mathscr{S}(N)$ 蕴含 p 在 M 中被强实现。令"M 是 λ^+-饱和的"表示"M 在 λ 之上是 λ^+-饱和的"，并且 K（λ^+-饱和）$= \{M \in K : M$ 是λ^+-饱和的$\}$，而"M 是饱和的....."表示"M 是 $\|M\|$-饱和的....."。

定义 5.18。1) 如果我们可以找到一个序列$\langle M_i : i < \sigma \rangle$，该序列是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增半连续的，$M_i \in K_\lambda$，$M_0 = M$，M_{i+1}在 M_i和 $\bigcup M_i = N$上是 $\leq_{\mathfrak{k}}$-泛的，则称 N 在 M 上是(λ, σ)-饱满的。如果$i<\sigma$，则称 N在 A 上是(λ, σ)-饱满的。

$A \subseteq N \in K_\lambda$ 并且我们可以找到 $\langle M_i : i < \sigma \rangle$ 如第 (1) 部分中那样，使得 $A \subseteq M_0$；如果 $A = \emptyset$ 我们可以省略"在 A上"。

2)我们称 N 是($\lambda, *$)-饱满的，且在 M 上饱满，当存在某个 $\sigma \in [\kappa, \lambda)$使得 N 是 (λ, σ)-饱满的，且在 M上饱满。我们称 N是($\lambda, *$)-饱满的，当存在某个 M，使得 N是($\lambda, *$)-饱满的，且在 M 上饱满。3) 若 $\alpha < \lambda^+$，则令"N是 (λ, α)-饱满的，且在 M 上饱满"表示 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 来自 K_λ，并且余终性(α) $\geq \kappa \Rightarrow N$ 是(λ, 余终性(α))-饱满的，且在 M 上饱满。

回顾

断言 5.19。1）如果 $\mathfrak{k}$ 是一个具有 amalgamation、在 χ 中稳定且满足 $\sigma = \mathrm{cf}(\sigma)$ so $\chi \in [\lambda, \mu$ 的 (μ, λ, κ)-d.a.e.c.，那么对每个 $M \in K^{\mathfrak{k}}_\chi$，存在一个在 M 上泛的 $N \in K^{\mathfrak{k}}_\lambda$，它在 M 上是 (χ, σ)-饱满的（因此是 S^χ_σ-极限，见 [She09a],，未使用）。

2）如果 N_ℓ 对于 $\ell = 1$、2 和 $\kappa \leq \theta = \mathrm{cf}(\theta) \leq \chi^+$ 在 M 上是 (χ, θ)-饱满的，那么 N_1、N_2 在 M 上同构。

3）如果 M_2 在 M 上且满足 $M_0 \leq_{\mathfrak{s}} M_1$ 时是 (χ, θ)-饱满的，那么 M_2 在 M_0 上是 (χ, θ)-饱满的。

证明。第（1）部分是直接的；回顾定义 5.19(5) 的条款（c）。2）、3）同 [She09c]。 $\square_{5.19}$

* * *

§5(C). 提升。

这里讨论提升，有两个方面。第一，如果 $\mathfrak{k}^1, \mathfrak{k}^1$ 在 λ 中一致，那么它们在每个更高基数中都一致。第二，给定 $\mathfrak{k}$，我们可以找到 $\mathfrak{k}_1$，使其满足 $\mu_{\mathfrak{k}_1} = \infty, (\mathfrak{k}_1)_\lambda = \mathfrak{k}_\lambda$。

定理 5.20。1) 若 $\mathfrak{k}^\ell$ 是 $\ell = 1$ 的一个 (μ, λ, κ)-抽象初等类，2 且 $\mathfrak{k}^1_\lambda = \mathfrak{k}^2_\lambda$，则 $\mathfrak{k}^1 = \mathfrak{k}^2$。2) 若 $\mathfrak{k}_\ell$ 是 $\ell = 1$ 的一个 ($\mu_\ell, \lambda, \kappa$)-d.a.e.c.，2 且 $\mathfrak{k}^1$ 满足 Ax(IV)(d)，并且 $\mu_1 \leq \mu_2$ 和 $\mathfrak{k}^1_\lambda = \mathfrak{k}^2_\lambda$，则 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2[\lambda, \mu_1)$。

证明。由 5.12。 $\square_{5.20}$

定理 5.21。提升定理

1) 如果 $\mathfrak{k}_\lambda$ 是一个 $(\lambda^+, \lambda, \kappa)$-d.a.e.c.$^\pm$，那么下面定义的有序对 $(K', \leq_{\mathfrak{k}'})$ 是一个 $(\infty, \lambda, \kappa)$-d.a.e.c.$^+$，其中我们定义了

$^-(A)$ K' 是满足以下条件的 M 类：M 是一个 $\tau_{\mathfrak{k}_\lambda}$-模型，并且对于某些 I 和 M，我们有

(a) I 是一个 κ-有向偏序$^-(b)$ $M = \langle M_s : s \in I \rangle$

(c) $M_s \in K_\lambda(d)$ $I \models s < t \Rightarrow M_s \le_{\mathfrak{k}_\lambda} M_t(e)$ 如果 $J \subseteq I$ 的基数为 $\le \lambda$，且是 κ-有向的，并且 M_J 是 $\langle M_t$ 的 $\mathfrak{k}$-并 $t \in J\rangle$，参见定义 5.4，那么 M_J 是 M的子模型$f(\ M = \cup\{M_J\}$: $J \subseteq I$ 是基数为 $\le \lambda\}$的 κ-有向的，即论域、关系和函数都满足这一性质。

$(A)'$ 我们将这样的 $\langle M_s$ 称为: $s \in I\rangle$ $M \in K'$的见证，我们称其为合理，如果$|I| \le \|M\|^{<\kappa}$

$\bar{}(B)$ $M \le_{\mathfrak{k}'} N$当且仅当存在 I, J, M，使得 (a) J 是一个 κ-有向偏序 (b) $I \subseteq J$ 是 κ-有向的$\bar{}(c)$ $M = \langle M_s : s \in J\rangle$ 且是一个 $\le_{\mathfrak{k}_\lambda}$-递增的 (d) $\langle M_s : s \in J\rangle$ 是 $N \in K'$的一个见证 (e) $\langle M_s : s \in I\rangle$ 是 $M \in K'$的一个见证。 $(B)'$ 我们称这样的 $I, \langle M_s : s \in J\rangle$ 为 $M \le_{\mathfrak{k}'} N$的见证，或者说 $(I, J, \langle M_s : s \in J\rangle)$ 见证 $M \le_{\mathfrak{k}'} N$。

2）对于其他公理，我们有如下蕴含关系。

证明。第（2）部分的证明很直接，因此我们将重点放在第（1）部分。下面逐一检验这些公理。

AxO(a)、(b)、(c) 和 (d): K'是一个由 τ-模型组成的类，$\le_{\mathfrak{k}'}$是 K上的二元关系，K'和 $\le_{\mathfrak{k}'}$ 在同构下封闭，$M \in K' \Rightarrow \|M\| \ge \lambda$，等等。[为什么？显然。]

AxI(a): 如果 $M \le_{\mathfrak{k}'} N$ 那么 $M \subseteq N$。
[为什么？我们对 κ-有向并使用光滑性，即 Ax(IV)(x)。]

AxII(a),(b),(c): 我们证明第一个，其余的更容易。

公理 II(a): $M_0 \le_{\mathfrak{k}'} M_1 \le_{\mathfrak{k}'} M_2$ 推出 $M_0 \le_{\mathfrak{k}'} M_2$ 和 $M \in K' \Rightarrow M \le_{\mathfrak{k}'} M$。[为什么？第二个短语显然成立。对于第一个短语，设 $\ell \in \{1,2\}$ 的κ-有向偏序 $I_\ell \subseteq J_\ell$ 和 $\bar{M}^\ell = \langle M^\ell_s : s \in J_\ell\rangle$ 见证 $M_{\ell-1} \le_{\mathfrak{k}'} M_\ell$。

我们首先观察到

⊡ if I is a κ-directed partial order, $\langle M^\ell_t : t \in I\rangle$ is a $\le_{\mathfrak{k}_\lambda}$-system witnessing $M_\ell \in K'$ for $\ell = 1, 2$ and $t \in I \Rightarrow M^1_t \le_{\mathfrak{k}_\lambda} M^2_t$ then $M_1 \le_{\mathfrak{k}} M_2$.

[为什么？令 I_1 为元素集为 $I \times \{1\}$ 的偏序，其顺序为 $(s, 1) \le_{I_1} (t, 1) \Leftrightarrow s \le_I t$。令 I_2 为元素集为 $I \times \{1, 2\}$ 的偏序，其顺序为 $(s_1, \ell_1) \le_{I_2} (s_2, \ell_2) \Leftrightarrow s_1 \le_I s_2 \wedge \ell_1 \le \ell_2$。显然 $I_1 \subseteq I_2$ 都是 κ-有向的。

令$M_{(s,1)} = M^1_s$，$M_{(s,2)} = M^2_s$，显然$\bar{}$是一个 $\le_{\mathfrak{k}_\lambda}$-有向系统，见证 $M_\ell \in K'$为 $\ell = 1$，2并且 (I_1, I_2, M) 见证 $M_1 \le_{\mathfrak{k}'} M_2$，所以我们完成了。]

不失一般性，J_1、J_2两两不相交。令 $\chi = (|J_1| + |J_2|)^{<\kappa}$，因此$\lambda \le \chi < \mu$ 并令

$$\begin{aligned}\mathscr{U} := \{u: \quad & u \subseteq J_1 \cup J_2 \text{ has cardinality } \leq \lambda \text{ and } u \cap I_\ell \\ & \text{is } \kappa\text{-directed under } \leq_{I_\ell} \text{ for } \ell = 1,2 \text{ and } u \cap J_\ell \\ & \text{is } \kappa\text{-directed under } \leq_{J_\ell} \text{ for } \ell = 1,2 \text{ and} \\ & \cup\{|M_t^2| : t \in I_2\} = \cup\{|M_t^1 : t \in J_1\}\}.\end{aligned}$$

令 $\langle u_\alpha : \ \alpha < \alpha^* \rangle$ 列表 $\mathscr{U}$，并定义偏序 I:

$(a)'$ its set of elements is $\{\alpha < \alpha^*$: for no $\beta < \alpha$ do we have $u_\alpha \subseteq u_\alpha\}$

$(b)'$ $\alpha \leq_I \beta$ iff $u_\alpha \subseteq u_\beta \wedge \alpha \in I \wedge \beta \in I$.

注意，集合 I 可能具有基数$(\sum_i \|M_i\|)^\lambda$ 其可能为 $> \mu_{\mathfrak{k}^*}\delta$

如 5.9 的证明， I 是 κ-有向的。

对于 $\ell = 0$、1、2 和 $\alpha \in I$ 令$M_{\ell,\alpha}$ 为

(a) $\leq_{\mathfrak{k}}$-并 $\langle M_t^\ell : \ t \in u_\alpha \cap I_1 \rangle$ 若 $\ell = 0$$(b)$ $\leq_{\mathfrak{k}}$-并 $\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-有向系统 $\langle M_t^1 : \ t \in J_1 \rangle$，等价地$\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-有向系统 $\langle M_t^2 : \ t \in I_2 \rangle$，当 $\ell = 1$$(c)$ $\leq_{\mathfrak{k}}$-并 $\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-有向系统 $\langle M_t^2 : \ t \in J_2 \rangle$ 当 $\ell = 2$。

Now

$(*)_1$ 若 $\ell = 0$、1、2 和 $\alpha \leq_I \beta$，则
$M_\alpha^\ell \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M_\beta^\ell$$(*)_2$ 若 $\alpha \in I$，则
$M_\alpha^0 \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M_\alpha^1 \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M_\alpha^1$$(*)_3$ $\langle M_{\ell,\ \alpha} : \ \alpha \in I \rangle$ 是
$M_\ell \in K'$$(*)_4$ $M_{0,\ \alpha} \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M_{2,\ \alpha}$ 的一个见证。

结合 $\boxdot$，我们得到 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}'} M_2$，如所需。

公理 III(a)：一般情形。

设 $(\bar{I}_{i,\ j}, J_{i,\ j}, \bar{M}^{i,\ j})$ 在 $i \leq j < \delta$ 时见证 $M_i \leq_{\mathfrak{k}'} M_j$，且不失一般性，$\langle J_{i,\ j} : \ i < j < \delta \rangle$ 两两不相交。设 $\mathscr{U}$ 是满足以下条件的 u 族：存在某个 $v \in [\delta]^{\leq\lambda}$，

(a) $v \subseteq \delta$ 的基数为 $\leq \lambda$，且其序型的余终性为 $\geq \kappa$$(b)$ $u \subseteq \cup\{J_{i,j} : \ i < j$ 来自 $v\}$，其基数为 $\leq \lambda$，且 (b) 对于来自 v 集合 $u \cap J_i$的 $i < j$，$_j$ 在 $\leq_{J_i}$ 下是 κ-有向的，$_j$ 和 $u \cap I_i$，$_j$ 在 $\leq_{I_i}$下是κ-有向的，$_j$$(c)$ 若 $i_0 \leq i_1 \leq i_2$，则 $\cup\{M_t^i(0)\ _i(1),\ _s : \ s \in u \cap J_{i(0),\ i(1)}\} = \cup\{M_s^{i(1),i(2)} : \ s \in u \cap I_{i(1),\ i(2)}\}$$(d)$ 若 $i(0) \leq i(1) \leq i$来自 v，则 $\cup\{M_{t,s}^{i(0),i(1)} : \ s \in u \cap J_{i(0),\ i(1)}\} = \cup\{M_s^{i(1),i(2)} : \ s \in u \cap I_{i(1),\ i(2)}\}$$(e)$ 若 $i(0) \leq k(0) \leq j(1)$ 且 $i(1) \leq j(1)$ 来自 u，则 $\cup\{M_s^{i(0),j(0)} : \ s \in u \cap J^{i(0),\ s\ j(0)}\} = \cup\{M_s^{i(1),j(1)} : \ s \in u \cap J_{i(1),\ j(1)}\}$。

其余证明与之前相同。

Ax(IV)(a): 类似，但 $\mathscr{U} = \{u \subseteq I : \ u$ 的基数为 $\leq \lambda$，且是 κ-有向的$\}$。

Ax(III)(d):
假设 $\mathfrak{k}$ 满足 Ax(III)(d)。类似。

Ax(IV)(d): A

假设 $\mathfrak{k}$ 满足 Ax(IV)(d)。类似。

公理 V: 假设 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}'} M$ 和 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}'} M$。
若 $N_0 \subseteq N_1$，则 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}'} N_1$。
[为什么? 令 $(I_\ell, J_\ell, \langle M_s^\ell : \ s \in J_\ell\rangle)$ 为 $\ell = 0$ 的 $N_\ell \leq_{\mathfrak{k}} M$ 的见证，1；不失一般性， J_0, J_1 不相交。
Let

$$\begin{aligned}\mathscr{U} := \{u \subseteq J_0 \cup J_1 : \ & |u| \leq \lambda \text{ and } u \cap J_\ell \text{ is } \kappa\text{-directed} \\ & \text{and } u \cap I_\ell \text{ is } \kappa\text{-directed for } \ell = 0, 1 \text{ and} \\ & \cup\{|M_s^0| : s \in u \cap J_0\} = \cup\{|M_s^0| : s \in u \in J_1\}\}.\end{aligned}$$

对于 $u \in \mathscr{U}$，令

- $M_u = M{\restriction} \cup \{(M_s^\ell : s \in u \cap J_\ell\}$ for $i = 0, 1$
- $N_{\ell,u} = N_\ell{\restriction}\{(M_s^\ell) : s \in u \cap I_\ell\}$.

Let

(∗) (a) $(\mathscr{U}, \subseteq)$ 是 κ-有向的 (b) $N_{\ell,\ u} \leq_{\mathfrak{k}} M$ (c) $M_{\ell,\ u} \leq_{\mathfrak{k}} M_{\ell,\ v}$ 当 $u \subseteq v$ 来自 $\mathscr{U}$ 和 $\ell = 0$ 时，1 (d) $M_{0,\ u} \leq_{\mathfrak{k}} M_{1,\ u}$ (e) $N_{|}ell = \cup\{N_{\ell,u} : \ u \in \mathscr{U}\}$；如 ? 中所示

根据上述 $\square$，我们就完成了。

公理 VI: 勒文海姆–斯科伦–塔斯基($\mathfrak{k}'$) $= \lambda$。[Why? Let $M \in K', A \subseteq M$， $|A| + \lambda \leq \chi < \|M\|$ 并令 $\langle M_s : \ s \in I\rangle$ 见证$M \in K'$；不失一般性， $|A| = \chi^{<\kappa}$。现在选择一个基数为 $\leq |A| = \chi^{<\kappa}$ 的有向 $I \subseteq J$，使得 $A \subseteq M' =: \bigcup M_s$，于是（$I$、$J$、$\langle M_s : \ s \in J\rangle)_{s \in I}$ 见证 $M' \leq_{\mathfrak{k}'} M$，因此由于 $A \subseteq M'$和 $\|M'\| \leq |A| + \mu$，我们就完成了。] $\square_{5.21}$

此外，如果两个这样的 d.a.e.c. 具有某个共同基数，那么我们可以将它们合并。

断言 5.22。令 $\iota \in \{1, 2, 3\}$ 并假设 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ 和

(a) $\mathfrak{k}^1$ 是一个（λ_2^+， λ， κ）-2-d.a.e.c., $K^1 = K^1_{\geq \lambda}$ (b) $\mathfrak{k}^2$ 是一个（λ_3， λ_2， κ）$-\iota$-d.a.e.c. (c) $K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2} = K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_2}$ 和 $\leq_{\mathfrak{k}^2} {\restriction} K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_2} = \leq_{\mathfrak{k}^1} {\restriction} K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2}$

(d) 我们如下定义 $\mathfrak{k}$： $K_{\mathfrak{k}} = K_{\mathfrak{k}} \cup K_{\mathfrak{k}_2}$， $M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 当且仅当 $M \leq_{\mathfrak{k}^1} N$ 或 $M \leq_{\mathfrak{k}^2} N$，或者对某个 M'， $M \leq_{\mathfrak{k}^1} M' \leq_{\mathfrak{k}^2} N$。

那么 $\mathfrak{k}$ 是一个 $(\lambda_3, \lambda_1, \kappa)$ $-\iota$-d.a.e.c。

证明。显然。例如。

Ax(III)(d)：因此 $\langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$ $-\kappa$-有向系统。

如果 $\|M_s\| \geq \lambda_2$ 对某个 λ成立，则使用 $\langle M_s : s \leq t \in I \rangle$ 以及假设的条款 (b)。如果 $\cup\{M_s : s \in I\}$ 的基数为 $\leq \lambda_2$，则使用假设中的条款 (a)。如果两者都不成立，回想一下，根据假设的条款 (b)， $\lambda_2 = \lambda_2^{\leq \kappa}$，并令

$$cU = \{u \subseteq I : |u| le \lambda_2, u \text{ is } \kappa\text{-directed (in I)}, \text{ and } \cup\{M_s : s \in u\} \text{ has cardinality } \lambda\}.$$

显然，$(\mathscr{U}, \subseteq)$是 λ_2-有向的，对于 $u \in J$，令 M_u 为 $\langle M_s$ 的 $\leq_{\mathfrak{s}}$-并： $s \in u \rangle$。现在根据假设的条款 (a)

$(*)_1$ $M_u \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2} = K^{k^*}_{\lambda_2}$ $(*)_2$ 如果 $u_1 \subseteq v$ 来自 $\mathscr{U}$，那么 $M_u \leq_{\mathfrak{k}^1} M_v$,$M_u \leq_{\mathfrak{k}^2} M_v$。

现在使用假设的条款 (b)。

公理 V: 我们将自由地使用

$(*)$ $\mathfrak{k}^2_\lambda = \mathfrak{k}^2$ and $\mathfrak{k}^1_\lambda = \mathfrak{k}^1$.

因此假设 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M, N_1 \leq_{\mathfrak{k}} M, N_0 \subseteq N_1$。

现在，如果 $\|N_0\| \geq \lambda_1$，使用假设 (b)，因此我们可以假设 $\|N_0\| < \lambda_1$。如果 $\|M\| \leq \lambda_1$，我们可以使用假设 (a)，因此可以假设 $\|M\| > \lambda_1$；根据 $\leq_{\mathfrak{k}}$ 的定义，存在 $M'_0 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_1} = K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_1}$ 使得 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}^1} M'_0 \leq_{\mathfrak{k}^2} M$。先假设 $\|N_1\| \leq \lambda_1$，于是我们可以找到 $M'_1 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_1}$ 使得 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}^1} M'_1 \leq_{\mathfrak{k}^2} M$（为什么? 如果 $N_1 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{<\lambda_1}$，根据 $\leq_{\mathfrak{k}}$ 的定义；如果 $N_1 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_1}$，只需选择 $M'_1 = N_1$）。现在，根据假设 (b)，我们可以找到 $M'' \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_1}$ 使得 $M'_0 \cup M'_1 \subseteq M'' \leq_{\mathfrak{k}} M$，因此根据假设 (b)（即针对 $\mathfrak{k}^2$ 的公理 V），有 $M'_0 \leq_{\mathfrak{k}} M''$，$M'_1 \leq_{\mathfrak{k}} M''$。由于 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'' \in K^{\mathfrak{k}}_{\leq \lambda_1}$，根据假设 (a)，我们有 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M''$，类似地还有 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}} M''$。因此$N_0 \subseteq N_1, N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'', N_1 \leq_{\mathfrak{k}} M'$，所以根据假设 (b)，我们有 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} N_1$。

剩下的情形是 $\|N_1\| > \lambda$，根据假设 (b)，存在 $N'_1 \in K_{\lambda_1}$使得 $N_0 \subseteq N'_1 \leq_{\mathfrak{k}^2} N_2$。根据假设(b)，我们有 $N'_1 \leq_{\mathfrak{k}} M$，因此由上一段可得 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} N'_1$，结合上一句我们有$N_0 \leq_{\mathfrak{k}^1} N'_1 \leq_{\mathfrak{k}^2} N_1$，所以根据 $\leq_{\mathfrak{k}}$ 的定义，我们就完成了。$\square_{5.22}$

定义5.23. 如果 $M \in K_\chi$ 是 $(\chi, \geq \kappa)$-超极限$_1$，令 $K^{[M]}_\chi = \{N \in K_\chi : N \cong M\}$，$\mathfrak{K}^{[M]}_\chi = (K^{[M]}_\chi, \leq_{\mathfrak{k}} \restriction K^{[M]}_\chi)$，且 $\mathfrak{k}^{[M]}$ 是我们在 5.21(1) 中为 $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}^{[M]}_\chi$得到的 $\mathfrak{k}'$。

断言 5.24. 1) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 (μ, λ, κ)-抽象初等类， $\lambda \leq \chi < \mu, M \in K_\chi$ 是 $(\chi, \geq \kappa)$-超极限$_1$，则 $\mathfrak{k}^{[M]}_\chi$ 是一个 (χ^+, χ, κ)-d.a.e.c。

2) 此外，如果 $\mathfrak{k}$ 是一个 (μ, λ, κ)-d.a.e.c.$^{\pm}$，那么 $\mathfrak{k}^{[M]}_\chi$ 是一个 (χ^+, χ, κ)-d.a.e.c.$^{\pm}$。

§ 6. II PR FRAMES

定义 6.1。对于 $\iota = 1$、2、3、4。若 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 (μ, λ, κ) $-\iota$-框架，则称其为良好的；其中 $\mathfrak{s}$ 由以下对象组成，并满足以下条件： μ, λ, κ（因此我们可以写作 $\mu_{\mathfrak{s}}, \lambda_{\mathfrak{s}}, \kappa_{\mathfrak{s}}$，但在定义 $\mathfrak{s}$ 时通常忽略它们），并且

(A) $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 是一个(μ, λ, κ) $-$ 6-d.a.e.c.，因此我们可以用 $\mathfrak{s}$ 代替 $\mathfrak{k}$，例如 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增，等等； $\chi \in [\lambda, \mu) \Rightarrow$ LST$(\chi^{<\kappa})$ (B) $\mathfrak{k}$ 有一个$(\lambda, \geq \kappa)$-超极限模型 M^*，该模型 [15] 不是 $<_{\mathfrak{k}}$-极大的，即(a) $M^* \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}$($b$)；如果 $M_1 \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}$，那么对于某些 M_2、 $M_1 <_{\mathfrak{s}} M_2 \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}$， M_2 与 M^*同构；(c)如果 $\langle M_i : i < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增的，且cf$(\delta) \geq \kappa$， $\delta \neq \lambda^+$，那么 $\cup\{M_i : i < \delta\}$ 与 M^*同构

(C) $\mathfrak{k}$ 具有 amalgamation 性质、联合嵌入性质（JEP），且没有 $\leq_{\mathfrak{k}}$-极大成员；若 $\iota \geq 2$、$\mathfrak{k}$ 具有素模型$^-$，且若 $\iota \geq 4$、$\mathfrak{k}$ 具有素模型$^+$

(D) (a) $\mathscr{S}$bs $= \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}$（ $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$的基本类型类）包含于$\bigcup\{\mathscr{S}(M) : M \in K_{\mathfrak{s}}\}$，并且在同构（包括自同构）下封闭；对于 $M \in K_{\lambda}$，令 $\mathscr{S}$bs$(M) = \mathscr{S}$bs$_{\mathfrak{s}} \cap \mathscr{S}(M)$；允许有限序列的类型也无妨。($b$) 若 $p \in \mathscr{S}$bs$_{\mathfrak{s}}(M)$，则 p 是非代数的（即不由任何$a \in M$实现）。(c)（稠密性）若 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 来自 $K_{\mathfrak{s}}$ 和 $M \neq N$，则存在某个 $a \in N \backslash M$，使得 ortp$(a, M, N) \in \mathscr{S}$bs[意图：例如， [中的极小类型；She01], 超稳定理论的正则类型](d) 基本类型稳定性$\mathscr{S}$bs(M) 的基数为 $\leq \|M\|^{<\kappa}$，对 $M \in K_{\mathfrak{s}}$而言。

(E) (a)$\bigcup = \bigcup$ 是一个称为不分叉关系的四位置关系，其中 $\bigcup(M_0, M_1, a, M_3)_{\mathfrak{s}}$意味着 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_3$ 来自 $K_{\mathfrak{s}}$、 $a \in M_3 \backslash M_1$，并且正交型$(a, M_0, M_3) \in \mathscr{S}bs_{\mathfrak{s}}(M_0)$，而正交型$(a, M_1, M_3) \in \mathscr{S}bs(M_1)$。此外， $\bigcup$在同构下保持不变。M_3我们也写作$M_1 \bigcup a$ 并要求：如果 $M_0 = M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_3$ 二者都在 $K_{\lambda}M_0$中，那么： $\bigcup(M_0, M_1, a, M_3)$等价于“正交型$(a, M_0, M_3) \in \mathscr{S}bs(M_0)$”。$M_3$此外，我们可以表述为 $M_1 \bigcup a$“正交型(a, M_1, M_3)不在 M_0（在M_0M_3内）上分叉”（这由下面的条款(b) 得到证明）。[解释：我们的意图是公理化类型的非分叉，但我们只允许处理基本类型。注意，在 [She01] 中，我们了解一些关于极小类型的内容，但其他类型则有所不同。]

[15] 事实上由 (C) 得出

(b)（单调性）：

如果 $M_0 \le_{\mathfrak{k}} M'_0 \le_{\mathfrak{k}} M'_1 \le_{\mathfrak{k}} M_1 \le_{\mathfrak{k}} M_3 \le_{\mathfrak{k}} M'_3, M_1 \cup \{a\} \subseteq M''_3 \le_{\mathfrak{k}} M'_3$ 它们全都在 K_λ 中，~~那么~~ $\bigcup(M_0, M_1, a, M_3) \Rightarrow \bigcup(M'_0, M'_1, a, M'_3) \Leftrightarrow \bigcup(M'_0, M'_1, a, M''_3)$，因此直接说“正交型$(a, M_1, M_3)$不在.....上分叉 M_0”是合理的。

[解释：非分叉在减小类型、增大基（= 即其上的不分叉集合）以及增大或减小这一切发生于其中的模型时都会得到保持。对于稳定理论，情况也相同，只是这里我们将自己限制在“合法”类型之内。]

(c) (local character):

Case 1: $\iota = 1, 2, 3$.

如果 $\langle M_i : i \le \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-半连续的，并且 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_\delta)$，且余终性$(\delta) \ge \kappa$，那么对于每个足够大的 $\alpha < \delta$， p 不在 M_α上分叉。

Case 2: $\iota = 4$.

若 I 是一个 κ-有向偏序，且 $M = \langle M_t : t \in I \rangle$ 是一个 $\le_{\mathfrak{s}}$-有向系统， M是其 $\le_{\mathfrak{k}}$-并，且 $M \le_{\mathfrak{s}} N$以及正交型$(a, M, N) \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_\delta)$，那么对于每个足够大的 $s \in I$，正交型(a, M, N)都不在 M_s 上分叉。

[解释：这是对 $\kappa \ge \kappa_r(T)$的替代；如果 $p \in \mathscr{S}(A)$，那么存在一个基数为 $< \kappa$ 的 $B \subseteq A$，使得 p 不在 A 上分叉。 $\iota = 2$的情况？即使对于稳定的一阶理论而言，这也是一个非常强的要求。]这意味着维数连续性，即 M_δ 在 $\cup\{M_\alpha$ 上是极小的：$\alpha < \delta\}$和 κ 饱和模型。]

(d)（传递性）：

如果 $M_0 \le_{\mathfrak{k}} M'_0 \le_{\mathfrak{k}} M''_0 \le_{\mathfrak{k}} M_3$和 $a \in M_3$和正交型(a, M''_0, M_3)不在 M'_0上分叉，并且正交型(a, M'_0, M_3)不在 M_0上分叉（当然，所有模型都在K_λ中，并且这三个相关类型必然都在 $\mathscr{S}^{\rm bs}$中），那么正交型(a, M''_0, M_3)不在 M_0上分叉

(e) 唯一性：若 p、 $q \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_1)$不在 $M_0 \le_{\mathfrak{k}} M_1$ 上分叉（都在 $K_{\mathfrak{s}}$ 中），且$p \restriction M_0 = q \restriction M_0$ 则 $p = q$

(f) 对称性：

情形 1： $\ell \ge 3$。

如果 $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_\ell \le_{\mathfrak{s}} M_3$ 且 $(M_0, M_\ell, a_\ell) \in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$，关于$\ell = 1$，请参见下文的条款 (j)，2 则正交型$_{\mathfrak{s}}(a_2, M_1, M_3)$ 不在 M_0 上分叉，当且仅当正交型$_{\mathfrak{s}}(a_1, M_2, M_3)$ 不在 M_0上分叉。

情形 2： $\iota = 1$， 2.

如果 $M_0 \le_{\mathfrak{k}} M_3$ 在 $\mathfrak{k}_\lambda$ 中，并且对于 $\ell = 1$， 2我们有 $a_\ell \in M_3$ 且正交型$(a_\ell, M_0, M_3) \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_0)$，则以下各项等价：

(α) 存在 M_1, M'_3 属于 $K_{\mathfrak{s}}$，使得 $M_0 \le_{\mathfrak{k}} M_1 \le_{\mathfrak{K}} M'_3, a_1 \in M_1, M_3 \le_{\mathfrak{k}} M'_3$，并且 ortp$(a_2, M_1, M'_3)$ 不在 M_0 上分叉

(β) 存在 M_2, M'_3 属于 K_λ，使得 $M_0 \le_{\mathfrak{k}} M_2 \le_{\mathfrak{k}} M'_3$，$a_2 \in M_2, M_3 \le_{\mathfrak{k}} M'_3$，并且 ortp$(a_1, M_2, M'_3)$ 不在 M_0 上分叉。

[解释：这是对“ortp$(a_1, M_0 \cup \{a_2\}, M_3)$ 在 M_0 上分叉，当且仅当 ortp$(a_2, M_0 \cup \{a_1\}, M_3)$ 在 M_0 上分叉”的替换；在我们的上下文中，这一定义并非良定义]

(g) [存在性] 若 $M \le_{\mathfrak{s}} N, p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M)$，则存在 $q \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N)$，它是 $p(h)$ 的一个非分叉扩张[连续性] 情形 1：$\iota \ge 1$。若 $\langle M_\alpha : \alpha \le \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的，$\le_{\mathfrak{s}}$-半连续性，~~$M_\delta = \bigcup M_\alpha$~~$_{\alpha<\delta}$若 cf($\delta$) $\ge \kappa$ 且 $p \in \mathscr{S}(M_\delta)$ 并且 $p \restriction M_\alpha$ 对 M_0 不分叉 $\alpha < \delta$，则 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_\delta)$ 且它在 M_0 上不分叉情形 2：$\iota = 4$。

[-]同样对于 $M = \langle M_t : t \in I \rangle$，$I$ 有向，$M = \cup\{M_t : t \in I\}$ 是$\le_{\mathfrak{s}}$-上界 M

(j) $\mathfrak{s}$ 有 $K^{3,\rm pr}_{\mathfrak{s}}$-素模型，见 6.8 ($k$) 情形 1：$\iota \ge 1$。如果 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$，那么对于某个来自 K_λ情形 2：$\iota = 3$ 的 $M \le_{\mathfrak{s}} N$，p 不在 M 上分叉，4. 如果 $M_\ell(\ell \le 3)$ ~~a_ℓ~~，$p_\ell(\ell = 1, 2)$ 如 (E)(f) 中所述。

讨论 6.2。考虑使用：半连续 + 余终性(δ) $\ge \kappa$ 对于 (E)(c)、(E)(x)：余终性(δ) $\ge \kappa$ 仅当 $\chi = \chi^{<\kappa}$ 时稳定。

断言6.3.1) 若 $\langle M_i : i < \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，$(\Sigma\{\|M_i\| : i < \delta\}) < \mu$ 且$p_i \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 不在 M_0 上分叉 对于 $i < \delta$和 $[i < j \Rightarrow p_j \restriction M_i = p_i]$ 则：

(a) 我们可以找到 M_δ，使得 $i < \delta \Rightarrow M_i \le_{\mathfrak{k}} M_\delta$。对于任何这样的 M_δ，我们可以找到 $p \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M_\delta)$，使得 $\bigwedge p \restriction M_i = p_i$，且 $p_{i<\delta}$不在 M_0(c) 上分叉。p_δ 在条款 (b) (d) 中是唯一的。如果 $\ell \ge \kappa \wedge$cf(δ) $\ge \kappa$，我们可以添加 $M = \cup\{M_\alpha : \alpha < \delta\}$。

[-]2) 对 $M = \langle M_t$ 也同理：$t \in I\rangle, I$ 有向。

证明。1) 首先根据 6.1 的条款 (A) 选取 M_δ。其次，选取 $p_\delta \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_\delta)$，它是 p_0 的一个非分叉扩张；由 6.1 的 (E) 的 Ax(g) 可知其存在。现在，依据 6.1 的 (E) 的 (b)，$p_\delta \restriction M_i \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 不在 M_0 上分叉；并且它扩张 p_0，因此根据 (E) 的 (e)，它等于 p_i。第三，由 (E)(e) 可知 p_δ 是唯一的。

2) 也应该清晰。 $\square_{6.3}$

定义 6.4。0) 我们称 $\mathfrak{s}$ 是满的，当 $\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M) = \{p : p \in \mathscr{S}^{\varepsilon}_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]}(M)$对某个 $\varepsilon < \kappa_{\mathfrak{s}}\}$ 对每个 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ [都不是代数的，参见 (2)]。

1) 假设 $M_\ell \le_{\mathfrak{s}} N$对于 $\ell = 1$、2 和 $p_\ell \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_\ell)$ 对于 $\ell = 1$、2。当某个 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 是 p_ℓ 对于 $\ell = 1$、2 的非分叉扩张时，我们称 p_1、p_2 是平行的。2) 当 $\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathscr{S}^{\rm nat}_{\mathfrak{s}}(M)$ 对于 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 时，我们称 $\mathfrak{s}$ 是类型充满的。

3) 我们称 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 基于 [-]a，当且仅当：

(a) [-]a 是来自 $M(b)$ 的序列，如果 $M \le_{\mathfrak{s}} N$且 $q \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 是 p的非分叉扩张，并且 π是 N 上关于 [-]的自同构，则 $\pi(q) = q$ （由 Ax(E)(k)，存在这样的[-]a $\in {}^{\lambda}(M)$）。

4) 当（3）存在这样一个 $^{-} \in {}^{\theta >}M$ 时，我们称 $\mathfrak{s}$ 是基于（$< \theta$）的。

定义 6.5. 1) 我们称 NF 是一个在 (μ,λ,κ) $-$ 1- d.a.e.c. $\mathfrak{k}$ 上的非分叉关系，当它除了满足 6.1(A)-(C) 以外还满足

(*F*) (a) 不分叉关系是 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 上的四元关系，不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$ 蕴含 $M_0\le_{\mathfrak{k}}M_\ell\le_{\mathfrak{k}}M_1$，且不分叉关系$_{\mathfrak{s}}$ 在同构下保持 $(b)_1$ 单调性：若不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$ $M_0\le_{\mathfrak{s}}M'_\ell\le_{\mathfrak{s}}M_\ell$对$\ell=1,2, M'_1\cup M'_2\subseteq M'_3\le_{\mathfrak{s}}M, M'_3\le_{\mathfrak{s}}M$成立，则不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M',M'_2,M'_3)$ (c) 对称性：不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$ 蕴含不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_2,M_1,M_3)$ $(d)_1$ 传递性：若不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_{2\ell},M_{2\ell+1},M_{2\ell+3},M_{2\ell+4})$ 对 $\ell=0,1$ 成立，则不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_4,M_5)$ $(d)_2$ 长传递性：若 $\langle(N_i,M_i):i<\delta\rangle$ 是一个不分叉关系$_{\mathfrak{s}}$-序列（即，M_i 是$\le_{\mathfrak{s}}$-递增的，N_i 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的，$M_i\le_{\mathfrak{s}}M_i, i<j<\delta\Rightarrow$不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_i,N_i,M_j,N_j)$ 且 $\Sigma\{\|N_i\|:i<\delta\}<\mu$），那么我们可以找到 (N_δ,M_δ)，使得$\langle(M_i,N_i):i\le\delta\rangle$ 是一个非分叉序列。但 pr-连续性又如何呢？$(d)^+_2$ 类似于 $(d)_2$，对于有向系统 (e) 连续性

定义6.6.1)设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 λ-框架，且不分叉关系是定义在 $\mathfrak{k}$ 上的非分叉关系。我们称不分叉关系尊重 $\mathfrak{s}$，当：如果不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$且 $a\in M_2$，正交型$_{\mathfrak{s}}(a,M_0,M_3)$ $\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_0)$，那么正交型$_{\mathfrak{s}}(a,M_1,M_3)$是正交型$_{\mathfrak{s}}(a,M_0,M_2)$ 的非分叉扩张。2) 当 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的(λ,μ,κ) 不分叉关系框架时，我们称 $\mathfrak{s}$是一个良好的(λ,μ,χ)-框架，并且不分叉关系$_{\mathfrak{s}}$ 是定义在 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 上的、尊重 $\mathfrak{s}$ 的非分叉关系。

定义 6.7. 我们称 $\mathfrak{s}$ 是一个非常良好的 (μ,λ,κ) $-$ 不分叉关系框架，如果它是一个良好的 (μ,λ,κ) $-$ 不分叉关系框架，并且

(*G*) (a) $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 有链的素模型，甚至也有有向系统的素模型，见定义 5.4(4) (b) 若 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$，则存在 $M^*_3\le_{\mathfrak{s}}M_3$，它是 $M_1\cup M_2$ 上的素模型，即：$(*)$ 若 NF$_{\mathfrak{s}}(M'_0,M'_1,M'_2,M'_3)$，且 f_ℓ是从 M_ℓ到M'_ℓ的同构（对 $\ell=0,1,2$），使得 $f_0\subseteq f_1, f_0\subseteq f_2$，则存在一个 $\le_{\mathfrak{s}}$-嵌入 f_3，将 M^*_3嵌入 M'_3并扩张 $f_1\cup f_2$ (c) $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 有素模型（见下文 6.8(2)）。

定义 6.8. 0) $K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}}=\{(M,N,a):M\le_{\mathfrak{s}}N$且 $a\in N$且 正交型$_{\mathfrak{s}}(a,M,N)\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)\}$.

1) $K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}=\{(M,N,a)\in K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}}$: 若 $M\le N', a'\in N',$正交型$_{\mathfrak{s}}(a',M,N')=$正交型$(a,M,N)$，则存在一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入，将 N 嵌入 N'，并扩张恒等映射$_M$ 且将 a 映射到 a'。2) $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$具有 $K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$-素模型，若对每个 $M\in K_{\mathfrak{s}}$和 $p\in\mathscr{S}$bs$_{\mathfrak{s}}(M)$，都存在 (N,a) 使得 $(M,N,a)\in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$且 正交型$_{\mathfrak{s}}(a,M,N)=p$.

定义 6.9. 1) $[\iota\ge3]$

假设$p_1,p_2\in\mathscr{S}^{\rm bs}(M)$，我们称$p_1,{}^{\rm b}p_2$是弱正交的，当：若 $M_0\le_{\mathfrak{s}}M_\ell\le_{\mathfrak{s}}M_3$，$(M_0,M_\ell,a_\ell)\in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$且正交型$_{\mathfrak{s}}(a_\ell,M_0,M_\ell)=p_\ell$对于 $\ell=1,2$则正交型$_{\mathfrak{s}}(a_2,M_1,M_3)$ 不在 M_0上分叉（由 Ax(E)(f) 可知具有对称性）。

2）我们称 p_1、p_2 与 $p_1 \perp p_2$ 正交，当：若 $M \leq_{\mathfrak{s}} M_2$、$M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_2$ 且 $q_\ell \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_2)$ 是 p_ℓ 的非分叉扩张，并且 q_ℓ 不在 M_1 上分叉，则 $q_1 \perp_{\rm wk} q_2$。3）我们称 ~~$\{a_t :$~~ 当 $t \in I\}$ 在（M_0、M_1、M_2）中独立时

(a) $a_t \in M_2 \backslash M_1$(b) 正交型$_{\mathfrak{s}}(a_t, M_1, M_2)$ 不在 M_0(c) 上分叉，存在一个列表 $\langle t$ (α)：$\alpha < \alpha(*)\rangle$，其中无重复的 I 构成一个 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增序列 $\langle M_{1,\alpha} : \alpha \leq \alpha$ (*) $+1\rangle$，使得 $M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_{1,0}, M_2 \leq M_{1,\alpha(*)+1}$，满足 $a_{t(\alpha)} \in M_{1,\alpha+1}$，并且正交型$_{\mathfrak{s}}(a_{t(\alpha)}, M_{1,\alpha}, M_{1,\alpha+1})$ 不在 M_0上分叉。

4) 令 $(M, N, \mathrm{J}) \in K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}}$，若 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$ 且 J 在 (M, N) 中独立。5) 令 $(M, N, \mathrm{J}) \in K^{3,{\rm qr}}_{\mathfrak{s}}$，若：

(a) $M \leq_{\mathfrak{s}} N$(b) J 在 (M, N) (c) 中独立，若 $M \leq_{\mathfrak{s}} N', h$ 是从 J 到 N' 的单射，使得 $(M, N', h''(\mathrm{J})) \in K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}}$，则存在一个 $\leq_{\mathfrak{s}}$-嵌入 g，将 N 嵌入 N' 中，并且在 M 上延拓 h。

注 6.10。$M = \langle M_i : \text{当 } i < \alpha\rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增时，它是递增半连续的；对于每个极限 $\delta < \alpha$，M_δ 在 $M \restriction \delta$ 上是素的。

注 6.11。现在我们可以仿照公理之间的关系（如 [She09c, §2] 中所述），以及 6.9 中引入的概念的基本性质。

定义 6.12。1）我们称 p 被 $\{p_t$ 强支配：$t \in I\}$，其中可以有重复项，因此严格来说我们应该使用一个序列并写作 $p \leq^{\rm dm}_{\rm st} \{p_t : t \in I\}$）；当：

(a) $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ $p_t \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_t)$ $N_t \leq_{\mathfrak{s}} N^+ \in K_{\mathfrak{s}}$，$N \leq_{\mathfrak{s}} N^+$以及（b）如果 $N^+ \leq_{\mathfrak{s}} N^*$ 且 $a_t \in N^*$，并且正交型$(a_t, N^+, N^*) \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N^+)$ 与p_t 平行，且 $p' \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N^+)$ 与 p 平行，见定义 6.4，并且 $\{a_t : t \in I\}$ 在 (N^+, N^*) 中独立，那么某个 $a \in N^*$ 实现 p'。

2)我们称 p 被 $\{p_t$ 弱支配：$t \in I\}$，并记作 $p \leq_{\rm wk} \{p_t : t \in I\}$，当存在某个集合 J 和从 J 到 I 上的函数 h，使得 $p \leq^{\rm dm}_{\rm st} \{p_{h(t)} : t \in J\}$。3) 令支配表示强支配。

断言 6.13. 1) 如果 p 被 $\{p_t : t \in I\}$ 强支配，那么 p 被 $\{p_t : t \in I\}$ 弱支配。

2) 如果 p 被 $\{p_t : t \in I\}$ 强支配：那么对于某个基数为$< \kappa_{\mathfrak{s}}$的 $J \subseteq I$，p 被 $\{p_t : t \in I\}$ 强支配。

3) p 被 $\{p_t$ 弱支配：$t \in I\}$ 当且仅当对于某个 $\langle i_t : t \in I\rangle$，$p$ 被 $\{p'_s$强支配：$s \in \{(t, i) : t \in I,\ i < \overline{i_t}\}\}$ 其中$p'_{(t,i)} = p_t$，$i_t < \kappa_{\mathfrak{s}}$对于每个$t \in I$。

4) 在定义 6.12(2) 中，不失一般性地有 $(\forall s \in I)(\exists^{<\kappa} t \in J)(h(t) = s)$。5) [平行性的保持]

证明。证明应当清晰。 $\square_{6.13}$

以下内容应包含在 8.16 的非常良好版本中，请参阅[16] 更多 8.4

[16]对于存在 $M \in K_\lambda$ 饱满溢出 $N \in K_\lambda$ 对于每个这样的 N 这（8.4(1)(c)）情形而言工作

命题6.14.1)如果 $p \leq^{\rm dm}_{\rm wk} \{p_i : i < i^*\}$ 且 $i < i^* \Rightarrow q \perp p_i$ 则 $q \perp p$（见定义6.8(3)）。

1A) 如果 $p \leq^{\rm d}_{\rm mwk} \{p_i : i < i^*\}$, $(p \in \mathscr{S}^{\rm b}_{\mathfrak{s}}(M))$ 则存在某个 $i < i^*$，使得 $p \pm p_i$。

2) 若对于 $i < i^* < \kappa$，有 $M \leq_{\mathfrak{s}} N, q \in N, p_i \in \mathscr{S}$<style 恒等映射='4'>$\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，则存在 $q' \in \mathscr{S}$<style 恒等映射='10'>$\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，使得使得对于某些 N^+、f，我们有：

(a) $N \leq_{\mathfrak{s}} N^+, f$是 N^+(b)的自同构 f将 q在 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N^+)$的非分叉扩张映射到 q'在 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N^+)$的非分叉扩张 ($c$) f将 p_i在 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N^+)$的非分叉扩张映射到其自身。

3) 如果 $p \leq^{\rm dm}_{\rm st} \{p_i : i < \alpha\}$ 那么 $p \leq^{\rm dm}_{\rm st} \{p_i : i < \alpha, p_i \pm p\}$ [参见定义6.12。]4) 假设

(a) $p, p_i \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 对于 $i < i^*$(b) p_i 被.....弱支配 p(c) no $q \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 被.....弱支配 p且与 p_i正交，对于 $i < i^*$。

则 $p \leq^{\rm dim}_{\rm wk} \{p_i : i < i^*\}$。

证明。令 $p \in \mathscr{S}_{\rm bs}(N)$ $N \in K_{A^{\rm o}}$ 如果 $p \in \mathbf{P}^\perp$，则我们就完成了，因此假设 $N \leq N_1 \in K_{\mathfrak{s}}, q \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N_1) \cap \mathbf{P}$ 且 $p \pm q$。令 $\bar{\mathrm{a}} \in {}^{\kappa >}N_1$ 满足 q 在 $\bar{\mathrm{a}}$ 上可定义，因此我们可以找到 $\langle \bar{\mathrm{a}}_i : i < \kappa \rangle, \bar{a}_i \in {}^{\ell g(\bar{\mathrm{a}})}M$，使得 $\langle \bar{\mathrm{a}}_i : i < \kappa \rangle^\frown \langle \bar{\mathrm{a}} \rangle$ 在 $A \cup b$ 上不可分辨，其中 p 在 b 上可定义 $\subseteq M$。

设 $q_i \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N_1)$ 在 $\bar{\mathrm{a}}_i$ 上定义，方式与 q 在 $\bar{\mathrm{a}}$ 上的定义一样简单 $q_i \in \mathscr{P}, p \pm q_i$，因此我们完成了。$\square_{6.14}$

断言 6.15. 1) 如果 $\chi = \chi^{<\kappa} \in [\lambda, \mu)$，以下是不可能的：

(a) $\langle M_i : i < \chi^+ \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增的 $\leq_{\mathfrak{s}}$-半连续的，(b) $\langle N_i : i < \chi^+ \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增的、$\leq_{\mathfrak{s}}$-半连续的，(c) $M_i \leq_{\mathfrak{s}} N_i \in K_{\leq \chi}$，($d$) 对某个平稳的 $S \subseteq \{\delta < \chi^+ :$ 余终性(γ) $\geq \kappa\}$ 对每个 $i \in S$

- 存在 $a_i \in M_{i+1} \backslash M_i$，使得 ortp($a_i, N_i, N_{i+1}$) 不是 ortp($a_i, M_i, M_{i+1}$) $\in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M_i)$ 的非分叉扩张。

2) 与 (1) 类似，将 (d) 替换为：

(d)′ *like (d) replacing* • *by*

- •′ $b_i \in N_i \backslash M_i, \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b_i, M_i, N_i) \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ *and* $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b_i, M_{i+1}, N_{i+1})$ *forks over* M_i.

证明。显而易见。 $\square_{6.15}$

断言 6.16. 若 $p, p_i \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 对于 $i < \kappa_{\mathfrak{s}}$和 $i < j \Rightarrow p_2 \perp p_j$成立，则对于每个足够大的$i < \kappa$， $p \perp p_i$。

证明。与 8.6 的证明类似。 $\square$

定义 6.17. 1) 我们称 (a good (frame$_{\mathfrak{s}}$), $\mathfrak{s}$ 是 θ-based$_1$，当：

(a) 若 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$，则对于某个 $\bar{\mathrm{a}} \in {}^{\theta >}M$， p基于 $\bar{\mathrm{a}}$（见定义 6.4(4)）。

2) 当 $\mathfrak{s}$ 为 θ-基于$_2$ 时，我们称之为:

(a) 如第 (1)部分 (b) $\mathfrak{s}$ 是满的(c) 如果 $M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_2$ 和 $p \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_2)$，那么对于某个 $\bar{a}_\ell \in {}^{\theta>}(M_\ell)$，类型$p$、正交型$_{\mathfrak{s}}(\bar{a}_2, M_1, M_2)$ 分别基于 $^-$a$_2$、 $^-$a（或者以公理方式！）。

第三部分

第7节. Introduction/Thoughts on the main gap

我们在此讨论两个问题：严格稳定类的类型理论（即维数、正交性等），以及关于某种程度上的饱和模型的主间隙；人们始终希望，第一个问题的进展将有助于解决第二个问题。

关于一阶情形，工作始于 [She90, Ch.V], 尤其是 [She90, Ch.V,§5] 并由 [She91] 大大推进，并在 Hernandes [Her92]中取得了很大进展；但对于某种程度上饱和模型而言，这还不足以填补主间隙。

这里我们讨论一般框架的类型维数。

* * *

可数一阶理论的 $\aleph_1 - |T|^+$ 饱和模型的主间隙问题尚未解决。乍看之下，这个问题似乎比模型的主间隙问题（后者被视为"原始问题"）更容易，因为任意集合上都存在素模型；但它仍未解决（对于不可数一阶理论的 $|T|^+$ 饱和模型，情况也是如此）。

为什么 [She90, Ch.XII] 中的证明行不通？缺少的是什么（在 $\mathfrak{C}^{\rm eq}$ 中！）

$\circledast$ 如果 $M_0 \prec M_1 \prec M_2$ 是 $\aleph_1$-饱和，$a \in M_2 \backslash M_1$ 且 $(a/M_1) \pm M_0$ 那么对于某个 $b \in M_2 \backslash M_1$ 我们有 $b \bigcup_{M_0} M_1$.

核心情形是 a/M_1 正交于 q 如果 $q \perp M_0$。

可能的途径1：我们利用 T 的一阶可数性、稳定NDOP（甚至浅层）来理解类型。参见 [LS06]。

可能的途径2：我们采用第二部分的背景。我们的知识较少，但拥有更丰富的 $\mathfrak{C}^{\rm eq}$，因此即使它在初等情形下对 T 不成立，我们也可能证明 $\circledast$ （这体现了本书第一部分与第二部分之间的联系）。

可能的方法3：我们使用第二部分的语境。如果情况不理想，我们就定义这样一个导出的 d.a.e.c.（如 [She09g] 或 [She09c]中所示）；它可能具有非结构性质，否则我们将到达同一位置。极限情形同样如此。如果我们成功足够多次，就能证明一切都没有问题。

可能的方法 4：现在我们在某个相当饱和的模型中有一棵极大的非分叉树 $\langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathscr{T}\rangle$对于 [She90], 例如 $\|M_\eta\| \le \lambda$，模型是 λ^+- 饱和的，但我们使用来自 [She, 第二部分]的模型。如果 M 在 $\cup\{M_\eta : \eta \in \mathscr{T}\}$之上是素的，那么我们就完成了，但也许还存在余项。这表现为：对于 $\eta \in \mathscr{T}$，并且$p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_\eta)$ p 的维数并未被 $\langle a_{\eta^\frown\langle\alpha\rangle} : \eta^\frown\langle\alpha\rangle \in \mathscr{T}$ 以及 $(a_{\eta^\frown\langle\alpha\rangle}/M_\eta) \pm p\}$穷尽，但丢失的部分并不是无限的！这迫使 $\le \lambda$ 从 $\mathscr{T}$到 $\mathscr{T}$存在一元函数。现在在我看来，这个可能的非穷尽性问题（本质上：存在一个非代数的 $p \in (M^\perp)^\perp$，它不1-支配任何$q \in \mathscr{S}(M)$）并不是一个良好的划分界线，尽管其否定是有信息量的，但不清楚它是否会产生任何后果。不过，有两个划分界线的候选（实际上，它们的析取似乎是如此）

(A) $(*)$ we can find $M, \langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathscr{T}\rangle$ as above and $\eta_* \in \mathscr{T}, \ell g(\eta) = 2, \nu_* \in \mathscr{T}, \ell g(\nu_*) = 1, \eta_* \restriction 1 \neq \nu_*$ and $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M_{\eta_*}), p \perp M_{\eta\restriction 1}$ with a residue as above such that we need M_{ν_*} to explicate it.

更明确地说

$(*)'$ if $M' \leq_{\mathfrak{s}} M$ is prime over $\cup\{M_\eta : \eta \in \mathscr{T}\}$ and we can find $a_{\eta_*,\nu_*} \in M \backslash M'$ such that ortp$(\mathscr{C}(a_{\eta^*,\nu^*}, M'), \cup\{M_\eta : \eta \in \mathscr{T}\})$ mark (M_{η_*}, M_{ν_*}).

即使在 $(*)'$ 中，我们也必须说得更多，才能成功使用它。

从（$*$）′我们可以证明一个非结构性结果：在 $\mathscr{T}$ 上，我们可以编码任意一个关于 $\{\eta \in \mathscr{T}$ 的二元关系 R： $\ell g(\eta) = 1$， M_η， $M_{\eta_*\restriction 1}$ 在 $M_{<>}\}$ 上同构，其中$\nu_1 R \nu_2 \Leftrightarrow$ 是$\exists \nu$（$\bigwedge$ []）存在 η'， $\eta_\ell \lhd \eta' \in \mathscr{T}$， $\ell g(\eta') = 2$和 $\nu \in T$， $\ell g(\nu) = 1$，并且那里ℓ存在 $a_{\eta'\nu}$ 如上所述]。

情况更为复杂。

(B) $(**)$ we can fix $(M, \langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathscr{T}\rangle$ as above), $\eta_* \in T, \nu_*, \nu_{**} \in \mathscr{T}, \ell g(\eta_*) = \ell g(\nu_*) = 1 = \ell g(\nu_{**})$ such that $(\eta_*, \nu_*), (\eta_*, \nu_{**})$ are as above.

但对于 (A)，我们必须使 (B) 中的 η_* 和 ν_* 都不冗余；而为了得到非结构，我们必须使用 (B) 中一个并非“伪造”的情形，例如，不能用这样的两个有序对替换 (M_{η_*}, a_{η_*})。

也就是说，“伪造者”指的是这样一种情况：我们可以找到 $M'_{\eta_*}, M''_{\eta_*}$，使得：

(a) 不分叉关系$(M_{<>}, M'_{\eta_*}, M''_{\eta_*}, M_{\eta_*})$ (b) M_{η_*} 仅当 (M'_{η_*}, M_{ν_*}) 和 $(M''_{\eta_*}, M_{\nu_{**}})$ 相关时，才在 $M'_{\eta_*} \cup M''_{\eta_*}$ (c) 上是素的。

[可能我们有 $\langle \nu_t : t \in I\rangle$ 我们可以“除”，但不能完全除，这可能是个问题]（C），如果（A）和（B）都没有以正确的形式出现，那么

(α) 良好的可能性；我们可以证明一个结构理论：对于 $M, \langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathscr{T}\rangle$如上所述，在每个 $\mathrm{suc}_{\mathscr{T}}(\eta)$ 上都有一个二元关系，但它非常简单，你必须把一些东西粘合在一起，或者至多形成树结构。

如果这行不通，我们可能会退回采用方法（3）。

问题 7.1。1）对于一个抽象初等类 $\mathfrak{k}$，何时逻辑$\mathscr{L} = \mathbb{L}_{\infty,\kappa}[\mathfrak{k}]$ 中的模型理论（加入维度量词后）能够刻画 $\mathfrak{k}$ 的模型，且刻画到同构为止？类似地，若再加入长度为 $\leq \kappa$ 的博弈量词呢?

2)证明以下版本的主间隙定理：如果 $\mathfrak{s}$ 是 n-漂亮的（或 $n+1$? ），那么对于$K_{\lambda^{+n}}$ 主间隙成立；特别地，如果 $\mathfrak{s}$ 具有非正交维数性质，则每个 $M \in K_{\lambda^{+n}}$ 都是某个由 $\leq_{\mathfrak{K}[\mathfrak{s}]}$-子模型 $\langle M_\eta$ 构成的非分叉树上的素模型 $\eta \in \mathscr{T}\rangle$，每个 M_η 的基数为$\leq \lambda, \mathscr{T} \subseteq {}^{\omega>}(\lambda^{+n})$。如果 $\mathfrak{s}$ 是浅层的，那么该树具有深度 $\leq$ 深度$(\mathfrak{s})$ $< \lambda^+$，并且我们可以就模型的数量得出结论。

讨论 7.2。 [假设 $\lambda_{\mathfrak{s}}$] 中的稳定性。

暂且假设是 $M_0 \in K_{\mathfrak{s}}, \lambda_{\mathfrak{s}}^+$-饱和的。1）假设

$\boxplus_1$ $N_0 \leq_{\mathfrak{s}} N_1 \leq_{\mathfrak{s}} M, N_\ell \in K^{\mathfrak{s}}_\lambda, a \in N_0$ and $(N_0, N_1, a) \in K^{3,\rm pr}_{\mathfrak{s}}$.

我们通过对 $i \le \lambda_{\mathfrak{s}}^+$ 作归纳法，选取 $(N_{1,i}^+, N_{1,i}, \mathbf{I}_i)$，并在可能时也选取 (M_1, a_i)，使得

(∗)(a) (α) $N_{0,i} \le_{\mathfrak{s}} N_{1,i} \le_{\mathfrak{s}} N_1^+{}_{,i} \le_{\mathfrak{s}} M$(b) $\mathbf{I}_i \subseteq \{c \in M$: 正交型$(c, N_{1,i}, M_0) \perp N_0\}$ 在$(N_{1,i}, N_1^+{}_{,i}, M)$中独立且极小(c) $\langle N_j : j \le i\rangle$ 是 $\le_{gs}$-半连续的；此外 $\langle N_j^+ : j \le i\rangle$(d)若 $i = j+1$则$N_1^+{}_{,i}$在$N_1^+{}_{,j}$上是 $\le_{\mathfrak{s}}$-泛的，且$(N_0, N_{1,i}, a) \in K^3_{,\mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$(e)若 $j < i$ 则 $\mathbf{I}_j \backslash (N_i \cap \mathbf{I}j) \subseteq \mathbf{I}_i$(f)若可能$(\alpha)$ $N_i \le_{\mathfrak{s}} M_i^+ \le_{\mathfrak{s}} M(\beta)$ $(\mathbf{I}_i \backslash M_i)$在$(M_i, M)$中独立$(\gamma)$ $a_i \in M \backslash (\mathbf{I}_i)$ (δ) 正交型$(a_i, M_1^*, M) \in \mathscr{S}\mathbf{bs}_{\mathfrak{s}}(N_i^+)$是 $\perp N_i(\varepsilon)$ $N_i^* \le N_{1,i+1}(g)$ 若 $i = j+1$存在(b, N_*^+, N_{**})使得$b \in N_1^+{}_{,j} \backslash N_{1,j}, N_{1,i} \le_{\mathfrak{s}} N_* \le_{\mathfrak{s}} N_{**} \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda_{\mathfrak{s}}}, N_1^+{}_{,i} \le_{\mathfrak{s}} N_{**}$ 且正交型$_{\mathfrak{s}}(b, N_*, N_{**})$在$N_{1,j}$ 上分叉，则对某些$b \in N_1^+{}_{,j} \backslash N_{1,j}$，类型正交型$_{\mathfrak{s}}(N_{1,i}, N_1^+{}_{,i})$在$N_{1,j}$上分叉。

进行归纳法没有问题。

$\boxplus_2$ 以下 $\lambda_{\mathfrak{s}}^+$ 的子集不是平稳的；即，与闭无界集 C 不相交：

- $S = \{i < \lambda_{\mathfrak{s}}^+$: 余终性$(i) \ge \kappa_{\mathfrak{s}}$ 且 (M_i, a_i) 是良定义$\}$
- $S_2 = \{i$: 余终性$(i) \ge \kappa_{\mathfrak{s}}$ 并且对于某些 $b \in N_1^+{}_{,i}$, 类型$(b, N_{1,i}, N_1^+{}_{,i}) = N_0$。

2）同样地，不包含（N_0, a），因此也不包含 $\perp N_0$；只是更简单。

定义 7.3。若对于某个 n：我们称（N, $\bar{a}$, I）是关于 M 的递减对：

（a） $N = \langle N_\ell : \ell \le n\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的（b） $N_\ell \le_{\mathfrak{s}} M$, $N_\ell \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda_{\mathfrak{s}}}$（$c$） $\bar{a} = \langle a_\ell : \ell < n\rangle$（$d$）（$N_\ell$, N_{i+1}, a_ℓ） $\in K^3_{,\mathfrak{s}}{}^{\rm pr-}$（$e$） $\mathbf{I} = \langle \mathbf{I}_\ell : \ell \le n\rangle$（$f$） $\mathbf{I}_\ell$ 在（N_ℓ, M）中是独立的（g） $\mathbf{I}_\ell \subseteq \{c \in M$: 正交型（$c$, N_ℓ, M）$\in \mathscr{S}\mathbf{bs}_{\mathfrak{s}}$（$N_\ell$）当且仅当 $\perp N_k$，若 $k < \ell\}$（h），若 $N_\ell \le_{\mathfrak{s}} N \le_{\mathfrak{s}} M$, $b \in M \backslash N_0 \backslash \mathbf{I}_\ell$, 则正交型（$b$, N, M）是 $\pm N_\ell$，但对于 N_k，则 $k < \ell$ 依赖于 $\mathbf{I}_\ell$ 中的（N_ℓ, M）。

尝试证明分解

我们假设维数连续性，以证明分解。如果我们想去掉“M is λ_{gs}^+-saturated”，就假设我们有一个略弱的版本 $\mathfrak{s}_*$ of $\mathfrak{s}$ with$\lambda_{\mathfrak{s}_*} < \lambda_{\mathfrak{s}}$ and $\le_{\mathfrak{s}_*}$-represent N_0 is $\langle N_{0,i} : i < \lambda_{\mathfrak{s}}\rangle$，并据此开展工作。假设 CH, $|T| = \aleph_0$ 没问题。没有维数不连续性时，我们称长度为$\le \kappa_{\mathfrak{s}}$的 $(N, \bar{a}, \mathbf{I})$ 为 nice!

* * *

定义 7.4。我们称 $\mathrm{d} = (I, N, \bar{a}, \mathrm{I}) = (I_{\mathbf{d}}, N_d, \bar{a}_{\mathbf{d}}, \mathrm{I}_{\mathbf{d}})$ 是 when 的部分分解：

⊞ (a) $I \subseteq {}^{\omega>}\mathrm{Ord}$ 在初始片段下是闭合的 (b) $N = \langle N_\eta : \eta \in I \rangle$ 因此 $N_\eta = N_{\mathbf{d},\eta}$ (c) $\bar{a} = \langle a_\eta : \eta \in I \backslash \{<>\} \rangle$ 因此 $a_\eta = a_{\mathbf{d},\eta}$ (d) $\mathrm{I} = \langle \mathrm{I}_\eta : \eta \in I \rangle$ 因此 $\mathrm{I}_\eta = \mathrm{I}_{\mathbf{d},\eta}$ (e) 如果 $\eta \in I$ 那么 $(\langle N_{\eta\restriction\ell} : \ell \leq \ell g(\eta) \rangle, \langle \bar{a}_{\eta\restriction(\ell+1)} : \ell < \ell g(\eta) \rangle, \langle \mathrm{I}_{\eta\restriction\ell} : \ell \leq \ell g(\eta) \rangle)$ 在 $M(f)$ 中是良好的，如果 $\eta \in I$ 那么 $\langle a_{\eta^\frown\langle\alpha\rangle} : \eta^\frown\langle\alpha\rangle \in I \rangle$ 是 I_η 的成员序列且无重复。

定义 7.5。令 $\leq_\mu$ 为定义在 M 的分解集合上的以下二元关系：

$\mathrm{d}_1 \leq_M \mathrm{d}_2$ iff

(a) $I_{\mathbf{d}_1} \subseteq$ 我 d_1

(b)

$N_{\mathbf{d}_1} = N_{\mathbf{d}_2}\restriction I_{d_1}$

$\bar{a}_{\mathbf{d}_1} = \bar{a}_{\mathbf{d}_2}\restriction(I_{\mathbf{d}_1} \backslash \{< j\})$

(d) 我 $\mathbf{d}_1 =$ 我 $d_2 \restriction I_{\mathbf{d}_1}$

§ 8. III, Analysis of dimension for P

假设8.1。1) $\mathfrak{s}$ 是一个非常良好的类型充满的（μ、 λ、 κ）-不分叉关系框架（参见6.7），或者是满的良好的（μ、 λ、 κ）-框架$_{\mathfrak{s}}$-参见定义；我们有时使用类型充满的（6.4）和 $\perp = \perp_{\rm wk}$）；半连续将表示 $\leq_{\mathfrak{s}}$-半连续；应使用"p 基于 $\bar{a}$"来证明 $\perp = \perp_{\rm wk}$ 的合理性。

2) $\mathfrak{C}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-怪兽模型，或者我们使用位置 $K_{\mathfrak{a}}$（或 K_A 和 $K_{(M,\bar{a})}$，见定义 1.6(5)）。

定义 8.2.设 $K_{\mathfrak{a}}$ 是一个位置，P是一个基于 A 的类型族（参见1.10），对平行性封闭（添加到 §6 中的定义），即，使用怪兽模型版本，这意味着：

(a) $A \subseteq \mathfrak{C}$、 M 在 $M \leq_{\mathfrak{k}} \mathfrak{C}$ 上变化，使得 $A \subseteq M$ 或仅仅 $\mathfrak{k}_A$ 是良定义的 (b) $\mathbf{P} \subseteq \cup\{\mathscr{S}^{\rm bs}(M) : M \in \mathfrak{k}_A$，即 $A \subseteq M \leq_{\mathfrak{k}} \mathfrak{C}\}$ (c) $\mathfrak{C}$ 在 A 上的每个自同构都会将 P 映射到自身

这里我们添加了

(d) 如果 $p_\ell \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_\ell)$ 对于 $\ell = 1, 2$， $M_\ell \in K_{\mathfrak{a}}$ 并且 $p_1 \| p_2$ 那么 $p_1 \in \mathbf{P} \Leftrightarrow p_2 \in \mathbf{P}$（这里需要这样，而不是在权重检查中！）。

1) 当（P A 如第（0）部分所述）时，P 是 $\mathfrak{a}$-稠密的

($*$) if $M \in K_{\mathfrak{a}}$ and $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ then $(\exists q \in \mathbf{P} \cap \mathscr{S}^{\rm bs}(M))[p \pm_{\rm wk} q]$.

2) 当以下条件成立时，我们称 $\langle M_i, a_j : i \leq \alpha, j < \alpha\rangle$ 为 P-素性序列：

(a) M_i 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增半连续 [即，如果 i 是极限序数，则 M_i 是关于 $\cup\{M_j$ 的$\mathfrak{s}$-素： $j < i\}$，参见定义 6.8(5)](b) $(M_i, M_{i+1}, a_i) \in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$ (c) 正交型$_{\mathfrak{s}}(a_i, M_i, M_{i+1}) \in \mathbf{P}$.

3) 我们可以称 $\langle M_i, a_j, p_j : i \leq \alpha, j < \alpha\rangle$ 是一个 P-素序列，当此外

(d) $p_i = {\rm ortp}_{\mathfrak{s}}(a_i, M_i, M_{i+1})$.

定义 8.3。设 P 是一个基于 a 的族。
1) $\mathbf{P}^{\perp} = \{p : p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ $M \in K_{\mathfrak{a}}$ 以及 $p \perp \mathbf{P}$，见下文$\}$。
2) $p \perp \mathbf{P}$ 表示存在某个 M: $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ $M \in K_{\mathfrak{a}}$ 且若 $M \leq_{\mathfrak{s}} N, q \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(M)$ 是 q 的非分叉扩张，则 $p' \perp q$。

断言 8.4。1) 若 P 是一个基于 $\mathfrak{a}$ 的类型族，则：

(a) $\mathbf{P}^{\perp}$ 是一个基于 $\mathfrak{a}$ 的类型族 (b) $\mathbf{P} \cup \mathbf{P}^{\perp}$ 是稠密的。

2) 任意基于 $\mathfrak{a}$ 的类型族的布尔组合都属于一个基于 $\mathfrak{a}$ 的类型族。

证明。1）条款 (a)：（显而易见）。

主要应检查 $\mathbf{P}^{+}$ 在平行性下是封闭的。设 $N_\ell \in K_A, p_\ell \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$ 对于 $\ell = 1, 2$， $N_1 \leq_{\mathfrak{s}} N_2$， p_2 是 p_1 的非分叉扩张。我们应证明 $p_1 \in \mathbf{P}^{+} \Leftrightarrow p_2 \in \mathbf{P}^{\perp}$。方向 $\Rightarrow$ 显然。对于 $\Leftarrow$，使用 amalgamation 等。

条款 (b) 应当清晰（弱稠密性）。
2）简单。 $\square_{8.4}$

断言 8.5。假设 P 是一个合理的、基于 A 的稠密.....
1) 如果 $M \in K_{\mathfrak{a}}$ 和 $q \in \mathscr{S}(M)$，那么我们可以找到一个P-素性序列 $\langle M_i, a_j : i \le \alpha, j < \alpha\rangle$，且有 $M_0 = M$，使得 q 在 M_α 中实现。
2) 如果 $M \le_{\mathfrak{s}} N$ 和 $M \in K_{\mathfrak{a}}$，那么对于某个 P-素性序列 $\langle M_i, a_j :$ 我们有 $i \le \alpha, j < \alpha\rangle$ $M_0 = M$ 和 $N \le_{\mathfrak{s}} M_\alpha$。
3) 在第（2）部分，如果 $\|N\| \le \chi \in [\lambda, \mu)$ 和 $\chi = \chi^{<\kappa}$，那么我们可以要求 $\alpha \le \chi$。同样地，在第（1）部分，不失一般性 $\|M_\alpha\| \le \|N\|^{<\kappa}$。

证明。1)我们可以找到 N 使得 $M \le_{\mathfrak{s}} N$ 和 $a \in N$ 实现 q；令 $A = \{a\}$并应用 2)。

2)令 $\chi = \|N\|^{<\kappa}(< \mu)$。现在尝试选择$(M_i, N_i)$，然后 a_i 通过对$i < \chi^+$ 的归纳法，使得（这里我们使用“$\mathfrak{s}$ 是满的”）。

⊛ (a)$M_0 = M$(b)$M_i \in K^{\mathfrak{s}}_{\le \chi}$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增 $\le_{\mathfrak{s}}$-半连续的，具有 i(c) N_i 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增半连续的，具有 i(d)$N_0 = N$(e)$M_i \le_{\mathfrak{s}} N_i(f)\langle M_\varepsilon, a_\zeta : \varepsilon \le i, \zeta < i\rangle$ 构成一个P-素性序列（g），如果 $i = j + 1$ 那么对于某个 $c_i \in N_i \backslash M_i$，我们有正交型$_{\mathfrak{s}}(c_i, M_i, N_i) \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M_i)$，并且正交型$_{\mathfrak{s}}(c_i, M_{i+1}, N_{i+1})$ 在M_i上分叉。

对于 $i = 0$，这是显然的。对于 $i = j + 1$，若 $M_i \ne N_i$，则由假设和定义 8.2(2)，令 $c_j \in N_i \backslash M_i$，于是 $r_j =$ 正交型 $_{\mathfrak{s}}(c_j, M_j, N_j) \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M_j)$，因此存在 $p_j \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M_j) \cap$ P，使得 $p_j \pm r_j$。于是存在 N_i、a_j，使得 $N_j \le N_i$，且 a_j 实现了 p_j，但 $\{a_j, c_j\}$ 是相关的。选取 $M_i \le_{\mathfrak{s}} N_i$，使得 $(M_j, M_i, a_j) \in K^{3,\ \mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$。对于 i 极限，先选取 N_i（利用递增序列上存在素模型），然后选取 M_i（同理），并且不失一般性地，利用素模型的定义选取 $M_i \le_{\mathfrak{s}} N_i$。如果我们继续进行归纳，就会与 6.15(2) 矛盾。因此，对于某个 i，我们陷入了困境：M_i 已选定，但 $N_i = M_i$，所以我们就完成了。

3）由第（2）部分的证明可得。 $\square_{8.5}$

断言 8.6。在 8.5 中，我们可以添加 $\alpha < \kappa_{\mathfrak{s}}$ if: $\mathfrak{s}$ is ufll（并且 P 可能是稠密的）。

证明。令 $\chi = \|M\|^{<\kappa}$，取 N,b 使得 $M \le_{\mathfrak{s}} N \in K^{\mathfrak{s}}_{\chi}, b \in N$实现 q。现在我们重复 8.5(2) 的证明，但在 ⊛ 中加上

- $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, M_i, M_{i+1})$ forks over M_i.

根据“P 是稠密的 $+\mathfrak{s}$ 是满的”的假设，这是可能的，除非 $b \in M_i$。最后 $\langle M_i : i < \kappa\rangle$ 良定义，那么它是 $\le_{\mathfrak{s}}$-连续递增，正交型$_{\mathfrak{s}}(b, M_\kappa, N_\kappa) \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M_\kappa)$，并且它对每个 $i < \kappa$ 都在 M_i 上分叉，这与 6.1 的 (E) 的 (c) 矛盾。$\square_{8.6}$

断言 8.7.1)如果 $\langle M_i, a_j, p_j : i \le \alpha, j < \alpha\rangle$ 是一个素序列，$u = \{j : p_j \perp M_0$ 且 $j \in u \Rightarrow p_j$ 不在 $M_0\}$ 上分叉且 $q \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_0)$在 M 中实现那么$q \le^{\mathrm{st}}_{\mathrm{dm}} \{p_j : j \in u\}$.

2) 与 (1) 类似，但 $u = \{j : p_j \perp q\}$。

3) [在 8.5(1) 中，如果我们假设 $(*)^q_{M,\mathbf{P}}$，下文中我们可以将 $(*)^q_{M,\mathbf{P}}$ 添加到结论中，其中

$(*)^q_{\mathbf{P},M}$ 类型 $p_i =: \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(a_i, M_i, M_{i+1})$ 不在 M_0 上分叉，或者 q 对每个 $i<\alpha$ 都与 p_i 不正交

$(**)^q_{\mathbf{P},M}$ 如果 $M \le_{\mathfrak{s}} N$ 和 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N) \cap \mathbf{P}$，且 p 与 q 不正交（例如 $p \| p_i$），那么 p 不在 M_0 或 $p \perp M_0$ 上分叉。

4) 在（3）中，我们可以得出结论：q 被 $\{p_i \restriction M_0 : i<\alpha\}$ 支配。

ss 6) 5) 我们可以将第（3）部分中的 $(**)^q_{\mathbf{P},M}$ 替换为：

$\circledast^q_{\mathbf{P},M}$ *if* $M \le_{\mathfrak{s}} N_1 <_{\mathfrak{s}} N_2$, *then for some* $r \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_1)$ *realized in* M_2, *there is* $p \pm^{\rm wk}_{} r$ *as in* $(**)^q_{\mathbf{P},M}$.

证明。使用 6.14(3) 可得相同的证明。 □

讨论 8.8。下面我们可以认为 $\bar a^i, \bar a$ 的长度为 $<\kappa_{\mathfrak{s}}$（如果基底 $\mathfrak{s}$ 良定义），或者认为 $\bar a, \bar a^i$ 列出某个基数为 $\lambda_{\mathfrak{s}}$ 的 $N_i \le_{\mathfrak{s}} M, N_i \le_{\mathfrak{s}} M_i$ 的成员；在这种情况下，我们可以将“在 $\bar a_i$ 上可定义”替换为“在 N_i 上不分叉”。

以下定义在此处至关重要。在 $\kappa_{\mathfrak{s}} = \aleph_0$ 的情况下，一切都很清楚。请注意，即使 $\ell g(\bar{\mathfrak{a}}) = \|M\|$，我们关注的是 M 在 $\bar{\mathfrak{a}}$ 上是饱满的情况。注意，如果我们理解 $\langle p_i : i<\kappa\rangle / J^{\rm bd}_\kappa$，那么 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_3 = \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2$，依据先前的断言

定义8.9。1)当我们称 $\mathfrak{r} = \langle M, \bar{\mathfrak{a}}, (M_i, N, \bar{\mathfrak{a}}^i, p_i, f_i) : i<\kappa\rangle$ 为多维数候选时：

$\circledast$(a) (α) $M \le_{\mathfrak{s}} M_i$ (β) $M_i \le_{\mathfrak{s}} N, \bar{\mathfrak{a}}$ M (γ) $\bar{\mathfrak{a}}^i$ 序列 of elements of M_i (b) $\bigcup\{M_i : i<\kappa\}$ (i.e. $\langle M_i : i<\kappa\rangle$ 在 N 内在 M 上独立，参见 §6M 和 $M \in K_{\mathfrak{a}}$, (c) $f_i : M_0 \to M_i$ 是到 M_i (d) $f_i \restriction M =$ 恒等映射$_M$, $f_i(\bar{\mathfrak{a}}^0) = \bar{\mathfrak{a}}^i$ (e) $\kappa \ge \kappa^1_{\mathfrak{s}}, \kappa =$ 余终性(κ) or $\kappa > \kappa^1_{\mathfrak{s}} > \ell g(\bar{\mathfrak{a}}^i)$ (f) $p_i \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ $f_i(p_0) = p_i$(g) p_i 基于 $\bar{\mathfrak{a}}^i$ (参见定义 6.4(3)的 §6) (h) 正交型$(\bar{\mathfrak{a}}_i, M, M_i)$ 基于在 $\bar{\mathfrak{a}}$ 上可定义

1A）简而言之，我们称之为 m.d.-候选。设 $M^{\mathfrak{r}} = M$、$M^{\mathfrak{r}}_i = M_i$ 等，位置$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$ 为（$N_{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{r}}$）。

2）如上所述，我们令 $\mathfrak{r}$

(a) $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1 = \{p : p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N)$ $N \in K_{(M,\bar{\mathfrak{a}})}$ 且 $(\forall^\infty i<\kappa)(p \perp p_i)\}$，也就是说，如果$N_{\mathfrak{r}} \le_{\mathfrak{s}} N$ 且 $p' \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 平行于 p，那么 $(\forall^\infty I<\kappa)(p' \perp p)$，其中$\forall^* i$ 表示除外 $<\kappa(\mathfrak{s})$ 个 (b) $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2 = \{p : p \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N)$ $N \in K_{(M,\bar{\mathfrak{a}})}$ 且 $p \perp \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1\}$，也就是说 $(\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1)^\perp$(c) $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}} = \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_0 = \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1 \cup \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2$

(*d*) $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_3 = \{p:\ p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N)\ N \in K_{\mathfrak{a}}$ 且 p 与 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2\}$ 正交，也就是说 $(\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2)^{\perp}$。

3) 我们称 $\mathfrak{r}$ 为非平凡的，若 $p^{\mathfrak{r}}_0 \pm p^{\mathfrak{r}}_1$。

注 8.10. 自然会希望有 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_3 = \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1$，但目前我们只有 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1 \subseteq \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_3$。

观察 8.11。对于 m.d.-候选 $\mathfrak{r}$:

(*a*) *if* $p^{\mathfrak{r}}_0 \perp p^{\mathfrak{r}}_1$ *then* $\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_1 = \cup\{\mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(N) : N \in K_{\mathfrak{a}}\}$ *so* $\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_2 = \emptyset, \mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_3 = \mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_1$

(*b*) *if* $i < j < \kappa$ *then* $p^{\mathfrak{r}}_0 \perp p^{\mathfrak{r}}_1 \Leftrightarrow p^{\mathfrak{r}}_i \perp p^{\mathfrak{r}}_j$.

证明。条款 (a)：由 6.2 得出 $\square_{8.11}$

断言 8.12. 假设 $\mathfrak{r}$ 是一个 m.d.-候选。
$\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_\ell$ 是一个基于 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{r}}$的 $\ell = 0$类型族，1、2、3。
2) $\mathrm{P}_{\mathfrak{r}} = \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1 \cup \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2$ 是稠密的，见 8.4*]*。
3) 如果 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2 \neq \emptyset$ 那么存在 $q \in \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2 \cap \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M^{\mathfrak{r}})$。 *[*甚至任意 $q \in \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2$ 都有一个 $^{-}\mathrm{a}$-共轭 $q \in \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2 \cap \mathrm{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M^{\mathfrak{r}})$*]*。

证明。 [读者可以专注于我们使用的情形 $\mathfrak{s}^{\mathrm{eq}}$]。

1) 注意，对于 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N)$，“$p \in \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1$”的真值在 $\cup\{^{-}\mathrm{a}^j : j \in [i,\kappa)\}$ 上可定义，对于任意固定的 i。但是，如果 $N \leq_{\mathfrak{s}} N_1$ 且对于 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N_1)$ 对某个 $i < \kappa$，集合 $\{^{-}\mathrm{a}^j : j \in [i,\kappa)\}$ 在($\bar{a}$,base(p))上独立。根据 8.4(2)，$\mathrm{P}^{\mathfrak{r}} = \mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_D$ 也基于 $\mathfrak{a}$，最后$\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1$ 基于 $^{-}\mathrm{a}$。至于 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2$，根据8.4(1)、条款(a)及其定义，它基于 $^{-}\mathrm{a}$。根据 8.4 的条款 (a)，族 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_3$ 基于 $^{-}\mathrm{a}$。

2) 根据8.4(1)的条款 (b)。
3) 根据6.14(2)。 $\square_{8.12}$

断言 8.13. 假设 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$和 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N)$。那么我们可以找到一个多维候选 $\mathfrak{r}$ 使得:

(*a*) $M_{\mathfrak{r}} = M$
(*b*) $M^{\mathfrak{r}}_0 = N$
(*c*) $p^{\mathfrak{r}}_0 = p$。

断言 8.14. 设 $\mathfrak{r}$ 是一个非平凡的多维候选。则 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2$ 非空（因此 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_2 \cap \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M) \neq \emptyset$）。

证明。假设它为空，因此根据 8.12(2)，我们知道 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1$ 是稠密的。

令 $N_{\mathfrak{r}} \leq_{\mathfrak{s}} N \in K_{\mathfrak{s}}$，并令 p^+_0 是 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N)$ 中 p_0 的非分叉扩张。由 8.6，存在一个 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1$-素序列 $\langle M_i, a_j : i \leq \alpha, j < \alpha\rangle$，使得 $M_0 = N, \alpha < \kappa_{\mathfrak{s}}$（实际上 $\alpha < \kappa$ 就足够了），并且某个 $b \in M_\alpha$ 实现了 $p^{\mathfrak{r}}_0$；注意，$M_i, M^{\mathfrak{r}}_j$ 并无直接关系。

现在，由于 $\kappa_{\mathfrak{r}}$ 是正则的，$\geq \kappa_{\mathfrak{s}}$ 是因为 $\alpha < \kappa^{\mathfrak{r}}$；根据 $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}_1$ 的定义，每个 $j < \alpha$，对于所有足够大的 $\varepsilon < \kappa_{\mathfrak{r}}$，我们都有 $p^{\mathfrak{r}}_\varepsilon \perp \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(a_j, M_j, M_{j+1})$，记作 $\varepsilon \in [\zeta_j, \kappa_{\mathfrak{r}})$。由于 $\kappa_{\mathfrak{r}}$ 是正则的 $> \alpha$，我们有 $\zeta = \sup\{\zeta_j : j < \alpha\}$ 是 $< \kappa_{\mathfrak{r}}$。对于 $\varepsilon \in [\zeta, \kappa^{\mathfrak{r}})$，令$p^+_{\varepsilon,i} \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 为 $p^{\mathfrak{r}}_\varepsilon$ 在 $\mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 中的非分叉扩张。现在我们可以对 $i \leq \alpha$ 作归纳法，证明 $p^+_{\varepsilon,i}$ 是 $p^{\mathfrak{r}}_{\varepsilon,0}$ 在 $\mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 中的唯一扩张。由于 $b \in M_\alpha$，根据 6.14(1)，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, M_0, M_\alpha) \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 与 $p^{\mathfrak{r}}_\varepsilon$ 正交。由于 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, M_0, M_\alpha) = p^+_0$，我们可以得出 p^+_0，$p^+_{\varepsilon,0}$ 正交，因此 $p^{\mathfrak{r}}_0, p^{\mathfrak{r}}_\varepsilon$ 正交；根据 8.11(b)，这与“$\mathfrak{r}$ 不平凡”矛盾。$\square_{8.14}$

断言 8.15. 令 $\mathfrak{x}$ 为一个非平凡的多维候选，$\kappa = \kappa_{\mathfrak{x}}$。
存在由 $\{p_i^{\mathfrak{x}}$ 强支配的 $q \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_{\mathfrak{x}})$：$i < \kappa\}$。
2) 如果 $N_{\mathfrak{x}} \le_{\mathfrak{s}} M \in K_{\mathfrak{s}}$ 和 $q \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M) \cap \mathrm{P}^{\mathfrak{x}}_2$ 和 $p_i^+ \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M)$ 是 $p_i^{\mathfrak{x}}$ 关于 $i < \kappa_{\mathfrak{x}}$ 的非分叉扩张，那么 $q \le^{\rm dm}_{\rm st} \{p_i^+$：对于某个 $u \subseteq \kappa^{\mathfrak{x}}$ [引言：参见 [She90，第 V 章，§5], [She91]。]

3) 不失一般性，使得 $\mathrm{base}(q) \subseteq M_{\mathfrak{x}}$] [我们可以找到 $\mathbf{b}$ 和 q 在 $\mathbf{b}$ 上可定义，并且 $\bar{\mathbf{c}} \subseteq M$ 使得正交型$(\mathbf{b}_\kappa, M^{\mathfrak{x}}, M)$在 $\bar{\mathbf{c}}$上可定义，同时 $\mathbf{b}_i \subseteq M$ 对于 $i < \kappa$ 使得 $\langle \mathbf{b}_i : i < \kappa\rangle$ 基于 $\bar{\mathbf{c}}$ 是不可分辨的，并且$q_i \in \mathscr{S}_{\rm bs_{\mathfrak{s}}}(M^{\mathfrak{x}})$在 $\bar{\mathbf{b}}_i$ 上可定义，因为 q 在 $\bar{\mathbf{b}}$上可定义。由此可知 $q \pm q_i$；此外，q 被 $\{q_i$ 强支配：$i < i^*\}$ 对于某个 $i^* < \kappa$。
/4) 我们可以找到一个 m.d.-候选 $\mathfrak{y}$ 使得 $M_{\mathfrak{x}} \le_{\mathfrak{s}} M_{\mathfrak{y}}$, $\bar{\mathbf{a}}_{\mathfrak{y}} = \bar{\mathbf{a}}_{\mathfrak{x}}$ 并且 $P^{\mathfrak{y}}$ 与 q平行。

证明。1）由 8.14 可知，存在 M使得 $N_{\mathfrak{x}} \le_{\mathfrak{s}} M$和 $q \in \mathscr{S}_{\rm bs_{\mathfrak{s}}}(M) \cap \mathrm{P}^{\mathfrak{x}}_2$。可能需要用一个邻域替换 $\mathfrak{x}$；不失一般性，q 不在 M 上分叉，因此由第（2）部分可得 $q \le^{\rm dm}_{\rm st} \{p_i^{\mathfrak{x}} : i \in u\}$，其中 $u \in [\kappa^{\mathfrak{x}}]^{<\kappa(\mathfrak{s})}$。
2）设 $\mathrm{P}'_3 = \{p \in \mathrm{P}^{\mathfrak{x}}_3$：存在与 $p\}$平行的 $p' \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M)$，$\mathrm{P}''_3 = \{p \in \mathrm{P}^{\mathfrak{x}}_3$：$p$与 $M\}$正交。

我们可以考虑使用“非 $\kappa_{\mathfrak{s}}$-分叉”版本。
对于 $\zeta < \kappa = \kappa_{\mathfrak{x}}$，设 $\mathrm{P}^*_\zeta = \mathrm{P}'_3 \cup \mathrm{P}''_3 \cup \{p^+_\varepsilon$：$\varepsilon < \kappa$ 和 $\varepsilon > \zeta\}$，并设 b 实现 q。现在

$\circledast_\zeta$ P^*_ζ是基于 M的，在 M上方稠密。

[为什么？见证明末尾]。

固定 ζ（其取值无关紧要），我们尝试通过对 $i < \kappa_{\mathfrak{s}}$ 归纳，选取 M_i、N_i和 a_j，使得对于 $j < i$ 有：

⊞ (a) $\langle M_\varepsilon, a_j : \varepsilon \le i, j < i\rangle$ 是一个 P^*_ζ-素性序列 (b) $M_0 = M, M_i \le_{\mathfrak{s}} N_i, N_i$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增，$\|N_i\| \le \lambda$ (c) $q =$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(b, M_0, N_0)$ (d) 正交型$_{\mathfrak{s}}(b, M_{i+1}, N_{i+1})$ 在 M_i (e) 上分叉，如果正交型$_{\mathfrak{s}}(a_j, M_j, M_{j+1})$ 是 p^+_ε等价于$p^{\mathfrak{x}}_\varepsilon$的非分叉扩张，对于某个 $\varepsilon \in [\zeta, \kappa)$ 那么正交型$_{\mathfrak{s}}(a_j, M, M_{j+1}) \notin \{$正交型$_{\mathfrak{s}}(a_i, M, M_{i+1}) : i < j\}$.

因此，对于某个 $\alpha < \kappa_{\mathfrak{s}}$，我们有 $\langle M_j : j \le \alpha\rangle$，但我们无法继续（因为要求分叉不能太长）。令 $\xi = \sup\{\varepsilon + 1 : \varepsilon < \kappa$，并且对于某个$j < \alpha$，ortp$(a_j, M_j, M_{j+1})$ 是 $p_\varepsilon\}$ 的非分叉扩张。由于 P^*_ζ 稠密，显然q 由某个 $b \in M$ 实现。

令 $u_0 = \{i < \alpha :$ ortp$_{\mathfrak{s}}(a_i, M_i, M_{i+1})$ 是某个 p^+_ε 的非分叉扩张，$\varepsilon < \kappa\}$ 对于 $i \in u_0$，令 $\varepsilon(i) < \kappa$ 使得 a_i 实现$p^+_{\varepsilon\,i()}$，因此根据上面的子句 (e)，$\langle \varepsilon(i) : i \in u_0\rangle$ 无重复。令

$$u_1 = \{i < \alpha : \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(a_i, M_i, M_{i+1}) \in \mathbf{P}'_3\}$$

$$u_2 = \{i < \alpha : \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(a_i, M_i, M_2) \in \mathbf{P}''_3\}.$$

因此，$\langle u_0, u_1, u_2\rangle$ 是 α 的一个划分，显然：

$(*)_1$ $\{a_i:\ i\in u_0\cup u_1\}$ 在(M,M_α)中是独立的。

[为什么? 这是因为 $i\in u_0\cup u_1$ 蕴含 $p'_i=$正交型$_{\mathfrak{s}}(a_i,M_i,M_{i+1})$ 不在M上分叉。这一蕴含成立，因为:

(α) 如果 $i\in u_1$，那么 p'_i 平行于 $\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}$ 的某个成员，因此 p'_i 不在.....上分叉 M(β) 如果 $i\in u_0$，那么 p'_i 平行于某个 p^+_ε，但 $p_\varepsilon\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，因此我们就完成了。]$(*)_2$ $i\in u_2=u\backslash u_0\cup u_1\Rightarrow$正交型$_{\mathfrak{s}}(a_i,M_i,M_{i+1})\perp M$

[为什么? 根据 u_2 和 $\mathbf{P}''_3$的定义。]

$(*)_3$ $i\in u_1\Rightarrow{\rm ortp}_{\mathfrak{s}}(a_i,M,M_{i+1})\perp q$.

[为何? 由于正交型$_{\mathfrak{s}}(a_i,M,M_{i+1})\in\mathbf{P}'_3\subseteq\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_3$ 而 $q\in\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_2$，回顾 $\mathbf{P}$ 的定义$^{\mathfrak{r}}_3$。]

由 8.7(d)、$(*)_1+(*)_2$ 以及上面的 (a)，可得 $q\le\{p_i:\ i\in u_0\cup u_1\}$。

由 8.7(2) 和 $(*)_3$，可推出 $q\le^{\rm dm}_{\rm st}\{$正交型$_{\mathfrak{s}}(a_i,M,M_{i+1}):\ i\in u_0\}=\{p_{\varepsilon(i)}:\ i\in u_0\}$；但 $\langle\varepsilon(i):\ \varepsilon(i)\in u_0\rangle$ 无重复。$\square_{8.15}$

这样只剩下一个待解决的问题: $\circledast_\zeta$。

证明。 $\circledast_\zeta$的证明

为导出矛盾，假设 $r\in\mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(N)$ $M\le_{\mathfrak{s}}N\in K_{\mathfrak{s}}$，且 r 与 $\mathbf{P}^*_\zeta$ 的每个元素都正交。由于 $r\perp p_i$ 对于 $i\in[\zeta,\kappa)$ 显然有 $r\in\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_1$，因此根据 $\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_1$、$\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_2$ 的定义，我们有 $r\perp\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_2$，从而 $r\in\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_3$。$\square$

Case 1: $r\perp M$.

So $r\in\mathbf{P}''_3\subseteq\mathbf{P}^*_\zeta$.

情形 2: $r\pm M$。

我们可以找到 $r'\in\mathscr{S}(M)$，它是对“r 在 $^-\mathfrak{a}r$”足够良好的“反射体”，因此$r\pm r'$ 但仍然是 $r'\in\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_3$。如何做到? 回想一下，由于$\mathbf{P}^{\mathfrak{r}}_3$ 是基于 $\mathfrak{a}$的，$A\subseteq M$ 足够小，这一点可按照 6.14 中的方法证明，但我们将予以详细说明。

3) 再次参见 6.14。

结论 8.16。1) 如果 $\mathbf{P}$ 是基于 $\mathfrak{a}$ 的，$M\in K_{\mathfrak{a}}$ 且 $\mathbf{P}$ 是稠密的，$q_*\in\mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M)$ 并且 $(\forall p\in\mathbf{P})(p\pm q_*\Rightarrow p$不在 M 上分叉)，那么存~~在~~$\alpha<\kappa_{\mathfrak{s}},p_i\in\mathbf{P}\cap\mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M)$，使得 $i<\alpha$ 满足 $p_i\pm q^*$，且 $i<\alpha$ 被 $\{p_i$ 弱支配: $i<\alpha\}$。2) 假设 $\mathbf{P}\subseteq\mathscr{S}_{\rm bs}(M)$ 基于某个小的 $A\subseteq M,q_*\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，并且如果$p\in\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 与 $\mathbf{P}$ 正交，那么它就与 q_* 正交。那么我们可以找到$\langle p_i:\ i<\alpha\rangle,\alpha<\kappa_{\mathfrak{s}}$，如第 (1) 部分所述。

证明。 1) 令 $\mathbf{P}^*=:\mathbf{P}_1\cup\mathbf{P}_2\cup\mathbf{P}_3$ 其中

$$\mathbf{P}_1=\{p:p\text{ is parallel to some }p'\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)\text{ which belong to }\mathbf{P}\}$$

$$\mathbf{P}_2=\{p:p\perp\mathbf{P}_1\text{ and }p\text{ is parallel to some }p'\in\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)\}$$

$$\mathbf{P}_3=\{p:p\perp M\}.$$

我们希望应用 8.7(3) 或 8.7(1)。显然，P^* 基于 M，并且 8.7(3) 的（$**$）成立。

主要观点是证明 P^* 在 M上方是稠密的。因此设 $M \le_{\mathfrak{s}} N$ 和$q \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(N)$。如果 $q\perp M$那么 $q \in \mathrm{P}_3 \subseteq \mathrm{P}^*$，所以没问题。如果 $q \pm \mathrm{P}_1$那么存在 $p_0 \in \mathrm{P} \subseteq \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，并且 $p \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(N)$ 是 p_0的一个扩张，其不在 M上分叉，使得$p \pm q$，显然 $p \in \mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}^*$，所以没问题。因此我们剩下的情形是 $q \pm M, q \perp \mathrm{P}_1$。

如果 $q \pm \mathrm{P}_2$，那么我们可以找到与 P 正交但不与 p 正交的 $p' \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，因此 $p' \restriction N \in \mathrm{P}_2$ 不与 q 正交。

因此假设 $q \perp \mathrm{P}_2$。我们可以找到 N^+、$\langle f_i : i < \kappa\rangle$、$\langle N_i : i < \kappa\rangle$，使得 $N_0 = N$、$M \le_{\mathfrak{s}} N_i \le_{\mathfrak{s}} N^+$、$\langle N_i : i < \kappa\rangle$在 M 上独立，且位于 N^+ 内；f_i 是一个从 N_0 到 N_i 的 M 上的同构。设 $q_i = f_i(q)$，则对某些 $\mathfrak{x}$、$M^{\mathfrak{x}} = M$、$p_i^{\mathfrak{x}} = q_i$。如果 $\mathfrak{x}$ 是平凡的，那么 $i < j \Rightarrow q_i \perp q_j$，于是根据前面的断言，$q_i \perp M$，这与上面的一个陈述矛盾。因此 $\mathfrak{x}$ 是非平凡的，故由 8.15(1)，存在 $q' \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 被 $\{q_i$ 支配：$i < \kappa\}$ 与每个 q_i 都不正交。对于 $\ell = 1$，由 $i < \kappa \Rightarrow q_i \perp \mathrm{P}_\ell$ 及 6.14，也有 $q' \perp \mathrm{P}_\ell$。根据 P_2 的定义，即 $q' \in \mathscr{S}_{\mathfrak{s}}(M)$，我们有 $q' \in \mathrm{P}_2$，但$q' \perp \mathrm{P}_2$, ，矛盾。

2) 设 $\mathrm{P}' = \{p :$ p 平行于某个 $p' \in \mathrm{P} \cap \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，或 p 与 M}正交。现在，P'是基于 M 的，并且在 M 上方稠密（因为 $q \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ $M \le_{\mathfrak{s}} N$，或者$q \perp M$如此，或者由 6.14(2) 可知存在 $q' \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ $q' \pm q_*$，$[q' \perp \mathrm{P} \cap \mathscr{S}_{\rm bs}(M) \Leftrightarrow q \perp \mathrm{P} \cap \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)]$。

因此，应用 (1) 即可得证。 $\square_{8.16}$

断言 8.17. 1) 如果 $p_1, p_2 \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 不正交，那么某个 $r \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 被 p_1 弱支配，且被 p_2 弱支配。

2) 如果 $p, q \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 和 $(\forall r \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M))(r \perp p \Rightarrow r \perp q)$，那么 p 弱支配 q （当然，反向结论显然成立）。

3) 如果 $p, q \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 且每个 $r \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 被.....弱支配 q都不与 p 正交，那么 p 弱支配 q。

证明。1) 我们将依靠部分(2) + (3)。对于 $\ell = 1$，2 令 $\{q_i^\ell : i < \alpha_\ell\}$ 为来自 $\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 的两两正交的类型的极大集，其中每个类型都被 p_ℓ 弱支配，并且与 $p_{3-\ell}$正交。因此，根据 6.14(x)，$\alpha_\ell < \kappa_{\mathfrak{s}}$。

设 $\mathrm{P}_0 = \{q :$ q 正交于 $p_1\}$

$$\mathbf{P}_1 = \{q : q \text{ parallel to some } q_i^1, i < \alpha\}.$$

显然，$\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$ 基于 A，其中 $A \subseteq M$、$|A| < \kappa_{\mathfrak{s}}$。首先假设不存在与 $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$正交的 $r \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$。根据 8.16(2)，存在 $\alpha < \kappa_{\mathfrak{s}}$ 和 $r_i \in (\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1) \cap \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，使得对于 $i < \alpha$，$i < \alpha \Rightarrow r_i \pm p_1$，且 p_1 被 $\{r_i$ 弱支配：$i < \alpha\}$。必然有 $i < \alpha \Rightarrow r_i \in \{q_i^1 : i < \alpha\}$，因此 p_1 被 $\{q_i^1$ 弱支配：$i < \alpha_1\}$。但 $i < \alpha_1 \Rightarrow q_i^1 \perp p_2$，因此根据 6.14(x)，$p_1 \perp p_2$，这就产生了矛盾。

其次，假设存在 $r \in \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$ 与 $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$ 正交。由于 $r \perp \mathrm{P}_0$, 根据下面的第（2）部分 r 被 p_1 弱支配。由于 r 也与 P_1, 正交，因此它满足对 $q^1_{\alpha_1}$ 的前两个要求，所以根据 $\{q_i^1 : i < \alpha_1\}$ 的极大性，显然 r 不与 p_2 正交。根据 $\{q_i^1$ 的极大性：$i < \alpha_1\}$ 显然，如果 r_1 被 r 弱支配，那么 $r_1 \pm p_2$。因此根据第（3）部分，r 被 p_2 弱支配，所以r 符合要求。

2) 令 $\mathrm{P}_0 =: \{r : r \perp p\}$，$\mathrm{P}_1 = \{p' :$ p' 平行于 $p\}$，因此显然 $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$ 是稠密的 M-基。由此，根据 8.16(1)，存在 $\{r_i : i < \alpha\} \subseteq (\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1) \cap \mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M)$，它弱

支配 q 和 $i<\alpha \Rightarrow r_i \pm q$。但每个 $r \in \mathrm{P}_0$ 都与 p 正交，因此根据第（2）部分的假设，它与 q正交，从而 $i<\alpha \Rightarrow r_i \in \mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1 \backslash \mathrm{P}_0=\mathrm{P}_1$,，所以 $i<\alpha \Rightarrow r_i \| p$。由于 $i<\alpha \Rightarrow r_i \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$，我们得到 $i<\alpha \Rightarrow p_i=p$。因此， q受 p支配。

3) 令 $\mathrm{P}_0=:\{r: r \perp q\}, \mathrm{P}_1=\{p': p' \| p\}$。现在 $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$是基于 M 的。此外， $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$是稠密的。

[为什么？假设 r 与 $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$正交， $r \perp \mathrm{P}_0$ 这意味着：如果 r' 与 q 正交，那么它就与 r 正交（根据 P_0 的定义），因此根据第（2）部分，我们知道 r 被 q弱支配。但根据第（3）部分的假设，我们知道 r 与 p 不正交，因此 r 与 $\mathscr{P}_1$不正交，矛盾。]

根据8.16，有 $\alpha<\kappa_{\mathfrak{s}}$和 $r_i \in(\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1) \cap \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M)$，使得 q被 $\{r_i$ 支配： $i<\alpha\}$ 和 $i<\alpha \Rightarrow r_i \pm q$。因此 $r_i \notin \mathrm{P}_0$ ，从而 $r_i \in \mathrm{P}_1$, ，即 $r_i=p$，所以 p弱支配 q ，如所要求。□8.17

结论 8.18。假设 $M_0 \leq_{\mathfrak{s}} M_1 \leq_{\mathfrak{s}} N$和 $p \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N)$ 与 M_0 正交但不与 M_1正交。那么存在 $q \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ 与 M_0 正交但不与 p 正交。

证明。令 $\kappa=\kappa_{\mathfrak{s}}$。

不失一般性 N 在 M_1上饱满，因此不失一般性N 在 N_0 上饱满，使得 p 不在 N_0 和 $N_0 \leq N$上分叉；令 $\bar{a}_0$ 列出 N_0，那么存在 $\bar{a}_i \in {}^{\kappa(\mathfrak{s})>}N$ ，对于 $i \in [1, \kappa(\mathfrak{s}))$，使得 $\langle \bar{a}_i: i<\kappa_{\mathfrak{s}}\rangle$ 是一个基于正交型$_{\mathfrak{s}}(\bar{a}_0, M_1, N_1)$、在 M_1 上不可分辨的序列；并令 $p_i \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 在 $\bar{a}_i$ 上可定义，因为 p 在 $\bar{a}$上可定义。由于 $p_0=p \perp M_0$ 显然 $i<\kappa \Rightarrow p_i \perp M_0$ ，且由于 $p_0 \pm M_1$ 显然（$p_i \pm M$ 且） $i<j<\kappa_{\mathfrak{s}} \Rightarrow p_i \pm p_j$。因此，根据 8.15(1)，存在 $q \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_1)$，使得 q 被 $\{p_i$ 支配： $i<\kappa_{\mathfrak{s}}\}$。现在，由于 q 被一组与 M_0 正交的类型支配，根据 6.14(x)， q 也与 M_0正交。此外，由于对于某个 i， q 被 $\{p_i$ 支配： $i<\kappa_{\mathfrak{s}}\}$, $q \perp p_i$；但根据 $\bar{a}_i$的选择， p_i 对每个 i 都成立，特别是对 $q \pm p_0=p$成立，因此我们完成了。□8.18

第四部分

§ 9. For weakly successful to NF-frames

讨论 9.1。我们或许会想看到，在 (G) 或 6.7 中，(b) 是多余的，这可以仿照前面的证明。

我们应该添加 $K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$ 吗?

假设 9.2. $\mathfrak{s}$ 是一个带有链上素模型的弱成功良好的 (μ,λ,κ)-框架。

我们的目标是定义 $\mathrm{NF}_{\mathfrak{s}}$，并证明它满足相关性质，如 [She09c, §7]中所述。此外，$\mathfrak{s}^{+}$ 将具有 $K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}^{*}}()$ 的稠密性。

断言 9.3. 如果对于 $\ell=1$，$M_\ell \le_{\mathfrak{s}} M$ 和 $p\in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}(M_\ell)$，2, 那么存在一个 $r\in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}(N)$，同时被二者支配。

Proof. For $\ell=1,2$ let $\mathbf{P}_\ell=\{r: r\in \mathscr{S}(N), r \text{ orthogonal to } p_{3-\ell}$. $\square_{9.3}$

断言 9.4。1) 设 P 是基于 A 的，且 $\mathrm{P}^{\perp}=\{p\in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}(M): p\perp \mathrm{P}\}$。

§ 10. Strong stability, Weak form of superstability

读者可以考虑一阶情形。

定义 10.1.对于稳定 T 令 $\kappa_{\rm ict}(T)$ 为满足以下条件的极小 κ： 如果 $\mathrm{I} \subseteq \mathfrak{C}_T$ 是¯在 A上独立的 $b \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}$ （我们也允许 I由无限序列组成），那么¯对于某个 $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$，其基数为 $\underline{< \kappa}$，集合 I\J在 $(A \cup \mathrm{J} \cup \{b\}, A)$ 上独立。2) 对于稳定 T 令 $\kappa_{\rm ict}(T)$ 类似地定义，但最后我们只要求_ $\perp b \in \mathrm{I}\backslash\mathrm{J} \Rightarrow$ 正交型$(\bar{c}, A+b)$ 不在 A 上分叉。

注10.2。是否存在合适的 $K^{\rm bs}_{\kappa}$-模板。 $K^{\rm tr}_{\omega}$的情形尚不清楚。

定义 10.3. 1) 当满足以下条件时，我们称 p 为伪正则（或 1-正则）： 存在 $(M,N,a) \in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$，使得:

(a) 正交型(a,M,N) 与 $p(b)$ 平行。(M,N,a) 是伪正则的，这意味着不存在 J 使得 $(M,N,\mathrm{J}) \in_{K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\rm bs}}$且 $\|\mathrm{J}\| \geq 2$。

2) 若对于每个表示 p 和 $b \in N\backslash M$ 的 $(M,N,a) \in K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$，都有 $(M,N,b) \in K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$，则称 p 几乎正则或 2-正则。

断言 10.4。在定义 10.3 中，(M,N,a) 的选取无关紧要。

证明。留给读者。 □

断言 10.5。 $[\kappa_{\rm jct}(\mathfrak{s}) = \aleph_0]$。

1) 如果 $(M,N,a) \in K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\underline{\rm pr}}$，那么对于某些 $b \in N\backslash M$ 和 $N' \leq_{\mathfrak{s}} N$，有 $(M,n,b) \in_{K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\rm pr}}$ 是伪正则的。

2) 此外，几乎正则。

证明。1) 我们试图通过对 n 归纳来选择 (b_n,c_n)，使得:

$\circledast$ (a) $b_n \neq c_n \in N\backslash M\backslash\{b_\ell, c_\ell : \ell < n\}$

(b) $\{b_0,\ldots,a_{n-1},b_n,c_n\}$ is independent in (M,N).

如果成功，我们便得到

$\circledast_1$ $\{a,b_n\} \subseteq N\backslash M$ is not independent in N over M.

$\circledast_2$ $\{b_n : n < \omega\}$ is independent in (M,N).

[为什么? 根据 $\circledast(b)+$ 独立性的有限特征。

因此，只需完成归纳步骤。如果不存在有序对 (b_0,c_0)，使得 (M,N,a) 伪正则，那么 $b=a$ 就可以了。若 $b_0,\ldots,b_{n-1},b_n,c_n$ 已经定义，令 $N^*_s \leq_{\mathfrak{s}} N$ 满足 $(M, N_n, c_n) \in K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$。如果这个三元组是伪正则的，就选择 $b := c_n$，这样就完成了。否则，存在 J 使得 $(M,N_n,\mathrm{J}) \in K^{3,\ \mathfrak{s}}{}^{\rm bs}$ 并且 $\|\mathrm{J}_n\| \geq 2$。

（注： $\{b_n,c_n\}$ 在 (M,N) 中是独立的，因此 $b_\ell \notin N_n$）。
选择 $b_{n+1} \neq c_{n+1} \in \mathrm{J}$，现在 $\{b_0,\ldots,b_n,b_{n+1},c_{n+1}\}$ 在 (M,N_0) 中是独立的，因此我们完成了。

2) 我们尝试对 n 进行归纳法（可以略去 c_0），以选择 (b_n,c_n,N_n,M_n)，使得

$\circledast$ (a) $b_n \in N\backslash M, M \leq_{\mathfrak{s}} M_n \leq_{\mathfrak{s}} N$ and $(M,M_n,b_n) \in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$

(b) $b_0 = a, M_0 = N = N_0$ 我们可以使用 $c_0 = a$，但这并不重要（c） $N \le_{\mathfrak{s}} N_n$，并且 $\ell < n \Rightarrow N_\ell \le_{\mathfrak{s}} N_n$(d) $\{c_1, \dots, c_n, b_n\} \subseteq N_n$ 在 (M, N_n) 中是独立的，且没有重复（e）$\{a, c_\ell\}$ 在 (M, N_n) 中是相关的（f）ortp($c_{\ell+1}, N_\ell, N_{\ell+1}$) 不在 M 上分叉。

如果我们成功完成归纳法，M, N_ω 在 $\langle N_n$ 上为素：$n < \omega\rangle, a$ 且 $\langle c_\ell : \ell \in [1, \omega)\rangle$ 与假设矛盾。[我们假设／使用：独立性具有局部特征。]

对于 $n = 0$，根据条款 (b) 不存在问题。因此假设我们已经选定$c_1, \dots, c_n$, b_n, M_n, N_n。如果 ortp(b_n, M, M_n) 是几乎正则的，我们就完成了；因此存在 $b \in M_n \backslash M$ 与之矛盾，称其为 b_{n+1}，并选取 $M_{n+1} \le_{\mathfrak{s}} M_n$ 使得 $(M, M_{n+1}$, $b_{n+1}) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$。根据先前的一个断言，存在有序对 $(N_n^*, M_n^*, \mathrm{J}_n)$，使得

⊠ (a) $N_n \le_{\mathfrak{s}} N_n^*$(b) $M \le_{\mathfrak{s}} M_n \le_{\mathfrak{s}} M_n^* \le_{\mathfrak{s}} N_n^*$(c) $(M, M_n^*, \mathrm{J}_n) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$(d) $b_{n+1} \in \mathrm{J}$ (e) $\{N_n, M_n^*\}$ 在 M_n上独立。

令 $\mathrm{J}'_n = \mathrm{J}_n \backslash \{b_{n+1}\}$。

情形 1：$\{a\} \cup \mathrm{J}'_n$ 在 (M, N_n^*) 中是独立的。

于是：J'_n 在 (M, N, N_n^*) 中是独立的，因此 $\mathrm{J}'_n \cup \{b_n\}$ 在 (M, N_n^*) 中是独立的，但 $M_n \le_{\mathfrak{s}} N_n^*$ 和 $(M, M_n, b_n) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$ 因此 J'_n 在 (M, M_n, M_n^*) 中是独立的。令 $M_n^{**} \le_{\mathfrak{s}} M_n^*$ 满足 $(M_{n+1}, M_n^{**}, \mathrm{J}'_n) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$ 因此 ortp(b_n, M_n^{**}, M_n^*) 不在 M_{n+1} 上分叉，且与 M 正交（见前面的说法）（显然，不过我们也可以修改定义 10.1），这与 b_{n+1} 的选取矛盾。

情形 2：非情形 1。

令 $N_{n+1} = N_n^*$。我们可以找到有限的 $\mathrm{J}''_n \subseteq \mathrm{J}'_n$，使得 $\{a\} \cup \mathrm{J}'_n$ 在(M, N_n^*)中不独立。我们可以用一个元素替换 J''_n，并将其称为 c_{n+1}。$\square_{10.5}$

命题 10.6。$[\kappa_{\mathrm{rct}}(\mathfrak{s}) = \aleph_0]$。对于每个 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 以及某个 N 的 $p \in \mathscr{S}(M)$，J，我们有：

$\circledast_1$ (a) $(M, N, \mathrm{J}) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$(b) $c \in \mathrm{J} \Rightarrow$ 正交型(c, M, N)是几乎正则 (c) J 是有限的$\circledast_2$ p 在 N 中实现。

证明。根据前面的断言。 $\square$

命题 10.7。P^{2-reg} 是一个基。

定义 10.8。1) $\mathrm{P}_{\ell-\mathrm{reg}} = \{p$：$p \in S(N')$ $N \le_{\mathfrak{s}} N', p$几乎是 ℓ-正则$\}$。2) $p \in \mathscr{S}^{\mathrm{na}}(M)$ 是 3-正则，当且仅当：不存在 $q_1 \perp q_2 \in \mathscr{S}^{\mathrm{na}}(M)$ 使得$q_2 \pm p \perp q_2$。

3) P 是4-正则，当它是3-正则且是2-正则时。

断言 10.9. 1) 如果 q^{∞} 支配 p^{∞} 且 q 是 3-正则的，那么 p是 3-正则的。) $\lceil$
$2 \quad \kappa_{\mathrm{rct}}(\mathfrak{s}) = \aleph \rfloor_{\mathrm{P}_{4-re^{g}}}$ 是一个基。
3) 如果 $p, q \in \mathscr{S}_{\mathrm{na\mathfrak{s}}}(M)$ 是非正交的 4-正则，那么 p^{∞}, q^{∞} 等价。

证明。显而易见。 $\square_{10.9}$

注10.10。1）因此，当 $\kappa_{\mathrm{ut}}(T)$ 时，我们有主间隙，但这并不是一个自然的假设 ??

2) 极小 J 的证明（在 10.1 中）见前面的断言，等等。

$$\bar{\mathrm{J}}_0 = \cup\{\mathrm{J}'' \subseteq \mathrm{I}'' : (\alpha)\, b \in \mathrm{J}' \text{ 或 } \mathrm{J}' \cup \{b\} \text{ 非独立}(\beta)\, \mathrm{J}'\text{有限 } (\gamma)\, \mathrm{J}' \text{ 在此之下极小}\}.$$

J^{n+1} 喜欢 J_0 对于$\mathrm{I} \backslash \{\mathrm{J}_{\ell} : \ell \leq n\}$, $(A, A \cup \{\mathrm{J}_{\ell} : \ell \leq n\}$.
$\mathrm{J} = \cup\{\mathrm{J}^{n} : \ n < \omega\}$。

§11. Decomposition

讨论 11.1。这种现象可能发生吗？也就是说，我们能否将 $\langle p_{\alpha,i}$ 键入为： $\alpha < \lambda_{\mathfrak{s}}^{+}, i < i^{*} < \kappa\rangle$ ，使得 $(i^{*} \geq 2)$

$\boxdot$ (a) $\langle\langle p_{\alpha,\ i}:\ i < i^{*}\rangle:\ \alpha < \lambda_{\mathfrak{s}}^{+}\rangle$ 不可分辨 (b) $\langle p_{\alpha,\ i}:$ $i < i^{*}\rangle$ 两两正交 (c) $p_{\alpha,\ i} \perp p_{\beta,\ j} \Leftrightarrow (\alpha = \beta \wedge i \neq j)$ (d) 由 $\leq_{\rm wk}^{\rm dom}$、$\bar{p}_{\alpha} = \langle p_{\alpha,\ i}:\ i < i^{*}\rangle$ 两两等价 (e) ，对于任何 q ，我们都没有 $\bigwedge q \leq_{\rm wk}^{\rm dom} p_{\alpha,\ 0}$。 α

一个猜想：现象 $\boxdot$ 至少在我们的框架中是可能的。

尽管如此，我们仍相信主间隙成立。目前看来有两种合理的方法。

第一种
计划 B：向 $M \in K^{\mathfrak{s}}$ 添加虚元素，得到 $K^{\mathfrak{s}^{*}}$ ，使其中的现象消失。

注意：扩展之后，我们会有素模型吗？

但根据我们的研究，最自然的做法是：
计划 C：定义 $\mathfrak{s}^{+}$，它源自 $\mathfrak{s}$ ，使得在 $\mathfrak{s}^{+}$ 中我们有更多二分法，并在 Dp($\mathfrak{s}$) 次内得到主要结果或重复结果。

这里的树将是 $\subseteq {}^{\kappa(\mathfrak{s})\geq}\mu$。

假设 11.2。

(a) $\mathfrak{s}$ 是一个非常良好的 (μ, λ, κ)–NF 框架，满的、有限基（对于 $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$, bas($p$) $\in M$ 已定义）(b) 在 $\mathfrak{s}$ 中存在 NF-素（尽管不一定具有唯一性，因此是在相容情形中为素；由此我们应得到分解，以及此前的：NF-树）(c) $\lambda_{*} = \lambda^{\mathfrak{s}}$ 恰好作为 $\lambda_{*} = \lambda_{*}^{<\kappa} \in [\lambda_{\mathfrak{s}}, M_{\mathfrak{s}})$ $\mathfrak{s}$ 在 λ_{*}中稳定。

定义 11.3。假设 $M_0 \leq_{\mathfrak{s}} N, \|M_{\ell}\| \leq \lambda_{*} < \chi \leq \|N\|$ 以及 P $\subseteq \cup\{\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M')$: $M' \subseteq M_0\}$。

1) 令 F^{1}_{χ}(P M_0, M_1, N) 为满足以下条件的 p 的集合：

(a) $p \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ (b) p 与 P 正交（即， $p \perp q$ 对于每个 $q \in$ P），并且被 M_0 (c) 维数(p, N) $= \chi$(d) 支配；如果 $q \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ 被 p支配，则维数(q, N) $=$ 维数(p, N)（回顾一下， $\geq$始终成立）。

2) 令 $\mathrm{F}^{0}_{\lambda_{*},\chi}$(P M, N) 以类似方式定义，除外

$(d)^{+}$如果 $q \in$P$_{N,\lambda_{*}} =: \cup\{\mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M')$; $M' \leq_{\mathfrak{s}} N$、$\|M'\| \leq \lambda_{*}\}$且 q被支配p 则维数(q, N) $=$维数(p, N)。

3) $\mathrm{F}^{\ell}_{\lambda_*}(\mathrm{P}\ N) = \cup\{\mathrm{F}^{\ell}_{\lambda_*,\chi}(\mathrm{P}\ M,N)\colon\ \|M\| < \chi \le \|N\|\}$；同样地，$F^1_\chi(\mathrm{P}\ M_0,M_1,N)$ 对于 $\ell=1$ 我们省略 λ_*。4) 如果 $M_1=M_0$ 我们可以省略 M_1；如果 $\lambda_*=\lambda^{\mathfrak{s}}$ 我们可以省略它。我们也可以省略 $\mathrm{P}\ M_0$。

命题 11.4。假设 $\lambda_* < \chi \le \|N\|, p \in \mathrm{F}^0_{\lambda_*,\ \chi}(N)$。那么存在 M_*，使得

(a) $\mathrm{Dom}(p) \le_{\mathfrak{t}} M_* \le_{\mathfrak{t}} N$ (b) $M_* \in K^{\mathfrak{t}}_\chi$ (c) $p_* \in \mathscr{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{t}}(M_*)$，$p_*$ 在 $\mathscr{S}_{\mathrm{bst}}(M_*)$ 中的非分叉扩张，在 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(N)$ 中有唯一扩张。

证明。我们尝试通过对 $i < \lambda_*^{++}$ 归纳法来选择 M^*_i, N^*_i, a_i，使得

⊛ (a) $M^*_i \le_{\mathfrak{t}} N$ 是 $\le_{\mathfrak{t}}$-递增的（b）$\|M^*_i\| \le \chi$ (c) $M \le_{\mathfrak{t}} M^*_0$ (d) $N^*_i \le_{\mathfrak{t}} M^*_i$，$N^*_i \le_{\mathfrak{s}} N, N^*_i \in K^{\mathfrak{t}}_{\lambda^+_*}$ (e) N^*_i 是 $\le_{\mathfrak{t}}$-递增的（f）$a_i \in N \backslash M^*_i$，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{t}}(a_i, M^*_i, N)$ 与 p (g) 正交，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{t}}(a_i, M^*_i, N)$ 不在 N^*_i 上分叉，并且 $a_i \in N^*_{i+1}$ (h) $N^*_0 = M$ (i)；若 $q \in \mathscr{S}\mathrm{bs}(N^*_i)$ 且 $\mathrm{dim}(q,N) \le \chi$，则存在 J_q，它是独立于 (N^*_i, N) 的极大集，且包含于 $q(N)$ 中

（或者：$N^*_i \le_{\mathfrak{t}} N^{**}_i \le_{\mathfrak{t}} N^*_{i+1}$、$N^*_i \le M^*_i$、$N^*_i$是 $\le_{\mathfrak{t}}$-连续递增，$N^{**}_i \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda^+_*}$ 取决于框架的选择）。

对于 $\ell=0$，不存在问题。如果 $\langle M^*_j$、N^*_j、N^+_j、$a_j\colon\ j<i\rangle$ 已定义，但我们无法像上面那样选择（M_i、a_i），那么 $M^* = \cup\{M^*_j\colon\ j<i\} \cup M$ 符合要求。

如果我们已经进行了归纳法，则有 $p_i \in \mathscr{S}_{\text{基}}(N^*_i)$，且 $\pm M$，因此存在 $\varepsilon < \lambda^{++}_*$ 和 $q \in \mathscr{S}_{\text{基}}(N^*_\varepsilon)$，使得 $q \le^{\mathrm{dom}}_{\mathrm{wk}} \{p_i\colon\ i \in [j, \lambda^{++}_*)$ 对每个 $j < \lambda^{++}_*$ [都成立。参见 §6，查找 / 添加引文；无论如何，对于 f.o. 都成立 —— 使典范基不可分辨]。

现在显然产生矛盾。 □

断言 11.5。假设 $M \le_{\mathfrak{s}} N, N$是 $\|M\|^+$-饱和的，且 $\|M\| < \chi_i \le \|N\|$ 对于 $i=0$, 1，2 和 $\chi_1 < \chi_2$ 以及 $\mathrm{P} \subseteq \cup\{\mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M')\colon\ M' \le_{\mathfrak{s}} M\}$。1) 对于 $\ell < 2$，$\mathrm{F}^{\ell}_{\chi}(\mathrm{P}\ M, N) \subseteq \mathrm{F}^{\ell}_{\chi}(\mathrm{P}\ M,N)$，且 $\mathrm{F}^0(\mathrm{P}\ M,N) \subseteq \mathrm{F}^1(\mathrm{P}\ M,N)$。2) 若 $p_i \in \mathrm{F}^0_{\chi_i}(\mathrm{P}\ M,N)$ 对于 $i=0$, 1，则 $p_1 \perp p_2$。3) 若 $p \in \mathrm{F}^0_\chi(\mathrm{P}\ M,N)$ $q \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 且 $\mathrm{dim}(q,N) > \chi$，则 $p \perp q$。4) 在 (2)、(3) 中，我们可以使用 F^1。

证明。1）根据定义。

2）由 3）得出。

3）设 $M' \le_{\mathfrak{s}} M, M' \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda_{\mathfrak{s}}}$ 满足 p, q 不在 M' 上分叉。若所需结论不成立，则由 8.17(1)，存在 $r \in \mathscr{S}_{\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}}(M')$，满足 $M' \le_{\mathfrak{s}} N, \|M'\| = \lambda_{\mathfrak{s}}$，使得 r 同时被 p 和 q 支配。由后者，$\mathrm{dim}(r,N) \ge \mathrm{dim}(q,N) > \chi$；而由前者，不存在这样的 r。

4）因为在第（3）部分的证明中，不失一般性，$M' = M$。$\square_{11.5}$

断言 11.6. 假设

(a) $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_1 \le_{\mathfrak{s}} N$(b)P $\subseteq \cup\{\mathscr{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M') :$ $M' \le_{\mathfrak{s}} M_0\}$(c) $\mathrm{P}^* = \cup\{p \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M')$ $M' \le_{\mathfrak{s}} N$, $\|M'\| \le \lambda_*\}$.

Then

(α) F^0_χ(P M_0, N) 在 P*(β) 中是稠密的；此外，如果 $p \in \mathrm{P}^*$ 且 dim(p, N) $= \chi > \lambda_*$，那么 p 支配某个 $q \in \mathrm{F}^0_{\lambda_*,\chi}$(P M_0, N) （γ）F^0_χ(P N) 被 F^0_χ(P M_0, N) 支配，P_{N,λ_*}，其意义是：如果 $p \in \mathrm{P}_{N,\lambda_*}$ 是 $\pm\mathrm{P}^\perp$，那么对于某个 $q \in \mathrm{F}^0_{\lambda_*}$ (P M, N) 是 $\pm p$。

证明。子句 (α)：根据子句 (β)。

子句（β）：假设此条件不成立。令 $\{p_i : i < i^*\}$ 为来自 $\mathscr{P}_{N,\lambda_*}$ 的极大两两正交类型族，其中每个类型都被 p 支配，且 dim(p_i, N) $> \chi$。

注意，根据我们为导出矛盾所作的假设，如果 $q \in \mathscr{P}_{N,\lambda_*}$ 被 p支配，则存在 $r \in \mathscr{P}_{N,\lambda^*}$ 被 q支配，且维数(r, N) $> \chi$，因此 $r \perp p_i$ 对于某个 i。根据 6.14，如果 $q \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M')$ $M' \le_{\mathfrak{s}} N' \wedge N \le_{\mathfrak{s}} N$，$q$被 p支配，则存在 $r \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M')$ $M'' \le_{\mathfrak{s}} N'' \wedge N' \le_{\mathfrak{s}} N''$，$r$被 q支配，并且 $\bigvee r \pm p_i$因此$_i$ $\bigvee_i q \pm p_i$.

令 $M' \in p_{N,\ \lambda_*}$使得 Dom(p)、Dom(p_i) $\subseteq M'$，即 $p \le^{\rm dom}_{\rm wk} \{p_i : i < i^*\}$但这意味着 (6.14) 维数($p, N$) $\ge$min{维数(p_i, i)： $i < i^*\} \ge \chi^+ > \chi$，与关于 p 的假设矛盾。$\square_{11.6}$

定义 11.7。我们称 (M, P M^*, J N^*) 为一个逼近，当：

(a) $M \le_{\mathfrak{s}} M^* \le_{\mathfrak{s}} N^*$(b) $(M, M^*, \mathrm{J}) \in K^{3,\ {\rm qr}}_{\mathfrak{s}}$(c) P $\subseteq \mathscr{S}_{\rm bs}(M)$, $\mathrm{P}_{M,\ \lambda_*}$(d) J $\subseteq \{c \in M^*$: ortp(c, M, N^*) 是某个 $p \in \mathrm{P}\}$(e) 的非分叉扩张；若 $M^* \le_{\mathfrak{s}} N <_{\mathfrak{s}} N^*$ 且 $c \in N^* \backslash N$，则 ortp(c, N, N^*) 与 P 正交。

命题 11.8。假设

(a) (M, P_0, M^*, J_0, N^*) 是一个逼近，其中 P $= \mathscr{S}_{\rm bs}(M)$（或者按你的偏好写作 $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$）(b) $\mathrm{P}_1 = \{p \in \mathscr{S}_{\rm bs}(M)$： $p \perp \mathrm{P}_0\}$(c) N^* 是 λ^+_*-饱和的。

那么我们可以找到 J_1，使得

(α) (M, $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{P}_1$, M^{**}, $\mathrm{J}_0 \cup \mathrm{J}_1$, N^*) 是一个逼近（β）J $_1 \subseteq \{c \in N$： ortp(c, M, N^*) $\in \mathrm{P}_1\}$。

对于每个 $p \in \mathrm{P}_{N,\lambda_*}$，选取一个极大族 $\{q_{p,i} : i < i_p\}$，由 $\mathrm{F}^0_{\lambda_*,\chi}(\mathrm{P}\ M, N)$ 中两两正交的类型组成，且每个类型都被 p 支配，因此 $i_p < \kappa_{\mathfrak{s}}$；不失一般性，$\langle q_{p,i} : i < i_p\rangle$ 只依赖于 $p/11$。令 $N \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda_*}$ 满足 $M \leq_{\mathfrak{s}} N \leq_{\mathfrak{s}} N^*$，并且 $p \in \mathscr{S}\mathrm{bs}(M_*)$ $I < i_p \Rightarrow \mathrm{Dom}(q_{p,i}) \leq_{\mathfrak{s}} N$，因此不失一般性，$q_{p,i} \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(N)$。对于每个这样的 $q \in \mathscr{S}\mathrm{bs}(N)$，令 $\mathrm{J}_{q,i}$ 为 $q(N)$ 中在 (M, N) 内独立的一个极大子集，并令 $\langle b_{q,\alpha} : \alpha < \chi_p\rangle$ 列出 J_p，使得 $\chi_q = \mathrm{dim}(q, N)$。如果 $q \in \mathscr{S}\mathrm{bs}(N) \cap \mathrm{F}_{\lambda_*,N}(N)$，则令 $N^*_q \in K^{\mathfrak{t}}_\chi$ 满足

$N \leq_{\mathfrak{t}} N^*_q \leq_{\mathfrak{t}}, \chi(q) =$维数$(q, N)$满足：$q^{\oplus}$的 q在$N^*_q, q^{\otimes}$中的非分叉扩张在 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}}(N)$ 中具有唯一扩张。

设 $\langle N^*_{q,\alpha} : \alpha \leq \chi(q)\rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{t}}$-连续递增，并 $N^*_q, \|N^*_{q,\alpha}\| \leq \lambda_* + |\alpha|$。设 $\langle a_{q,\alpha} : \alpha < \chi_q\rangle$ 列表 N^*_q，并令 $\langle a^*_\alpha : \alpha < \lambda_*\rangle$ 列表 N。

令 $\langle p_i : 9 < i < i(*)\rangle$ 列表 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}}(N)$（可以使用更少的）。现在我们尝试选择 M_i, N_i, I_i 通过对 α 使用归纳法，使得

⊛ (a) $M_\alpha \leq_{\mathfrak{t}} M^*$ 连续递增，$M_\alpha \in K^{\mathfrak{t}}_{\leq \lambda_* + |\alpha|}$ (b) $N_\alpha \leq_{\mathfrak{t}} N^*$ 连续递增 $N_\alpha \in K^{\mathfrak{t}}_{\leq \lambda_* + |\alpha|}$ (c) $\mathrm{I}_\alpha \subseteq \{c \in N$: 正交型$_{\mathfrak{t}}(c, M, N^*) \in \mathrm{P}_1\}$ 连续递增 $|I_\alpha| \leq \lambda_* + |\alpha|$ (d) $(M_\alpha, N_\alpha, \mathrm{I}_\alpha) \in K^{3,\ \mathrm{vq}}_{\mathfrak{t}}$ 甚至 $\in K^{3,\ \mathrm{cn}}_{\mathfrak{t}}$（回想一下，cn 表示可构造的，把 prime 说成仿佛 $\mathfrak{t}$-模型是稳定 T的，这是不合理的，因为不存在素模型）(e) 如果 $N \not\subseteq N_\alpha$ 那么如果在当前限制下可行，对于某个$\zeta < \lambda_*$，正交型$(a^*_\zeta, N_{\alpha+1}, N)$ 在 $N_\alpha(f)$ 上分叉，如果 $\alpha = i(*) \times \beta + i$，$N \subseteq N_\alpha$ 并且 $i < i(*)$，那么如果在当前限制下可行，对于某个 $\zeta < \chi(p_i)$，正交型$_{\mathfrak{t}}(a_{q,\alpha}, N_{\alpha+1}, N)$ 在 N_α 上分叉。

因此，对于某个 $\alpha(*)$，当且仅当 $\alpha \leq \alpha(*)$ 时，$(M_\alpha, N_\alpha, \mathrm{I}_\alpha)$ 有定义，从而得到不分叉关系$(M_\alpha, M^*, N_\alpha, N^*)$。令 $M^{**} \leq_{\mathfrak{s}} N^*$ 为 $N_\alpha \cup M^*$ 上的素，$\mathrm{J}_1 = \mathrm{I}_{\alpha(*)}$，并令 $M^{\oplus} \leq_{\mathfrak{s}} N^*$ 满足 $(M^*, M^{\otimes}, \mathrm{J}_1) \in K^{3,\ \mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$我们将证明它们正是所要求的对象。关键在于证明以下情况是不可能的

⊡ $M^{**} \leq_{\mathfrak{s}} N' <_{\mathfrak{s}} N^*, c \in N^* \backslash N', \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c, N', N^*) \pm M.$

我们首先证明

⊡$_1$ *if* $\alpha < \lambda^+_*$ *and* $N \not\subseteq N_\alpha$ *then in* $\circledast(e)$ *there is such* ζ.

[为什么？注意，根据之前的断言，$\mathrm{NF}_{\mathfrak{t}}(M_\alpha, M^*, N_\alpha, N^*)$。令 $N^+_\alpha \leq_{\mathfrak{s}} N$在 $M^* \cup N_\alpha$上为素的。若 $N \subseteq N^+_\alpha$我们可以轻易找到 $(M_{\alpha+1}, N_{\alpha+1})$ 使得：$N_{\alpha+1} \cap N \backslash N_\alpha \neq \emptyset$，$(M_{\alpha+1}, N_{\alpha+1}, \mathrm{I}_\alpha) \in K^{3,\ \mathrm{cn}}_{\mathfrak{t}}, M_\alpha \leq_{\mathfrak{t}} M_{\alpha+1} \leq_{\mathfrak{t}} M^*, N_\alpha \leq_{\mathfrak{t}} N_{\alpha+1} \leq_{\mathfrak{t}} N^+_\alpha$，则证毕。否则，令 $c \in N \backslash N^+_\alpha$，于是 $\mathrm{ortp}(c, N^+_\alpha, N) \perp \mathrm{P}_0$。若 $\mathrm{ortp}(c, N^+_\alpha, N) \perp M$，则令 $N^{\oplus}_\alpha \leq_{\mathfrak{s}} N^*$使得 $(N^+_\alpha, N^{\oplus}_\alpha, c) \in K^{3,\ \mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$，并按情形 $N \subseteq N^+_\alpha$中的方法继续。因此假设 $\mathrm{ortp}(c, N^+_\alpha, N) \pm M$，$\mathrm{ortp}(c, N^+_\alpha, N) \perp \mathrm{P}_0$，于是对某些 $p \in \mathscr{P}_1, p \pm$，有 $\mathrm{ortp}(c, N^+_\alpha, N)$。由于 $p \perp \mathrm{P}_0$在 $\mathscr{S}\mathrm{bs}(N^+_\alpha)$ 中 p 的非分叉扩张p^+是 λ^+_*-孤立的，而 N^*是 λ^+_*-饱和的？？因此存在实现 p^+ 的 $b \in N$，使得 $\{b, c\}$ 不在 N^+_α上独立。现在我们可以像情形 $N \subseteq N^+_\alpha$中那样继续，得到 $b \in N_{\alpha+1}$，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{t}}(c, N_{\alpha+1}, N^*)$ 在 N_α上分叉。因此证毕。]

$\boxdot_2$ $N \subseteq N_{\alpha(*)}$ 对于某个 $\alpha(*) < \lambda^+_*$。

[为什么？根据 $\boxdot_{1^\circ}$]

$\boxdot_3(a)$ 若 $q = q_j \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N)$ 是 $\perp \mathrm{P}_0$ 且 $q \in \mathrm{F}^0_{**,\ \chi}(N^*)$ 和 $N \subseteq N_\alpha, \alpha < \chi, \alpha = j$ 模 $i(*)$，那么在 $\circledast$ 的条款 (f) 中存在这样的 $\zeta(b)$，若 $\chi(q_i) \le \alpha$ 则 $N_{q_i} \subseteq N_{\alpha^\circ}$

[为什么？我们对 χ 作归纳法来证明。先证明条款 (a)，然后条款 (b) 的证明与 $\boxdot_2$ 中一样，因此令 $N^+_\alpha \le_{\mathfrak{s}} N^*$ 为 $M^* \cup N_\alpha$ 上的素类型，它存在，因为 $\mathrm{NF}_{\mathfrak{t}}(M_\alpha, M^*, N_\alpha, N^*)$，参见前面的断言；若 $N_q \subseteq N^+_\alpha$，则如 $\boxdot_1$ 的证明中所示，我们已经完成，因此令 $b \in N_q \backslash N^+_\alpha$。因为在那里 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N^+_\alpha, N^*) \perp \mathrm{P}$，且不失一般性，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N^+_\alpha, N^*) \perp M_\circ$ 因此存在一个 $p \in \mathrm{P}_1$ 与它不正交。于是存在一个 $q_* \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N)$，它被 p 支配，且与 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N^+_\alpha, N^*)$ 不正交，使得 $q_* \in \mathrm{F}^0_{\lambda_*,*}(N)$，并令 χ_* 满足 $q_* \in \mathrm{F}^0_{\lambda_*,\chi_*}(N)$。因此必有 $N_{q_*} \not\subseteq N_\alpha$，故 $\chi_* > \alpha_\circ$]

我们首先尝试分析相当饱和的模型这一情形。

断言 11.9. If M_0, P N^* 满足 $\circledast_1$, then M_1, N_1, J满足 $\circledast_2$ 其中$\circledast_1 = \circledast^1_{M_0,N}$ $M_0 \le_{\mathfrak{s}} N^*, M_0 \in K_\lambda$, P $\subseteq \mathscr{S}^{\rm bs}(M)$ andN^* is λ^+_*-饱和 or just λ^+-饱和. $\circledast_2 = \circledast^2_{M_0,M_1,N_1,\mathrm{J}\ N^*}$ 以下成立 (a) $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_1 \le_{\mathfrak{s}} N_1 \le_{\mathfrak{s}} N^*$, (b) J 在 (M_1, N_1)中独立 (c)if $c \in \mathrm{J}$ then $p =$正交型$(c, M_1, N^*) \in \mathrm{F}^0(\mathrm{P}\ M_0, N^*)$ (d) $(M_1, N_1, \mathrm{J}) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}(e)$ if $q \in \mathscr{S}^{\rm bs}(N_1)$ 不在 M_1 上分叉并且是 $\perp$ P then q 在 $\mathscr{S}_{\mathfrak{s}}$中具有唯一扩张$(N^*)(f)$ if $p \in \mathrm{F}^0(\mathrm{P}\ M_0, N^*)$ then $|\{c \in \mathrm{J}:$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N) = p\}| =$维数$(p, N^*)$ (g) $(M_0, M_1, \mathrm{J}' \cup \mathrm{J}'') \in K^{3,\mathrm{vq}}_{\mathfrak{s}}$其中对于 $c \in \mathrm{J}$，我们有 $c \in \mathrm{J}' \Leftrightarrow$正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N^*) \in \mathrm{F}^0(\mathrm{P}\ M_0, N^*)$ $c \in \mathrm{J}'' \Rightarrow$正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N^*) \perp \mathrm{F}^0(\mathrm{P}\ M_0, N^*)$.

证明。我们通过对 $i < (\lambda^3)^+$ 归纳法，选取一个三元组 $(M_i, N_i, \mathrm{J}_i, \mathrm{J}'_i, \mathrm{J}''_i)$，使得：

(a) $M_i \le_{\mathfrak{s}} N^*$ 来自 $K_{\lambda^{\mathfrak{s}}}(b)$ M_i 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-连续递增N_i 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-连续递增，$M_i \le_{\mathfrak{s}} N_i \le_{\mathfrak{s}} N^*(c)$ 若 $i = j+1, q \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ $q \perp \mathrm{P}$ 且存在 (M', r) 使得 $M' \le_{\mathfrak{s}} N^*$的基数为 λ并且 $r \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M')$ 被 q支配，且 $\dim(p, N^*) < \dim(q, N^*)$，那么存在这样的 $r \in \mathscr{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$（因此当 $\mathrm{cf}(i) \ge \kappa_{\mathfrak{s}}$时也成立）

（d）若 $j < i$ 则：(α) $\mathrm{J}_j \backslash (\mathrm{J}_j \cap M_i) \subseteq \mathrm{J}_i(\beta)$ 不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_i \cap_j, M_i, N_j, N^*)$，

（γ）$(M_j, M_i \cap \overline{N_j, \mathrm{J}_j} \cap M_i) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$。$(e)$ $(M_i, N_i, \mathrm{J}_i) \in K^{3,\mathrm{vr}}_{\mathfrak{s}}(f)$ J 是 $N^* \backslash M_i$ 的极大子集，该子集在 (M_i, N^*) 中独立，并满足条款 (c)

(g) 使得：(α) 那么存在一个三元组 (N_i^-, a_i, k_i) $b_i, c_i \in N^* \backslash N_i(\delta)$ $q_i =$ 正交型(c_i, N_i, N^*) 不在 M_i 上分叉，且与 (c) 中相同 (ε) 正交型$_{\mathfrak{s}}$ (b_i, N_i, N^*) $\pm q(\zeta)$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(b_i, N_i, N^*)$ 不在 N_i^- 上分叉 (θ) $N_i^- \subseteq N_{i+1}$ (h) $\mathrm{J}'_i \subseteq \{c \in N^*:$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N) \in \mathrm{F}^0, (\mathrm{P}\ M_0, N^*)\}$ 随 i 增大 (i) $\mathrm{J}''_i \subseteq \{c \in N^*:$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N^*)$ 与 $\mathrm{F}^0(\mathrm{P}\ M_0, N^*)$ 正交 (j) 若 $i = j+2$ 则 $(M_0, M_i, \mathrm{J}'_i, \mathrm{J}''_i) \in K^{3,\mathrm{uq}}_{\mathfrak{s}}(k)$ J_0 满足该断言的子句 (f)。

因此，对于某个 $i(*) \leq (\lambda^{\mathfrak{s}})^+$，我们已为 i 定义了当且仅当 $i < i(*)$。

情形 1：我们成功进行了归纳法，即 $i(*) = (\lambda^{\mathfrak{s}})^*$。

设 $\bar{a}_i = \langle a^i_\varepsilon : \varepsilon < \lambda \rangle \in {}^{\lambda+2}(N^*)$ 列出 $N_i^- \cup \{b_i, c_i\}$，$\{a^i_{4\varepsilon} : \varepsilon < \lambda\}$ 列出 b_i，$c_i \notin \{a^i_\varepsilon : \varepsilon \neq 1,\ 2\}$，$N_i^- \cap M_i$，$(a^i_{\lambda+},\ a^i_{\lambda+1}) = (b_i,\ c_i)$。由 x.x. 可知，对于某个平稳的 $S \subseteq \{i < (2^\lambda)^+ :$ 余终性$(i) = \lambda\}$，序列 $\langle \bar{a}_i : i \in S \rangle$ 收敛，且在 $M_{j(*)}$ 上不可分辨。

设 $j(*)$ 为满足 $\mathrm{otp}(S \cap j(*)) \geq \kappa$ 的极小对象。由 8.18 可得出与 $\mathrm{J}^{j(*)}$ 的极大性矛盾。

情况 II：对于某个极限 δ，我们已对所有 $i < \delta$ 定义。

情况 III：$i(*) = 0$。

显然。

情况 IV：$i(*) = j+1$，余终性$(j) \neq \lambda^+$。

容易验证。

Case V: $i(*) = j+1, \mathrm{cf}(j) = \lambda^+$. $\square_{11.9}$

我们证明 (M_j, N_j, J^j) 满足所需条件。

断言 11.10。假设 $\mathfrak{s}$ 具有非正交维数性质。

假设 $\circledast^2_{M_0, M_1, N_1, \mathbf{J}_1, N^*}$ 且 N^* 是 $\|M_1\|^+$-饱和的，$\|M_1\| = \|M_1\|^{<\kappa(\mathfrak{s})}$。那么我们可以找到 N_0, J_0，使得：

(α) 不分叉关系$_{\mathfrak{s}}(M_0, M_1, N_0, N_1)$ (β) $(M_0, N_0, \mathrm{J}_0) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}(\gamma)$ $c \in \mathrm{J}_0 \Rightarrow$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N_0) \in \mathrm{F}^*(\mathrm{P}\ M_0, N^*)$。

证明。令 $\Theta_\ell = \{$维数$(p, N^*): p \in \mathrm{F}^*(\mathrm{P}\ M_\ell)\}$。暂且固定 $\chi \in \Theta_\ell$，令 $\mathrm{P}\chi = \mathrm{F}^0_\chi(\mathrm{P}\ M_0, M_1, N)$，$\mathrm{P}^*_\chi = \mathrm{F}^0_\chi(\mathrm{P}\ M_0, N)$，$\mathrm{J}^1_\chi = \{c \in \mathrm{J}_1 :$ 正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_1, N^*) \in \mathrm{P}_\chi\}$。令 $\mathrm{J}^1_\chi = \cup\{\mathrm{J}^1_{\chi,\varepsilon} : \varepsilon < \chi\}$ 其中 $\mathrm{J}^1_{\chi,\varepsilon}$ 随 ε 增大而增大。

第一个证明：现在我们通过对 i 归纳，选择一个（长度为 $< \kappa_{\mathfrak{s}}$ 的序列中的）元素 $c_{\chi,i}$ 使得：

(i) $c_{\chi,i} \in N^* \backslash M_0 \backslash \{c_{\chi,j} : j < i\}$ (ii) 正交型$_{\mathfrak{s}}(c_{\chi,i}, M_0, N^*) \in \mathscr{P}^*_\chi$ (iii) $\{c_{\chi,j} : j \le i\}$ 在 (M_0, N^*) 中独立（iv） $\varepsilon_\chi(c_{\chi,i}) \le \varepsilon(c)$ 对任意满足 (i)、(ii)、(iii) 的 c，其中 $\varepsilon_\chi(c) = \varepsilon_\chi(c, N^*) = \mathrm{Min}\{\varepsilon \le \chi :$ 若 $\varepsilon < \chi$，则 c 不由 $(M_0, M_1 \cup \bigcup^1_{\chi,\varepsilon})$ 给出$\boxdot_1$ $\varepsilon_\chi(c_j) \le \varepsilon_\chi(c_i)$，对于 $j < i$。[为什么？显然。$\boxdot_2$ 对于每个 ε，集合 $\{i : \varepsilon_\chi(c_i) \le \varepsilon\}$ 是一个序数 $i[\varepsilon] < (\|M_1\| + |\varepsilon|)^+$[为什么？根据维数的基本性质之一。$\boxdot_3$ 若 $N^* \le_{\mathfrak{s}} N^+, c \in N^+ \backslash M_0 \backslash \{c_{\chi,i} : i < \chi\}$ 且正交型$_{\mathfrak{s}}(c, M_0, N^+) \in \mathrm{P}^*_\chi$，并且 $\{c_{\chi,i} : i < \chi\} \cup \{c\}$ 在 (M_0, N^+) 中独立，则 $\varepsilon_\chi(c, N^+) = \chi$。[为什么？假设 c 是一个反例，使得 $\varepsilon_\chi(c, N^+) = \zeta < \chi$，并令$i(*) = i[\zeta]$。

Now

11.10 的第二个证明：

问题：

1）尝试用 11.6 来证明 11.10。

2）问题是 (a) 还是 (b)，其中

(a) 存在被 M_1 正交的 M_0 所支配的 q，$(M_0, M_1, a) \in K^{3,\mathrm{uq}}_{\mathfrak{s}}$ 并且没有 $r \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ 被 q 支配，因此可能有 $\dim(q, N) > \sup\{\mathrm{dom}(p, N) : p \in \mathscr{S}\mathrm{bs}_{\mathfrak{s}}(M)\}$。此外，如果 $M_1 \le M_2$，$(M_0, M_2, a) \in K^{3,\mathrm{uq}}_{\mathfrak{s}}$ 则一切不变。这里存在一个隐藏的独立性性质，但某些情况下似乎只多出一个一元函数，所以有一个分解 (b)，而不是 M_0, M 我们有 $\langle M_i : i \le \delta \rangle$ 半连续，$\delta < \kappa_{\mathfrak{s}}$ 并且我们考察被 M_δ 正交的 M_i 所支配的 q，对于 $i < \delta$ （仅当我们希望分解为树 $\subseteq {}^{\kappa >}\mu$ 时才需要）。

3)如果具有非正交维数性质，并且对于某个 $\{M_i : i < \alpha\}$ 在 M 上独立的素模型在$\cup\{M_i : i < \alpha\}$ 不是极小的，那么关于维数的任何逻辑固定长度博弈 $+$ 量词都不能将模型刻画到同构为止。

4) 具有用于虚元素

(a) p/平行性(b) p/E $p_1 \mathrm{E} p_2$ 当且仅当它们始终具有相同的维数（即彼此支配）。

5）猜想：如果 p 被 M 支配，但不支配 $\mathscr{S}_{\mathrm{bs}}(M)$ 中的任何元素，那么在某个 p/E 上存在一个群，因此其深度为 0（甚至 p^∞ 也是？）。

6) 组：请参阅我写给 Lessman 的内容。

7) 从 [She09e]中的705 取非正交维数性质：如果 $\mathfrak{s}$ 恰好在 $n+1$ 之前是优良的，那么 $\mathfrak{s}^+$恰好在 n 之前或在 $n+1$ 之前是优良的。§12 中有帮助，但需要更低的结果。不过：does$EM(I)$ 有帮助吗？

如果 $EM(I, \Phi)$ 无序，则将其定义为 slim，并以此作为分界线。 □

References

[她92] A. Hernandez, *On ω_1–saturated models of stable theories*，博士论文，加州大学伯克利分校，1992年，导师：Leo Harrington。[LS06] Michael Chris Laskowski 和 Saharon Shelah，*Decompositions of saturated models of stable theories* **191** 2006 124 ，《基础数学》（），第 2, 95 2231058 –页。MR She [ ] *AEC: weight and p-simplicity* Saharon Shelah，。[She78]， *Classification theory and the number of nonisomorphic models*，《逻辑与数学基础研究》，第92卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1978年。MR 513226[She90]， *Classification theory and the number of nonisomorphic models*，第2版，《逻辑与数学基础研究》，第92卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1990, [ ] 1083551 Sh:a 的修订版。MR She，，《以色[91] *Multi-dimensionality* **74** 1991 列数学杂志》（），第 2 3, 281 288 1135240 –页。[99] *Categoricity for abstract classes with amalgamation* **98** MR She，，《纯粹与应用逻辑年刊》（1999），第1–3期，261–294，arXiv: math/9809197。MR 1696853[She01]， *Categoricity of an abstract elementary class in two successive cardinals*，《以色列数学杂志》126（2001），29–128，arXiv: math/9805146。MR 1882033[She09a]， *Abstract elementary classes near $\aleph_1$*，《抽象初等类的分类理论》，《逻辑研究》（伦敦），第18卷，College Publications，伦敦，2009年，arXiv: 0705.4137， [Sh:h], 第I章，第vi页+813。[She09b]， *Categoricity and solvability of A.E.C.*， *quite highly*，2009年，arXiv: 0808.3023， [Sh:h]第IV章。[She09c]， *Categoricity in abstract elementary classes: going up inductively*，2009年，arXiv: math/0011215， [Sh:h]第II章。[She09d]， *Classification theory for abstract elementary classes*，《逻辑研究》（伦敦），第18卷，College Publications，伦敦，2009年。MR 2643267[She09e]， *Toward classification theory of good λ frames and abstract elementary classes*，2009年 0404272，arXiv: math/， [Sh:h]第III章。[She09f]， *Universal Classes: Axiomatic Framework [Sh:h]*，2009年， [Sh:i]第V章 (B) 。[She09g]， *Universal Classes: The heart of the matter*，2009年， [Sh:i]第V章（F）。[She14]， *Strongly dependent theories*，《以色列数学杂志》204（2014），第1期，1–83，arXiv: math/0504197。MR 3273451[SV] Saharon Shelah 和 Sebastien Vasey，*Categoricity and multidimensional diagrams*，arXiv: 1805.06291。

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram, The He-brew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904, Israel, and, Department of Mathe-matics, Hill Center - Busch Campus, Rutgers, The State University of New Jersey, 110Frelinghuysen Road, Piscataway, NJ 08854-8019 USA*Email address*: shelah@math.huji.ac.il*URL*: http://shelah.logic.at