arXiv:2304.04501v1 [math.QA] 10 Apr 2023

高定模型与德利涅范畴

B. FEIGIN◇、L. RYBNIKOV◦ 和 F. UVAROV⋆

◇◦⋆高等经济大学，数学系，乌萨切娃街6号，莫斯科，119048，俄罗斯

◦哈佛大学，数学系，1 牛津街，剑桥，马萨诸塞州 02138，美国

◇耶路撒冷希伯来大学，爱因斯坦数学研究所，吉瓦特拉姆。耶路撒冷，9190401，以色列

Abstract. 我们证明，与李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 相关的高定高阶哈密顿量的构造可以插值到任意复数 n。我们利用Deligne范畴 $\mathcal{D}_t$来实现这一点；当 n 不一定是自然数时，该范畴为定义群 GL_n的有限维表示的一种形式化方式。

我们还得到了对任意复数 n 的无单值化条件的插值，这些条件定义在 n阶微分算子空间上，被认为是 Bethe 假设方程的一种现代形式。我们证明，对于复数 n，高阶 Gaudin 哈密顿量代数中的关系由我们对无单值化条件的插值生成。

我们的构造使我们能够定义伪微分算子无单值化的含义。受与李超代数 $\mathfrak{gl}_{n|n'}$ 相关的 Gaudin模型的 Bethe Ansatz 猜想启发，我们证明，无单值化微分算子的比值是一个无单值化的伪微分算子。

1. Introduction

1.1. 对称张量范畴（STC），见 [7], [8], ，为研究代数闭域 $\mathbb{K}$ 上群 G 的有限维表示 Rep$_{\mathbb{K}}(G)$ 提供了一个自然框架。本文只考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。众所周知，对于任意群 G，$\widehat{\ }$都存在一个仿射群概形 $\widehat{G}$，使得范畴 Rep$_{\mathbb{C}}(G)$ 等价于 $\widehat{G}$ 的有限维（代数）表示范畴 Rep$^{alg}_{\mathbb{C}}$ $(\widehat{G})$。一个自然的问题是，是否存在一些 STC，它们不等价于某个仿射$\widehat{\ }$群概形 G 的表示范畴 Rep$^{alg}_{\mathbb{C}}$ $(\widehat{G})$。这个问题的答案显然是肯定的：仿射超群概形的有限维表示范畴提供了新的例子，因为这类范畴中的对象的维数可能取负整数值。事实上，存在对象具有任意复维数的 STC。令 $t \in \mathbb{C}$。在 [4, 例 1.27],中，德利涅和米尔恩引入了本文记作 $\mathcal{D}_t$ 的范畴。范畴 $\mathcal{D}_t$ 可视为范畴 Rep$^{alg}_{\mathbb{C}}$ (GL_n) 向任意复 n的插值“Rep$^{alg}_{\mathbb{C}}$ (GL_t)”。在 $\mathcal{D}_t$ 中扮演 Rep$^{alg}_{\mathbb{C}}$ (GL_n) 标准表示$\mathbb{C}^n$ 这一角色的对象，其维数为 t （详情参见 [2] ）。如果 $t \notin \mathbb{Z}$，那么 $\mathcal{D}_t$ 是一个 STC；否则它不是阿贝尔范畴（而按照

◇电子邮件：borfeigin@gmail.com。

◦电子邮件：leo.rybnikov@gmail.com.⋆电子邮件：fuvarov@hse.ru.

[8]）的术语，这对于成为 STC 是必要的），而是一个幂等完备范畴，并且存在一个张量函子 G_n：$\mathcal{D}_n \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}(GL_n)$。在 [3], 中，德利涅还引入了类似的插值 $\mathcal{D}_t^S$、$\mathcal{D}_t^O$ 和 $\mathcal{D}_{2t}^{Sp}$，分别对应范畴 $\mathrm{Rep}\mathbb{C}(S_n)$、$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}(O_n)$ 和 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}(Sp_n)$。范畴 $\mathcal{D}_t$、$\mathcal{D}_t^S$、$\mathcal{D}_t^O$ 和 $\mathcal{D}_t^{Sp}$ 有时称为德利涅范畴。

正如在 [6], 许多与经典李群相关的李论构造GL_n, O_n或 Sp_{2n}（例如，相应的李代数 $\mathfrak{g}$、对称对偶对、Harish-Chandra 模、Yangian $Y(\mathfrak{g})$）$_{\mathbb{C}}^{alg}$ 中所示，都可以用对称张量范畴的语言来定义。于是，将范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}(GL_n)$、$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}(O_n)$ 和 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}(Sp_{2n})$ 分别替换为它们的超类比，或替换为 $\mathcal{D}_t$、$\mathcal{D}_t^O$ 和 $\mathcal{D}_{2t}^{Sp}$，便自然得到这些构造向超群或更为奇特的推广的推广；这些推广统称为“复秩李理论”。本文表明，与李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 相关的量子（有理）Gaudin模型的高阶哈密顿量代数（Bethe 代数）正是这类构造之一；换言之，它可以用范畴语言来定义，并且可以“插值”到任意复数 n。

1.2. 与李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 相关的量子Gaudin模型最早由[11], 引入，它是量子自旋链的一种特定退化。取 m 个互不相同的复数 $z_1, \dots, z_m$。令 $e_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ 为李代数 $\mathfrak{gl}_n$的标准基，即，e_{ij} 是一个矩阵，其第 i 行与第 j 列交点处的元素为 1，其余元素均为 0。该模型由以下一组 m 个彼此对易的哈密顿量给出：

$$H_a = \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{m} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}^{(a)} e_{ji}^{(b)}}{z_a - z_b} \in U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}, \quad a = 1, \dots, m,$$

其中 $e_{ij}^{(l)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{l\text{-}th}{e_{ij}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$。

令 V_ν 表示 $\mathfrak{gl}_n$ 的最高权为 ν的不可约表示。取一列$\bar{\nu} =$个 $(\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(m)})$ 整数主导 $\mathfrak{gl}_n$权。哈密顿量 $H_a, a = 1, \dots, m$ 作用于张量积 $V(\bar{\nu}) = V_{\nu^{(1)}} \otimes \cdots \otimes V_{\nu^{(m)}}$。令 $V(\bar{\nu})^{sing}$ 为关于 $\mathfrak{gl}_n$ 在 $V(\bar{\nu})$上的作用的奇异向量空间。哈密顿量与这一作用对易，因此作用于 $V(\bar{\nu})^{sing}$。量子Gaudin模型的高阶哈密顿量或“守恒荷”代数 $\mathcal{B}_n^{sing}(\bar{\nu})$（有时也称为 Bethe 代数），是代数 $\mathrm{End}(V(\bar{\nu})^{sing})$ 中 $H_a, a = 1, \dots, m$ 的中心化子；该代数由空间 $V(\bar{\nu})^{sing}$ 上的所有线性变换构成。

此外还有万能Bethe代数 $\mathcal{B}_n \in U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$，参见 [9], [17], [13]。代数$\mathcal{B}_n$与 $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 中由嵌入 $g \mapsto \sum_{a=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{a\text{-}th}{g} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$给出的 $U(\mathfrak{gl}_n)$ 的副本交换，因此作用于 $V(\bar{\nu})^{sing}$。在这一作用下，$\mathcal{B}_n$ 在 $\mathrm{End}(V(\bar{\nu})^{sing})$ 中的像与 $\mathcal{B}_n^{sing}(\bar{\nu})$ 重合。代数 $\mathcal{B}_n$ 可利用仿射李代数 $\mathfrak{gl}_n$的包络代数的局部完备化的中心构造，参见 [9]。本文将采用 $\mathcal{B}_n$ 的更显式构造，见 [17] 和 [1], ；详情请参见第 3 节。此外，我们将不考虑 $\mathcal{B}_n^{sing}(\bar{\nu})$，而是考虑 $\mathcal{B}_n$ 在 $\mathrm{End}(V(\bar{\nu}))$ 中的像 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$，因为我们有代数同构 $\mathcal{B}_n^{sing}(\bar{\nu}) \cong \mathcal{B}_n(\bar{\nu})$。

现在，让我们回到 Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$。$\mathcal{D}_t$ 的不可分解对象由分拆对标记。对于每个整 dominant $\mathfrak{gl}_n$-权重 ν，都存在一对分拆（λ，μ），使得 G_n（$V_{(\lambda,\mu)}$）$= V_\nu$，其中 $V_{(\lambda,\mu)}$ 是对应于（λ，μ）的不可分解对象，而 G_n：$\mathcal{D}_n \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{alg}$（$GL_n$）是上文提到的函子，详情见第 2 节。

对于一列整 dominant $\mathfrak{gl}_n$-权重 $\bar{\nu} = (\nu^{(1)}, \ldots\ldots, \nu^{(m)})$，令 $(\lambda^{(a)}, \mu^{(a)})$，$a = 1, \ldots\ldots m$ 满足 $G_n(V_{(\lambda^{(a)},\mu^{(a)})}) = V_{\nu^{(a)}}$。记 $V(\lambda, \bar{\mu}) = V_{(\lambda^{(1)},\mu^{(1)})} \otimes \cdots \otimes V_{(\lambda^{(m)},\mu^{(m)})}$。

在第 4 节中，我们构造一个代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu}) \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}(V(\lambda, \bar{\mu}))$，使得函子 G_n 诱导一个同态 $\underline{\mathcal{B}}_n(\lambda, \bar{\mu}) \to \mathcal{B}_n(\bar{\nu})$，当 n 充分大时，该同态成为同构。

1.3.量子可积模型理论中的一个标准问题，是对高阶哈密顿量进行同时对角化。求出 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$ 中各元素的公共特征向量和特征值的一种方法，是使用代数Bethe 假设，参见 [13]。通过这种方式得到的每个特征向量，都对应于一个代数方程组的解，该方程组称为Bethe假设方程。BetheAnsatz 猜想断言，所有公共特征向量都可以通过这种方式得到。

在 [9], 中，与半单李代数 $\mathfrak{g}$ 相关的 Gaudin模型 Bethe 假设方程 被解释为某个 ${}^L\mathfrak{g}$-opers 空间 $\mathrm{Op}(z_1, \ldots, z_m)$ 上的“无单值化”条件，其中 ${}^L\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$的朗兰兹对偶，另见 [10]。Bethe Ansatz 猜想在 [9] 中被重新表述为如下形式：高阶哈密顿量的公共特征向量集合与来自 $\mathrm{Op}(z_1, \ldots, z_m)$ 的无单值化 ${}^L\mathfrak{g}$-opers 集合之间存在双射。该猜想已在 [14], 中对 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ 得到证明，并在 [16]中对任意半单李代数$\mathfrak{g}$得到证明。

在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ 的情形下，我们有 ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$，而 $\mathrm{Op}(z_1, \ldots, z_m)$ 中的一个 $\mathfrak{gl}_n$-oper 可视为如下形式的微分算子

$$D = \partial_u^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{a=1}^{m} \frac{b_{ij}^{(a)}}{(u - z_a)^j} \partial_u^{n-i},$$

其中我们记 $\partial_u = d/du$。上文讨论的无单值化条件是关于系数 $b_{ij}^{(a)}$ 的多项式关系，意即对每个 $a = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$，微分算子 D 都有如下形式的形式级数解

$$f_{a,i}(u) = (u - z_a)^{n+\nu_i^{(a)}-i} + c(u - z_a)^{n+\nu_i^{(a)}-i+1} + \ldots,$$

并且它在 ∞ 处有正则奇点，详见第 5 节。这里，$\nu^{(a)} = (\nu_1^{(a)}, \ldots, \nu_n^{(a)})$ 是构造 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$ 时所用序列 $\bar{\nu}$ 中的第 a 个 $\mathfrak{gl}_n$-权。

设 $p_1, \ldots, p_d$ 为多项式，使无单值化条件可写为 $p_k(b_{ij}^{(a)}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$。考虑自由交换含幺代数 $\mathcal{A}_n$，其自由生成元为 $y_{ij}^{(a)}$，$i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, i$, $a = 1, \ldots, m$。令 $J_n(\bar{\nu})$ 为 $\mathcal{A}_n$ 中由元素 $p_k(y_{ij}^{(a)})$, $k = 1, \ldots, d$ 生成的理想。Bethe Ansatz 猜想通过证明一个定理而在[16] 中得到证明；在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ 的情形下，该定理可表述如下。

定理 1.1. 代数 $B_n(\bar{\nu})$ 和 $\mathcal{A}_n/J_n(\bar{\nu})$ 同构。

在本文的第二部分中，我们为代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$表述并证明了该定理的一个类似版本，并对二分拆序列 $(\lambda, \bar{\mu})$施加了一些限制，参见公式 (4.2)。在这种情况下，微分算子 D 的阶数变为任意复数，因此 D 变为伪微分算子，即，形如以下形式的形式级数

$$\partial_u^t + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \sum_{a=1}^{m} \frac{b_{ij}^{(a)}}{(u - z_a)^j} \partial_u^{t-i}.$$

因此，我们考虑一个无限生成的自由交换含幺代数 $\mathcal{A}_\infty$，其自由生成元为 $y_{ij}^{(a)}$、$i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$、$j = 1$、……、$i$、$a = 1$、……、$m$，并在 $\mathcal{A}_\infty$ 中构造一个理想 $\underline{J}_t(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$，使得对于充分大的 n，$\underline{J}_{t=n}(\lambda, \bar{\mu})$ 到 $\mathcal{A}_n$ 的投影与 $J_n(\bar{\nu})$重合，其中 $\bar{\nu}$ 满足 $G_n(V_{(\lambda^{(a)},\mu^{(a)})}) = V_{\nu^{(a)}}$。然后我们证明，对于除有限多个 t、$\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$ 之外的所有情形，代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 与 $\mathcal{A}_\infty/\underline{J}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 同构（定理 6.10）。关键观察是，代数 $\mathcal{A}_\infty/\underline{J}_t(\lambda, \bar{\mu})$是有限生成的，并且对于充分大的整数 n，理想 $\underline{J}_n(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ 包含所有满足 $i > n$ 的元素 $y_{ij}^{(a)}$，见引理 6.6。

$\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$目前，我们尚不清楚如何为任意（λ，$\bar{\mu}$）构造理想 $\underline{J}_t(\lambda, \bar{\mu})$（不一定满足条件（4.2））。我们在注释 4.2 和 6.5 中指出了这种情况下出现的一些技术挑战。

1.4. 我们对代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 的研究，特别是受到与超李代数 $\mathfrak{gl}_{n|n'}$ 相关的 Bethe 代数 $\mathcal{B}_{n|n'}$ 的 Bethe拟设猜想的启发，参见 [15]、[12]。该猜想将 $\mathcal{B}_{n|n'}$ 的特征向量与 $n-n'$ 阶伪微分算子联系起来，而后者是无单值化微分算子的比值。这些比值由伪微分算子系数满足的一些多项式关系描述；我们预期这些关系恰好就是代数 $\mathcal{B}_{n|n'}$ 中的关系。

另一方面，存在一个满（但非忠实）的张量函子 $G_{n|n'}$：$\mathcal{D}_{n-n'} \to \mathrm{Rep}\mathbb{C}(GL_{n|n'})$ 到超群 $GL_{n|n'}$ 的有限维表示范畴，使得上文讨论的函子 G_n 是 $G_{n|n'}$ 的特例 $n' = 0$。函子 $G_{n|n'}$ 的存在是 Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 的某个泛性质的结果（见 [2, 命题 3.5.1]）。事实上，[5] 中证明了，对于 $t \in \mathbb{Z}$，$\mathcal{D}_t$的阿贝尔包络是范畴 $\mathrm{Rep}\mathbb{C}(GL_{n|n'})$ 的某个极限，其中 n、$n' \to \infty$、$n - n' = t$。容易看出，函子 $G_{n|n'}$ 诱导出代数的满同态 $\varphi_{n|n'} : \underline{\mathcal{B}}_{n-n'}(\lambda, \bar{\mu}) \to \mathcal{B}_{n|n'}$。因此，理想 $\underline{J}_{n-n'}(\lambda, \bar{\mu})$ 与同态 $\varphi_{n|n'}$ 的核共同给出了代数 $\mathcal{B}_{n|n'}$ 中的全部关系。在第 7 节中，我们证明，由理想 $\underline{J}_{n-n'}(\lambda, \bar{\mu})$ 给出的关系，对 [12] 中出现的无单值化微分算子之比成立。因此，要证明超情形下 Gaudin 模型的 Bethe Ansatz 猜想，描述$\varphi_{n|n'}$的核至关重要。我们希望在今后的研究中完成这一工作。

1.5. 本文结构如下。第 2 节中，我们给出 Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 的定义，并讨论后文将用到的性质。第 3 节中，我们回顾 Bethe 代数 $\mathcal{B}_n$ 的构造，并介绍该代数的不同生成集。第 4 节中，我们在 Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 中引入 Bethe 代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$，并给出与第 3 节中介绍的 $\mathcal{B}_n$ 的生成集类似的生成集。第 5 节专门讨论“无单值化”条件，即构造理想 $J_n(\bar{\nu})$ 及其与 Bethe 代数 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$ 的关系。第 6 节中，我们构造理想 $\underline{J}_t(\lambda, \bar{\mu})$，并证明定理 1.1 关于 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 的一个类似结论。第 7 节中，我们说明无单值化条件的插值与微分算子之比的关系。

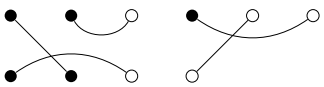
1.6. 致谢。本文是国家研究型大学高等经济学院（HSEUniversity）基础研究项目下实施的一项研究项目的成果。

2. Preliminaries on the Deligne's category $\mathcal{D}_t$

2.1. 设 f 和 f' 为由两个字母 $\bullet$ 和 $\circ$组成的有限（可以为空）单词。按照 [2],的定义，称满足以下五个性质的图为一个（f, f'）-图式：

（1）每个顶点要么是 $\bullet$ ，要么是 $\circ$。（2）顶点排列成两行，使得在顶行中我们得到单词f，在底行中我们得到单词 f'。（3）每个顶点恰好与一条边相邻。（4）如果一条边连接同一行中的两个顶点，那么它连接一个黑色顶点 $\bullet$和一个白色顶点 $\circ$。（5）如果一条边连接不同行中的两个顶点，那么它连接两个黑色顶点或两个白色顶点。

示例。如果 $f = \bullet\ \ \bullet\ \ \circ\ \ \bullet\ \ \circ\ \ \circ$ 和 $f' = \bullet\ \ \bullet\ \ \circ\ \ \circ$，那么



是一个（f， f'）-图表。

固定 $t \in \mathbb{C}$。定义如下的 $\mathbb{C}$-线性严格幺半范畴 $\mathcal{D}_t^0$。

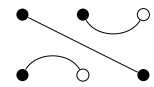
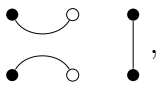
- $\bullet$ 的对象是由字母 $\bullet$ 和 $\circ$ 组成的有限（可能为空）单词。
- $\bullet$若 f 和 f'是 $\mathcal{D}_t^0$中的两个对象，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t^0}(f, f')$ 是一个向量空间，其基由所有 (f, f')-图组成。

- $\bullet$如果 X是一个（f， f'）-图，且 Y是一个（f'， f''）-图，则按如下方式定义复合 $Y \circ X$：（1）将 X 叠放在 Y 上，使得 X 的底行与Y的顶行重合；（2）擦除步骤（1）中出现的所有环；（3）将所得的（f， f''）-图乘以 t^d，其中 d是步骤（2）中擦除的环的数量。我们将复合扩展到任意态射 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t^0}$（$f$， f'）和 $Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t^0}$（$f'$， f''

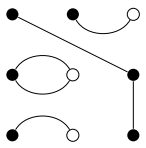
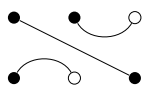
）

由线性性。
- 张量积由从左到右叠加单词或图示给出。

例子。若

$X =$  and $Y =$  ,

then

$Y \circ X =$  $= \quad t \cdot$  .

我们还将用 V（分别用 V^*）表示 $\mathcal{D}_t^0$的对象 $\bullet$（分别为 $\circ$）。注意，作为一个幺半范畴，$\mathcal{D}_t^0$ 由 V和V^* 生成。记 $T^{r,s} := V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ 和 $\mathfrak{g} := T^{1,1} = V \otimes V^*$。

2.2. 考虑范畴 $\mathcal{D}_t^0$ 的加法包络 $(\mathcal{D}_t^0)^{add}$。根据定义，$(\mathcal{D}_t^0)^{add}$ 是一个范畴，其对象 $X = (X_j)$ 是由 $\mathcal{D}_t^0$ 中的对象组成的有限长度元组，而态射

$$\varphi : (X_j) \to (Y_i), \quad \varphi = (\varphi_{ij}), \quad \varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t^0}(X_j, Y_i)$$

由来自 $\mathcal{D}_t^0$ 的态射矩阵给出，并通过矩阵乘法进行复合：

$$(\varphi \circ \psi)_{ij} = \sum_k \varphi_{ik} \circ \psi_{kj}.$$

范畴 $(\mathcal{D}_t^0)^{add}$ 是加法范畴，其双积由元组的拼接给出。它还自然继承了范畴 $\mathcal{D}_t^0$ 的 $\mathbb{C}$-线性结构和幺半群结构。

根据定义，Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 是 $\mathcal{D}_t$ 的 Karoubi 包络。也就是说，$\mathcal{D}_t$ 的对象是形如 (X, e) 的对，其中 X 是来自 $\mathcal{D}_t^0$ 的对象，e 是 $\mathrm{End}_{(\mathcal{D}_t^0)^{add}}(X)$ 中的一个幂等元，并且

$$\mathrm{Hom}((X, e), (Y, f)) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{(\mathcal{D}_t^0)^{add}}(X, Y) | f \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ e\}.$$

$\mathcal{D}_t$ 中态射的复合继承自 $(\mathcal{D}_t^0)^{add}$。此外，范畴 $\mathcal{D}_t$ 自然继承了 $(\mathcal{D}_t^0)^{add}$ 的幺半群结构和加法结构。

2.3. 分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 是一个最终稳定为零的非负整数非递增序列。记作 $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$。我们也将分拆 $(0, 0, \dots)$ 记作 $\emptyset$。二分拆是由两个分拆组成的有序对。

在 [2] 中已证明，Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 中的任意不可分解对象都同构于 $V_{(\lambda,\mu)} = (T^{r,s}, e_{(\lambda,\mu)})$，其中某个二分拆为（$\lambda, \mu$），且 $r = |\lambda|$、$s = |\mu|$，以及 $e_{(\lambda,\mu)}$是 $\mathrm{End}^{\mathcal{D}_t^0}(T^{r,s})$ 中的某个幂等元，详见 [2, 第 4 节。3]

注意，对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，代数$\mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}(V^{\otimes m})$和 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}((V^*)^{\otimes m})$ 同构于置换群 S_m的群代数 $\mathbb{C}[S_m]$。在此同构下，带有 $|\lambda| = m$ 的幂等元$e_{(\lambda,\emptyset)}$ 和 $e_{(\emptyset,\lambda)}$ 对应于杨对称化子 c_λ 的一个标量倍（有关 c_λ 的定义，参见例如 [19, 讲义 4] ）。特别地，$e_{(\lambda,\emptyset)}$ 和 $e_{(\emptyset,\lambda)}$ 不依赖于复数 t。

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，令 $V_\square$ 为李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 的典范表示。回顾一下，$\mathfrak{gl}_n$ 的有理表示是 $V_\square^{\otimes r} \otimes (V_\square^*)^{\otimes s}$ 的子表示，其中 $r, s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 是有理表示范畴 $\mathcal{R}_n$ 的一种“插值”，其中表示 $\mathfrak{gl}_n$，因为存在一个加性模本质满且本质满射函子$G_n : \mathcal{D}_n \to \mathcal{R}_n$，详见 [2, 第 5] 节。

对于二分拆 (λ)，令 l_λ 和 l_μ 分别为分拆 λ和 μ 中非零元素的个数。如果 $n \geqslant l_\lambda + l_\mu$，则函子 G_n 将不可分解对象$V_{(\lambda,\mu)}$ 映射为不可约的 $\mathfrak{gl}_n$-模 V_ν，其最高权为 ν，由 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$和 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ 如下定义：

$$\nu = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l_\lambda}, 0, 0, \dots, 0, -\mu_{l_\mu}, , \dots, -\mu_2, -\mu_1). \tag{2.1}$$

如果 $n < l_\lambda + l_\mu$，那么 $G_n(V_{(\lambda,\mu)}) = \{0\}$。

固定 m $\lambda^{(a)}$ $\mu^{(a)}$ $a = 1 \dots m$ $\bar{V} = V_{(\lambda^{(1)},\mu^{(1)})} \otimes V_{(\lambda^{(2)},\mu^{(2)})} \otimes \cdots \otimes V_{(\lambda^{(m)},\mu^{(m)})}$ $N = \sum_{a=1}^m |\lambda^{(a)}| + |\mu^{(a)}|$ $G_n^{\bar{V}}$ $_{\mathcal{D}_n}$ $\bar{V}$ $\to$ $_{\mathcal{R}_n}$ G_n $\bar{V}$ 二分拆 (,), ,, 。记))) 和 ()。设:End( ) End (( )) 为由函子 G_n 诱导的满同态。

引理 2.1. 对于每个 $n \geqslant N$，$G_n^{\bar{V}}$ 都是一个同构。

证明. 注意， $G_n^{\bar{V}}$ 是 $G_n^{\bar{W}}$ 的一个限制，其中

$$\bar{W} = V^{\otimes|\lambda^{(1)}|} \otimes (V^*)^{\otimes|\mu^{(1)}|} \otimes \cdots \otimes V^{\otimes|\lambda^{(m)}|} \otimes (V^*)^{\otimes|\mu^{(m)}|}.$$

因此，只需证明 $G_n^{\bar{W}}$ 是单射的。

对于 $\mathcal{D}_n$ 或 $\mathcal{R}_n$中的任意对象 A、 B 和 C，我们有$A\otimes B \cong B\otimes A$ 以及 $\mathrm{Hom}(A, B\otimes C) \cong \mathrm{Hom}(A\otimes C^*, B)$。因此，我们有向量空间同构 h_1： $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_n}(\bar{W}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{D}_n}(V^{\otimes N})$ 以及 h_2： $\mathrm{End}_{\mathcal{R}_n}(G_n(\bar{W})) \to \mathrm{End}_{\mathcal{R}_n}(V_\square^{\otimes N}) = \mathbb{C}[S_N]$。最后一个等式由Schur-Weyl对偶性和我们的假设 $n \geqslant N$ 得出。映射 $h_2 G_n^{\bar{W}} h_1^{-1}$将不同的图表映射到 S_N 中的不同元素，因此它是单射，引理得证。 □

3. The Bethe algebra of the Gaudin model associated with $\mathfrak{gl}_n$

3.1. 令 e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ 为李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 的标准基，也就是说， e_{ij} 是在第 i 行与第 j 列交点处为 1、其他位置均为 0 的矩阵。固定互不相同的复数 $z_1, \ldots, z_m$。对于每个 i, $j = 1, \ldots, n$，定义一个变量 u 的 $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 值有理函数 $\mathcal{L}_{ij}(u)$，其公式如下:

$$\mathcal{L}_{ij}(u) = \sum_{r=1}^{m} \frac{e_{ij}^{(r)}}{u - z_r},$$

其中 $e_{ij}^{(r)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{r-th}{e_{ij}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$.

设 $\mathcal{L}(u)$是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素为 $\mathcal{L}_{ij}(u)$。考虑一个微分算子

$$\mathrm{tr}\,(\partial_u - \mathcal{L}(u))^k = \sum_{l=0}^{k} S_{kl}(u)\partial_u^{k-l}.$$

我们有 $S_{k0}(u) = 1$，并且

$$S_{kl}(u) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \frac{S_{klj}^{(r)}}{(u - z_r)^j}, \quad 1 \leqslant l \leqslant k \tag{3.1}$$

对于某个 $S_{klj}^{(r)} \in U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$。众所周知，例如参见 [1],，元素 $S_{klj}^{(r)}$、 $k \geqslant 1$、$1 \leqslant l \leqslant k$、$1 \leqslant j \leqslant l$、 $1 \leqslant r \leqslant m$ 彼此可交换。

令 $\mathcal{B}_n$为由元素 $S_{klj}^{(r)}$、$k \geqslant 1$、 $1 \leqslant l \leqslant k$、 $1 \leqslant j \leqslant l$、 $1 \leqslant r \leqslant m$生成的 $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 的含幺交换子代数。代数 $\mathcal{B}_n$ 称为量子有理 Gaudin模型的高阶哈密顿量代数（Bethe 代数），参见 [9], [17], [1],[13]。

回顾一下， V_ν 表示具有最高权 ν的李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 的有限维表示。令 $\bar{\nu} = (\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(m)})$为一列占优整 $\mathfrak{gl}_n$-权。Bethe 代数 $\mathcal{B}_n$ 作用于张量积 $V(\bar{\nu}) = V_{\nu^{(1)}} \otimes \cdots \otimes V_{\nu^{(m)}}$。用 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$表示 $\mathcal{B}_n$ 在 $\mathrm{End}(V(\bar{\nu}))$中的投影。在下文第 4 节中，我们将在 Deligne 范畴 $\mathcal{D}_t$ 中构造代数 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$的一个类似物。

3.2. 在下文中，我们将需要代数 $\mathcal{B}_n$ 的另一组生成元，并将在本小节中给出。

对于一个元素可能不交换的 $n \times n$ 矩阵 A a_{ij}、 i、 $j = 1$、.....、 n，按以下公式定义其列式 cdet A

$$\operatorname{cdet} A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

矩阵 A 被称为Manin矩阵，如果 $[a_{ij}, a_{pq}] = [a_{pj}, a_{iq}]$ 对于所有 i、 j、 p、 $q = 1$、.....、 n。已知，参见 [1], ， $\partial_u - \mathcal{L}(u)$ 是一个 Manin 矩阵。

我们将需要以下引理:

引理 3.1. 假设 A 是一个 Manin 矩阵。记 $T_k = \operatorname{tr} A^k$。令 σ_1，.....， σ_n 为“特征多项式”的系数:

$$\operatorname{cdet}(1 + \alpha A) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k \alpha^k.$$

然后是牛顿恒等式

$$\sigma_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \sigma_i T_{k-i}$$

对每个 $k = 1$、...、 n 都成立。

引理的证明见于 [1]。

考虑一个微分算子

$$\operatorname{cdet}\big[1 + \alpha\big(\partial_u - \mathcal{L}(u)\big)\big] = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} \alpha^r \tilde{B}_{rs}(u) \partial_u^{r-s}. \tag{3.2}$$

˜系数 $B_{rs}(u)$ 是取值于 $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 的有理函数，其自变量为 u ，且可能的极点仅在˜ z_1、.....、 z_m处。对于所有 $r = 0$、.....、 n，有 $B_{r0}(u) = 1$，并且

$$\tilde{B}_{rs}(u) = \sum_{a=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} \frac{\tilde{B}^{(a)}_{rsj}}{(u - z_a)^j}, \quad 1 \leqslant s \leqslant r \tag{3.3}$$

对某个 $\tilde{B}^{(a)}_{rsj} \in U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 成立。

将引理 3.1 应用于矩阵 $\partial_u - \mathcal{L}(u)$，可知元素 $\tilde{B}^{(a)}_{rsj}$、 $r = 1$、.....、n、 $s = 1$、.....、 r、 $j = 1$、.....、 s、 $a = 1$、.....、 m 生成 Bethe 代数 $\mathcal{B}_n$。

记 $B_i(u) := \tilde{B}_{ii}(u)$ 且 $B^{(a)}_{ij} := \tilde{B}^{(a)}_{iij}$ 。

命题 3.2. 元素 $B^{(a)}_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i$, $a = 1, \dots, m$ 生成代数 $\mathcal{B}_n$。

证明. 令 $\mathcal{D}$ 为关于变量 u 的微分算子代数，其系数为取值于 $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 的有理函数。引入映射 $\Phi\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}[\alpha^{-1}]$

$$\Phi : \sum_r a_r(u) \partial_u^r \mapsto \sum_r a_r(u) (\partial_u + \alpha^{-1})^r.$$

很容易验证， Φ 是一个代数同态。因此，

$$\begin{aligned} \Phi\big[\operatorname{cdet}\big(\partial_u - \mathcal{L}(u)\big)\big] &= \operatorname{cdet}\big[\Phi\big(\partial_u - \mathcal{L}(u)\big)\big] = \\ &= \alpha^{-n} \operatorname{cdet}\big[1 + \alpha\big(\partial_u - \mathcal{L}(u)\big)\big]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

利用关系式

$$(\partial_u+\alpha^{-1})^r=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\alpha^{-r+s}\partial_u^s,$$

可以验证，$\sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{M}a_{rs}\alpha^{-N+r}\partial_u^s\in\mathcal{D}[\alpha^{-1}]$ 属于 Φ 的像，当且仅当 $a_{rs}=0$ 对于 $s>r$，并且

$$a_{rs}=a_{r-s,0}\binom{N-r+s}{s}.$$

由于根据 (3.4)，微分算子 $\alpha^{-n}\mathrm{cdet}\big[1+\alpha\big(\partial_u-\mathcal{L}(u)\big)\big]$ 属于 Φ 的像，我们有

$$\tilde{B}_{rs}(u)=\tilde{B}_{ss}(u)\binom{n-s}{r-s} \tag{3.5}$$

对所有 $r=0,\ldots,n$, $s=0,\ldots,r$，命题得证。 □

注 3.3. 请注意，$\mathcal{B}_n$ 的生成元 $B_{ij}^{(a)}$ 是以下展开式中的系数：

$$\mathrm{cdet}\big(\partial_u-\mathcal{L}(u)\big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{a=1}^{m}\frac{B_{ij}^{(a)}}{(u-z_a)^j}\partial_u^{n-i}. \tag{3.6}$$

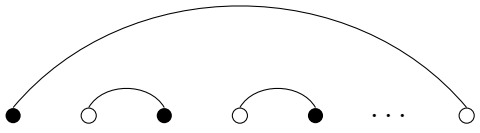
事实上，我们有

$$\mathrm{cdet}\big(\partial_u-\mathcal{L}(u)\big)=\sum_{i=1}^{n}B_{ni}(u)\partial_u^{n-i}.$$

将 (3.5) 代入 $n=s$，得到 $B_{ns}(u)=B_{ss}(u)$。由于 $B_{ii}(u)=\sum_{j=1}^{i}\sum_{a=1}^{m}\frac{B_{ij}^{(a)}}{u-z_a)^j}$，我们得到 (3.6)

4. The Bethe algebra in the Deligne's category $\mathcal{D}_t$

4.1. 回顾 Deligne 范畴 $\mathfrak{D}_t$ 中的对象 $\mathfrak{g}=V\otimes V^*$。令 $\mathcal{C}_m\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathbb{C},\mathfrak{g}^{\otimes m})$ 为由图表给出的态射



态射 $\mathcal{C}_m$ 起到元素的作用

$$C_m=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m}e_{i_1i_2}^{(1)}e_{i_2i_3}^{(2)}\ldots e_{i_mi_1}^{(m)}\in\mathfrak{gl}_n^{\otimes m}.$$

固定 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，以及一个序列 $\bar{i}=(i_1,\ldots,i_k)$，使得 $i_a\in\{1,\ldots,m\}$, $a=1,\ldots,k$。我们将构造一个态射 $\mathcal{C}_{\bar{i},k}^{\ m}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathbb{C},\mathfrak{g}^{\otimes m})$，它将起到元素

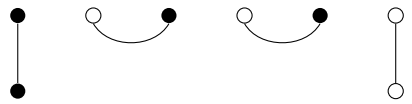
$$C_k^{\bar{i},m}=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k}e_{j_1j_2}^{(i_1)}e_{j_2j_3}^{(i_2)}\ldots e_{j_kj_1}^{(i_k)}\in\mathfrak{gl}_n^{\otimes m}. \tag{4.1}$$

首先，假设所有 $i_1, \dots, i_k$ 互不相同。在这种情况下，我们应有 $k \leqslant m$。定义置换 $\sigma \in S_m$ 如下： $\sigma(a) = i_a$, $a = 1, \dots, k$，且对所有 $k < a < b \leqslant m$， $\sigma(a) < \sigma(b)$。由于 $\mathbb{C}[S_m]$ 自然同构于 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}(\mathfrak{g}^{\otimes m})$ 的一个子代数，我们将 σ 视为 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}(\mathfrak{g}^{\otimes m})$ 中相应的态射。然后我们如下定义 $\mathcal{C}^{\bar{i}}{}_{,k}^{\ m}$。

$$\mathcal{C}_k^{\bar{i},m} = \sigma \circ (\mathcal{C}_k \otimes \mathcal{C}_1^{\otimes(m-k)}).$$

构造 $\mathcal{C}^{\bar{i}}{}_{,k}^{\ m}$ 对任意 $\bar{i}$ 的方式应从以下示例中清楚看出。

令 $\bar{i} = (2, 1, 3, 1, 1)$。然后我们定义另一个序列 $\bar{j} = (4, 1, 5, 2, 3)$。序列 $\bar{j}$ 按如下方式从 $\bar{i}$ 得到：我们取 $\bar{i}$ 的子序列 $(1, 1, 1)$，并将其变为 $(1, 2, 3)$，然后对 $\bar{i}$ 中的所有其他元素加 2。我们将 $\mathcal{C}^{\bar{i}}{}_{,3\,5}$ 定义为 $\mathcal{C}^{\bar{j}}{}_{,5\,5}$ 与态射的复合

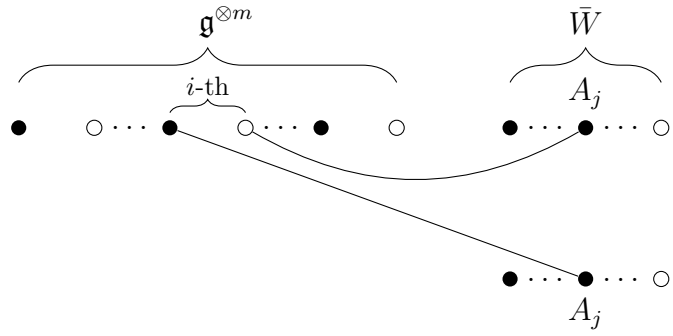


$$\otimes \quad \mathrm{id}_{\mathfrak{g}^{\otimes 2}} \quad \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathfrak{g}^{\otimes 5}, \mathfrak{g}^{\otimes 3}).$$

回忆第 2.3 节中的张量积 $V = V_{(\lambda^{(1)},\mu^{(1)})} \otimes V_{(\lambda^{(2)},\mu^{(2)})} \otimes \cdots \otimes V_{(\lambda^{(m)},\mu^{(m)})}$。现在我们将构造一个态射 $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathfrak{g}^{\otimes m} \otimes V, V)$，它将发挥 $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes m}$ 在 m 有限维不可约 $U(\mathfrak{gl}_n)$-模的张量积上的作用。

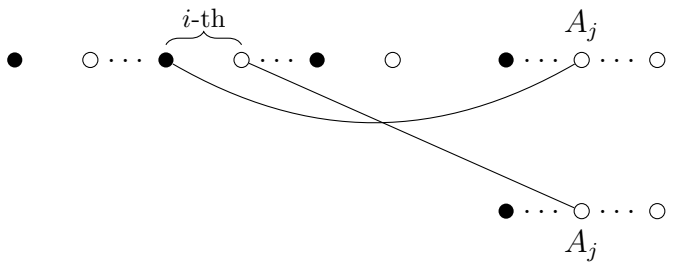
考虑张量积 $\bar{W} = W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$，其中 $W_a = T^{r_a,\ s_a}$、 $r_a = |\lambda^{(a)}|$，以及 $s_a = |\mu^{(a)}|$、 $a = 1$，....., m。我们首先将构造一个态射 $\widetilde{\rho} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathfrak{g}^{\otimes m} \otimes \bar{W}, \bar{W})$。

注意， $\bar{W} = A_1 \otimes \cdots \otimes A_d$，其中 $d = \sum_{a=1}^{m}(r_a + s_a)$，并且对于所有的 $i = 1$、.....、 d， A_i 是 V 或 V^*。我们所说的将 $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ 中的第 i 个张量因子与 W 中的张量因子 A_j 配对，是指描述 $\widetilde{\rho}$ 的图中的以下两条边：



$$\text{if } A_j = V,$$

and



$$\text{if } A_j = V^*,$$

然后，我们将 $\widetilde{\rho}$ 定义为所有满足以下条件的图表之和：

- $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ 中的第一个张量因子与 $A_1, \dots, A_{r_1+s_1}$ 中的一个配对（$W_1 = T^{r_1,s_1}$ 中的因子），

- $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ 中的第二个张量因子与 $A_{r_1+s_1+1}$、 …、 $A_{r_2+s_2}$（ $W_2 = T^{r_2,\ s_2}$中的因子）配对，依此类推；

对于所有未与 $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ 中任何张量因子配对的 $A_i \in W$，我们只需将顶行中对应的顶点连接到底行中的第 i 个顶点（“A_i 映射到自身”）。

我们定义

$$\rho := (e_{(\lambda^{(1)},\mu^{(1)})} \otimes \cdots \otimes e_{(\lambda^{(m)},\mu^{(m)})}) \circ \widetilde{\rho} \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}^{\otimes m}} \otimes e_{(\lambda^{(1)},\mu^{(1)})} \otimes \cdots \otimes e_{(\lambda^{(m)},\mu^{(m)})}).$$

令 e 为$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathbb{C}, \mathfrak{g}^{\otimes m})$ 中的一个态射。则 $e \otimes \mathrm{id}_{\bar{V}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathbb{C} \otimes V, \mathfrak{g}^{\otimes m} \otimes V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_t}(V, \mathfrak{g}^{\otimes m} \otimes V)$。记 $e(V) := \rho \circ (e \otimes \mathrm{id}_{\bar{V}}) \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}(V)$。

回顾第 3.1 节中的 Bethe 代数 $\mathcal{B}_n$ 的生成元 $S^{(r)}_{klj}$。它们依赖于由互不相同的复数 $z_1, \ldots, z_m$ 组成的序列 $\bar{z} =$。容易看出，对于每个 k、 l、 j 和 r，我们都有

$$S^{(r)}_{klj} = \sum_{l'<l} \sum_{\bar{i}} a^{\bar{i}}_{l'}(k, l, j, r, \bar{z}) C^{\bar{i},m}_{l'},$$

其中 $a^{\bar{i}}_{l'}(k, l, j, r, \bar{z})$ 是一些复数，它们不依赖于 n。我们定义

$$\mathcal{S}^{(r)}_{klj} = \sum_{l'<l} \sum_{\bar{i}} a^{\bar{i}}_{l'}(k, l, j, r, \bar{z}) \mathcal{C}^{\bar{i},m}_{l'}(\bar{V}).$$

我们用 λ（分别用 $\bar{\mu}$）表示分拆序列（$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$）（分别表示（$\mu_1, \ldots, \mu_m$））。定义 Deligne 范畴中的 Bethe 代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 为 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_t}(\bar{V})$ 的含幺子代数，其由 $\mathcal{S}^{(r)}_{klj}$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $1 \leqslant r \leqslant m$ 生成。

固定 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n \geqslant l^{(a)}_{\lambda} + l^{(a)}_{\mu}$, ..., m，其中 $l^{(a)}_{\lambda}$（分别地， $l^{(a)}_{\mu}$）是分拆 $\lambda^{(a)}$（分别地， $\mu^{(a)}$）中非零元素的个数。对于每个 $a = 1, \ldots, m$，令 $\nu^{(a)}$ 为一个 $\mathfrak{gl}_n$-权，它根据公式 (2.1) 由 $\lambda^{(a)}$ 和 $\mu^{(a)}$定义。记 $\bar{\nu} = (\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(m)})$。回顾同态 $G^{\bar{V}}_n$: $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_n}(\bar{V}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{R}_n}(V(\bar{\nu}))$。代数$\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ 的构造方式使得 $G^{\bar{V}}_n(\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda}, \bar{\mu})) = \mathcal{B}_n(\bar{\nu})$。

回忆一下 $N = \sum_{a=1}^{m} (|\lambda^{(a)}| + |\mu^{(a)}|)$。下面的引理可由引理 2.1 直接推出。

引理 4.1。对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant N}$，我们有

$$\underline{\mathcal{B}}_n(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \cong \mathcal{B}_n(\bar{\nu}).$$

4.2。记 $I_1 = \{a \mid \mu^{(a)} = \emptyset\}$ 和 $I_2 = \{a \mid \lambda^{(a)} = \emptyset\}$。在本文余下部分，假设

$$\{1, \ldots, m\} = I_1 \sqcup I_2. \tag{4.2}$$

那么，正如第 2.3 节所述，幂等元 $e_{(\lambda^{(a)},\, \mu^{(a)})}$ 不依赖于 t，并且很容易定义代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 的一个类似物 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda, \bar{\mu})$，其中复数 t 由变量 w代替。我们按照构造 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 的步骤来构造代数 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda, \bar{\mu})$，但作如下修改：

- 构造 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$时涉及的任意向量空间 M 均替换为向量空间 $M \otimes \mathbb{C}[w]$。
- 将规则“消去一个环 $=$ 乘以 t”替换为“消去一个环 $=$ 乘以 w”。

根据构造， $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})$ 是一个有限生成的自由 $C[w]$-模，并且对所有 $t\in\mathbb{C}$，我们有

$$\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})/(w-t)\cong \underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu}). \tag{4.3}$$

注 4.2. 如果不满足条件（4.2），那么 $e_{(\lambda^{(a)},\mu^{(a)})}$ 对 t 的依赖不是多项式的（见 [2]中的例 4.3.1），并且在 $T^{|\lambda^{(a)}|,|\mu^{(a)}|}\otimes\mathbb{C}[w]$ 中没有这些幂等元的类似物。

引理 4.3. 令 π_n 表示投影 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})\to\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})/(w-t)$。假设对于某个 $p\in\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})$ 和 $N_0\in\mathbb{Z}_{>0}$，有 $\pi_n(p)=0, n\in\mathbb{Z}_{\geqslant N_0}$。那么 $p=0$。

证明. 令 $f_1,\dots,f_k$ 为 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})$ 作为 $\mathbb{C}[w]$-模的一组基。则 $p=p_1(w)f_1+p_2(w)f_2+\dots+p_k(w)f_k$ 对某个 $p_1(w)\dots,p_k(w)\in\mathbb{C}[w]$ 成立。

取 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant N_0}$。由于 $\pi_n(p)=0$，我们有 $p=(w-n)q$ 对某个 $q=q_1(w)f_1+\dots+q_k(w)f_k, q_1(w)\dots,q_k(w)\in\mathbb{C}[w]$ 成立。由于 $f_1,\dots,f_k$ 线性无关，我们有 $p_i(w)=(w-n)q_i(w)$，$i=1,\dots,k$，因此 $p_i(n)=0, i=1,\dots,k$。

由此可知，多项式 $p_1(w)\dots,p_k(w)$ 在 $\mathbb{C}$ 的任意无限子集中的任意一点处取值时都为零。因此，$p_i(w)=0, i=1,\dots,k$，这意味着 $p=0$。□

命题 4.4. 对所有 $t\in\mathbb{C}$，代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda,\bar{\mu})$ 都是交换的。

证明。对于代数 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})$ 中任意两个元素 a_1, a_2，考虑它们的交换子 $p=[a_1,a_2]$。由引理 4.1 可知，对于任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant N}$，代数 $\underline{\mathcal{B}}_n(\lambda,\bar{\mu})$ 都是交换的。因此，$\pi_n(p)=0, n\in\mathbb{Z}_{\geqslant N}$。由引理 4.3，这意味着 $p=0$，所以 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})$ 是交换的，而命题可由公式 (4.3) 得出。□

4.3. 回顾第 3.2 节中引入的 Bethe 代数 $\mathcal{B}_n$ 的生成元 $B_{ij}^{(a)}$。将 $B_{ij}^{(a)}$ 在投影 $\mathcal{B}_n\to\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$ 下的像记为 $B_{ij}^{(a)}(\bar{\nu})$。现在定义代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 的元素 $\underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$，它们将是生成元 $B_{ij}^{(a)}(\bar{\nu})$ 的类似物。

引理 3.1 表明，对于每个 $r\in\mathbb{Z}_{>0}$、$s=1$、…、r、$j=1$、…、s、$a=1$、…、m，存在关于变量 $x^{(a')}{}_{r's'j'}$、$r'=1$、…、r、$s'=1$、…、r'、$j=1$、…、s'、$a'=1$、…、m 的多项式 $P_{rsj}^{(a)}$，使得 $P_{rsj}^{(a)}$ 不依赖于 n，并且对于每个 $n\geqslant \max_b(l_\lambda^{(b)}+l_\mu^{(b)})$ 和 $r\leqslant n$，有

$$P_{rsj}^{(a)}\big(x_{r's'j'}^{(a')}=S_{r's'j'}^{(a')}\big)=\tilde{B}_{rsj}^{(a)}.$$

定义

$$\underline{\tilde{B}}_{rsj}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu}):=P_{rsj}^{(a)}(x_{r's'j'}^{(a')}=\mathcal{S}_{r's'j'}^{(a')}),\quad \underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu}):=\underline{\tilde{B}}_{i,i,j}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$$

显然，元素 $\underline{\tilde{B}}_{rsj}^{a}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 生成代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu})$。

引理4.5。元素 $\underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 生成代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu})$。

证明。对于每个 $r\in\mathbb{Z}_{>0}, s=1,\dots,r$，定义有理函数 $\underline{B}_{rs}(u)$ 如下

$$\underline{\tilde{B}}_{rs}(u)=\sum_{a=1}^{m}\sum_{j=1}^{s}\frac{\underline{\tilde{B}}_{rsj}^{(a)}}{(u-z_a)^j}. \tag{4.4}$$

由公式 (3.5)、引理 4.1 和引理 4.3 可得

$$\underline{\tilde{B}}_{rs}(u)=\underline{\tilde{B}}_{ss}(u)\binom{t-s}{r-s}, \tag{4.5}$$

这就证明了该引理。 □

5. Fuchsian differential operators with no monodromy

5.1. 设 $\mathcal{A}$ 为一个交换代数。考虑洛朗级数代数 $\mathcal{A}((x))$，其中的系数取自 $\mathcal{A}$，变量为 x。记 ∂_x 为对 x 求导。

固定 n 个整数 $m_1 < \cdots < m_n$。考虑微分算子

$$D = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=-i}^{\infty} b_{ij} x^j \partial_x^{n-i} \tag{5.1}$$

其中含有某个 $b_{ij} \in \mathcal{A}$。我们将给出微分方程 $Df = 0$ 具有 n 个解 f_1、……、$f_n \in \mathcal{A}((x))$且形式如下的充要条件

$$f_i = x^{m_i} + a_1^{(i)} x^{m_i+1} + a_2^{(i)} x^{m_i+2} + \dots. \tag{5.2}$$

该条件将以关于D的系数 b_{ij} 的某些多项式关系的形式给出。

对于每个 $k = 0$、1、2、……和 $\alpha \in \mathbb{C}$，定义

$$r_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,-i+k} \alpha^{\underline{n-i}},$$

其中 $\alpha^{\underline{j}} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)$，$j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。

注意到 $Df_i \in \mathcal{A}((x))$ 中 x 的最低次数项的系数等于 $r_0(m_i)$。因此，我们得到一个必要条件：D 存在形如 (5.2) 的解：

$$r_0(m_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.3}$$

对于每个 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，考虑一个矩阵

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} r_1(m_i) & r_2(m_i) & \cdots & \cdots & r_{m_j-m_i}(m_i) \\ r_0(m_i+1) & r_1(m_i+1) & \ddots & & \vdots \\ 0 & r_0(m_i+2) & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_2(m_j-2) \\ 0 & \cdots & 0 & r_0(m_j-1) & r_1(m_j-1) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

通过划去包含元素 $r_0(m_l), i < l < j$ 的 A_{ij} 的列和行，定义一个矩阵 $\bar{A}_{ij}$。

命题 5.1. 微分方程 $Df = 0$ 有解 $f_1, \dots, f_n$，其形式为 (5.2)，当且仅当 (5.3) 成立，并且

$$\det \bar{A}_{ij} = 0, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{5.5}$$

证明。假设我们有形如 (5.2) 的解 $f_1, \dots, f_n$。那么，如上所述，条件 (5.3) 成立。我们可以假设，对于 f_i 的系数 $a_j^{(i)}$（见公式 (5.2)），对所有 $k > i$ 都有 $a_{m_k-m_i}^{(i)} = 0$。

令 th 等式 $Df_i = 0$ 两边 x^{m_i+l-n} 的系数，我们有 e

$$\sum_{j=0}^{l-1} a_j^{(i)} r_{l-j}(m_i + j) + a_l^{(i)} r_0(m_i + l) = 0. \tag{5.6}$$

¯对于每个 $l = 1$、2、.. .、 $m_i - m_j$ 满足 $m_i + l \neq m_k$、 $k > i$ 的情形，记 P_{il} 为矩阵 A_{ij} 的主¯子式，其最后一行为 $\{0, \dots, 0, r_0(m_i+l)\ r_1(m_i+l)\}$。利用沿最后一列对 P_{il} 的展开¯以及关于 l 的归纳法，可以验证 (5.6) 蕴含

$$a_l^{(i)} = (-1)^l \bar{P}_{il} \left(\prod_{k=1}^{l}{}' r_0(m_i + k) \right)^{-1}, \tag{5.7}$$

$_l$其中$\prod'$表示对满足 $m_i + k \neq m_j$（对所有 $j > i$均成立）的 $k = 1$、.....、 l 取乘积。注意$_{k=1}$，由于条件（5.3），对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，我们都有 $r_0(\alpha) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha - m_i)$；特别是$_l$ $\prod' r_0(m_i + k) \in \mathbb{C}^\times$，因此公式（5.7）的右端有定义。$_{k=1}$

现在，取 l，使得对于公式 (5.6) 中的某个 $k > i$，有 $m_i + l = m_k$。由于条件 (5.3)，我们有 $r_0(m_i + l) = 0$，于是对于这样的 l，公式 (5.6) 写成

$$\sum_{j=0}^{l-1} a_j^{(i)} r_{l-j}(m_i + j) = 0. \tag{5.8}$$

$_{l-1}$但是由于 (5.7)，(5.8) 左端乘以 $\prod' r_0(m_i + j)$ 后，就是沿最后一列展开 $\det A_{ik}$ 所得到的展开式$_{j=1}$¯。这就证明了该命题的“仅当”部分。

反之，假设条件 (5.3) 和 (5.5) 成立。固定 $i = 1, \dots, n$。那么对于每个满足对所有 $k > i$ 都有 $m_i + l \neq m_k$ 的 $l < m_n - m_i$，我们按照公式 (5.7) 定义 $a_l^{(i)}$。如果对于某个 $k > i$ 有 $m_i + l = m_k$，则令 $a_l^{(i)} = 0$。如果 $j > n$，则定义 $m_j := m_n + j - n$。这样，我们便可以类似于 $l < m_n - m_i$ 的情形，为 $l > m_n - m_i$ 定义 $a_l^{(i)}$。

通过以这种方式定义 $a_l^{(i)}$，关系式 (5.6) 对每个 $l = 1$、2、.....均成立（条件 (5.5) 确保当 $m_i + l = m_k$ 对某个 k 时，(5.6) 成立）。因此，由公式 (5.2) 定义的级数 f_i 解微分方程 $Df = 0$。这证明了该命题的“如果”部分。□

5.2.令 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}(u)$为 $\mathcal{A}$-值有理函数的代数。令 $\mathcal{D}\big(\mathcal{A}((x))\big)$和 $\mathcal{D}\big(\mathcal{A}(u)\big)$ 分别为系数在 $\mathcal{A}$ $((x))$ 和 $\mathcal{A}(u)$ 中的微分算子代数。对于任意 $z \in \mathbb{C}$，定义一个映射

$$\begin{aligned} L_z : \quad & \mathcal{D}\big(\mathcal{A}(u)\big) \to \mathcal{D}\big(\mathcal{A}((x))\big), \\ & \sum_{i=1}^{n} b_i(u) \partial_u^{n-i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} L_z\big[b_i(u)\big](x) \partial_x^{n-i}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

这里, $L_z\big[b_i(u)\big](x)$ 是 $b_i(u)$ 在 z 处的洛朗级数，其中我们取 $u - z = x$.

我们还需要一个映射 $L_\infty\colon\ \mathcal{D}\big(\mathcal{A}(u)\big)\to\mathcal{D}\big(\mathcal{A}((x))\big)$ 定义为

$$L_\infty:\ \sum_{i=1}^{n} b_i(u)\partial_u^{n-i}\mapsto\left(-\frac{1}{x^2}\right)^n\sum_{i=1}^{n}L_0\big[b_i(u^{-1})\big](x)(-x^2\partial_x)^{n-i}.$$

现在，让我们取 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_n$，其中 $\mathcal{A}_n$ 是具有自由生成元$y_{ij}^{(a)}$、 $i=1$、……、n、 $j=1$、……、i、 $a=1$、……、m的交换代数。设 $\bar z=(z_1$、……、$z_m)$是一列两两不同的复数，并设 $\bar\nu=(\nu^{(1)}$、$\nu^{(2)}$、……、$\nu^{(m)})$是一列占优整$\mathfrak{gl}_n$-权。考虑由下式定义的微分算子 $D^{\mathbb{C}[y]}\in\mathcal{D}\big(\mathcal{A}_n(u)\big)$

$$D^{\mathbb{C}[y]}=\partial_u^n+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{a=1}^{m}\frac{y_{ij}^{(a)}}{(u-z_a)^j}\partial_u^{n-i}. \tag{5.10}$$

回顾一下我们为形如（5.1）的微分算子 $D\in\mathcal{D}\big(\mathcal{A}((x))\big)$ 所构造的多项式 $r_k(\alpha)$ 和矩阵 A_{ij}。这些构造取决于数$m_1<m_2<\cdots<m_n$。注意，对于每个 $a=1$，……，m，微分算子 $L_{z_a}\big(D^{\mathbb{C}[y]}\big)$都具有形式（5.1）。取 $D=L_{z_a}\big(D^{\mathbb{C}[y]}\big)$ 和 $m_{n+1-i}=n+\nu_i^{(a)}-i$，我们分别将相应的多项式 $r_k(\alpha)$ 和矩阵 $\bar A_{ij}$ 记作 $r_k^{(a)}(\alpha)$ 和 $\bar A_{ij}^{(a)}$。

微分算子 $L_\infty\big(D^{\mathbb{C}[y]}\big)$ 并非 (5.1) 的形式，但存在元素 $b_{ij}^{(\infty)}\in\mathcal{A}_n$，使得

$$L_\infty\big(D^{\mathbb{C}[y]}\big)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=-2i+1}^{\infty}b_{ij}^{(\infty)}x^j\partial_x^{n-i}.$$

与 (5.1) 的区别在于，关于 j 的求和从 $-2i+1$ 开始，而不是从 $-i$开始。令 $J_n(\bar\nu)$ 为 $\mathcal{A}_n$ 中由以下元素生成的理想

$$r_0^{(a)}(n+\nu_i^{(a)}-i),\quad a=1,\dots,m,\ i=1,\dots,n, \tag{5.11}$$

$$\det\bar A_{ij}^{(a)},\quad a=1,\dots,m, \tag{5.12}$$

and

$$b_{ij}^{(\infty)},\quad j=-2i+1,\,-2i+2,\dots,-i-1. \tag{5.13}$$

记作 $\mathcal{F}_n=\mathcal{A}/J_n(\bar\nu)$。注意，根据命题 5.1，概形 $\operatorname{Spec}\mathcal{F}_n$ 的闭点集就是在 z_1、z_2、……、z_m 和 ∞ 处具有正则奇点、且在 z_a 处的指数为 $n+\nu_i^{(a)}-i$、 $i=1$、……、n 的无单值化 Fuchs 型微分算子集。代数 $\mathcal{F}_n$ 与上文引入的 Bethe 代数的投影 $\mathcal{B}_n(\bar\nu)$ 密切相关。具体而言，有以下定理。

定理 5.2. 同态的核

$$\begin{aligned}\varphi:\quad &\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}_n(\bar\nu)\\ &y_{ij}^{(a)}\mapsto B_{ij}^{(a)}(\bar\nu)\end{aligned}$$

是理想 $J_n(\nu)$。

这个定理是量子Gaudin模型 Bethe 拟设方法研究中的主要结果之一。它在 [16]中得到证明。

在文献 [14], 中可以找到与定理 5.2 类似的结果，其中证明了 $\mathcal{B}_n(\bar\nu)$ 同构于 Schubert 胞腔交集上的函数代数。

该交集中的点对应于 Spec $\mathcal{F}_n$ 中 Fuchs 型微分算子的核。将 $\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$ 视为微分算子上的函数代数，更适合我们的目标，因为目前尚不清楚如何将 Schubert 胞腔的交集推广到任意复 n。

6. The interpolation of the no-monodromy conditions

回顾一下，λ 和 $\bar{\mu}$ 是满足条件（4.2）的分拆序列。本节中，我们将证明关于代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\lambda, \bar{\mu})$ 的定理 5.2 的一个类似结果。

现在，对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们将 $\mathcal{A}_n$ 看作无穷生成的自由交换代数 $\mathcal{A}_\infty$ 的子代数，该代数的自由生成元为 $y_{ij}^{(a)}$、$1 \leqslant a \leqslant m$、$i \geqslant 1$、$1 \leqslant j \leqslant i$。回顾代数 $\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ 的生成元 $\underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$、$1 \leqslant a \leqslant m$、$i \geqslant 1$、$1 \leqslant j \leqslant i$。我们的目标是求出同态的核

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_t : \quad & \mathcal{A}_\infty \to \underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \\ & y_{ij}^{(a)} \mapsto \underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}). \end{aligned}$$

回想一下，$l_\lambda^{(a)}$（分别地，$l_\mu^{(a)}$）是分拆 $\lambda^{(a)}$（分别地，$\mu^{(a)}$）中非零元素的数量。记 $l^{(a)} = l_\lambda^{(a)} + l_\mu^{(a)}$。

令 n 为一个整数，使得 $n \geqslant \max_a l^{(a)}$。对于每个 $a = 1, \ldots, m$，令 $\nu^{(a)} = (\nu_1^{(a)}, \ldots, \nu_n^{(a)})$ 为一个由 $\lambda^{(a)}$ 和 $\mu^{(a)}$ 根据公式 (2.1) 定义的权重。

为了求映射 $\underline{\varphi}_t$ 的核，我们将首先构造理想 $J_n(\bar{\nu})$ 的一个生成集，使其“在大 n 时稳定”。

在本节中，为方便起见，我们有时会省略上标 (a)，假定它等于某个固定值，比如 $a = 1$，例如，$l \coloneqq l^{(1)}$, $r_k(\alpha) \coloneqq r_k^{(1)}(\alpha)$, $A_{ij} \coloneqq A_{ij}^{(1)}$，等等。

回顾一下，

$$r_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,-i+k} \alpha^{\underline{n-i}},$$

其中 $\alpha^{\underline{j}} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j+1)$ 以及 $b_{i,-i+k} \in \mathcal{A}_n$ 是展开式中的系数

$$\sum_{a=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \frac{y_{ij}^{(a)}}{(u - z_a)^j} = b_{i,-i}(u - z_1)^{-i} + b_{i,-i+1}(u - z_1)^{-i+1} + b_{i,-i+2}(u - z_1)^{-i+2} + \ldots.$$

对每个 $i = 0, \ldots, n$, $j \geqslant -i$，定义 $b_{ij} \in \mathcal{A}_n$ 为

$$r_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{b}_{i,-i+k} (\alpha - l_\mu)^{\underline{n-i}},$$

并考虑由以下形式给出的多项式 $\tilde{r}_k(\alpha)$

$$\tilde{r}_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{l+k} \tilde{b}_{i,-i+k} (\alpha - n + l_\lambda + k)^{\underline{l+k-i}},$$

其中我们假设，如果 $i > n$，则 $b_{ij} = 0$。

注意到

$$(\alpha-l_\mu)^{\underline{n-l-k}}\tilde{r}_k(\alpha)=r_k(\alpha)-\sum_{i=l+k+1}^{n}b_{i,-i+k}(\alpha-l_\mu)^{\underline{n-i}},\qquad \text{if}\quad k+l\leqslant n, \tag{6.1}$$

$$\tilde{r}_k(\alpha)=(\alpha-n+l_\lambda+k)^{\underline{l+k-n}}r_k(\alpha),\qquad \text{if}\quad k+l\geqslant n. \tag{6.2}$$

对于每个 $1\leqslant i<j\leqslant n$，令 M_{ij} 为由 A_{ij} 构造的矩阵：将每个条目 $r_s(\alpha)$ 替换为 $(\alpha-n+l_\lambda+k-d)^{\underline{k-d-s}}\tilde{r}_s(\alpha)$，其中 $k=m_j-m_i$，且 $d+1$ 是包含该条目的行的编号。回顾一下，矩阵 A_{ij} 是通过从 A_{ij} 中删除某些行和列而构造的。令 M_{ij} 为以类似方式由 M_{ij} 构造的矩阵。

我们将需要以下两个引理。

Lemma 6.1. 假设 $l_\lambda\geqslant 1$。那么对于每个 $j=1,\dots,l_\lambda$, $j<i\leqslant n$，我们有

$$r_0(m_{n+1-j})=c_1\tilde{r}_0(m_{n+1-j})+M_1, \tag{6.3}$$

$$\det\bar{A}_{n+1-i,n+1-j}=c_2\det\bar{M}_{n+1-i,n+1-j}+M_2, \tag{6.4}$$

其中 c_1, c_2 是非零复数，而 M_1, M_2 属于 $\mathcal{A}_n$ 中由 $b_{q,\ -q+s}$, $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $q>l+s$ 生成的理想。

证明。由于 $l_\lambda\geqslant 1$，根据条件（4.2），我们有 $l_\mu=0$ 和 $l=l_\lambda$。由于 $l\leqslant n$，可以对 $k=0$ 使用公式（6.1），从而得到

$$r_0(m_{n+1-j})=(m_{n+1-j})^{\underline{n-l}}\tilde{r}_0(m_{n+1-j})+M_1,$$

其中 M_1 属于 $\mathcal{A}_n$ 中由 $b_{q,\ -q+s}$, $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $q>l+s$生成的理想。对于 $j\leqslant l$，我们有 $m_{n+1-j}=\lambda_j+n-j>n-l$，因此 $(m_{n+1-j})^{\underline{n-l}}\neq 0$，公式（6.3）得证。

为证明公式（6.4），令 $k=m_{n+1-j}-m_{n+1-i}$并固定一些 $d=0,\dots,k-1$。首先，假设 $k-d+l\leqslant n$。利用（6.1）可知，除去与元素 $b_{q,\ -q+s}$, $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $q>l+s$的线性组合相加的项外，$A_{n+1-i,\ n+1-j}$的第 $(d+1)$ 行等于 $M_{n+1-i,\ n+1-j}$ 的第 $(d+1)$ 行乘以 $(m_{n+1-i}+d)^{\underline{n-l-k+d}}$。对于 $j\leqslant l$，我们有$m_{n+1-i}=m_{n+1-j}-k=\lambda_j+n-j-k>n-l-k$。因此，$(m_{n+1-i}+d)^{\underline{n-l-k+d}}\neq 0$。

如果 $k-d+l>n$，那么利用（6.2）可以看出，除去与元素$b_{q,\ -q+s}$、 $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$、$q>l+s$ 的线性组合相加外，$M_{n+1-i,\ n+1-j}$ 的第（$d+1$）行就是 $A_{n+1-i,\ n+1-j}$ 的第（$d+1$）行乘以（$m_{n+1-i}-n+l+k$）$^{\underline{k-d+l-n}}$。由于 $l_\mu=0$，我们有 $m_{n+1-i}=\lambda_{n+1-i}+n-i\geqslant 0$，且（$m_{n+1-i}-n+l+k$）$^{\underline{k-d+l-n}}\neq 0$。因此，公式（6.4）得证。□

引理6.2。假设 $l_\mu\geqslant 1$。那么对于每个 $i=1$、……、l_μ、 $i<j\leqslant n$，我们有

$$r_0(m_i)=c_1\tilde{r}_0(m_i)+M_1, \tag{6.5}$$

$$\det\bar{A}_{i,j}=c_2\det\bar{M}_{i,j}+M_2, \tag{6.6}$$

其中 c_1, c_2 是非零复数，而 M_1, M_2 属于 $\mathcal{A}_n$ 中由 $b_{q,\ -q+s}$, $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $q>l+s$ 生成的理想。

证明。由于 $l_\mu\geqslant 1$，根据条件（4.2），我们有 $l_\lambda=0$ 和 $l=l_\mu$。由于 $l\leqslant n$，可以对 $k=0$ 使用公式（6.1），从而得到

$$r_0(m_i)=(m_i-l)^{\underline{n-l}}\tilde{r}_0(m_i)+M_1,$$

˜其中 M_1 属于 $\mathcal{A}_n$ 中由$b_{q,-q+s}$、 $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$、 $q>l+s$生成的理想。对于 $i\leqslant l$，我们有 $m_i-l=-\mu_i+i-1-l<0$，因此（m_i-l）$\underline{n-l}\neq 0$，公式 (6.5) 得证。

为证明公式 (6.6)，令 $k=m_j-m_i$并固定一些 $d=0$、.....、 $k-1$。首先，假设 $k-d+l\leqslant n$。利用 (6.1) 可以看出，除去将元素 $b_{q,\ -q+s}$、 $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$、 $q>l+s$与线性组合˜相加之外，$A_{i,\ j}$ 的第 $(d+1)$ 行就是 $M_{i,\ j}$的第 $(d+1)$ 行乘以 $(m_i+d-l)^{\underline{n-l-k+d}}$。注意，如果在得到 M_{ij} 时， M_{ij}的第 $(d+1)$ 行未被删除¯，那么 $m_i+d<m_l=-\mu_l+l-1<l$。因此，$m_i+d-l<0$，所以 $(m_i+d-l)^{\underline{n-l-k+d}}\neq 0$。

若 $k-d+l>n$，则利用 (6.2) 可知，除去与元素 $b_{q,-q+s}$, $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $q>l+s$ 的线性˜组合求和后，$M_{i,j}$ 的第 $(d+1)$ 行等于 $A_{i,j}$ 的第 $(d+1)$ 行乘以 $(m_i-n+k)^{\underline{k-d+l-n}}$。由于 $l_\lambda=0$，我们有$m_i-n+k=m_j-n=-\mu_j+j-1-n<0$，且 $(m_i-n+k)^{\underline{k-d+l-n}}\neq 0$。因此，公式 (6.6) 得证。□

¯元素 $\tilde{r}_k(\alpha)$ 和 M_{ij} 是利用微分算子 $D^{\mathbb{C}[y]}$ （见 (5.10)）的系数在 z_1 处的洛朗级数构造的。因此，我们现在分别将它们记为 $\tilde{r}_k^{(1)}(\alpha)$ 和$\bar{M}_{ij}^{(1)}$。在 z_2、.....、 z_m 处重复这一洛朗级数构造，可得到类似的元素 $\tilde{r}_k^{(a)}(\alpha)$ 和 $\bar{M}_{ij}^{(a)}$, $a=2,\dots,m$。

将 $a_{ik}^{(\infty)}\in\mathcal{A}_n$、 $i=1$、. . .、 n、 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 定义为有理函数 $\sum_{a=1}^m\sum_{j=1}^i \frac{y_{ij}^{(a)}}{u-z_a}()^j$ 在无穷远处的泰勒级数的系数，即——

$$\sum_{a=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\frac{y_{ij}^{(a)}x^j}{(1-xz_a)^j}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^{(\infty)}x^k. \tag{6.7}$$

回顾一下 $I_1=\{a\,|\,\mu^{(a)}=\emptyset\}$ 和 $I_2=\{a\,|\,\lambda^{(a)}=\emptyset\}$。

命题 6.3. 理想 $J_n(\bar{\nu})$ 由以下元素生成:

$$\tilde{b}_{i,-i+k}^{(a)},\quad 0\leqslant k<n-l^{(a)},\quad k+l^{(a)}<i\leqslant n,\quad 1\leqslant a\leqslant m, \tag{6.8}$$

$$\tilde{r}_0^{(a)}(m_{n+1-j}^{(a)}),\quad \det\bar{M}_{n+1-i,n+1-j}^{(a)},\quad 1\leqslant j\leqslant l^{(a)},\quad j<i\leqslant n,\quad a\in I_1, \tag{6.9}$$

$$\tilde{r}_0^{(a)}(m_i^{(a)}),\quad \det\bar{M}_{i,j}^{(a)},\quad 1\leqslant i\leqslant l^{(a)},\quad i<j\leqslant n,\quad a\in I_2, \tag{6.10}$$

$$a_{ij}^{(\infty)},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant i-1. \tag{6.11}$$

证明。对于每个 $i=1$、. . .、 $n-l$ 和 $k\in\mathbb{Z}\geqslant 0$，我们有

$$r_k(m_{l_\mu+i})=r_k(l_\mu+i-1)=\sum_{j=n-i+1}^{n}\tilde{b}_{j,-j+k}(i-1)^{\underline{n-j}}. \tag{6.12}$$

利用这一点，可以验证

$$\tilde{b}_{n-i+1,-n+i-1+k}=\frac{1}{(i-1)!}(T^{i-1}r_k)(l_\mu+i-1), \tag{6.13}$$

其中 $Tf(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha-1)$ 对每个函数 $f(\alpha)$ 都成立。

˜公式（6.12）和（6.13）表明，对于 $k=0$ ，元素 $b_{i,\ -i}$， $l<i\leqslant n$ 是 $r_0(m_i)$、$l_\mu<i\leqslant n-l_\lambda$ 的线性组合，反过来也成立。

注意，对于 $l_\mu < i < j \leqslant n - l_\lambda$， A_{ij} 是一个 1×1 矩阵，其元素为 $r_{j-i}(m_i)$。因此，对于每个 $k = 1, \ldots, n - l - 1$，公式（6.12）和（6.13）表明，$b_{i,\ -i+k}$， $k + l < i \leqslant n$ 是 $A_{i,\ i+k}$， $l_\mu < i \leqslant n - l_\lambda - k$ 的线性组合，反过来也成立。

此外，可以验证

$$b^{(\infty)}_{i,-2i+j} = \sum_{l=0}^{\min(i,j-1)} c_l a^{(\infty)}_{i-l,j-l}$$

对于满足 $c_0 = 1$ 的某些复数 c_l，这意味着 $b^{(\infty)}_{ij}$、 $i = 1$、.....、 n、$j = -2i + 1$、.....、 $-i - 1$ 是 $a^{(\infty)}_{kl}$、 $k = 1$、.....、 n、 $l = 1$、.....、 $k - 1$ 的线性组合，反之亦然。

现在，该命题由引理 6.1 和 6.2 得出。 □

注 6.4. 注意，如果 $a \in I_1$ 和 $j > 0$，那么 $\tilde{b}^{(a)}_{i\ ,-j} = b^{(a)}_{i\ ,-j} = y^{(a)}_{ij}$。特别地，元素(6.8) 属于 $J_n(\bar{\nu})$ 这一事实意味着，微分算子$\mathrm{cdet}\big(\partial_u - \mathcal{L}(u)\big)$（见(3.6)）的系数在 $z^{(a)}$ 处的极点阶数不高于 $l^{(a)}$。

将命题 6.3 中 $J_n(\nu)$ 的生成集记为 S_n。令 $pr_{\infty,n}$： $\mathcal{A}_\infty \to \mathcal{A}_n$ 为投影，它将 $y^{(a)}_{ij}$， $i > n$ 映为零。对于每个 $t \in \mathbb{C}$，将投影 $\pi_t\ \mathcal{A}_\infty[w] \to \mathcal{A}_\infty[w]/(w - t) \cong \mathcal{A}_\infty$ 记为 π_t。集合 S_n 的构造方式保证：对于每个 $a \in S_n$，存在唯一的元素 $a_{[w]} \in \mathcal{A}_\infty[w]$，使得 $pr_{\infty,n} \circ \pi_n(a_{[w]}) = a$；并且对于所有 $n' \geqslant n$，都有 $pr_{\infty,n'} \circ \pi_{n'}(a_{[w]}) \in S_{n'}$。记 $K = \max_a l_a$, $S_{n,[w]} = \{a_{[w]} | a \in S_n\}$,$S_{[w]} = \cup_{n=K}^{\infty} S_{n,[w]}$, 并令 $J_{[w]}$ 为 $\mathcal{A}_\infty[w]$ 中由 $S_{[w]}$ 生成的理想。在下文的定理 6.10 中，我们将证明，对于除有限多个 t 之外的所有 t，理想 $\underline{J}_t = \pi_t(J_{[w]})$ 是映射 $\underline{\varphi}_t$ 的核。

注记 6.5. 注意，如果没有条件（4.2），集合 S_n 还应包含元素 $\bar{M}^{(a)}_{i\ ,\ n+1-j}$，其中 a 满足 $l^{(a)}_\lambda > 0$ 以及 $l^{(a)}_\mu > 0$、 $1 \leqslant i \leqslant l^{(a)}_\mu$、 $1 \leqslant j \leqslant l^{(a)}_\lambda$。对于这样的元素，是否存在插值 $(\bar{M}^{(a)}_{i\ ,\ n+1-j})_{[w]} \in \mathcal{A}_\infty[w]$ 尚不清楚。

对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，令 $J_{>n} \subset \mathcal{A}_\infty$ 为由 y^a_{ij}、 $i > n$ 生成的理想。下面的引理是证明定理 6.10 的主要技术工具。

引理 6.6。（1）我们有 $\mathcal{A}_\infty[w] = \mathcal{A}_{Km}[w] + J_{[w]}$。 （2）
对于所有 $n \geqslant Km$，都有 $J_{>n} \subset \underline{J}_n$。

证明。固定 $i > 1$。注意，对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，元素 $a^{(\infty)}_{ik}$ 不依赖于 n，因此 $a^{(\infty)}_{ik} = (a^{(\infty)}_{ik})_{[w]} \in S_{[w]}$。将向量 $\boldsymbol{a}^{(\infty)}_i$ 记为

$$\left(a^{(\infty)}_{i,1}, \ldots, a^{(\infty)}_{i,i-1}\right)^T.$$

将向量 $\boldsymbol{y}_i$ 记为

$$\left(y^{(1)}_{i,1}, y^{(2)}_{i,1}, \ldots, y^{(m)}_{i,1}, y^{(1)}_{i,2}, \ldots, y^{(m)}_{i,2}, \ldots, y^{(1)}_{i,i-1}, \ldots, y^{(m)}_{i,i-1}\right)^T.$$

利用（6.7）可以验证

$$\boldsymbol{a}^{(\infty)}_i = L\boldsymbol{y}_i,$$

其中， L 是一个如下定义的（$i-1$） $\times m$（$i-1$）矩阵：对于任意 $j=0$，……，$i-2$，第 k 行中从第（$jm+1$）个到第 $j+1m$ 个的元素为

$$z_1^{k-1-j}\binom{k-1}{j},\ z_2^{k-1-j}\binom{k-1}{j},\dots,z_m^{k-1-j}\binom{k-1}{j}.$$

下面给出一个关于 $m=2$、$i=5$ 的例子：

$$L=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\ z_1&z_2&1&1&0&0&0&0\\ z_1^2&z_2^2&2z_1&2z_2&1&1&0&0\\ z_1^3&z_2^3&3z_1^2&3z_2^2&3z_1&3z_2&1&1\end{pmatrix}.$$

设 L_1 和 L_2 是矩阵 L 的分块，其中 L_1 是方阵，且 $L=(L_1|L_2)$。设 $\boldsymbol{y}_i'$ 和 $\boldsymbol{y}_i''$ 是向量，其中 $\boldsymbol{y}_i'$ 有 $i-1$ 个元素，且 $\boldsymbol{y}_i^T=(\boldsymbol{y}_i'^T|\boldsymbol{y}_i''^T)$。那么

$$L_1\boldsymbol{y}_i'=\boldsymbol{a}_i^{(\infty)}-L_2\boldsymbol{y}_i''.$$

我们将证明

（1）矩阵 L_1 可逆；（2）若 $i>Km$，则 $\boldsymbol{y}_i''$ 的任意元素都可以表示为 $J_{[w]}$ 中一个元素与向量 $\boldsymbol{y}_1$、……、$\boldsymbol{y}_{i-1}$ 的元素的线性组合；（3）若 $n\geqslant Km$ 且 $i>n$，则 $\boldsymbol{y}_i''$ 的任意元素都可以表示为 $\underline{J}_n$ 中一个元素与向量 $\boldsymbol{y}_{n+1}$、$\boldsymbol{y}_{n+2}$、……、$\boldsymbol{y}_{i-1}$ 的元素的线性组合。

然后，对 i 应用归纳法即可得出该引理。

若 $i-1>m$，则引入额外的参数 $z_{m+1},\dots,z_{i-1}$。令 $V_{i-1}(z_1,\dots,z_{i-1})$ 为范德蒙德行列式 $\det(z_a^{b-1})_{1\leqslant a,\ b\leqslant i-1}$。可以验证

$$\det L_1=\prod_{l,a}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z_{lm+a}^l}\Big|_{z_{lm+a}=z_a}V_{i-1}(z_1,\dots,z_{i-1}),\tag{6.14}$$

其中乘积取遍满足 $1\leqslant a\leqslant m$, $l\geqslant 1$ 且 $lm+a\leqslant i-1$ 的 l, a。

利用 $V_{i-1}(z_1,\dots,z_{i-1})=\prod_{1\leqslant j<j'\leqslant i-1}(z_{j'}-z_j)$，可知 (6.14) 右端具有 $(-1)^\varepsilon\prod_{1\leqslant j<j'\leqslant m}(z_{j'}-z_j)^{d_{j',\,j}}$ 的形式，其中 $d_{j',\,j}>0$，且 $\varepsilon\in\{0,1\}$。由于对 $a\neq b$ 有 $z_a\neq z_b$，我们有 $\det L_1\neq 0$，因此 L_1 可逆。

可以检验，对于任意的 $n>i$, $j\leqslant i$, $a=1,\dots,m$，我们有

$$\tilde{b}_{i,-j}^{(a)}=b_{i,-j}^{(a)}+\sum_{s=1}^{\min(l_\mu,i)}b_{i-s,-j+s}^{(a)}(n-i+1)(n-i+2)\dots(n-i+s).\tag{6.15}$$

假设 $i>Km$。取 $j\leqslant i$ 使得 $j>K$。那么对于所有 $a=1,\dots,m$, $\tilde{b}_{i\ ,-j}^{(a)}\in S_n$，以及 $b_{i-s,\ -j+s}^{(a)}=y_{i-s,j-s}^{(a)}$, $s=0,\dots,l_\mu^{(a)}$。因此，公式 (6.15) 给出了 $(\tilde{b}_{i\ ,-j}^{(a)})_{[w]}\in S_{[w]}$ 的如下表达式：

$$(\tilde{b}_{i,-j}^{(a)})_{[w]}=y_{i,-j}^{(a)}+\sum_{s=1}^{\min(l_\mu,i)}y_{i-s,-j+s}^{(a)}(w-i+1)(w-i+2)\dots(w-i+s).\tag{6.16}$$

此外，对于任意整数 $n\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant n<i$，如果将 $w=n$ 代入 (6.16)，那么右侧求和中所有对应于 $i-s\leqslant n$ 的项都将变为零。

注意，如果 $i > Km$，那么 $\boldsymbol{y}_i''$ 只包含满足 $j > K$的元素 $y_{ij}^{(a)}$，因此我们证明了该引理。

□

记作 $\mathcal{F}_{[w]} = \mathcal{A}_\infty[w]/J_{[w]}$。由引理 6.6 的第 (1) 部分， $\mathcal{F}_{[w]}$ 是一个有限生成的 $\mathbb{C}[w]$代数

考虑 $\mathcal{F}_{[w]}$的扭理想

$$\operatorname{Tors} \mathcal{F}_{[w]} = \{a \in \mathcal{F}_{[w]} \mid pa = 0 \text{ for some } p \in \mathbb{C}[w]\},$$

以及商 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f} = \mathcal{F}_{[w]}/\operatorname{Tors} \mathcal{F}_{[w]}$。显然， $\mathcal{F}_{[w]}^{t\,f}$也是一个有限生成的 $\mathbb{C}[w]$代数。

对于交换环 R及其元素 r_1，……， $r_d \in R$，用$R_{r_1,\dots,r_d}$表示将 R对乘法集合 $\{r_1^{i_1} \dots r_d^{i_d} \mid i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$.局部化所得的环。注意，同态$R \to R_{r_1,\dots,r_d}$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ 的核恰好是满足以下条件的元素 $r \in R$ 的集合：对于某些 $i = 1$，……， d，有 $r_i r = 0$。

对于 $\mathbb{C}[w]$ 中的多项式及其在 $\mathcal{F}_{[w]}$、 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 或 $\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ 中的像，我们使用相同的记号。由于不存在满足 $pf = 0$（其中某个 $p \in \mathbb{C}[w]$）的元素 $f \in \mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$，我们可以将 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 与 $(\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.})_{p_1,\dots,p_d}$ 的相应子代数等同起来，其中 $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{C}[w]$ 任意。

引理 6.7。存在有限个非零多项式 $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{C}[w]$，使得 $(\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.})_{p_1,\dots,p_d}$ 是一个自由的 $(\mathbb{C}[w])_{p_1,\dots,p_d}$-模。

备注。若将 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 替换为任意有限生成的交换$\mathbb{C}[w]$-代数，此引理仍然成立，因此它是代数中的一个一般事实的推论。由于我们未能在文献中找到这一结论的确切表述，故在此给出证明。

证明。设 $x_1, \dots, x_k$ 是 $\mathbb{C}[w]$-代数 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 的生成元。对于任意 $\vec{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^k$，记为 $x^{\vec{i}} = x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$。考虑 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^k$上的“逆字典序”排序，也就是说，$(i_1, \dots, i_k) < (j_1, \dots, j_k)$ 当且仅当对于满足 $i_{k'} \neq j_{k'}$ 的最大下标 k'，有 $i_{k'} < j_{k'}$。若 $\vec{i}, \vec{j} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^k$ 满足 $\vec{i} < \vec{j}$，我们就称 $x^{\vec{i}}$ 小于 $x^{\vec{j}}$。令 $\mathcal{Z}$ 为 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 的子集，由满足对某些 $p_{\vec{i}}, q_{\vec{j}} \in \mathbb{C}[w]$, $p_{\vec{i}} \neq 0$ 有 $p_{\vec{i}} x^{\vec{i}} + \sum_{\vec{j} < \vec{i}} q_{\vec{j}} x^{\vec{j}} = 0$ 的单项式 $x^{\vec{i}}$ 组成。由于 $\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 是有限生成的 $\mathbb{C}[w]$-代数，根据希尔伯特基定理，由 $\mathcal{Z}$ 生成的理想 $M_{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{F}_{[w]}^{t.f.}$ 有一个有限生成集 $\widetilde{\mathcal{Z}}$。

注意到，$\mathcal{Z}$ 生成了 $M_{\mathcal{Z}}$，使其成为一个 $\mathbb{C}[w]$-模。因此，我们可以假设 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{Z}$的有限子集。于是，对于某些 $\vec{i}_1$、……、$\vec{i}_d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^k$，有 $\widetilde{\mathcal{Z}} = \{x^{\vec{i}_1}, \dots, x^{\vec{i}_d}\}$；并且存在多项式$p_1$、……、$p_d \in \mathbb{C}[w]$，使得$p_j x^{\vec{i}_j} + \sum_{\vec{s} < \vec{i}_j} q_{j,\vec{s}} x^{\vec{s}} = 0$, $j = 1$,……, d，其中某些$q_{j,\vec{s}} \in \mathbb{C}[w]$成立。我们声称，$(\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.})_{p_1,\dots,p_d}$是一个自由的$(\mathbb{C}[w])_{p_1,\dots,p_d}$-模，其基 $\bar{\mathcal{Z}}$由所有不属于 $\mathcal{Z}$的单项式 x^i 构成。

首先，我们来证明集合 $\mathcal{Z}$ 线性无关。假设对于某个 $x^{j_1}, \dots, x^{j_s} \in \mathcal{Z}$以及非零的 $q_{j_1}, \dots, q_{j_s} \in (\mathbb{C}[w])_{p_1,\dots,p_d}$，我们有 $\sum_{i=1}^s q_{\vec{j}_i} x^{\vec{j}_i} = 0$。我们可以找到非零多项式 $p \in \mathbb{C}[w]$，使得 $pq_{\vec{j}_i} \in \mathbb{C}[w]$, $i = 1, \dots, s$。记 $\vec{j} = \max_i \vec{j}_i$。那么 $-\sum_{i=1}^s pq_{\vec{j}_i} x^{j_i} = 0$ 意味着 $x^j \in \mathcal{Z}$，这与 $\mathcal{Z} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ 矛盾。

为了证明 $\bar{\mathcal{Z}}$ 生成 $(\mathcal{F}_{[w]}^{t.f.})_{p_1,\dots,p_d}$ 作为一个 $(\mathbb{C}[w])_{p_1,\dots,p_d}$-模，我们先假设 $d = 1$，即 $\mathcal{Z}$ 由单个元素x^{i_1}组成。

回顾一下，$p_1 x^{\vec{i}_1} + \sum_{\vec{s}<\vec{i}_1} q_{1,\vec{s}} x^{\vec{s}} = 0$ 对于某个 $q_{1,\vec{s}} \in \mathbb{C}[w]$。因此，在 $(\mathcal{F}^{t.f.}_{[w]})_{p_1}$ 中，我们有

$$x^{\vec{i}_1} = -\sum_{\vec{s}<\vec{i}_1} \left(\frac{q_{1,\vec{s}}}{p_1}\right) x^{\vec{s}}. \tag{6.17}$$

考虑某个单项式 $f = x^{\vec{i}_1+\vec{j}} \in \mathcal{Z}$，其中 $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{Z}^k_{\geqslant 0}$。令 k' 为满足对于所有 $k'' = k'+1, \ldots, k$，都有 $j_{k''} = 0$ 的最小正整数。我们将通过对 k' 进行归纳法证明：f 是由来自 $\mathcal{Z}$ 小于 f 的单项式构成的（在 $(\mathbb{C}[w])_{p_1}$ 上的）线性组合。基础 $k' = 0$ 由公式（6.17）给出。如果 $k' > 0$，那么根据归纳法假设，f 是来自 $\mathcal{Z}$ 小于 f 的单项式以及形如 $x^{\vec{i}_1} x_1^{j'_1} x_2^{j'_2} \ldots x_{k'}^{j'_{k'}}$ 的单项式的线性组合，其中 $j'_{k'} < j_{k'}$。然后，我们对 $j_{k'}$ 进行归纳法。

如果 $d > 1$，那么我们使用类似的论证来证明】【。

(1) 不属于由 $x^{\vec{i}_1}$ 生成的理想的单项式生成 $(\mathcal{F}^{t.f.}_{[w]})_{p_1}$ 作为一个 $(\mathbb{C}[w])_{p_1}$-模，(2) 不属于由 $x^{\vec{i}_1}$ 和 $x^{\vec{i}_2}$ 生成的理想的单项式生成 $(\mathcal{F}^{t.f.}_{[w]})_{p_1,\ p_2}$ 作为一个 $(\mathbb{C}[w])_{p_1,\ p_2}$-模，依此类推。

□

令 p_1、……、p_d 为引理 6.7 中的多项式。记 $\mathcal{F}^{loc}_{[w]} = (\mathcal{F}^{t.f.}_{[w]})_{p_1,\ldots,p_d}$。回顾上文引入的理想 $\underline{J}_t \subset \mathcal{A}_\infty$。记 $\underline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{A}_\infty/\underline{J}_t \cong \mathcal{F}_{[w]}/(w-t)$。

引理 6.8。对于除有限多个 $t \in \mathbb{C}$ 之外的所有情形，我们都有

$$\mathcal{F}^{loc}_{[w]}/(w-t) \cong \underline{\mathcal{F}}_t.$$

证明。记 π_t 为投影 $\mathcal{F}_{[w]} \to \underline{\mathcal{F}}_t$。注意，若 $a \in \mathcal{F}_{[w]}$、$p \in \mathbb{C}[w]$和 $t \in \mathbb{C}$满足 $pa = 0$，且 t 不是 p的根，则 $\pi_t(a) = 0$。事实上，设 t_0 是 p的根。那么对于某个 $\tilde{p} \in \mathbb{C}[w]$，有 $p = (w-t_0)\tilde{p}$，且 $\deg\ \tilde{p} = \deg\ p - 1$。我们有

$$0 = \pi_t\left[\big((w-t)\tilde{p} - (w-t_0)\tilde{p}\big)a\right] = (t-t_0)\pi_t(\tilde{p}a).$$

由于 $t \neq t_0$，这意味着 $\pi_t(\tilde{p}a) = 0$。若 t_1 是 $\tilde{p}$的根，则类似的计算可得$\pi_t(\tilde{\tilde{p}}a) = 0$，其中 $\tilde{p} = (w-t_1)\,\tilde{\tilde{p}}$，$\deg\ \tilde{\tilde{p}} = \deg\ \tilde{p} - 1$。重复这一论证 $\deg\ p$次，我们得到 $\pi_t(a) = 0$。

由于 $\mathcal{F}_{[w]}$ 是有限生成的 $\mathbb{C}[w]$-代数，根据希尔伯特基定理，理想 Tors $\mathcal{F}_{[w]}$是有限生成的。令 a_1、……、a_k为 Tors $\mathcal{F}_{[w]}$的生成元，并令 q_1、……、$q_k \in \mathbb{C}[w]$ 满足 $q_i a_i = 0$、$i = 1$、……、k。那么

$$\text{Tors}\ \mathcal{F}_{[w]} \subset (w-t) \tag{6.18}$$

对除 q_1、……、q_k 的根之外的所有 t，$\mathcal{F}^{t.f}_{[w]}/(w-t) \cong \underline{\mathcal{F}}_t$。因此，除了有限多个 $t \in \mathbb{C}$ 之外，$\mathcal{F}^{t.f}_{[w]}/(w-t) \cong \mathcal{F}^{loc}_{[w]}/(w-t)$。由于对除多项式 p_1、……、p_d 的根之外的所有 $t \in \mathbb{C}$，$\mathcal{F}^{t.f}_{[w]}/(w-t) \cong \mathcal{F}^{loc}_{[w]}/(w-t)$，引理得证。□

引理 6.9.令 π_t 表示投影 $\mathcal{F}^{loc}_{[w]} \to \mathcal{F}^{loc}_{[w]}/(w-t)$。假设对于某个$p \in \mathcal{F}^{loc}_{[w]}$和 $N_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有 $\pi_n(p) = 0$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant N_0}$。那么 $p = 0$。

证明。由于根据引理 6.7，$\mathcal{F}^{loc}_{[w]}$ 是一个自由 $(\mathbb{C}[w])_{p_1,\ldots,p_d}$-模，引理 6.9 可类似于引理 4.3 得证。□

¯回忆代数 $\mathcal{B}_{[w]}(\lambda,\bar{\mu})$，参见第 4 节。设 $p_1,\dots,p_d\in\mathbb{C}[w]$ 为引理 6.7 中的多项式。记 $\mathcal{B}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \big(\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})\big)_{p_1,\dots,p_d}$。由于 $\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 是一个无挠 $\mathbb{C}[w]$-模，我们可以将其与 $\mathcal{B}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 中对应的子代数等同。对于所有非多项式 $p_1,\dots,p_d$ 的根的 $t\in\mathbb{C}$，都有 $\mathcal{B}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})/(w-t)\cong\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})/(w-t)$。结合公式 (4.3)，这意味着

$$\mathcal{B}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})/(w-t)\cong\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \tag{6.19}$$

对除有限多个 $t\in\mathbb{C}$ 之外的所有情形。

现在，我们终于可以证明本文的主要结果：

定理 6.10。对除有限多个 $t\in\mathbb{C}$ 之外的所有情形，同态的核

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_t:\quad &\mathcal{A}_\infty\to\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\\ &y_{ij}^{(a)}\mapsto\underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu}).\end{aligned}$$

是理想 $\underline{J}_t$。

证明。令 $B_{ij}^{(a)}[w]$ 为 $\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 的生成元，它们与 $\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 的生成元 $\underline{B}_{ij}^{(a)}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 类似。考虑映射 $\varphi_{[w]}:\ \mathcal{A}_\infty[w]\to\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$，它将 $y_{ij}^{(a)}$ 映到 $B_{ij}^{(a)}[w]$，并将 w 映到 w。

我们用记号 π_t 表示投影 $A\to A/(w-t)$，其中 A 是代数 $\mathcal{A}_\infty[w]$, $\mathcal{F}_{[w]}$, $\mathcal{F}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$, $\mathcal{B}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 之一。对于所有 $t\in\mathbb{C}$，我们有

$$\pi_t\circ\varphi_{[w]}=\underline{\varphi}_t\circ\pi_t.$$

设 a 是 $S_{[w]}$ 中的一个元素。由定义，$S_{[w]}=\cup_{n=K}^{\infty}S_{n,\ [w]}$，故存在某个 $N'(a)\in\mathbb{Z}_{\geqslant K}$，使得 $a\in S_{N'(a)\ [w]}$。于是，对于所有 $n\geqslant N'(a)$，都有 $pr_{\infty,\ n}\circ\pi_n(a)$。另一方面，由于 $\mathcal{A}_\infty[w]=\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n[w]$ 且对于 $n_1<n_2$ 有 $\mathcal{A}_{n_1}[w]\subset\mathcal{A}_{n_2}[w]$，因此存在某个 $N''(a)\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得对于所有 $n\geqslant N''(a)$，都有 $a\in\mathcal{A}_n[w]$。因此，若 $n\geqslant N'(a)$ 且 $n\geqslant N''(a)$，则 $\pi_n(a)\in S_n$。

回顾一下 $N=\sum_a(|\lambda^{(a)}|+|\mu^{(a)}|)$。令 $N_0=\max(N'(a)\ N''(a)\ N)$。那么对所有 $n\geqslant N_0$，我们有

$$\pi_n\circ\varphi_{[w]}(a)=\underline{\varphi}_n\circ\pi_n(a)=\varphi_n\circ\pi_n(a)=0.$$

这里，在第二个等式中，我们用到了

(1) 由于 $n\geqslant N''(a)$，我们有 $\pi_n(a)\in\mathcal{A}_n$；(2) 由于 $n\geqslant N$，根据引理 4.1，我们有 $\underline{\mathcal{B}}_n(\bar{\lambda},\bar{\mu})\cong\mathcal{B}_n(\bar{\nu})$，因此，$\underline{\varphi}_n\big|_{\mathcal{A}_n}=\varphi_n$。

在第三个等式中，我们用到了：由于 $n\geqslant N'(a)$ 且 $n\geqslant N''(a)$，我们有 $\pi_n(a)\in S_n\subset\ker\varphi_n$。

由于 $\pi_n\circ\varphi_{[w]}(a)=0$ 对所有 $n\geqslant N_0$ 都成立，根据引理 4.3，我们有 $\varphi_{[w]}(a)=0$。因此，$J_{[w]}\subset\ker\varphi_{[w]}$，特别是，$\varphi_{[w]}$ 诱导出一个同态 $\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}:\ \mathcal{F}_{[w]}\to\mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$。映射 $\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}\circ\pi_t$ 通过映射 $\pi_t:\mathcal{F}_{[w]}\to\underline{\mathcal{F}}_t$ 分解。令 $\underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_t:\ \underline{\mathcal{F}}_t\to\underline{\mathcal{B}}_t(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 为满足 $\pi_t\circ\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}=\underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_t\circ\pi_t$ 的同态。

注意，$\mathrm{Tors}\ \mathcal{F}_{[w]}\subset\ker\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}$。事实上，如果 $a\in\mathrm{Tors}\ \mathcal{F}_{[w]}$，那么根据（6.18），$\pi_t(a)=0$ 对所有 $t\in\mathbb{C}\setminus I$ 均成立，其中 I 是一个有限集。令 $N_0\in\mathbb{Z}_{>0}$ 大于 I 中的任意整数。那么对于任意 $n\geqslant N_0$，我们有

$$\pi_n\circ\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}(a)=\underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_n\circ\pi_n(a)=0.$$

因此，根据引理 4.3，$\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}(a)=0$。

由于Tors $\mathcal{F}_{[w]} \subset \ker \varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}$，映射 $\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]}$ 诱导出一个同态$(\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]})^{t.f.}$：$\mathcal{F}^{t.f.}_{[w]} \to \mathcal{B}_{[w]}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$，它有唯一延拓 $(\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]})^{loc}$：$\mathcal{F}^{loc}_{[w]} \to \mathcal{B}^{loc}_{[w]}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$。我们将证明 $(\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]})^{loc}$ 是一个同构。于是定理将由引理 6.8和公式 (6.19)推出。

首先，注意到如果 $n \geqslant Km$ 和 $n \geqslant N$，那么 $\ker \underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_n = 0$。事实上，对于这样的 n，我们可以写成

$$\begin{aligned}\ker \underline{\varphi}_n &= J_n(\bar{\nu}) + I_{>n} = pr_{\infty,n}\, \underline{J}_n + I_{>n} \\ &= \underline{J}_n + I_{>n} = \underline{J}_n.\end{aligned}$$

这里，在第一个等式中，我们利用了：由于 $n \geqslant N$，根据引理 4.1，有 $\underline{\mathcal{B}}_n(\lambda, \bar{\mu}) \cong \mathcal{B}_n(\lambda, \bar{\mu})$；在最后一个等式中，我们利用了 $n \geqslant Km$，并应用了引理 6.6 的第 (2) 部分。我们得到了 $\ker \underline{\varphi}_n = \underline{J}_n$，因此，$\ker \underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_n = 0$。

现在，并令 $N_{\tilde{I}} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 为一个有限子集，使得整数 $t \in \mathbb{C}$，$\tilde{I}$，$\tilde{a}$ 和 $\tilde{\varphi}^{\mathcal{F}}_{[w]}$ 都成立的元素 $\tilde{a}$，并令$N_0 = \max(Km, N_{\tilde{I}}, N)$。任取 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant N_0}$。由于 $n \geqslant N_{\tilde{I}}$，我们有 $\pi_n \circ (\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]})^{loc} = \underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_n \circ \pi_n$。因此，$\pi_n(a) \in \ker \underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_n$。由于 $n \geqslant Km$ 和 $n \geqslant N$，我们有 $\ker \underline{\varphi}^{\mathcal{F}}_n = 0$，所以 $\pi_n(a) = 0$。根据引理 6.9，我们有 $a = 0$，因此，$(\varphi^{\mathcal{F}}_{[w]})^{loc}$ 是一个同构。

□

7. 关于无单值化微分算子的比值

7.1. 伪微分算子。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺交换结合代数，且 ∂：$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的导子。那么，系数取自 $\mathcal{A}$、阶为 $t \in \mathbb{C}$ 的伪微分算子是如下形式的形式级数。

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \partial^{t-r}, \qquad a_r \in \mathcal{A}, \quad a_0 \neq 0. \tag{7.1}$$

将所有系数取自 $\mathcal{A}$的伪微分算子集合记为 $\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A})$。如果对所有 $a \in \mathcal{A}$，规定

$$\partial^{\mu} a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^{\underline{i}}}{i!} (\partial^i a) \partial^{\mu - i}.$$

可以验证，这个乘法是良定义且满足结合律的，从而使 $\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 成为一个结合代数。

7.2. 固定一列 m 两两不同的复数 $\bar{z} = (z_1, \ldots\ldots, z_m)$。回顾式（5.10）中定义的微分算子 $D^{\mathbb{C}[y]} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_n)$。现在我们将同时考虑两个代数，即 $\mathcal{A}_n$和 $\mathcal{A}_{n'}$，其中 n'为另一个自然数。因此，为了区分与 $\mathcal{A}_n$ 相关联的微分算子 $D^{\mathbb{C}[y]}$ 和与 $\mathcal{A}_{n'}$相关联的微分算子 $D^{\mathbb{C}[y]}$，我们分别将它们记为 D_n 和 $D_{n'}$。D_n 和 $D_{n'}$ 都可以看作 $\Psi\mathcal{D}\big((\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_{n'})(u)\big)$的元素。于是，伪微分算子 $D_{n|n'} = D_n D_{n'}^{-1} \in \Psi\mathcal{D}\big((\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_{n'})(u)\big)$ 具有如下形式

$$D_{n|n'} = \partial_u^{n-n'} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \frac{c_{ij}^{(a)}}{(u - z_a)^j} \partial_u^{n-n'-i}.$$

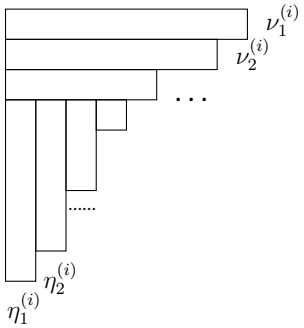
对某个 $c_{ij}^{(a)} \in \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_{n'}$成立。令 $\mathcal{A}_{n|n'}$ 为由 $c_{ij}^{(a)}$ 、$i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$、 $j = 1$、.....、 i、 $a = 1$、.....、 m 生成的 $\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_{n'}$ 的含单位子代数。

设 $\bar{\nu} = (\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(m)})$ 是一列占优整 $\mathfrak{gl}_n$-权，其中 $\nu^{(i)} = (\nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_n^{(i)})$ 满足 $\nu_j^{(i)} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$。设 $\bar{\eta} = (\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(m)})$ 是一列占优整 $\mathfrak{gl}_{n'}$-权，其中 $\eta^{(i)} = (-\eta_{n'}^{(i)}, \ldots, -\eta_1^{(i)})$ 满足 $\eta_j^{(i)} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n'$。对于每个 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n'$，令 ${}^c\eta_j^{(i)}$ 表示满足以下条件的最大数：对每个 $j' \leqslant {}^c\eta_j^{(i)}$， $\eta_{j'}^{(i)} \geqslant j$。对于每个 $i = 1, \ldots, m$, $j \in Z_{\geqslant 1}$，定义非负整数 $\lambda_j^{(i)}$ 如下

$$\lambda_j^{(i)} = \begin{cases} \nu_j^{(i)} & j = 1, \ldots, n, \\ {}^c\eta_{j-n}^{(i)} & j = n, \ldots, n + n', \\ 0 & j > n + n'. \end{cases}$$

我们将假设， $\bar{\nu}$和 $\bar{\eta}$满足：对于每个 $i = 1$，.....， k，序列 $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, ...)$ 是满足性质 $\lambda_{n+1}^{(i)} \leqslant n'$的分拆（这样的分拆称为 $n|n'$-钩分拆）。我们将用 $\bar{\lambda}$ 表示分拆序列（$\lambda^{(1)}$，.....， $\lambda^{(k)}$）。

用杨图来表示一个分拆 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 很方便。杨图由若干行方格组成，这些方格以最左边的方格对齐，使得第 j 行由 λ_j 个方格组成。（这里，行号从上到下依次编号）。那么，对于某个固定的 i，上文定义的分拆 $\lambda^{(i)}$ 的杨图如下：



回顾第 5.2节和第6 节中分别引入的理想 $J_n(\bar{\nu})$ 和 $\underline{J}_t(\lambda, \bar{\mu})$（此处，我们指明了 $\underline{J}_t$ 对 λ 和 $\bar{\mu}$ 的依赖关系）。令 $\emptyset$ 表示一个分拆序列，其中所有元素均等于 (0,0,...)。按如下方式引入代数 $\mathcal{A}_{n|n'}$ 的两个理想 $J_{n|n'}$ 和 $J_{n|n'}$：

$$J_{n|n'} = (J_n(\bar{\nu}) \otimes J_{n'}(\bar{\eta})) \cap \mathcal{A}_{n|n'},$$

而 $J_{n|n'}$是理想 $\underline{J}_t(\lambda, \emptyset)$在满同态下的像

$$\mathcal{A}_\infty \to \mathcal{A}_{n|n'},$$
$$y_{ij}^{(a)} \mapsto c_{ij}^{(a)},$$

其中 $\bar{\nu}$、 $\bar{\eta}$、 λ 之间的关系如上所述。以下定理是本节的主要结果：

定理 7.1。我们有 $J_{n|n'} \subset J_{n|n'}$

7.3. 为了证明定理 7.1，我们首先需要证明几个引理。同样，设 $\mathcal{A}$ 是一个任意的结合交换含幺代数。在本节中，令 ∂ 表示作用在 $\mathcal{A}((x))$ 上的导子 ∂_x 。

引理 7.2. 设 D 为公式 (5.1) 给出的微分算子。假设微分方程 $Df = 0$ 有解 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}((x))$，其形式为 (5.2)，其中某些整数 $m_1 < m_2 < \dots m_n$ 固定。记 $\nu_i = m_{n+1-i} - n + i$。则 $D = D_1 D_2 \dots D_n$，其中

$$D_i = \partial - \frac{\nu_i}{x} + d_0^{(i)} + d_1^{(i)} x + d_2^{(i)} x^2 + \dots, \quad i = 1, \dots, n,$$

对于某个 $d_j^{(i)} \in \mathcal{A}$。

证明。对任意 $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{A}((x))$，引入朗斯基行列式 $W(h_1, \dots, h_k) \in \mathcal{A}((x))$：

$$W(h_1, \dots, h_k) = \det(\partial_x^{j-1} h_i)_{i,j=1}^n.$$

不难验证，

$$W(f_1, \dots, f_i) = w_0 x^q + w_1 x^{q+1} + \dots, \tag{7.2}$$

其中 $q = \sum_{n+1-i}^n \nu_j$ 且 $w_0 \neq 0$。特别地，$W(f_1, \dots, f_i) \neq 0$ 在 $\mathcal{A}((x))$ 中，对于所有 $i = 1, \dots, n$。

记

$$g_i = \frac{W(f_1, \dots, f_i)}{W(f_1, \dots, f_{i-1})}.$$

然后，按照 [18]，中命题 6.2 的证明，可以验证

$$D = \left(\partial - \frac{g_n'}{g_n}\right)\left(\partial - \frac{g_{n-1}'}{g_{n-1}}\right)\left(\partial - \frac{g_1'}{g_1}\right),$$

其中 $g_i' = \partial g_i$。

公式 (7.2) 蕴含

$$\frac{g_i'}{g_i} = \frac{\nu_{n+1-i}}{x} + c_0^{(i)} + c_1^{(i)} x + \dots, \quad i = 1, \dots, n,$$

对于某个 $c_j^{(i)} \in \mathcal{A}$，因此引理得证。 □

固定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l, 0, \dots)$，其中 $\lambda_l \neq 0$。我们将定义一个留数为 λ 的伪微分算子，以及一个没有单值化的伪微分算子$^-$。这些定义基于第6节中引入的理想 $\underline{J_t}(\lambda, \emptyset)$ 的构造。

对于形式为 $D \in \Psi\mathcal{D}\big(\mathcal{A}((x))\big)$ 的伪微分算子

$$D = \partial^t + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=-i}^{\infty} \beta_{ij} x^j \right) \partial^{t-i}, \tag{7.3}$$

引入关于变量 α 的以下多项式：

$$\rho_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{l+k} \beta_{i,-i+k} (\alpha + l + k)^{\underline{l+k-i}}. \tag{7.4}$$

我们称 D 的留数为 λ，如果

$$\begin{aligned}&\beta_{0j}=0,\quad -i\leqslant j\leqslant -l-1,\quad \text{and}\\&\rho_0(\lambda_i-i)=0,\quad i=1,\dots,l.\end{aligned}$$

假设 D 的留数为 λ，并固定 i、$j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$、$i<j$。记为 $K=\lambda_i-\lambda_j+j-i$。考虑一个矩阵

$$R_{ij}=\begin{pmatrix}\rho_{1,1} & \rho_{2,1} & \cdots & \cdots & \rho_{K,1}\\ \rho_{0,2} & \rho_{1,2} & \ddots & & \vdots\\ 0 & \rho_{0,3} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \rho_{2,K-1}\\ 0 & \cdots & 0 & \rho_{0,K} & \rho_{1,K}\end{pmatrix},\tag{7.5}$$

其中 $\rho_{k,s}$ 定义如下：对每个 $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，令 $\alpha_s=\lambda_j-j+s-1$；然后

$$\rho_{k,s}=(\alpha_s+l+K-s+1)^{\underline{K-s+1}}\rho_k(\alpha_s).\tag{7.6}$$

对于每个 $s=1,\dots,K-1$，若对于某个 $d\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$有 $\alpha_{s+1}=\lambda_d-d$，则划去 R_{ij} 的第 s 列和 R_{ij}的第 $(s+1)$ 行，并将所得矩阵记为 R_{ij}^{red}。

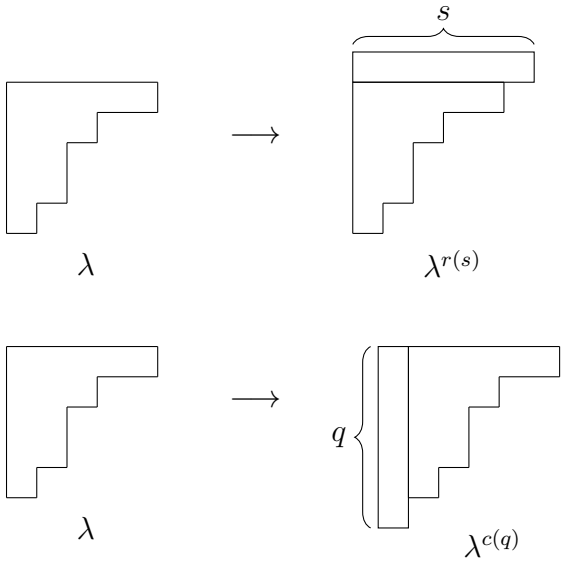
如果伪微分算子 D 除了具有留数 λ 外，还满足以下条件，我们就称其没有单值化：

$$\begin{aligned}&\beta_{ij}=0,\quad i>1,\ -i\leqslant j\leqslant -l-1,\quad \text{and}\\&\det R_{ij}^{red}=0,\quad i=1,\dots,l,\ j>i.\end{aligned}$$

令 $\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)))$ λ 表示所有具有形式、留数为 λ 且无单值化的伪微分算子构成的子集。 (7.3)

对于一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l,0,\dots)$，其中 $\lambda_l\neq 0$，以及满足$s\geqslant\lambda_1$ 和 $q\geqslant l$的自然数 s,q，定义分拆 $\lambda^{r(s)}$ 和 $\lambda^{c(q)}$ 如下。分拆 $\lambda^{r(s)}$ 的杨图是通过在分拆 λ 的杨图顶侧附加一行长度为 s 的行得到的。分拆 $\lambda^{c(q)}$ 的杨图是通过在分拆 λ 的杨图左侧附加一列长度为 q 的列得到的。

该图见下方图片。



引理 7.3。固定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 和一个自然数 s，使得 $s \geqslant \lambda_1$。设 D 是一个来自 $\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)), \lambda)$ 的伪微分算子。考虑一个伪微分算子

$$\tilde{D} = \left(\partial - \frac{s}{x} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) D$$

其中 $a_i \in \mathcal{A}$ 具有某种取值。则 $\tilde{D} \in \Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)), \lambda^{r(s)})$。

证明。设 $\beta_i(x)$、$i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 是 D 的系数：

$$D = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(x) \partial^{t-i}.$$

我们有 $\beta_0(x) = 1$，并且对某个 $\beta_{ij} \in \mathcal{A}$，$\beta_i(x) = \sum_{j=-i}^{\infty} \beta_{ij} x^j$。此外，记 $\beta_{-1}(x) = 0$。

~ ~设 $\tilde{\beta}_i(x)$、$i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 是 $\tilde{D}$ 的系数：

$$\tilde{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\beta}_i(x) \partial^{t+1-i}.$$

Then

$$\tilde{\beta}_i(x) = \beta_i(x) + \left(\partial - \frac{s}{x} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \beta_{i-1}(x),$$

特别地，对某个 $\tilde{\beta}_{ij} \in \mathcal{A}$，有 $\tilde{\beta}_i(x) = \sum_{j=-i}^{\infty} \tilde{\beta}_{ij} x^j$；并且对每个 j，$k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，

$$\tilde{\beta}_{j,-j+k} = \beta_{j,-j+k} - \beta_{j-1,-j+1+k}(s + j - k - 1) + \sum_{k'=1}^{k} \beta_{j-1,-j+k'} a_{k-k'}. \tag{7.7}$$

令 l 为分拆 λ 中非零元素的个数。由于 $D \in \Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)), \lambda)$，我们有

$$\beta_{ij} = 0, \quad -i \leqslant j < -l. \tag{7.8}$$

结合 (7.7)，这意味着

$$\tilde{\beta}_{ij}=0,\quad -i\leqslant j<-l-1. \tag{7.9}$$

设 $\rho_k(\alpha)$、$\rho_{k,\ s}$、 R_{ij} (R_{ij}^{red}) 分别为公式 (7.4)、(7.6)、(7.5) 中引入的对象，它们对应于微分算子 D 和分拆 λ。我们用 $\tilde{\rho}_k(\alpha)$、$\tilde{\rho}_{k,\ s}$、 $\tilde{R}_{ij}$ ($\tilde{R}_{ij}^{red}$) 表示伪微分算子 $\tilde{D}$ 和分拆 $\lambda^{r(s)}$ 所对应的类似对象。利用 (7.8) 和 (7.9)，可以写成

(7.10)

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_k(\alpha)&=\sum_{j=0}^{k+l+1}\tilde{\beta}_{j,-j+k}(\alpha+l+1+k)^{\underline{l+1+k-j}}=\\&=\sum_{j=0}^{k+l}\beta_{j.-j+k}(\alpha+l+1+k)^{\underline{l+1+k-j}}-\sum_{j=0}^{k+l}\beta_{j.-j+k}(s+j-k)(\alpha+l+1+k)^{\underline{l+k-j}}+\\&+\sum_{j=0}^{k+l}\sum_{k'=1}^{k}a_{k-k'}\beta_{j,-j+k'-1}(\alpha+l+1+k)^{\underline{l+k-j}}=\\&=\rho_k(\alpha+1)(\alpha+1+k-s)+\sum_{k'=1}^{k}a_{k-k'}(\alpha+1+k+l)^{\underline{k-k'+1}}\rho_{k'-1}(\alpha+1).\end{aligned}$$

特别地，对于 $k=0$，我们有

$$\tilde{\rho}_0(\alpha)=\rho_0(\alpha+1)(\alpha+1-s) \tag{7.11}$$

˜由于 $\rho_0(\lambda_i-i)=0$、 $i=1$、.....、 l，公式 (7.11) 给出 $\tilde{\rho}_0(\lambda_i-i)=0$、 $i=1$、.....、 $l+1$，其中

$$\tilde{\lambda}_i=\begin{cases}s, & i=1,\\ \lambda_{i-1}, & i>1.\end{cases}$$

因此， $\tilde{D}$ 的留数为 $\lambda^{r(s)}=(\tilde{\lambda}_1$、.....、 $\tilde{\lambda}_{l+1}$、0、.....)。

令 $\lambda_0=s$，并对每个 $j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，以定义正i时定义 R_{ij} 的相同方式定义 R_{0j}。

固定某些 i、 $j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$、 $i<j$、 $1\leqslant i\leqslant l$，并对每个 $k=1$、.....、 K，将 $\tilde{c}_k$（分别为 c_k）记为˜ $k-th$ 矩阵 R_{ij}（分别为 $R_{i-1,\ j-1}$）中的列。于是，我们在（7.10）中针对 $\tilde{\rho}_k$（α）得到的表达式为

$$\tilde{c}_k=c_k(\tilde{\lambda}_j-j+1+k-s)+\sum_{k'=1}^{k-1}c_{k-k'}a_{k'-1}. \tag{7.12}$$

˜对于每个 i'、 j'，如果矩阵 $R_{i'j'}$（分别为 $R_{i'j'}$）中的某一列或某一行在得到矩阵 $R_{i'j'}^{red}$（分别为 $\tilde{R}_{i'j'}^{red}$）时被划去，则称其为约化列或约化行。我们断言，（7.12）意味着

$$\det\big(\tilde{R}_{ij}^{red}\big)=\prod_{k=1}^{K}{}'(\tilde{\lambda}_j-j+1+k-s)\det\big(R_{i-1,j-1}^{red}\big), \tag{7.13}$$

其中 $K=\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j+j-i$，而 $\prod'^{K}_{k=1}$ 表示对满足条件“列 c_k 未约化”的 k 取乘积。

事实上，若 $j = i+1$，则 $R_{i-1,\ j-1} = R^{red}_{i-1,\ j-1}$, $\tilde{R}_{ij} = \tilde{R}^{red}_{ij}$，而（7.12）立即给出˜（7.13）。若 $j > i+1$，则我们需要更严谨一些，因为 $R_{i-1,\ j-1}$ 和 R_{ij} 中含有一些约化行。容易验证，矩阵 ˜$R_{i-1,\ j-1}$ 和 R_{ij} 中约化行与约化列的数量相同。矩阵 R_{ij} 的列 c_k 是约化列，当且仅当存在某个 j' 使得 $k = \lambda_{j'} - \lambda_{j-1} + j - 1 - j'$，且满足 $i-1 < j' < j-1$。但是，由于 $\det R^{red}_{i-1,\ j'} = 0$，该列是 $c_{k'}$ 的线性组合，其中 $k' < k$ （至多相差 $R_{i-1,\ j'}$ 中的约化行元素；这些元素也是 $R_{i-1,\ j-1}$ 中的约化行元素）。因此，在 $j > i+1$ 的情况下，（7.12）同样蕴含（7.13）。

若 $i \geqslant 1$，则 $\det\left(R^{red}_{i-1,\ j-1}\right) = 0$，且由 (7.13) 可得 $\det\left(\tilde{R}^{red}_{ij}\right) = 0$。

若$\lambda_j = j-1$，考虑因子s 在 (7.13) 右端的因子。由于对于 $i = 1$ 有 ˜ ˜ ˜，我们有 $K = \lambda_1 - \lambda_j + j - 1$，且 $\lambda_1 = s$，此因子等于零，因此有 $\det\left(\tilde{R}^{red}_{1j}\right) = 0$。

˜因此， D 没有单值化，引理得证。 □

引理 7.4。固定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l, 0, \ldots)$、 $\lambda_l \neq 0$，以及一个满足 $q \geqslant l$ 的自然数 q。设 D 是一个来自 $\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)),\ \lambda)$ 的伪微分算子。考虑一个伪微分算子

$$\tilde{D} = \left(\partial + \frac{q}{x} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\right)^{-1} D$$

带有一些 $a_i \in \mathcal{A}$。然后 $\tilde{D} \in \Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)),\ \lambda^{c(q)})$。

证明。再次令 $\beta_i(x) = \sum_{i=-j}^{\infty} \beta_{ij} x^j$ 和 $\tilde{\beta}_i(x)$ 分别为 D 和 $\tilde{D}$ 的系数，˜如前一个引理的证明中所述；唯一的区别是，现在 D 的阶为 $t-1$，˜而不是 $t+1$。我们还将假设 $\beta_{-1}(x) = 0$。

我们有

$$\beta_i(x) = \tilde{\beta}_i(x) + \left(\partial + \frac{q}{x} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\right) \tilde{\beta}_{i-1}(x).$$

特别地， $\tilde{\beta}_i(x) = \sum_{i=-j}^{\infty} \tilde{\beta}_{ij} x^j$ 对于某个 $\tilde{\beta}_{ij} \in \mathcal{A}$，且对于每个 $j, k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,

$$\beta_{j,-j+k} = \tilde{\beta}_{j,-j+k} + \tilde{\beta}_{j-1,-j+1+k}(q-j+k+1) + \sum_{k'=1}^{k} \tilde{\beta}_{j-1,-j+k'} a_{k-k'}, \tag{7.14}$$

我们通过对 i 进行归纳法来证明。

$$\tilde{\beta}_{ij} = 0 \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ -i \leqslant j < -q-1. \tag{7.15}$$

对于 底域 $i = 0$，无需验证。由于 $D \in \Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)),\ \lambda)$，我们有

$$\beta_{ij} = 0, \quad -i \leqslant j < -l. \tag{7.16}$$

因此，对于 $-i \leqslant j < -l$，公式 (7.14) 给出

$$\tilde{\beta}_{ij} = -\tilde{\beta}_{i-1,j+1}(q+j+1) + \sum_{j'=-i+1}^{j} \tilde{\beta}_{i-1,j'} a_{j-j'}. \tag{7.17}$$

˜ ˜如果 $j < -q-2$，那么根据归纳假设 $\beta_{i-1,\ j+1} = 0$ 且 $\beta_{i-1,\ j'} = 0$ 对于 $j' = -i+1$，.....，˜j。于是（7.17）给出 $\beta_{ij} = 0$。

如果 $j=-q-1$，那么右侧 (7.17)中的第一项由于因子 $q+j+1$ 而为零，其余各项则由于归纳假设而均为零。因此，$\beta_{i,\ -q-1}=0$，(7.15) 得证。

令 $\rho_k(\alpha)$,$\rho_{k,\ s}$, R_{ij} (R_{ij}^{red}) 分别为公式 (7.4)、(7.6)、(7.5) 中引入的对象，它们对应于微分算子 D 和分拆 λ。我们用 $\tilde{\rho}_k(\alpha)$,$\tilde{\rho}_{k,\ s}$, $\tilde{R}_{ij}$ ($\tilde{R}_{ij}^{red}$) 表示伪微分算子 $\tilde{D}$ 和分拆 $\lambda^{c(q)}$ 对应的类似对象。

利用（7.14）、（7.15）和（7.16），我们可以写成

$$\rho_k(\alpha)(\alpha+k+q+1)^{\underline{q-l+1}}=\sum_{j=0}^{k+q+1}\beta_{j,-j+k}(\alpha+k+q+1)^{\underline{k+q+1-j}}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k+q}\tilde{\beta}_{j,-j+k}(\alpha+1+k+q)^{\underline{k+q+1-j}}+\sum_{j=0}^{k+q}\tilde{\beta}_{j,-j+k}(\alpha+1+k+q)^{\underline{k+q-j}}(q-j+k)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k+q}\sum_{k'=1}^{k}\beta_{j,-j+k'-1}(\alpha+1+k+q)^{\underline{k+q-j}}a_{k-k'}=$$

$$=(\alpha+1+q+k)\tilde{\rho}_k(\alpha+1)+\sum_{k'=1}^{k}a_{k-k'}(\alpha+1+k+q)^{\underline{k-k'+1}}\tilde{\rho}_{k'-1}(\alpha+1).$$

因此，我们得到的是

$$\rho_k(\alpha)(\alpha+k+q)^{\underline{q-l}}=\tilde{\rho}_k(\alpha+1)+\sum_{k'=1}^{k}a_{k-k'}(\alpha+k+q)^{\underline{k-k'}}\tilde{\rho}_{k'-1}(\alpha+1). \tag{7.18}$$

特别地，对于 $k=0$，我们有

$$\tilde{\rho}_0(\alpha)=\rho_0(\alpha-1)\cdot(\alpha+l)(\alpha+l+1)\dots(\alpha+q-1). \tag{7.19}$$

由于 $\rho_0(\lambda_i-i)=0$ 对于 $i=1,\dots,l$,且 $\lambda_i=0$ 对于 $i>l$, 公式 (7.19) 给出 $\tilde{\rho}_0(\lambda_i-i)=0$,$i=1,\dots,q$, 其中 $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i+1$ 对于每个 $i=1,\dots,q$. 因此，$\tilde{D}$ 的留数为 $\lambda^{c(q)}=(\tilde{\lambda}_1,\dots,\lambda_q,0,\dots)$.

固定一些 $i,j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $i<j$, $1\leqslant i\leqslant l$，并将矩阵 R_{ij} （分别为 R_{ij}）的第 k 列记作 $\tilde{c}_k$（分别为 c_k）。于是可以验证 (7.18) 蕴含

$$c_k(\tilde{\lambda}_j-j+k+q)^{\underline{q-l+1}}=\tilde{c}_k(\tilde{\lambda}_j-j+k+q)+\sum_{k'=1}^{k}a_{k-k'}\tilde{c}_{k'-1}. \tag{7.20}$$

对于任意 i',j'，我们按前一个引理的证明中的相同方式，定义矩阵 $R_{i'j'}$ 或 $R_{i'j'}$ 的约化行和列。我们将对 j 使用归纳法证明

$$\det\big(\tilde{R}_{ij}^{red}\big)=\prod_{k=1}^{K}{}'(\tilde{\lambda}_j-j+k+q-1)^{\underline{q-l}}\det\big(R_{i,j}^{red}\big), \tag{7.21}$$

其中 $K=\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j+j-i$，而 $\prod'^{K}_{k=1}$ 表示对满足列 c_k 未约化的 k 取乘积。

对于 $j=i+1$，有 $\tilde{R}_{ij}^{red}=\tilde{R}_{ij}$ 和 $R_{ij}^{red}=R_{ij}$。于是 (7.20) 蕴含 (7.21)。

考虑情形 $j>i+1$。列 $\tilde{c}_k$ 是约化的，当且仅当 $k=\tilde{\lambda}_{j'}-\lambda_j+j-j'$ 对于某个 j'，使得 $i<j'<j$。但根据归纳假设，我们有 $\det\tilde{R}_{ij'}^{red}=0$，因此，

列 $\tilde{c}_k$ 是列 $\tilde{c}_{k'}$ 的线性组合，其中带有 $k<k'$ （除去约化~ ~行中的元素 $R_{ij'}$，而这些元素属于 R_{ij} 的约化行）。因此，同样地，(7.20) 蕴含 (7.21)。

若 $1\leqslant i\leqslant l$，则 $\det\big(R_i^{red}{}_{,\ j}\big)=0$，且 (7.21) 推出 $\det\big(\tilde{R}_i^{red}{}_{,\ j}\big)=0$。

若 $l+1\leqslant i\leqslant q$，则考虑 (7.21) 右端的因子 $(\tilde{\lambda}_j-j+K+q-1)^{\underline{q-l}}$。由于 $K=\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j+j-i$ 且 $\tilde{\lambda}_i=1$，此因子等于 $(q-i)^{\underline{q-l}}$，当$i>l$时它为零。因此，我们再次得到 $\det\big(\tilde{R}_i^{red}{}_{,\ j}\big)=0$。

~因此， D 没有单值化，引理得证。 □

回顾一下，对于 $b(u)\in\mathcal{A}(u)$， $L_z\big[b(u)\big](x)\in\mathcal{A}((x))$ 表示 $b(u)$ 在 z 处的洛朗级数，其中我们取 $u-z=x$，特别地，$L_0\big[b(u^{-1})\big](x)$ 是 $b(u)$ 在无穷远处的洛朗级数。我们将称伪微分算子 $D\in\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}(u))$，

$$D=\sum_{i=0}^{\infty}b_i(u)\partial_u^{t-i},$$

在 ∞ 处有正则奇点，当且仅当对所有 $i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，

$$L_0\big[b_i(u^{-1})\big](x)=\sum_{k=i}^{\infty}a_{ik}x^k$$

对于某个 $a_{ik}\in\mathcal{A}$。将 $\Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}(u))$中在 ∞ 处具有正则奇点的所有伪微分算子的集合记为 $\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$。

引理 7.5 . 若 $D_1\in\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$ 且 $D_2\in\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$，则 $D_1D_2\in\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$。

证明。写出

$$D_1=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(u)\partial_u^{t-i},\quad D_2=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{a}_j(u)\partial_u^{s-j}.$$

Then

$$D_1D_2=\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{\tilde{a}}_l(u)\partial_u^{t+s-l},$$

其中

$$\tilde{\tilde{a}}_l(u)=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\alpha_{ij}^l(t)a_i(u)(\partial_u^{l-i-j}\tilde{a}_j)(u) \tag{7.22}$$

对于某些复数 $\alpha_{ij}^l(t)$。

我们有 $L_0\big[a_i(u^{-1})\big](x)=\sum_{k=i}^{\infty}a_{ik}x^k$ 和 $L_0\big[\tilde{a}_j(u^{-1})\big](x)=\sum_{k=j}^{\infty}\tilde{a}_{jk}x^k$，对于某些 a_{ik}、$\tilde{a}_{jk}\in\mathcal{A}$。于是（7.22）意味着

$$L_0\big[\tilde{\tilde{a}}_i(u^{-1})\big](x)=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\alpha_{ij}^l(t)\left[\sum_{k_1=i}^{\infty}a_{ik_1}x^{k_1}\right]\left[(-x^2\partial)^{l-i-j}\sum_{k_2=j}^{\infty}\tilde{a}_{jk_2}x^{k_2}\right]. \tag{7.23}$$

由于

$$(-x^2\partial)^{l-i-j}=\sum_{i'=0}^{l-i-j}d_{i'}x^{2(l-i-j)-i'}\partial^{l-i-j-i'}$$

对于某些复数 $d_{i'}$，我们有

$$(-x^2\partial)^{l-i-j}\sum_{k_2=j}^{\infty}\tilde{a}_{jk_2}x^{k_2}=\sum_{k_2=j}^{\infty}\tilde{\alpha}_{ij}^{l,k_2}\tilde{a}_{jk_2}x^{l+k_2-i-j} \tag{7.24}$$

对某些复数 $\tilde{\alpha}^{l,\ k_2}_{ij}$。

注意，对于 $k_1\geqslant i$ 和 $k_2\geqslant j$，我们有 $k_1+k_2+l-i-j\geqslant l$，因此，(7.23) 和 (7.24) 蕴含

$$L_0\left[\tilde{\tilde{a}}_l(u^{-1})\right](x)=\sum_{k=l}^{\infty}\tilde{\tilde{a}}_{lk}x^k$$

对于某个 $\tilde{\tilde{a}}_{lk}\in\mathcal{A}$。 □

引理 7.6. 若 $D\in\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$，则 $D^{-1}\in\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$。

证明。写作

$$D=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(u)\partial_u^{t-i},\quad D^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{a}_j(u)\partial_u^{-t-j}$$

对于某些 $a_i(u)$ $\tilde{a}_j(u)\in\mathcal{A}(u)$、$a_0(u)$ $\tilde{a}_0(u)\neq 0$。然后

$$1=D^{-1}D=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\alpha_{ij}^l(t)\tilde{a}_i(u)(\partial_u^{l-j-i}a_j(u))\partial_u^{-l} \tag{7.25}$$

对于某些复数 $\alpha_{ij}^l\ (t)$。公式 (7.25) 给出

$$\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\alpha_{ij}^l(t)\tilde{a}_i(u)(\partial_u^{l-j-i}a_j(u))=0 \tag{7.26}$$

对于每个 $l\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 和 $a_0(u)\tilde{a}_0(u)=1$。

由于 $D\in\Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u))$，对于每个 $i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们有

$$L_0\left[a_i(u^{-1})\right]=\sum_{k=i}^{\infty}a_{ik}x^k \tag{7.27}$$

其中存在某个 $a_{ik}\in\mathcal{A}$。我们将证明，

$$L_0\left[\tilde{a}_i(u^{-1})\right]=\sum_{k=i}^{\infty}\tilde{a}_{ik}x^k \tag{7.28}$$

对于某个 $\tilde{a}_{ik}\in\mathcal{A}$ 通过对 i 归纳法。

Re关系式(7.27) 对于 $i=0$，连同 $a_0(u)\tilde{a}_0(u)=1$，推出 (7.28) 对于 $i=0$.

固定某个 $l\in\mathbb{Z}$。假设对于任意 $i<l$，(7.28) 成立。那么 (7.27) 蕴含

$$L_0\left[\tilde{a}_l(u^{-1})\right]L_0\left[a_0(u^{-1})\right]=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{l-i}\alpha_{ij}^l(t)\left[\sum_{k_1=i}^{\infty}\tilde{a}_{ik_1}x^{k_1}\right]\left[(-x^2\partial)^{l-i-j}\sum_{k_2=j}^{\infty}a_{jk_2}x^{k_2}\right]. \tag{7.29}$$

然后，与引理 7.5 的证明中相同的计算表明，(7.29) 对于$i=l$蕴含 (7.28)。□

7.4.定理7.1的证明。令 $\mathcal{A} = \big(\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_{n'}\big)/\big(J_n(\bar{\nu}) \otimes J_{n'}(\bar{\eta})\big)$。将投影 $\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_{n'} \to \mathcal{A}$ 应用于微分算子 D_n 和 $D_{n'}$的系数，可得到 $\mathcal{D}(\mathcal{A}(u))$ 中的两个微分算子，我们¯ ¯将分别记为 $\bar{D}_n$ 和 $\bar{D}_{n'}$。

回忆映射 $L_z : \mathcal{D}\big(\mathcal{A}(u)\big) \to \mathcal{D}\big(\mathcal{A}((x))\big)$，参见(5.9)。该映射以显然的方式延拓到伪微分算子。固定某些 $a = 1, \ldots, m$，并考虑微分¯ ¯算子 $L_{z_a}(\bar{D}_n)$ $L_{z_a}(\bar{D}_{n'}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}((x)))$。根据理想 $J_n(\bar{\nu})$ 的构造以及命题-¯ 5.1，微分方程 $L_{z_a}(\bar{D}_n)f = 0$ 具有 n 个解 $f_1, \ldots, f_n$，其形式为 $f_i = x^{n_i} + d_i x^{n_i+1} + \ldots$，其中 $n_{n+1-i} = n + \nu_i^{(a)} - i$。类似地，微分方程 $L_{z_a}(\bar{D}_{n'})f = 0$ 具有 n' 个解 $g_1, \ldots, g_{n'}$，其形式为 $g_i = x^{n'_i} + d'_i x^{n'_i+1} + \ldots$，其中$n'_i = -\eta_i^{(a)} + i - 1$。

因此，由引理 7.2 可知，我们有

$$L_{z_a}(\bar{D}_n \bar{D}_{n'}^{-1}) = \left(\partial_x - \frac{\nu_1^{(a)}}{x} + a_1(x)\right) \ldots \left(\partial_x - \frac{\nu_n^{(a)}}{x} + a_n(x)\right) \times \\ \times \left(\partial_x + \frac{\eta_1^{(a)}}{x} + \tilde{a}_1(x)\right)^{-1} \ldots \left(\partial_x + \frac{\eta_{n'}^{(a)}}{x} + \tilde{a}_{n'}(x)\right)^{-1}$$

对于某些 $a_1(x) \ldots, a_n(x)$ $\tilde{a}_1(x) \ldots, \tilde{a}_{n'}(x) \in \mathcal{A}[[x]]$。

注意到 $1 \in \Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)), (0, 0, \ldots))$。因此，应用引理 7.4 n' 次和引理 7.3 n 次，我们得出结论：

$$L_{z_a}(\bar{D}_n \bar{D}_{n'}^{-1}) \in \Psi\mathcal{D}(\mathcal{A}((x)), (\lambda^{(a)}), \quad a = 1, \ldots, k. \tag{7.30}$$

¯ ¯根据理想 $J_n(\bar{\nu})$ 和 $J_{n'}(\bar{\eta})$ 的构造，微分算子 $\bar{D}_n$ 和 $\bar{D}_{n'}$在无穷远处具有正则奇点。因此，由引理 7.5 和引理 7.6 可得

$$\bar{D}_n \bar{D}_{n'}^{-1} \in \Psi\mathcal{D}_\infty(\mathcal{A}(u)). \tag{7.31}$$

根据理想$\underline{J}_{n-n'}$ 及其在 $\mathcal{A}_{n|n'}$ 中的像 $J_{n|n'}$ 的定义，条件(7.30)和(7.31) 等价于： $J_{n|n'}$ 在投影 $\mathcal{A}_{n|n'} \to_{\sim}$ $_{\sim}\mathcal{A}_{n|n'}/J_{n|n'}$ 下的像为零。但这意味着 $J_{n|n'} \subset J_{n|n'}$，定理得证。

References

[1] A. Chervov和 G. Falqui。《Manin 矩阵与Talalaev 公式》。《物理学杂志A：数学与理论》，41(19):194006，2008 年。[2] J. Comes 和 B. Wilson。《Deligne范畴 Rep(GL_δ) 与一般线性超群的表示》。《表示论》，(16):568–609，2012年。[3] P. Deligne。《对称群 S_t 的表示范畴（当 t 不是自然数时）》。《代数群与齐性空间国际研讨会论文集：孟买2004年》，《数学研究》（Tata基础研究所），19。新德里：Narosa 出版社，2007 年。[4]P. Deligne和 J. S.Milne。《Tannakian 范畴》。载于《Hodge 环、动机与 Shimura 簇》，《数学讲义》第 900 卷，第 101–228 页。Springer，1982 年。https://www.jmilne.org/math/xnotes/tc.html。[5]I. Entova-Aizenbud、V. Hinich 和 V.Serganova。《Deligne 范畴与范畴 Rep($GL(m|n)$) 的极限》。《国际数学研究通知》，2020年(15):4602–4666，2020年8 月。[6] P.Etingof。《复秩中的表示论，II》。《数学进展》，300:473–504，2016 年。[7] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《张量范畴》，《数学调查与专著》第 205 卷。AMS，巴黎，2015年。

[8] P. Etingof和 A. Kannan。《对称张量范畴讲义》，2021年。预印本，arXiv:2103.04878。[9] B. Feigin、E. Frenkel和N.Reshetikhin。Gaudin模型、Bethe拟设与临界层。《Comm.Math. Phys.》，(166):27–62，1994年。[10] E. Frenkel 和 D.Gaitsgory。局部几何朗兰兹对应与仿射Kac–Moody代数。载于《代数几何与数论：纪念Vladimir Drinfeld五十岁生日》，《Progress inMathematics》第253卷，第69–260页。Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，2006年。[11] M. Gaudin。一类自旋哈密顿量的对角化。《J.Physique》，37(10):1089–1098，1976年。[12] C. Huang、E.Mukhin、B.Vicedo和C. Young。 $\mathfrak{gl}_{M|N}$ Bethe拟设方程的解与有理伪微分算子。《Selecta Mathematica》，新系列，2019年6月。[13] E. Mukhin、V. Tarasov 和A. Varchenko。高阶传递矩阵的Bethe特征向量。《J. Stat. Mech. TheoryExp.》，(8)，2006年。P08002，44页。[14] E. Mukhin、V.Tarasov和 A. Varchenko。舒伯特演算与一般线性群的表示。《J.Amer.Math.Soc.》，22(4):909–940，2009年。[15] E.Mukhin、B. Vicedo 和 C.Young。关于 $gl(m|n)$的Gaudin模型。《J.Math.Phys.》，56(5):051704，2015年。[16] L. Rybnikov。Gaudin Bethe拟设猜想的证明。《International MathematicsResearch Notices》，2020年(22):8766–8785，2020年11月。[17] D. Talalaev。量子Gaudin系统。《Funct.Anal.Appl.》，40(1):73–77，2006年。[18] V. Tarasov和F. Uvarov。作用于反交换变量多项式上的Bethe代数的对偶性。《Letters inMathematicalPhysics》，(110):3375–3400，2020年。[19] J. Harris W. Fulton。表示论：第一课程，《Graduate Texts in Mathematics》第129卷。Springer，纽约州纽约，2004年。