一般曲线网格中润滑界面的高级建模

Suhaib Ardah[1,*], **Francisco J. Profito**[2], **Tom Reddyhoff**[1], **和 Daniele Dini**[1]

[1]机械工程系，伦敦帝国理工学院，伦敦，SW7 2AZ，英国[2]机械工程系，圣保罗大学理工学院，S˜圣保罗，S ˜圣保罗，巴西*通讯作者。电子邮箱：s.ardah19@imperial.ac.uk

arXiv:2304.04510v1 [physics.flu-dyn] 10 Apr 2023

摘要

处理涉及复杂表面几何形状的流体流动问题，一直是开展大量数值研究、以适应复杂曲面边界的推动力。一个典型例子是应用贴体曲线坐标变换，实现从物理域到计算域的网格点一一对应。在润滑界面中，由于映射网格中的控制方程复杂、非线性所导致的数值不稳定性以及严苛的运行条件，这种转换颇具挑战性。本文提出了一种基于 Reynolds 方程的有限体积流固耦合（FSI）框架，用于求解映射到计算域非正交曲线网格上的热弹流润滑（TEHL）问题。我们展示了如何在三维曲线网格中表达相关控制方程的强守恒形式，并采用有限体积法进行离散化，以确保流体流动守恒并实施质量守恒空化条件。数值与实验基准测试展现了所提框架在模拟多种润滑问题方面的稳健性与通用性，从而实现一种具有预测能力的计算工具，推动设计转向考虑摩擦学的设计。

关键词：热弹流润滑、贴体曲线坐标、非正交网格、有限体积法

1 引言

由于离散过程简单、边界条件易于施加，且求解离散方程组的计算成本较低，采用结构化矩形网格对控制润滑接触中流体流动行为的雷诺型方程进行数值求解的方法已得到广泛应用。然而，构造不佳的网格可能会产生离散误差，尤其是在几何形状复杂的问题中，从而影响数值解的精度。此外，采用笛卡尔坐标系描述的数学模型，在模拟弯曲或未沿坐标轴方向排列的固体边界处的流动时可能会遇到局限性。在薄膜润滑问题的求解中，雷诺模型被认为是完整纳维–斯托克斯方程的合理近似；然而，传统的基于雷诺方程的方法采用归一化技术，将流体动力学解映射到正交矩形网格上，常常会因忽略润滑接触中的曲线特征而导致解不准确。这种情况在接触入口和出口区域尤为明显，因为这些区域通常具有复杂的曲率。正如 [1, 2]所报告的 [3]，，计算流体力学模型与雷诺模型在接触边界处得出的热解略有差异。为克服这些局限性并提升流固耦合（FSI）求解器的性能，基于计算流体力学（CFD）方法的商业软件得到了广泛应用，这是因为它们能够在求解流体流动问题时捕捉复杂的几何细节。处理复杂几何形状的另一种策略是，利用特定的坐标变换，或通过计算机辅助设计（CAD）模型构建贴体网格，将物理流动域映射到计算结构化域 [2]。

坐标变换方法的应用与发展，尤其是采用贴体曲线坐标系的技术——其坐标线与任意形状物体的边界重合——因能灵活模拟任意物理几何形状周围的流动，在解决计算流体力学问题方面日益受到重视。这类坐标变换方法可将不规则物理区域映射到矩形计算区域，从而更高效地求解控制方程，并进行离散化

误差得以最小化，边界条件也能施加得更加准确。Ogawa 和 Ishiguro [4] 采用有限差分法，在贴体坐标中求解二维纳维–斯托克斯方程，以描述人类心室中的血液不可压缩流动以及振荡翼型上的动态失速过程。 随后，Yang 等人 [5] 继而，Raithby 等人 [6]通过应用非正交曲线坐标，研究了复杂几何形状中的传热和流体流动。最近，Cannata 等人 [7] 尝试再现沿海地区的复杂几何形状，采用逆变形式的纳维–斯托克斯方程的积分形式模拟波传播。Jarrah 和 Rizwan-Uddin [8] 将节点积分法方案推导至二维曲线坐标中，以扩展其适用范围，用于求解由四边形单元离散化的对流–扩散 方程。

上述坐标变换方法的实施要求将控制方程写成相应的逆变分量形式 [9, 10, 11, 12, 13]。然而，根据Thompson [14] 对网格生成技术在流体动力学问题中应用的广泛综述，变换域中的控制方程可能会由于度量系数在梯度项中的微分而出现额外的源项 [14]。尽管如此，此类额外项可以使用守恒离散方法进行处理，例如有限体积法（FVM）。有限体积法由于其固有的守恒特性以及在离散形式中确保局部和全局流量守恒的能力，通常用于求解流体动力学问题。在这种情况下，以逆变分量形式写出的变换方程还应进一步表示为守恒形式，以便正确应用 FVM。当使用 FVM 对方程进行离散化时，这一点尤其重要，因为使用其他离散化方法（例如 有限差分法和有限元法）时不会遇到此类问题；这些技术不要求方程采用强守恒形式，而这正是其固有的局限性。读者可参阅 [2, 13, 14]，以详细了解坐标变换技术及其在工程应用中的优势。

据作者所知，利用坐标变换方法推导控制方程并求解完全耦合的热弹流体动力润滑问题的研究鲜有报道。Han 和 Paranjpe [15] 提出了一种有限体积模型，利用在贴体坐标系中建立的能量方程研究滑动轴承的热流体动力性能；然而，他们对轴瓦–油界面采用了不切实际的热边界条件，且由于几何形状的共形性，生成压力不超过 100 MPa。此外，Roberts 等人 [16] 采用基于有限元的方法，利用曲线壳单元对多相润滑问题进行建模；但是，他们的分析忽略了任何可能导致受限流体行为发生变化的热效应和空化相关效应。

本文提出了一种新的集成公式，用于在贴体归一化曲线网格上求解点接触热弹流润滑（TEHL）问题。通过使用坐标变换的雅可比矩阵和度量张量，将物理笛卡尔坐标中的控制方程系统地变换为非正交归一化曲线坐标，从而将导数转换到计算域中新定义的归一化曲线坐标系统中。此外，还推导了逆变速度分量，以避免与交错速度分量的表面排列相关的潜在数值误差（如 [17], 所建议的），并获得变换后控制方程的守恒形式，以便适当地应用有限体积法。耦合控制方程，包括固体变形方程、$(p-\theta)$广义雷诺方程和流体能量方程，在一种高效且完全守恒的基于有限体积法的流固耦合（FSI）框架内进行迭代求解。所提出框架的守恒特性具有优势，因为它能够更直接地将质量守恒的$(p-\theta)$空化模型纳入离散化过程。采用数值基准测试以及通过红外光谱法测量的实验热数据，对所开发的框架进行验证。结果表明，所开发的框架能够成功预测润滑性能，包括接触温度、生成的流体压力、牵引系数和油膜厚度分布。尽管本文工作聚焦于反共形接触，但所提出的方法具有适用性，并且可以轻松调整，用于求解存在复杂几何形状时的任何润滑接触问题。

本研究的总体框架如下。流体流动问题的控制方程，包括（$p-\theta$）广义雷诺方程、流体能量方程和流体速度方程，分别以笛卡尔坐标和归一化曲线坐标下的强守恒形式在第2 节中推导。第3 节说明如何使用有限体积法求解变换后的微分方程，而第3.3 节讨论了用于数值求解所推导方程的流固耦合框架的架构。在第4 节中，将开发的框架与数值和实验结果进行对比，以评估其有效性；随后在第5 节概述本文工作的主要发现及潜在应用。

2 数学公式

本节介绍了在归一化曲线坐标系下热弹流润滑控制方程的统一推导，该坐标系可在保持方程守恒性质的同时，在单一结构化计算域内求解完整的热弹流润滑问题。附录 A中简要概述了笛卡尔坐标与一般曲线坐标之间的变换关系。此外，附录 B总结了在这些坐标系中表示的任意标量物理量输运方程的一般强守恒形式。

所提出的热弹流润滑框架基于图 1**A**所示的几何构型建立，该构型是典型的圆形弹性流体动力学（EHD）接触。该框架隐式考虑了润滑剂流变性质（例如，动力黏度、密度、温度导热系数和比热容）对温度、压力和剪切速率效应的依赖性。不过，为简洁起见，本文所讨论的等温和热情形中采用的流变模型仅在相关处予以说明。为在归一化曲线坐标中推导热弹流润滑控制方程，采用了从物理笛卡尔空间 x^i (x、y、z) 到映射的归一化计算空间 X^i（X、Y、Z）的以下坐标变换，

$$
\begin{aligned}
x &= (L_x)X, && 0 \le x \le L_x \quad \text{and} \quad 0 \le X \le 1, \\
y &= \left(L_y\right)Y = \left(\frac{L_x}{r_{xy}}\right)Y, && 0 \le y \le L_y \quad \text{and} \quad 0 \le Y \le 1, \\
z &= hZ + z_1 = (\varepsilon L_x)(HZ + Z_1), && z_1 \le z \le (h + z_1) \quad \text{and} \quad 0 \le Z \le 1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 L_x 和 L_y 分别表示润滑界面在 x 方向和 y 方向上的特征长度，$h(x,y)$ 表示润滑剂膜厚度，z_1 表示下表面的高度（$z_1 = 0$ 在本研究中假定为）。有关本文所用参数和变量的汇总，请参阅附录 G 。

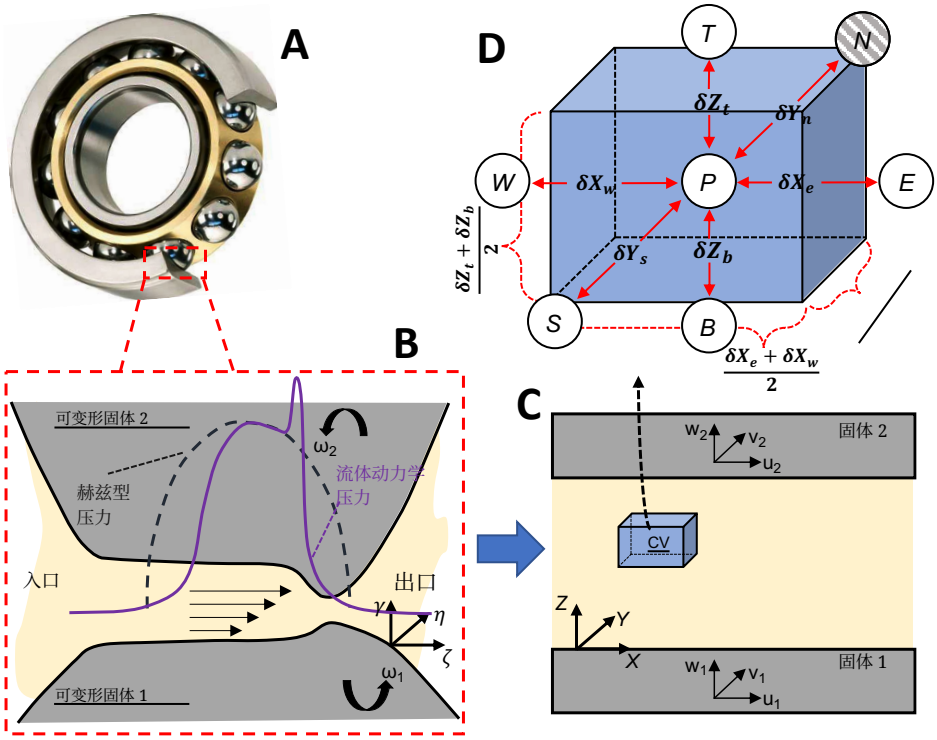

图 1。 所提出框架所考虑几何体的特征。（**A**）描绘了深沟球轴承，其中滚珠与滚道之间形成点接触，而（**B**）提供了接触区域的放大示意图，展示了受限润滑剂在变形表面之间流动，并投影到曲线网格系统（ζ, η, γ）上。（**C**）展示了表示润滑接触的变换归一化计算域（X、Y、Z），而（**D**）阐明了相对于控制体（控制体）的中心节点“P”、周围节点位置以及界定“P”的控制体面的控制体属性。

2.1 使用 Elrod-Adams 空化模型的广义雷诺方程 $(p-\theta)$ 空化模型Th

e genera ised Reynolds 方程 or 广义雷诺方程）i s coined as bel e [18]。基于 JFO 空化边界条件，用于考虑润滑剂性质沿油膜厚度变化的传统雷诺方程进行了改进，以考虑空化和油膜破裂对接触区域内润滑剂流动的影响，本研究通过采用 Elrod–Adams（$p-\theta$）空化模型来考虑空化现象 [19, 20]，该模型会自动满足空化的互补 Jakobsson、Floberg 和 Olsson（JFO）边界条件 [21, 22, 23]。为此，需要对广义雷诺方程进行修改，引入流动参数 θ，以考虑空化区域内的双相混合物 [24, 25]。因此，（$p-\theta$）广义雷诺方程可用笛卡尔坐标下的强守恒向量形式表示为

$$\underbrace{\nabla\cdot(\varepsilon\nabla p)}_{Poiseuille\ Term} = \underbrace{\nabla\cdot\left[\theta\left(\rho_e^*\boldsymbol{u_m}+\rho_1^*\boldsymbol{u_1}\right)\right]}_{Couette\ Term} + \underbrace{\frac{\partial(\theta\rho_e)}{\partial t}}_{Transient\ Term}, \tag{2}$$

其中，包含润滑剂性质沿油膜厚度方向变化的系数定义如下

$$\varepsilon=\frac{\eta_e}{\eta_e'}\rho'-\rho'', \qquad \rho_e^*=2\eta_e\rho', \qquad \rho_1^*=\rho_e-\rho_e^*, \qquad \rho_e=\int_{z_1}^{z_2}\rho\,dz.$$

在上述方程中，$\nabla(\cdot)=\left[\frac{\partial}{\partial}\mathrm{x},\ \frac{\partial}{\partial}\mathrm{y}\right]^T$ 表示笛卡尔坐标中的梯度算子，而 $\mathrm{u_m}=[\mathrm{u}_m、\ \mathrm{v}_m]^T$ 和 $\mathrm{u_1}=[\mathrm{u}_1,\mathrm{v}_1]^T$ 分别表示 x 方向和 y方向的卷吸速度向量及下表面速度向量。积分项 η_e、η_e'、ρ'、ρ'' 和 ρ_e^* 定义见附录 D。

与其他空化相关表述相比，空化的 JFO 边界条件更为可取，因为它们在整个润滑区域内（包括破裂边界和再形成边界处）实现质量守恒。根据这一表述，分数膜含量（θ）的大小由以下互补条件 [26]决定

$$(p-p_{cav})(1-\theta)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} p>p_{cav} & \rightarrow \quad \theta=1 & \text{pressured zones,}\\ p=p_{cav} & \rightarrow \quad 0\le\theta<1 & \text{cavitated zones.}\end{cases} \tag{3}$$

考虑方程 1 的坐标变换，并结合方程 33中空间导数的变换关系，以及附录 G中总结的因变量归一化参数，无量纲（$p-\theta$）广义雷诺方程可在归一化坐标中表示为强守恒向量形式：

$$\nabla_X\cdot\left(\boldsymbol{\Gamma_D}\nabla_X\bar{p}\right)=\nabla_X\cdot\left[\theta\left(\boldsymbol{\Gamma_{CM}U_m}+\boldsymbol{\Gamma_{C1}U_1}\right)\right]+\frac{\partial(\bar{\rho}_e\theta H)}{\partial\tau}, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma_D}=\bar{\varepsilon}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r_{xy}^2\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Gamma_{CM}}=\bar{\rho}_e^*\begin{bmatrix}H & 0\\ 0 & Hr_{xy}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Gamma_{C1}}=\bar{\rho}_1^*\begin{bmatrix}H & 0\\ 0 & Hr_{xy}\end{bmatrix}.$$

同样，在上述方程中，$\nabla_X(\cdot)=\left[\frac{\partial}{\partial}X,\ \frac{\partial}{\partial}Y\right]^T$ 是归一化坐标中的梯度算子，且$\boldsymbol{U_m}=[U_m、\ V_m]^T$和$\boldsymbol{U_1}=[U_1,V_1]^T$ 分别是X方向和Y方向上的无量纲卷吸和下表面速度向量。所有相关的无量纲参数见附录D 和附录G。

2.2 膜厚方程

点接触弹流润滑中润滑剂间隙的几何形状可用笛卡尔坐标和归一化坐标表示为 [27]

$$h(x,y)=h_0+\frac{x^2}{2R_x}+\frac{y^2}{2R_y}+\delta(x,y), \tag{5a}$$

$$H(X,Y) = H_0 + A_X X^2 + A_Y Y^2 + \bar{\delta}(X,Y), \tag{5b}$$

其中，h_0 为接触物体之间的刚性间距，R_x 和R_y 分别为接触中心处接触固体在x方向和y方向上的等效曲率半径，而 δ 为压力引起的表面法向位移，对于三维弹性半空间，该位移通过以下布辛涅斯克卷积积分计算得出

$$\delta(x,y) = \left(\frac{2}{\pi E'}\right) \iint_{\Omega} \frac{p(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx'dy', \tag{6a}$$

$$\bar{\delta}(X,Y) = \left(\frac{2L_x p_0}{\pi E' h_0 r_{xy}}\right) \iint_{\bar{\Omega}} \frac{\bar{p}(X',Y')}{\sqrt{(X-X')^2 + r_{xy}^{-2}(Y-Y')^2}} dX'dY', \tag{6b}$$

其中 $E' = 2\left[(1-\nu_1{}^2)/E_1) + (1-\nu_2{}^2)/E_2\right]^{-1}$ 为有效弹性模量。

2.3 流体能量方程

Th并或裁，l稚量方程缩黏性流体的流体薄膜润滑，以及由各向同性介质中傅里叶定律支配的通过扩散进行的内部传热，可用温度的强守恒向量形式在笛卡尔坐标中表示为 [17, 28]

$$\frac{\partial\left(\rho c_p T\right)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho c_p \boldsymbol{\upsilon} T\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}T) + Q_p + Q_{cp} + Q_\Phi + \dot{q}_v,$$

$$Q_p = \underbrace{\beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right)}_{\substack{\text{Compressive}\\ \text{Heating/Cooling}}}, \qquad Q_{cp} = \underbrace{\rho T\left(\frac{\partial c_p}{\partial t} + \boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{\nabla}c_p\right)}_{\substack{\text{Enthalpic}\\ \text{Heating/Cooling}}}, \qquad Q_\Phi = \underbrace{\eta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]}_{\substack{\text{Shear}\\ \text{Heating}}}, \tag{7}$$

其中， ρ、c_p、k、 β 和 η 分别为润滑剂的密度、热容、导热系数、热压缩性和动力黏度。此外， $\boldsymbol{\upsilon} = [u、v、w]^T$ 为流体速度矢量，而 $\dot{q}_v$ 为由于任意源项而产生的流体体积内热源或热汇速率，例如粗糙峰-粗糙峰接触所释放的热量；在当前工作中，该项被忽略。

使用附录 A 中总结的坐标变换关系，并结合附录 B所示的适用于一般非正交曲线坐标系的标量输运方程的强守恒形式，无量纲能量方程可在归一化坐标中写成强守恒向量形式：

$$\mathrm{Pe}\left[\frac{\partial\left(H\bar{\rho}\bar{c}_p\bar{T}\right)}{\partial\tau}\right] + \mathrm{Pe}\left[\boldsymbol{\nabla}_X\cdot\left(\bar{\rho}\bar{c}_p\tilde{\boldsymbol{V}}\bar{T}\right)\right] = \boldsymbol{\nabla}_X\cdot([\tilde{\boldsymbol{\kappa}}]\boldsymbol{\nabla}_X\bar{T}) + \bar{\bar{Q}}_p + \bar{\bar{Q}}_{cp} + \bar{\bar{Q}}_\Phi + \bar{\bar{\dot{q}}}_V, \tag{8}$$

$$\bar{\bar{Q}}_p = \mathrm{Br}^*\bar{\beta}\bar{T}\left(H\frac{\partial\bar{p}}{\partial\tau} + \tilde{V}^X\frac{\partial\bar{p}}{\partial X} + \tilde{V}^Y\frac{\partial\bar{p}}{\partial Y}\right), \qquad \bar{\bar{Q}}_{cp} = \mathrm{Pe}\bar{\rho}\bar{T}\left(H\frac{\partial\bar{c}_p}{\partial\tau} + \tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_X\bar{c}_p\right),$$

$$\bar{\bar{Q}}_\Phi = \frac{\mathrm{Br}\bar{\eta}}{H^3}\left[\left(\frac{\partial\tilde{V}^X}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_{xy}}\frac{\tilde{V}^Y}{\partial Z}\right)^2\right], \qquad \bar{\bar{\dot{q}}}_V = H\bar{\dot{q}}_V,$$

$$[\tilde{\boldsymbol{\kappa}}] \approx \bar{k}\begin{pmatrix} \varepsilon^2 H & 0 & -\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial X}Z\right) \\ 0 & \left(\varepsilon r_{xy}\right)^2 H & -\left(\varepsilon r_{xy}\right)^2\left(\frac{\partial H}{\partial Y}Z\right) \\ -\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial X}Z\right) & -\left(\varepsilon r_{xy}\right)^2\left(\frac{\partial H}{\partial Y}Z\right) & \left(\frac{1}{H}\right)+\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2+\left(r_{xy}\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2\right]\frac{Z^2}{H} \end{pmatrix}$$
$$\approx \bar{k}\begin{pmatrix} \varepsilon^2 H & 0 & 0 \\ 0 & \left(\varepsilon r_{xy}\right)^2 H & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{H}\right)+\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2+\left(r_{xy}\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2\right]\frac{Z^2}{H} \end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{V}} = \left[\tilde{V}^X,\ \tilde{V}^Y,\ \tilde{V}^Z\right]^T$ 是归一化坐标系中的无量纲流体速度逆变向量，并且 $[\tilde{\boldsymbol{\kappa}}]$ 是无量纲扩散矩阵。所有其他相关的无量纲参数见附录 D 和附录G。根据润滑理论，润滑剂膜的厚度量值远小于接触的其他尺寸。在这种情况下，假定沿油膜厚度方向的流体压力梯度以及控制方程中与缩放因子 $\varepsilon = \left(h_0/L_{x\text{相关的项}y}\right)$ 均可忽略不计，即 $\partial p/\partial z \approx 0$ 和 $O(\varepsilon^n) << 1$，因此省略了扩散矩阵的非对角元素。然而，在曲率显著的接触边界处，或在缩放因子 ε 并不很小的区域（即 入口和出口区域），这些被忽略的项可能会发挥重要作用。此外，沿油膜厚度方向的热对流以及沿接触面方向的热扩散（即，$[\tilde{\boldsymbol{\kappa}}]$主对角线上的前两个元素）在润滑问题中通常会被忽略，但为保持所提出仿真框架的通用性，仍保留了它们以方便使用。

2.4 流体速度分量

由纳维-斯托克斯方程推导广义雷诺方程时获得的接触界面上润滑剂流动的笛卡尔速度分量 $\boldsymbol{v} = [u、v、w]^T$可写为

$$u(x,y,z) = u_1 + \frac{\partial p}{\partial x}I_p + u_s I_s, \tag{9a}$$
$$v(x,y,z) = v_1 + \frac{\partial p}{\partial y}I_p + v_s I_s, \tag{9b}$$
$$w(x,y,z) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_1}^{z}\rho u\, dz' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_1}^{z}\rho v\, dz' \tag{9c}$$

其中 $u_{1,2}$ 和 $v_{1,2}$ 分别是表面在 x-和 y-方向上的速度，而 u_s 和 v_s 分别是相应方向上的滑动速度。积分系数可用上述表达式表示，具体见附录 I_p 和 I_s 。此外，通过对附录 D中所示的质量守恒方程进行积分，可以计算出膜厚方向上的笛卡尔速度分量。附录 C。

考虑附录 A 中总结的坐标变换关系，以及附录 G中总结的因变量归一化参数，无量纲流体速度逆变分量 $\tilde{\boldsymbol{V}} = \left[\tilde{V}^X,\ \tilde{V}^Y,\ \tilde{V}^Z\right]^T$ 在归一化坐标系中可表示为

$$\tilde{V}^X(X,Y,Z) = H\underbrace{\left(U_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial X}\bar{I}_p + U_s\bar{I}_s\right)}_{U} = HU, \tag{10a}$$
$$\tilde{V}^Y(X,Y,Z) = r_{xy}H\underbrace{\left(V_1 + r_{xy}\frac{\partial \bar{p}}{\partial Y}\bar{I}_p + V_s\bar{I}_s\right)}_{V} = r_{xy}HV, \tag{10b}$$
$$\tilde{V}^Z(X,Y,Z) = W - \left(\frac{\partial H}{\partial X}U + r_{xy}\frac{\partial H}{\partial Y}V\right)Z, \tag{10c}$$

其中无量纲积分系数 $\bar{I}_p$ 和 $\bar{I}_s$ 列于附录D。

3 数值求解

本节演示了如何在映射归一化计算域上使用有限体积法（有限 – θ体积法）求解广义雷诺方程和流体能量方程 [2, 17, 29, 30]。采用有限体积法方法对第 2 节推导的控制热弹流润滑接触中润滑剂流动的偏微分方程（PDE）进行数值求解， 因为它能够自动实现质量流量守恒， [29], 尤其是在应用PDE的强守恒形式时， [1], 正如本研究所采用的方法。无论选择何种坐标系，提供控制输运方程的强守恒形式对于有限体积求解都至关重要，因为高斯散度定理能够方便地将散度的体积分转换为通量的面积分。此外，有限体积法在数学上相对直接，尤其适用于物理量守恒至关重要的问题。有限体积法所固有的守恒特性对于通过应用质量守恒空化模型预测润滑接触中的空化区域至关重要。对于本研究采用的 Elrod-Adams（$p-\theta$）空化模型，有限体积求解更具优势，因为通过对（$p-\theta$）广义雷诺方程中的对流项采用基于迎风格式的处理，可自动实现空化的互补JFO 边界条件 [26, 29]。此外，在映射网格上应用有限体积法格式已证明能够有效考虑由非正交坐标变换产生的对流和扩散交叉导数项的贡献 [31, 32, 33]。

3.1 ($p-\theta$)广义雷诺方程的有限体积求解

无量纲稳态（$p-\theta$）广义雷诺方程的有限体积离散化，首先对式 4 在图 1D 所示的控制体（CV）上积分，然后应用高斯散度定理，将散度的体积分转换为通量的面积分。因此：

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla_X \cdot (\mathbf{\Gamma}_D \nabla_X \bar{p})\, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla_X \cdot \left[\theta\left(\mathbf{\Gamma}_{CM}\boldsymbol{U}_m + \mathbf{\Gamma}_{C1}\boldsymbol{U}_1\right)\right] d\mathcal{V}, \tag{11a}$$

$$\iint_{\partial\mathcal{S}} (\mathbf{\Gamma}_D \nabla_X \bar{p}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, d\mathcal{S} = \iint_{\partial\mathcal{S}} \left[\theta\left(\mathbf{\Gamma}_{CM}\boldsymbol{U}_m + \mathbf{\Gamma}_{C1}\boldsymbol{U}_1\right)\right] \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, d\mathcal{S}, \tag{11b}$$

其中 $\mathcal{V}$ 是包围节点 XY平面上定义的二维无量纲广义雷诺方程的控制体体积，高度为单位值），该节点为 P，如图 1D 所示，且 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于控制体面 $\mathcal{S}$的单位向量。控制体面上的积分可采用中点法则近似，从而在每个面的质心处计算扩散通量和对流通量 [17, 26, 29]。这需要将面积分表示为穿过控制体面的扩散通量和对流通量之和，同时注意控制体相对两侧的表面单位向量符号相反。因此，以中心控制体节点（P）及其周围控制体面（f）表示的式 11b 的离散形式为

$$\sum_{f\sim nb(P)} (\mathbf{\Gamma}_D \nabla_X \bar{p})_f \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_f = \sum_{f\sim nb(P)} \left[\theta\left(\mathbf{\Gamma}_{CM}\boldsymbol{U}_m + \mathbf{\Gamma}_{C1}\boldsymbol{U}_1\right)\right]_f \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_f, \tag{12}$$

其中，$\mathrm{S}_f = (S_f\, \vec{\boldsymbol{n}}f)$ 表示垂直于单位高度控制体面的表面向量，其中包含通量的方向以及通量所通过的面长/面宽。控制体面处的扩散通量和对流通量分别采用基于相邻控制体质心处物理量的中心差分（CDS）和迎风差分（UWD）格式进行近似。

最初提出的半系统方法 [34] 在本研究中用于提高 EHL 问题迭代数值求解的稳定性。具体做法是利用影响系数，将 GRE 右端项（R.H.S）Couette 项中节点位置（i，j）处的油膜厚度表示为相邻节点压力的函数，影响系数 $\left(D_{i,\,j\,k,\,\,l}\right)$ [35, 36] 由布辛涅斯克积分的离散化得到，并假设压力分布为分段零阶多项式，如式 13所示。这种方法确保了 GRE 求解中系数矩阵的对角占优，从而避免矩阵病态，稳定线性方程组的迭代求解；这一点在薄膜问题或严苛载荷条件下尤为重要，因为此时流体黏度可能增大数个数量级。

$$H_{i,j} = H_0 + \frac{X_i^2 + Y_j^2}{2R'} + \left[D^{i,j}_{k-1,l}\left(\bar{p}_{k-1,l}\right) + D^{i,j}_{k,l}\left(\bar{p}_{k,l}\right) + D^{i,j}_{k+1,l}\left(\bar{p}_{k+1,l}\right)\right]. \tag{13}$$

因此，对于半系统 EHL 求解，由无量纲（$p-\theta$）广义雷诺方程的有限体积离散化推导出的线性方程组可写为

$$\boldsymbol{\alpha}(\bar{p}_W)+\boldsymbol{\beta}(\bar{p}_P)+\boldsymbol{\gamma}(\bar{p}_E)+\boldsymbol{\zeta}(\bar{p}_N)+\boldsymbol{\lambda}(\bar{p}_S)=\boldsymbol{\varphi}, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$、$\boldsymbol{\zeta}$、$\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义见附录 E。

3.2 流体能量方程的有限体积求解

流体薄膜润滑无量纲稳态能量方程的有限体积离散化遵循与广义雷诺方程相同的步骤，但流体能量方程的离散化是在三维网格中进行的。因此，对式 8 在图 1D 所示的控制体（CV）上积分，然后应用高斯散度定理，可得

$$\mathrm{Pe}\iiint_{\mathcal{V}}\left[\nabla_{\mathrm{X}}\cdot\left(\bar{\rho}\bar{c}_p\tilde{\boldsymbol{V}}\bar{T}\right)\right]d\mathcal{V}=\iiint_{\mathcal{V}}\nabla_{\mathrm{X}}\cdot\left(\left[\bar{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}}\right]^T\nabla_{\mathrm{X}}\bar{T}\right)d\mathcal{V}+\iiint_{\mathcal{V}}\bar{\tilde{Q}}_T\,d\mathcal{V}, \tag{15a}$$

$$\mathrm{Pe}\iint_{\partial\mathcal{S}}\left(\bar{\rho}\bar{c}_p\tilde{\boldsymbol{V}}\bar{T}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,d\mathcal{S}=\iint_{\partial\mathcal{S}}\left(\left[\bar{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}}\right]^T\nabla_{\mathrm{X}}\bar{T}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,d\mathcal{S}+\iiint_{\mathcal{V}}\bar{\tilde{Q}}_T\,d\mathcal{V}. \tag{15b}$$

除了用中点法则近似各控制体面质心处的通量积分外，源项还可近似为其在控制体中心处的大小与控制体体积的乘积。因此， [17]:

$$\mathrm{Pe}\sum_{f\sim nb(P)}\left(\bar{\rho}\bar{c}_p\tilde{\boldsymbol{V}}\bar{T}\right)_f\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}_f=\sum_{f\sim nb(P)}\left(\left[\bar{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}}\right]^T\nabla\bar{T}\right)_f\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}_f+\left(\bar{\tilde{Q}}_T\right)_P\cdot(\Delta\mathcal{V})_P, \tag{16}$$

其中， ΔV 为控制体体积，而 Sf 为垂直于控制体面的表面向量，其中包含通量的方向以及通量通过的面面积。对流通量和扩散通量也分别采用迎风格式和中心差分格式进行近似。因此，由无量纲流体能量方程的有限体积离散化得到的代数方程组可写为

$$\boldsymbol{\alpha}(\bar{T}_W)+\boldsymbol{\beta}(\bar{T}_P)+\boldsymbol{\gamma}(\bar{T}_E)+\boldsymbol{\zeta}(\bar{T}_N)+\boldsymbol{\lambda}(\bar{T}_S)+\boldsymbol{\phi}(\bar{T}_T)+\boldsymbol{\psi}(\bar{T}_B)=\boldsymbol{\varphi}, \tag{17}$$

其中上述系数定义见附录 F。

3.3 流固耦合框架

作者在 [37] 中开发的 FSI 框架用于模拟二维 TEHL 问题。本研究将该框架扩展，以适配三维 TEHL 求解，并采用前文所述的数学和数值公式。该框架首先初始化 EHL 求解器，在忽略温度变化的情况下计算润滑剂压力和油膜厚度。随后，将 EHL 求解器的结果输入 TEHL 求解器，以更新润滑剂膜和固体中的温度分布。当压力解和热解的相对误差均降低至低于特定收敛准则时，即达到整体收敛。本文将简要介绍 EHL 和 TEHL 求解器；有关仿真框架的详细说明，请读者参阅 [37]中的第 4.1 节。

EHL 求解器通过迭代过程计算润滑剂压力和油膜厚度。采用迭代式 Gauss-Seidel 线松弛方法，润滑剂压力（$\bar{p}$）和油膜分数（θ）通过求解无量纲（$p-\theta$）广义雷诺方程（方程 14）进行计算。同时，黏度（$\bar{\eta}$）和密度（$\bar{\rho}$）会根据压力和剪切速率效应，利用预定义的流变模型进行更新。同时，使用方程（δ）评估压力引起的表面变形及其对油膜厚度（H）的影响，其中采用离散卷积和快速傅里叶变换（DC-FFT）算法 [35, 38] 高效地求解 Boussinesq积分。当连续迭代中计算所得压力（$\bar{p}$）之间的相对误差达到最小，并且接触区域Ω上的力平衡（点接触问题中以方程 18 所示的无量纲形式）实现时，EHL 迭代过程终止。

$$\iint_{\Omega}\bar{p}(X,Y)\,dX\,dY=\frac{2\pi}{3}. \tag{18}$$

随后，收敛的EHL结果初始化热循环，同时迭代计算润滑剂($\bar{T}$) 和固体温度（$\bar{T}_{s1,2}$）并更新流体的流变行为。无量纲

流体能量方程（方程 17）采用高斯-赛德尔线松弛法求解，而固体温度的计算方法类似，但忽略任何源项。热流体求解器与热固体求解器之间的耦合，通过共轭传热方法在流固界面处施加热流连续性来实现 [39]。当相邻迭代步之间润滑剂和固体的温度、传递的热流以及流固界面处温度的误差均降至指定容差以下时，热循环即达到数值收敛。

EHL 求解器和热求解器收敛后，会对压力和温度进行最终收敛检查，以评估热弹流润滑（TEHL）解的整体收敛性。如果未达到整体收敛，则会再次调用 EHL 求解器，重复上述步骤，直至达到整体收敛。为提高迭代求解器的收敛性，模拟框架中集成了带 Aitken 加速的点 Gauss-Seidel 方法（PGMA）。PGMA 旨在耦合流固相互作用问题中的黑箱求解器 [40]，，其基于松弛参数的动态变化。事实证明，与采用恒定松弛参数的固定点 Gauss-Seidel 方法（PGMF）相比，PGMA 在模拟二维热弹流润滑（TEHL）问题时更为有效 [37]。PGMA 方法会更新松弛

因子 (ω_ψ^n) 的大小，对任意场变量 ψ 使用当前 $\left(\vec{}\right)$ 和之前的 $\left(\vec{}^{\,1}\right)$

迭代过程如下

$$\omega_\psi^n = \omega_\psi^{n-1}\left[\frac{\left(\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n-1}\right)^T\cdot\left(\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n-1}-\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n}\right)}{\left(\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n}-\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n-1}\right)^T\cdot\left(\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n}-\vec{\mathfrak{R}}_\psi^{n-1}\right)}\right], \tag{19a}$$

$$\omega_\psi^n \leftarrow \min\left[\max\left(\omega_\psi^n,\,\omega_{min}\right),\,\omega_{max}\right],$$

其中， ω_{min} 和 ω_{max} 通常分别设为 0.001 和 1.0，并施加这两个参数以限制 ω_ψ^n 的幅值。给定迭代n 中场变量的残差和更新量计算如下：

$$\begin{aligned}\vec{\mathfrak{R}}_\psi^n &= \vec{\psi}^n - \vec{\psi}^{n-1},\\ \vec{\psi}^n &= \vec{\psi}^{n-1} + \omega_\psi^n\left(\vec{\mathfrak{R}}_\psi^n\right).\end{aligned} \tag{19b}$$

有关 PGMA 的详细实现说明，以及与分区式 PGMF 技术相比，PGMA 所带来的收敛速率提升的全面分析，请参阅 [37] 。

4 结果与讨论

通过文献中具有代表性的热载点接触数值结果，评估所开发的热弹流润滑仿真框架的准确性。此外，还分析了采用红外光谱法获得的温度测量结果和实验牵引数据，以进一步验证所提出框架的正确性。根据所考察的各项相关研究，选用相应的流变模型来表征润滑剂行为随压力、温度和剪切速率变化的特性。

4.1 数值基准

第一个数值基准基于 Kaneta 等人开展的一系列研究 [41] ，旨在研究滑滚比（SRR）对 Si_3N_4-钢接触润滑性能的影响。油的黏度随压力和温度变化的效应采用热 Roelands 模型（公式 20a）描述，并采用 Eyring 模型（公式 20b）考虑润滑剂的非牛顿行为，而油的密度则根据 Dowson 和 Higginson 关系式（公式 20c）计算。热弹流润滑（TEHL）模拟所需的所有参数和工况均可在 [41]中找到。

$$\eta = \eta_0\,\exp\left\{(\ln\eta_0+9.67)\times\left[-1+\left(1+5.1\times10^{-9}p\right)^{\frac{\alpha}{5.1\times10^{-9}(\ln\eta_0+9.67)}}\left(\frac{T-138}{T_0-138}\right)^{-\frac{\beta(T_0-138)}{(\ln\eta_0+9.67)}}\right]\right\}, \tag{20a}$$

$$\eta^* = \frac{\eta(\tau_e/\tau_0)}{\sinh(\tau_e/\tau_0)}, \tag{20b}$$

$$\rho = \rho_0\left(1+\frac{0.6\times10^{-9}p}{1+1.7\times10^{-9}p}\right)[1-0.00065(T-T_0)]. \tag{20c}$$

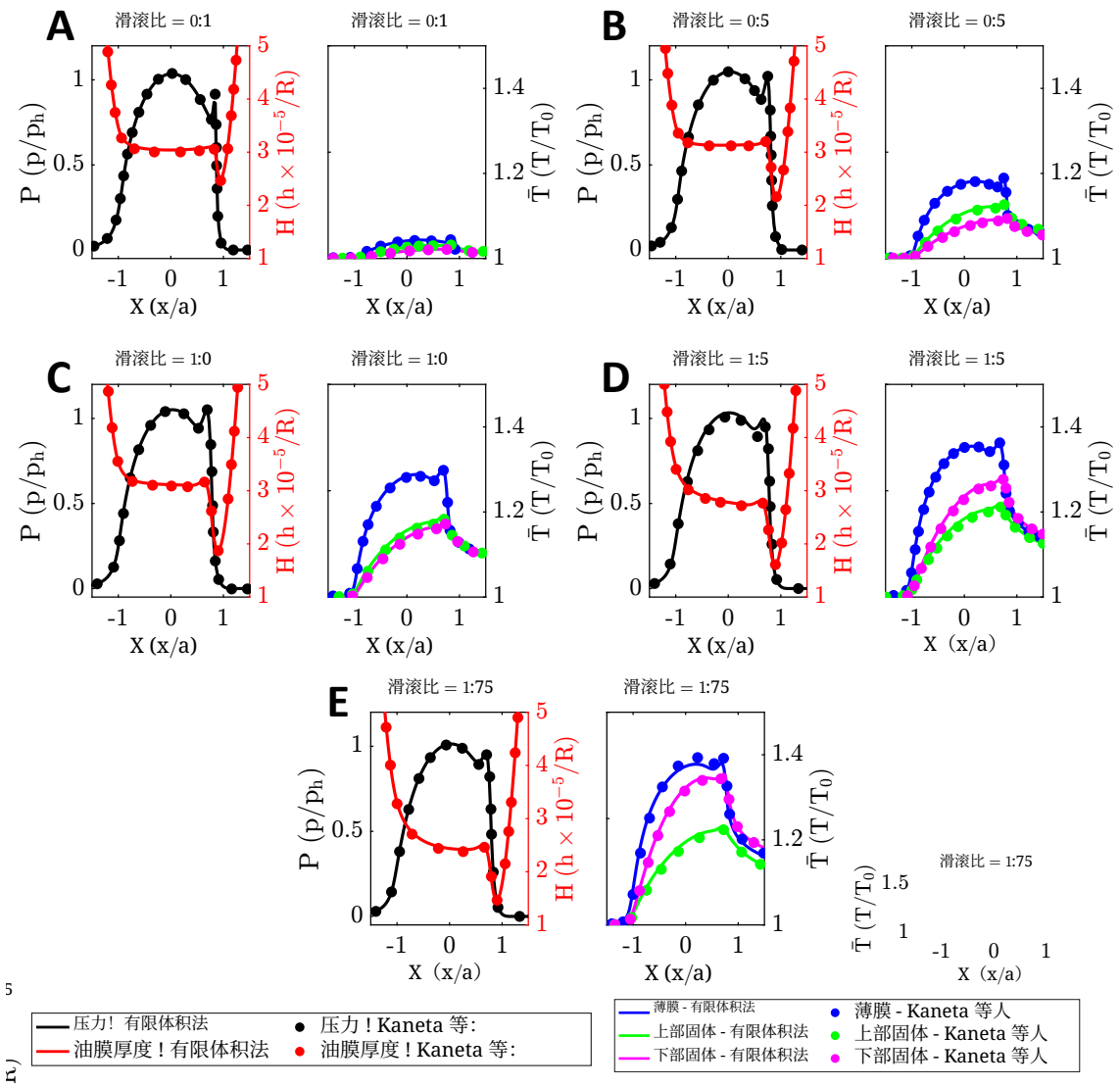

图2。使用所提出的热弹流润滑框架（曲线）计算的中平面（Y = 0）无量纲压力和油膜厚度分布，以及润滑剂膜、钢（下部固体）和Si_3N_4（上部固体）沿卷吸方向X的表面温度，与 Kaneta 等人 [41]中的对应结果（散点）进行比较。各工况分别为$p_h = 1$ 吉帕、$R' = 0.02$ m、$T_0 = 303$ K、$u_e = 1.32$ m/s，滑滚比分别为（A）SRR = 0.1、（B）SRR =0.5、（C）SRR = 1.0、（D）SRR = 1.5和（E）SRR = 1.5。

由图2 可知，压力、油膜厚度和温度分布均具有良好的一致性。如图所示，随着滑滚比的增大，油膜温度升高，这是由于油膜中平面附近剪切产生的热量增加所致，从而解释了为何无论滑滚比如何变化，润滑剂温度都高于表面温度。由于接触区域内温度升高，流体黏度趋于降低，导致在最高滑滚比下油膜厚度减小。此外，表面温度的差异可由表面热导率不同来解释，其中Si_3N_4 表面（k = 23W/mK）温度更高，因为与钢（k = 46 W/mK）相比，其带走的热量较少。对于低滑滚比，情况确实如此；而在较高滑滚比下，情况则有所不同，此时对流效应占主导地位。

用于验证所开发的热弹流润滑仿真框架的第二个数值基准基于Kaneta 等人开展的另一项研究 [42]，旨在评估润滑接触的热行为

在考虑热性质不同的固体时。点接触构型包括钢-SiC、钢-Al_2O_3，和钢-Si_3N_4 接触，其中每对固体之间由无级变速器（CVT）流体隔开，并承受最大赫兹压力 $p_h = 0$。75 吉帕。热弹流润滑模拟所需的输入参数，例如固体和润滑剂的热物理性质，可见 [42]。润滑剂的黏度和密度随压力、温度变化的关系由以下 Ohno 关系式描述 [43]

$$\log_{10}\eta = 7 - \frac{11.3(T - T_{VE})\left(\frac{206}{T_{VE}}\right)}{35.9 + (T - T_{VE})\left(\frac{206}{T_{VE}}\right)}, \tag{21a}$$

$$\ln\rho = \ln\rho_0 + 0.0012T\left(1 - \frac{206}{T_{VE}}\right) + \frac{p}{12.8\times10^8}, \tag{21b}$$

其中 $T_{VE} = 206 + 209$。$4\ln\left(1 + 1\text{。}445\times10^{-9}p\right)$，而非牛顿润滑剂行为则使用方程 20b。

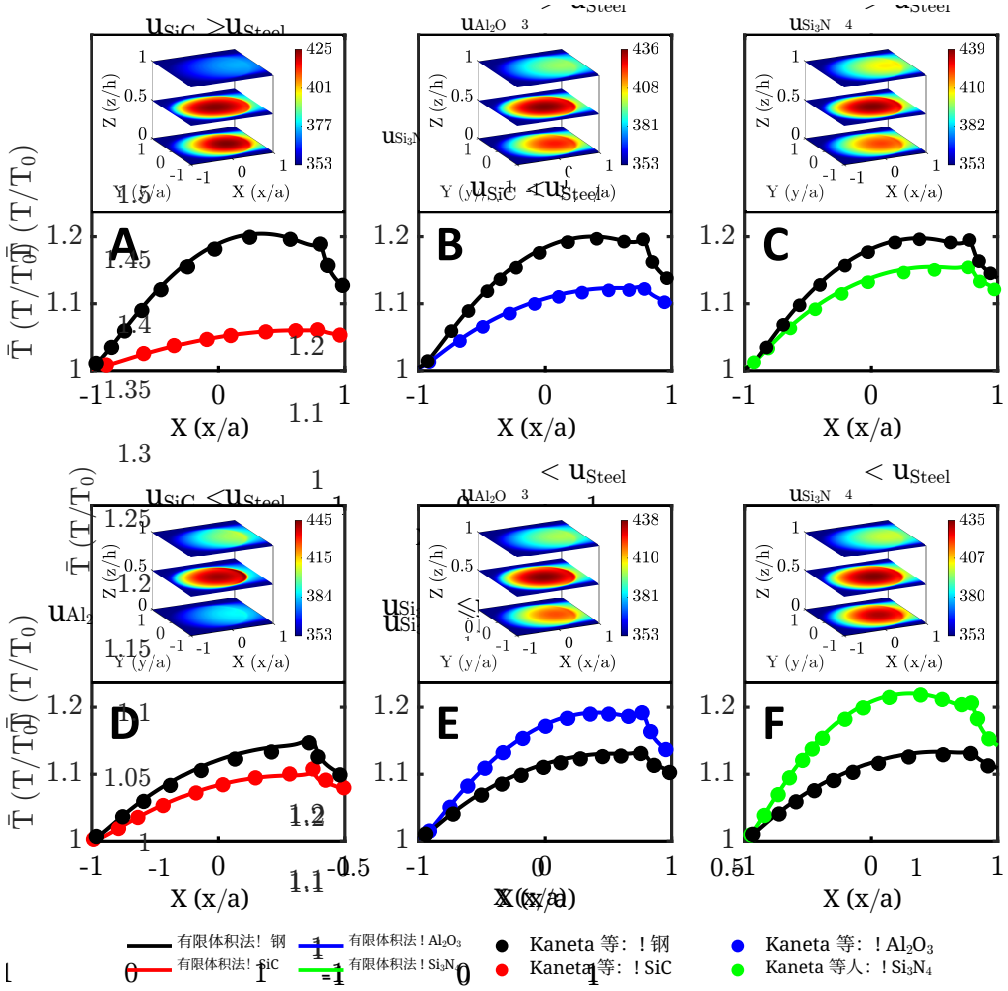

图 3. 比较了沿卷吸X方向计算得到的中平面（$Y = 0$）无量纲表面温度分布：采用所提出的热弹流润滑框架计算的结果（曲线）与 [42]中的对应结果（点）。当 SiC、Al_2O_3 和 Si_3N_4 表面的运动速度分别高于钢表面时，（A）、（B）和（C）展示了表面温度；而（D）、（E）和（F）分别对应钢表面速度高于 SiC、Al_2O_3 和 Si_3N_4 表面时的热结果。对于每种接触副和速度条件，还展示了受限薄膜的边界表面及中间层的尺寸热图（单位：开尔文）。数值研究在p_h = 0.75 吉帕、T_0 = 353 开尔文、滑滚比 = 1 以及卷吸速度为$u_{r|_{SiC-Steel}}$ = 4.4 m/s、$u_{r|_{Al_2O_3-Steel}}$ = 4.1 m/s 和$u_{r|_{Si_3N_4-Steel}}$ = 3.8 m/s的条件下进行。

图3所示的比较结果可以证明所开发的热弹流润滑仿真框架具有良好的稳健性。由于两种材料的导热系数存在显著差异（k_{SiC} = 200W/mK，而k_{steel} = 21 W/mK），无论固体彼此相对运动的速度有多快，SiC表面的预测温度始终高于钢表面的温度。另一方面，在钢-Al_2O_3 接触的情况下，改变表面速度方向对固体最高温度的大小影响很小，因为Al_2O_3 的导热系数（$k_{Al_2O_3}$ = 29W/mK）与钢的导热系数相近；然而，如图3B和3E所示，较高的温度始终出现在速度较慢的表面上，因为该表面从接触区域带走的热量较少。尽管钢和Si_3N_4 的导热系数几乎相同（$k_{Si_3N_4}$ = 23 W/mK），但从图3C和3F可以明显看出，固体温度会因哪个表面以更高速度运动而发生显著变化。为了进一步证实所提出的热弹流润滑框架，图4描绘了在（X =Y = 0）处沿油膜厚度方向的无量纲润滑剂速度分布；使用式10a、10b和10c计算得到的结果与在 [42] 热条件下评估得到的结果非常吻合。此外，为了更定量地理解这些结果，图5展示了不同材料组合的中平面（Y = 0）温度、剪切速率和润滑剂速度分布。

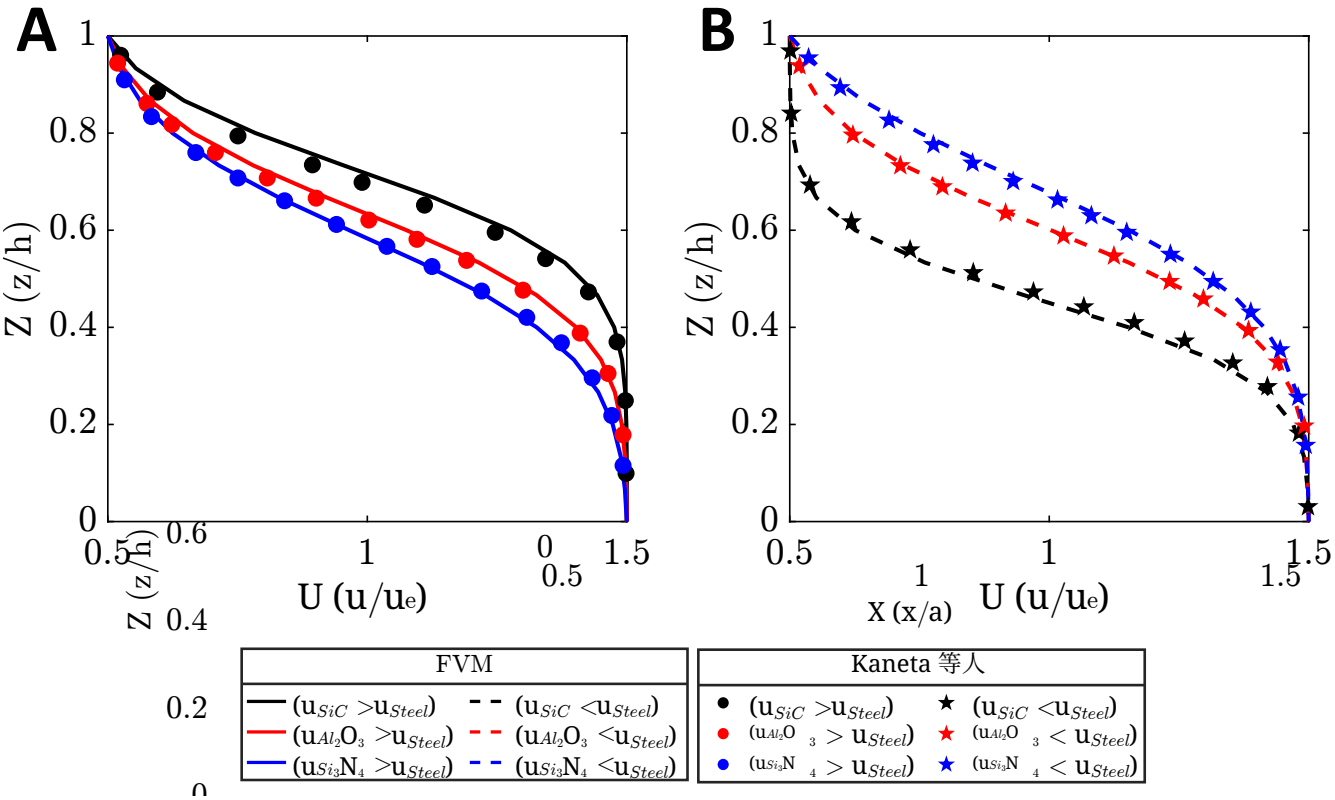

图 4. 在 ($X = Y = 0$) 处，采用所提出的热弹流润滑框架（线条）计算得到的穿过油膜厚度的无量纲润滑剂速度剖面，与其在 [41] 中滑滚比为 = 1 、卷吸速度分别为$u_e|_{SiC-Steel}$ = 4.4m/s、$u_e|_{Al_2O_3-钢}$ = 4.1m/s 和$u_e|_{Si_3N_4-钢}$ = 3.8m/s 时的对应值（点）进行对比。

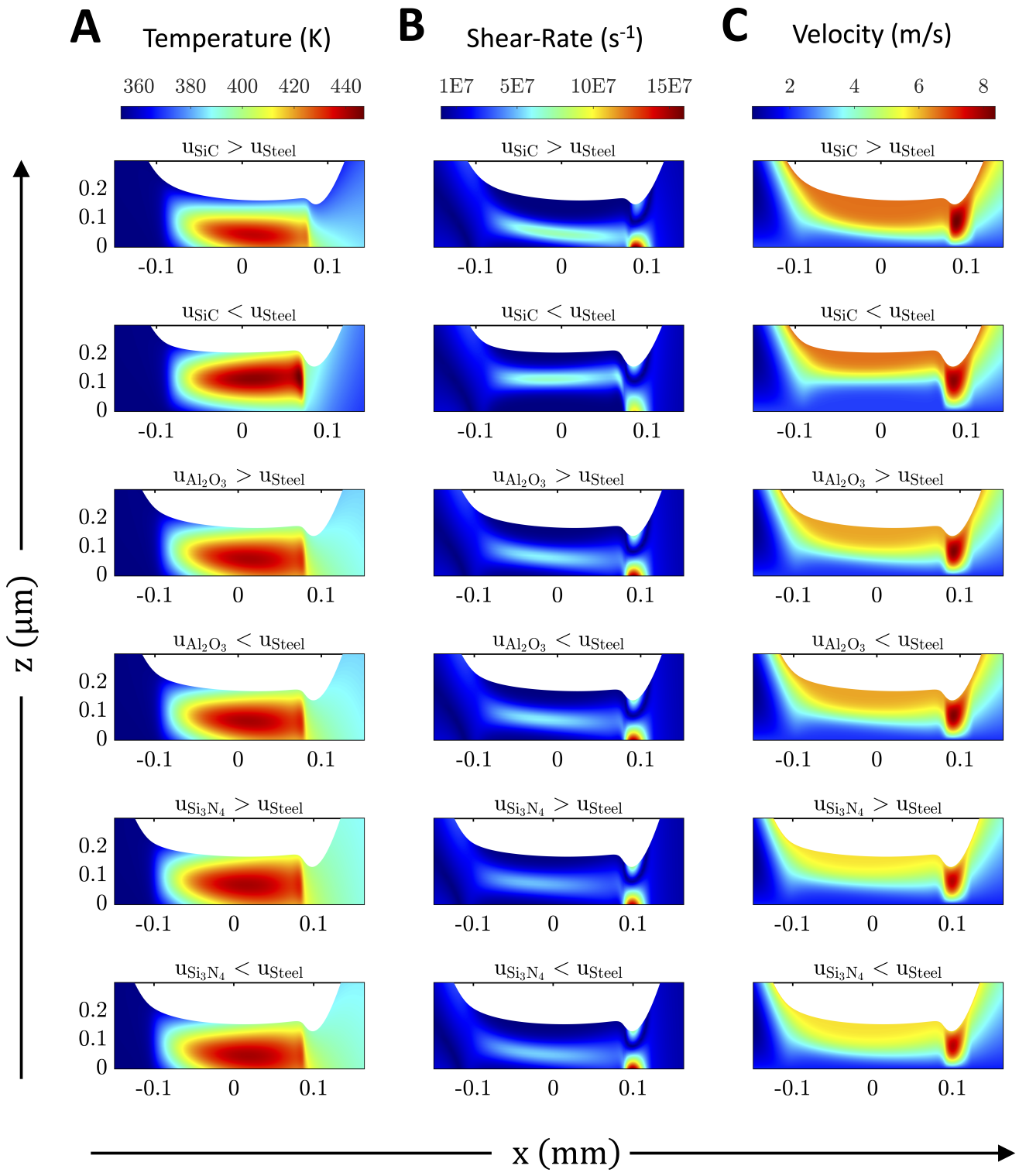

图 5. 中平面（$Y = 0$）对应图 3 和 4 中工况的等值线图。（**A**）润滑剂温度，（**B**）剪切速率和（**C**）润滑剂速度分布。

4.2 实验基准

除了通过数值结果进行验证外，采用实验数据还能提高所提出控制方程组的可靠性，并评估其预测润滑接触性能的准确性。本研究采用了 Reddyhoff 等人 [44] 开展的一项实验研究中测得的热学和牵引结果。值得注意的是，利用温度数据佐证数值结果并非常规做法，大多数验证工作通常仅限于摩擦和油膜厚度测量。 [44] 中的作者采用红外光谱技术测定球体与圆盘点接触处的平均温度：利用带通光学滤光片以及涂覆在圆盘上的铬层，捕获并分离油、球体和圆盘发出的辐射。随后依据普朗克定律将所得辐射转换为热数据，并在不同温度和油膜厚度下进行了多项校准测试 [44]。测试使用钢（$k_{Steel} = 21\,W/m.K$）、氮化硅（$k_{Si_3N_4} = 30 W/m.K$）和氧化锆（$k_{Zirconia} = 3 W/m.K$）球与蓝宝石圆盘接触，并以牵引液 Santotrac 50 和 PAO 4 将二者隔开。测试过程中改变了施加载荷和卷吸速度等运行条件[44]，并根据球体材料调整条件，以确保在所有测试中，平均接触压力为 0.583 吉帕、入口油温为 40 °C 时，中心油膜厚度保持在校准所需的 100 nm。除固体温度外，本研究的验证还采用了 MTM2 试验台独立测得的牵引系数。为准确模拟热学工况，采用 Roelands 和 Eyring 模型（分别见方程 22a 和 22b） [45] 表征 Santotrac 50 的黏度受压力、温度和剪切变稀效应的影响；而采用与 Carreau 方程相结合的 Yasutomi 模型（分别见方程 22c 和 22d）[46] 模拟 PAO 4 的黏性行为。两种流体的密度变化通过 Dowson 和 Higginson 模型进行数值描述 [27]，其导热系数和热容则采用 Larsson 和 Anderson 提出的模型进行关联 [47]。相关关系的输入参数见 [45, 46, 47]，固体的热学和力学性质见 [44]。

$$\eta = \eta_0 \exp\left((\ln\eta_0 + 9.67)\times\left[-1+\left(1+5.1\times10^{-9}p\right)^{\frac{\alpha}{5.1\times10^{-9}(\ln\eta_0+9.67)}}\left(\frac{T-138}{T_0-138}\right)^{-\frac{\beta(T_0-138)}{(\ln\eta_0+9.67)}}\right]\right), \tag{22a}$$

$$\eta^* = \eta(\tau_e/\tau_0)\Big/\sinh(\tau_e/\tau_0), \tag{22b}$$

$$\mu = \mu_g \exp\left[\frac{-2.303C_1\left(T-\left[T_{g0}+A_1\ln(1+A_2p)\right]\right)(1+b_1p)^{b_2}}{C_2+\left(T-\left[T_{g0}+A_1\ln(1+A_2p)\right]\right)(1+b_1p)^{b_2}}\right], \tag{22c}$$

$$\eta = \mu\left[1+\left(\frac{\tau_e}{18\times10^6}\right)^2\right]^{-6/13}, \tag{22d}$$

$$\rho = \rho_0\left[1+\frac{0.6\times10^{-9}p}{1+1.7\times10^{-9}p}\right][1-0.00065(T-T_0)], \tag{22e}$$

$$k = k_0\left(1+\frac{c_1p}{1+c_2p}\right), \tag{22f}$$

$$\rho c_p = \left(\rho c_p\right)_0\left[1+\beta(p)(T-T_0)\left(1+\frac{k_1p}{1+k_2p}\right)\right]. \tag{22g}$$

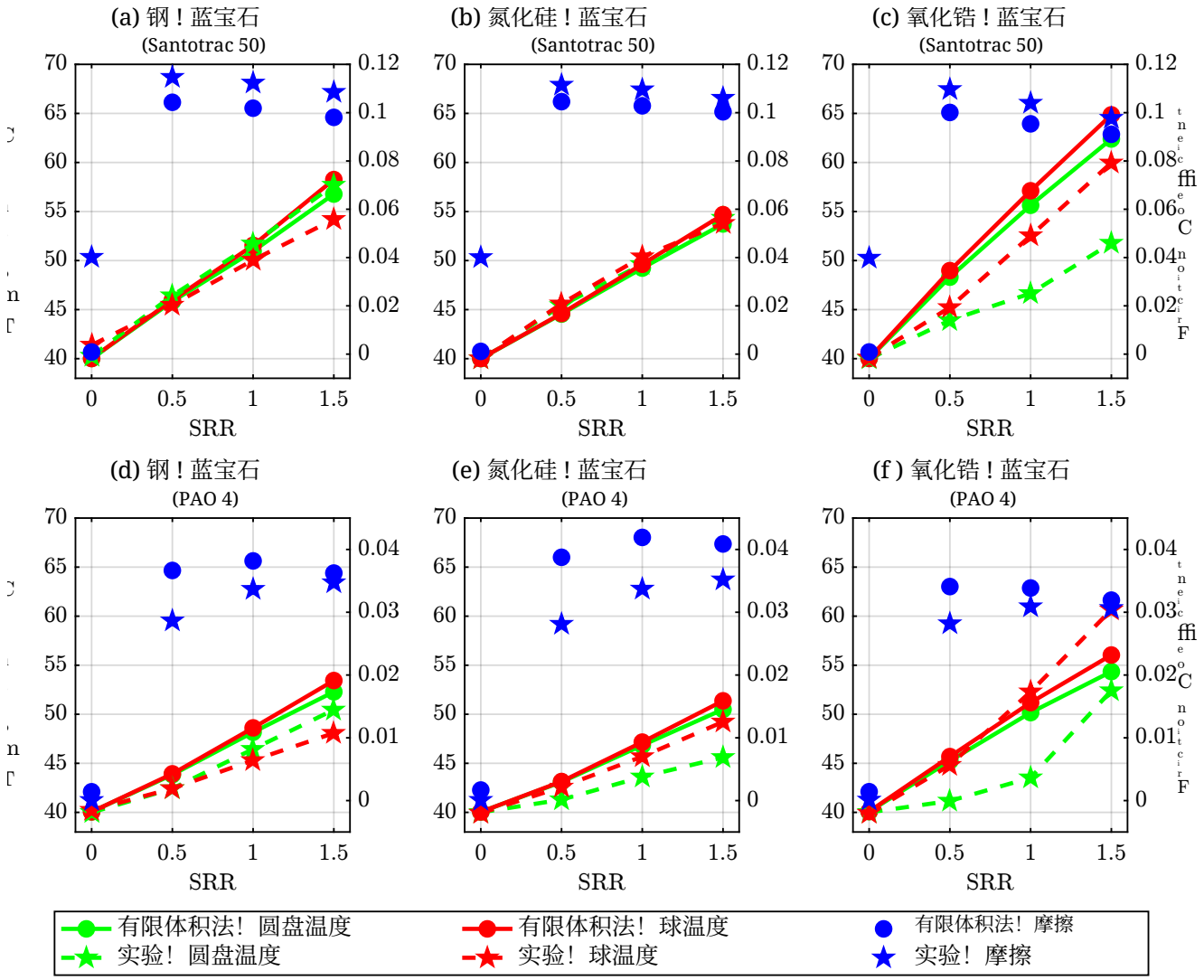

图 6. 采用有限体积框架（FVM）模拟球-圆盘接触的平均表面温度和牵引系数，并使用红外显微镜和 MTM2试验台测得的实验结果进行验证。所用球材料各不相同，圆盘均为蓝宝石；两种固体之间的润滑油为 Santotrac 50 或 PAO 4。各固体-流体组合及其对应的卷吸速度（u_e）为：**(a)** 钢-蓝宝石-Santotrac 50（u_e = 0.308 m/s）、**(b)** 氮化硅-蓝宝石-Santotrac 50（u_e = 0.293 m/s）、**(c)** 氧化锆-蓝宝石-Santotrac 50（u_e = 0.308 m/s）、**(d)** 钢-蓝宝石-PAO 4（u_e = 0.929 m/s）、**(e)** 氮化硅-蓝宝石-PAO 4（u_e = 0.806 m/s）以及**(f)** 氧化锆-蓝宝石-PAO 4（u_e = 0.929 m/s）。无论润滑油为何，所有工况均在滑滚比为 = [0, 0.5、1.0、1.5]，施加载荷为 $W_{steel-sapphire}$ = 20 N、$W_{zirconia-sapphire}$ = 20 N 和 $W_{steel-silicon\ nitride}$ = 12 N 的条件下进行。

从图 6 可以明显看出，当前框架正确预测了固体温度随滑滚比的增加而升高，这是热生成增加所致。对于采用 Santotrac 50 和 PAO 4 的钢与氮化硅接触（图 6**a** 、 **b** 、 **d** 和 **e** ），框架数值计算得到的固体温度与实验测量值总体吻合良好。然而，图 6**d** 中的钢球温度和图 6**e** 中的蓝宝石圆盘温度在滑滚比 = 1.5 时被数值计算高估，与实验结果相差 10%–11%。这可能归因于油膜厚度及其对接触区热生成占比的影响：与实验中将中心油膜厚度保持在 100 nm 不同，由于压力、温度和剪切速率对油膜几何形状的影响，模拟中无法强制设定恒定厚度，因此所开发的框架在这两种情况下计算得到的中心油膜厚度均为 110 nm。另一方面，涉及氧化锆球的工况，无论使用 Santotrac 50 还是 PAO 4，测得的平均固体温度与计算值之间均存在明显差异（分别见图 6**c** 和 **f**）。这并不令人意外，因为氧化锆具有很高的.....

有效热阻材料，因此能够阻碍热量穿过其厚度方向流动，进而导致固体外层温度升高，大量热量积聚于此。由于氧化锆的近红外辐射特性， [44]中使用的红外相机无法准确测量温度分布，因此作者采用了 Carslaw–Jaeger 方程，相关内容见 [44]。

此外，图中所示的牵引系数数据6 证实了所建立的数值模型在预测润滑性能方面的有效性。在实验结果与数值结果之间，唯一明显的差异出现在纯滚动条件下使用 Santotrac 50 的情况中（图 6**a**、**b** 和 **c**）。这可能归因于以下限制：当表面以相近速度运动时，在预设水平控制厚度可能会出现困难。尤其需要考虑的是，在相同速度条件下使用 PAO 4 时，所得摩擦系数数据却具有良好的一致性（图 6**d**、**e** 和 **f**）。此外，使用氧化锆球获得的良好摩擦系数一致性表明，数值预测的热生成是准确的，从而阐明了前述推理，即确定可能导致测量平均温度与计算平均温度不匹配的原因。

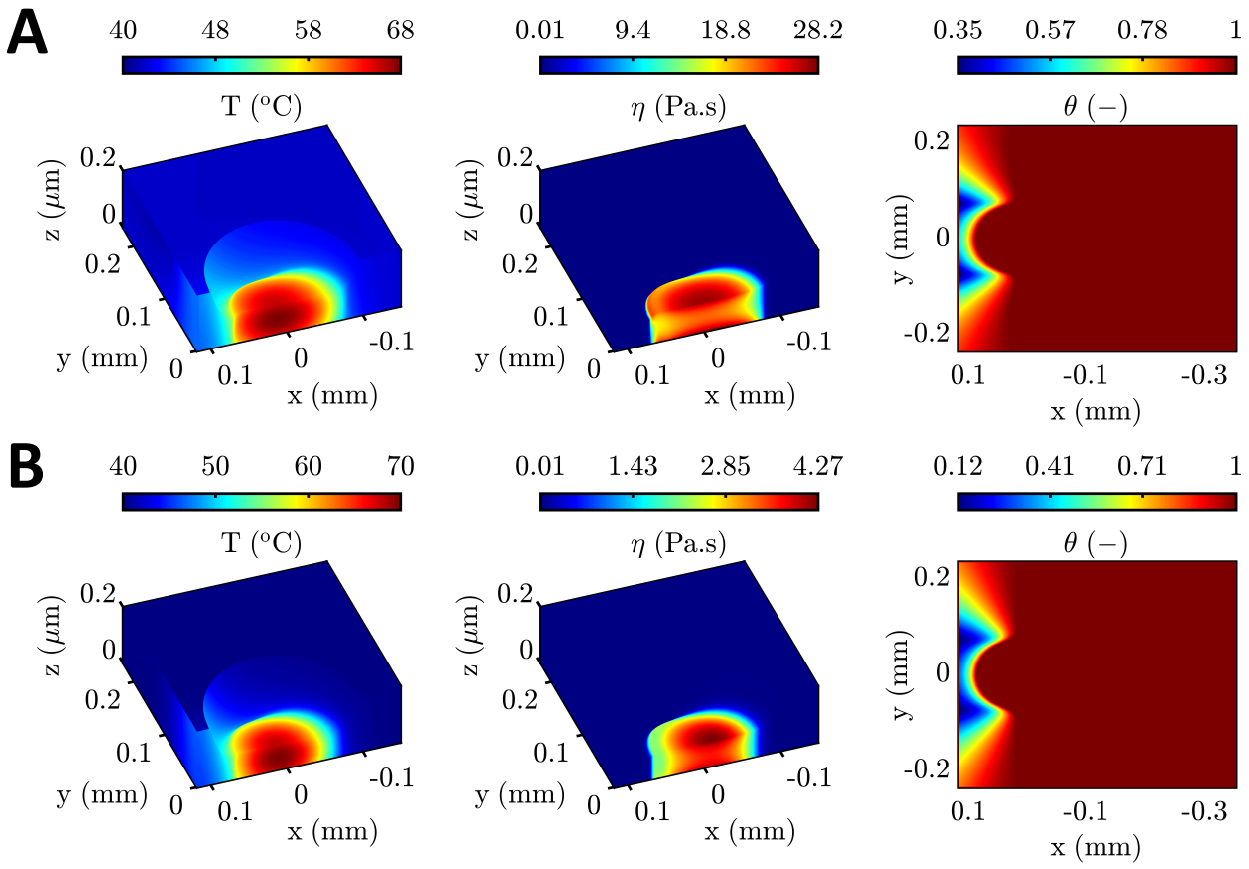

图7。 三维截面图描绘了在滑滚比SRR =1.5下，油膜温度（T）、油膜动力黏度（η）的中平面分布，以及油膜含量（θ）的二维示意图；此时氮化硅球加载于蓝宝石圆盘上（W = 20 N），两个固体之间由（**A**） 在卷吸速度 u_e = 0.293m/s 下的Santotrac50油和（**B**） 在卷吸速度 u_e = 0.806m/s 下的PAO 4 油分隔。根据Elrod–Adams空化算法施加的互补JFO 条件，当分数膜含量（θ）降至低于1时，油膜破裂，因此形成气体/蒸气双相混合物，如接触出口附近所示。

为了清晰地可视化图中所示的有限体积法热分析结果，6，特别是与滑滚比 = 1.5 时的氮化硅与蓝宝石接触工况相关的结果，图 7 展示了薄膜温度、动力黏度的三维截面分布图，以及由（$p-\theta$）广义雷诺方程的求解所确定的流体膜占比二维表示，其中图 7**A** 和 7**B** 分别对应

分别针对 Santotrac 50 和 PAO4 油。关于两种油膜的温度，显然，剪切生热效应在 PAO4 中更为显著，因此其温度略高于 Santotrac 50。温度对油膜黏度的直接影响使 PAO4 的黏度值远低于 Santotrac 50；后者沿接触长度方向的黏度分布则更均匀。不过，值得注意的是，如前所述，由于相关参数有限，Santotrac 50 和 PAO4 的流变模型有所不同，因此这可能对上述比较产生重要影响。油膜分数分布图在热弹流润滑模拟领域鲜少被讨论，它们展示了油膜破裂如何从接触出口附近开始，尤其是在出现发散区的位置。在图 7B 所示的 PAO4 情况下，空化区内可以观察到较高比例的液体—蒸气/气体混合物7**B** （液体占 12%，液体与气体/蒸气混合物占 88%）。

5 结论

我们提出了一种有限体积流固耦合（FSI）框架，用于利用相关控制方程的强守恒形式，在映射到非正交曲线网格上的计算域中求解热弹流润滑问题。数值和实验基准测试证明了所开发热弹流润滑仿真框架在预测润滑界面性能方面的准确性，其中确定了压力、油膜厚度、摩擦力以及流体和固体温度分布。有限体积实现便于在计算域中对控制方程进行数值离散化，包括由非正交网格映射产生的流体能量方程中的对流和扩散交叉导数项，同时保持有限体积方法在离散层面上的守恒特性，而这相较于其他离散化方法代价较高。此外，Elrod-Adams（$p-\theta$）空化模型与广义雷诺方程相结合，用于考虑流体油膜空化并检测接触区域内双相混合物的形成。通过在各种运行条件下对润滑共形接触进行仿真，证明了所开发框架用于耦合热弹流润滑求解器的有效性。该框架的架构，以及半系统方法和带有艾特肯加速的点高斯-赛德尔方法（PGMA）在弹流润滑求解中的额外实现，改善了数值收敛性，并显著降低了仿真的计算成本。

鉴于在存在复杂几何形状的情况下对FSI问题进行建模时考虑任何曲率效应所遇到的局限性，当前研究可被视为对传统基于Reynolds 的求解器的一种改进。尽管商用计算流体力学代码凭借其强大的资源在处理此类问题方面可能表现出色，但其计算开销时间更长，并且在生成表面网格时还会带来额外的复杂性。所提出的方法利用基于Reynolds的求解器，将热弹流润滑控制方程的强守恒形式映射到计算域上，从而克服了这些局限性；通过与采用标准笛卡尔网格的计算流体力学求解器和改进型 Reynolds 求解器进行比较，进一步分析接触入口处流体再循环和温度梯度的细节，将对该方法进行更深入的测试。该方法在曲率效应和交叉导数项比非共形接触更为显著的应用中具有良好前景，并将得到进一步研究，例如轴颈轴承共形系统；作者将在未来的研究中对此进行探讨。

A Co从笛卡尔坐标到曲线网格系统的坐标变换

物理笛卡尔空间 $\chi_t^3 \subset \mathrm{R}^3$ 从变换后的广义曲线坐标空间 $\varepsilon_\tau^3 \subset \mathrm{R}^3$，的随时间变化的坐标变换，其中 R^3 是三维欧几里得空间，可以表示为[12, 13]

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\tau}) : \varepsilon_\tau^3 \to \chi_t^3, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\xi,\eta,\gamma,\tau) \in \varepsilon_\tau^3, \qquad \boldsymbol{x} = (x,y,z,t) \in \chi_t^3,$$
$$x^i = x^i\left(\xi^j,\tau\right) = x^i(\xi,\eta,\gamma,\tau), \quad (i,j = 1,2,3), \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\tau})$ 假设关于 ξ^j 和 τ 光滑且可逆。因此，依赖时间的逆变换可写为

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) : \chi_t^3 \to \varepsilon_\tau^3,$$
$$\xi^i = \xi^i\left(x^j,t\right) = \xi^i(x,y,z,t), \quad (i,j = 1,2,3). \tag{24}$$

在上述方程中，x^i 表示物理空间中某一点的笛卡尔坐标，该点在时间 t 具有曲线坐标 ξ^j。依赖时间的坐标变换（方程A）使得在物理空间的时变运动网格中求解输运方程成为可能。

坐标变换 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\tau})$ 由变换张量 $A^i{}_j$（又称协变基矩阵）以及称为雅可比矩阵 J 的行列式表征，其定义为

$$A_j^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right) \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{pmatrix}, \quad J = det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right) = det\,[\boldsymbol{A}], \tag{25}$$

其中，x_ξ 和 z_η 分别是偏导数 $\partial x\ \partial\zeta$ 和 $\partial z\ \partial\eta$ 的简写。类似地，逆坐标变换 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$（又称逆变换基矩阵）由逆变换张量和雅可比矩阵表征，如下所示

$$\bar{A}_j^i = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) \quad \Rightarrow \quad [\bar{\boldsymbol{A}}] = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{J} = det\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) = det\,[\bar{\boldsymbol{A}}]. \tag{26}$$

变换张量通过恒等式 $A^i{}_j\bar{}A^k{}_j = \delta^k{}_j$ 相关联，或者用矩阵数组表示法写成 $[\boldsymbol{A}][\bar{\boldsymbol{A}}] = [\boldsymbol{I}] \Rightarrow [\bar{\boldsymbol{A}}] = [\boldsymbol{A}]^{-1}$。因此，$[\boldsymbol{A}]$ 与 $[\bar{\boldsymbol{A}}]$ 的元素之间的关系可写为

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial x^{j+1}}{\partial \xi^{i+1}}\frac{\partial x^{j+2}}{\partial \xi^{i+2}} - \frac{\partial x^{j+1}}{\partial \xi^{i+2}}\frac{\partial x^{j+2}}{\partial \xi^{i+1}}\right), \tag{27a}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = J\left(\frac{\partial \xi^{j+1}}{\partial x^{i+1}}\frac{\partial \xi^{j+2}}{\partial x^{i+2}} - \frac{\partial \xi^{j+1}}{\partial x^{i+2}}\frac{\partial \xi^{j+2}}{\partial x^{i+1}}\right). \tag{27b}$$

在上述方程中，上标指标遵循循环排列顺序（1,2,3）。按照这一约定，任意指标，例如 l，均与 $l \pm 3$ 相对应；因此，例如，$\frac{\partial}{\partial \xi^5} = \frac{\partial}{\partial \xi^2} = \partial x\partial\eta$。

描述空间中一点如何随坐标变化而变化的协变基向量 $\boldsymbol{g_i}$ 可表示为

$$\boldsymbol{g_i} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}\right)\boldsymbol{i_j} = A_i^j\boldsymbol{i_j} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{g_1} \\ \boldsymbol{g_2} \\ \boldsymbol{g_3} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{A}]^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{i_1} \\ \boldsymbol{i_2} \\ \boldsymbol{i_3} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

而描述坐标如何随空间中的点变化的逆变基向量 $\boldsymbol{g^i}$ 可写为

$$\boldsymbol{g^i} = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\boldsymbol{i_j} = A_i^j\boldsymbol{i_j} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{g^1} \\ \boldsymbol{g^2} \\ \boldsymbol{g^3} \end{bmatrix} = [\bar{\boldsymbol{A}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{i_1} \\ \boldsymbol{i_2} \\ \boldsymbol{i_3} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

协变和逆变度量系数分别为 g^{ij} 和 g^{ij}，可通过非正交基底的通用曲线坐标中的协变基底和逆变基底的标量积计算得出 [48] 如下

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} \Rightarrow [\boldsymbol{G}] = [\boldsymbol{A}]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{G}]^{\boldsymbol{T}}, \tag{30a}$$

$$g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \Rightarrow \left[\bar{\boldsymbol{G}}\right] = [\bar{\boldsymbol{A}}][\bar{\boldsymbol{A}}]^{\boldsymbol{T}} = \left[\bar{\boldsymbol{G}}\right]^{\boldsymbol{T}}, \tag{30b}$$

此外，物理协变基向量可通过以下方式求得

$$\boldsymbol{e_i} = \left(1/\sqrt{g_{ii}}\right)\boldsymbol{g_i}. \tag{31}$$

式 30 中表示的度量系数 可用于在向量的协变分量和逆变分量之间进行转换。假设向量场 $\boldsymbol{v}$ 是位置向量 $\boldsymbol{r}$ 在空间任意一点 P 处的函数，$\boldsymbol{v}$ 可分别用以下基底中的分量表示：全局笛卡尔基$\{\boldsymbol{i}_i\}$、局部逆变基$\{\boldsymbol{g}^i\}$、局部协变基$\{\boldsymbol{g}_i\}$或物理协变基$\{\boldsymbol{e}_i\}$。使用爱因斯坦求和约定，可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} = u_i\boldsymbol{i}_i = v_i\boldsymbol{g}^i = v^i\boldsymbol{g}_i = \hat{v}^i\boldsymbol{e}_i,\\
&\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}\\
&\quad = v_1\boldsymbol{g}^1 + v_2\boldsymbol{g}^2 + v_3\boldsymbol{g}^3\\
&\quad = v^1\boldsymbol{g}_1 + v^2\boldsymbol{g}_2 + v^3\boldsymbol{g}_3\\
&\quad = \hat{v}^1\boldsymbol{e}_1 + \hat{v}^2\boldsymbol{e}_2 + \hat{v}^3\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned} \tag{32}$$

其中，u_i、v_i、v^i 和 $\hat{}v^i$ 分别是 $\boldsymbol{v}$ 的笛卡尔分量、协变分量、逆变分量和物理分量。这些分量之间的关系可写为

$$v_i = \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}\right)u_j = A^j_i u_j = g_{ij}v^j \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{A}]^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [\boldsymbol{G}] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix},$$

$$v^i = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)u_j = \bar{A}^i_j u_j = g^{ij}v_j \Rightarrow \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = [\bar{\boldsymbol{A}}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \left[\bar{\boldsymbol{G}}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}^i = \sqrt{g_{ii}}v^i \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{v}^1 & \hat{v}^2 & \hat{v}^3 \end{bmatrix}^T = \sqrt{diag\,[\boldsymbol{G}]} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned}
u_i &= \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)v_j = \bar{A}^j_i v_j \Rightarrow \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = [\bar{\boldsymbol{A}}]^T \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T\\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)v^j = A^i_j v^j \Rightarrow \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = [\boldsymbol{A}]^T \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix}^T\\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)\frac{\hat{v}^j}{\sqrt{g_{ii}}} = \left(\frac{A^i_j}{\sqrt{g_{jj}}}\right)\hat{v}^j.
\end{aligned}$$

为了使用广义坐标以强守恒形式表示守恒方程，方便的做法是使用笛卡尔分量 $u_i(u,v,w)$表示流动速度场，并使用逆变分量 $v^i\left(v^1,v^2,v^3\right)$ 表示对流速度 [4, 10, 11]。因此，只需将相对于笛卡尔坐标的空间导数转换为广义坐标即可。对于一般标量场 φ，该变换可写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j} = \bar{A}^j_i\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix}^T = [\bar{\boldsymbol{A}}]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \end{bmatrix}^T. \tag{33}$$

B 一般强标量守恒方程

任意标量物理量 ϕ 的一般守恒方程可写成无坐标矢量形式 [29]

$$\frac{\partial\left(\rho\phi\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{v}\phi\right)=\nabla\cdot\left(\Gamma\nabla\phi\right)+S_{\phi}, \tag{34}$$

其中 ρ 为流体密度， $\boldsymbol{v}$ 为流体的速度矢量场， Γ 为扩散系数，$S\phi$ 表示源汇项。该方程通常称为 ϕ控制输运方程的强守恒形式（或散度形式）。在笛卡尔坐标x_i(x、y、z)中，该方程用张量记法表示为 [29]

$$\frac{\partial\left(\rho\phi\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\rho u_{j}\phi\right)=\frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x^{j}}\right)+S_{\phi}, \tag{35}$$

其中u_i(u、v、w)为速度矢量的笛卡尔分量，即 $\boldsymbol{v}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$，其中{$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}为沿笛卡尔坐标轴方向的单位矢量（笛卡尔基）。

考虑由式 A给出的与时间无关的坐标变换所定义的广义曲线坐标系，一般标量守恒方程可以用逆变分量形式写为 [4, 9, 10, 11, 12, 49]

$$\frac{\partial\left(J\rho\phi\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi^{j}}\left(J\rho v^{j}\phi\right)=\frac{\partial}{\partial\xi^{j}}\left[Jg^{kj}\Gamma\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^{k}}\right)\right]+JS_{\phi},\qquad g^{kj}=\frac{\partial\xi^{k}}{\partial x^{m}}\frac{\partial\xi^{j}}{\partial x^{m}}, \tag{36}$$

其中， v^j 是流速矢量在切向量局部基 {$\boldsymbol{gj}$}（协变基）中的逆变分量。这些分量与空间中任意一点处沿坐标曲线 ξ^j 的速度矢量物理分量成正比。

C 质量守恒方程（连续性方程）

可压缩流体的质量守恒方程以无坐标矢量形式表示为 [50]

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{37}$$

其中， ρ 表示流体密度，$\boldsymbol{v}$ 表示流体的速度矢量场。这意味着，笛卡尔坐标系中的连续性方程可用张量记法写为

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0. \tag{38}$$

因此，考虑附录 A 中所述的坐标变换以及附录G中总结的因变量归一化，在广义变换域中推导出的无量纲连续性方程可用张量记法表示为

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\tau}+\nabla_{\mathrm{X}}\cdot\left(\bar{\rho}\tilde{\boldsymbol{V}}\right)=0, \tag{39}$$

其中， $\tilde{\boldsymbol{V}}=\left[\tilde{V}^X\ \tilde{V}^Y\ \tilde{V}^Z\right]$ 使用方程 10a、10b 和 10c计算。

D 广义雷诺方程的积分项与速度分量

使用笛卡尔坐标表示的 p-θ 修正的广义雷诺方程的积分项和速度分量定义如下

$$\frac{1}{\eta_e} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\eta}, \tag{40a}$$

$$\frac{1}{\eta_e^{'}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z\,dz}{\eta}, \tag{40b}$$

$$\rho^{'} = \int_{z_1}^{z_2} \rho \left(\int_{z_1}^{z} \frac{dz'}{\eta} \right) dz, \tag{40c}$$

$$\rho^{''} = \int_{z_1}^{z_2} \rho \left(\int_{z_1}^{z} \frac{z' dz'}{\eta} \right) dz, \tag{40d}$$

$$I(x,y,z) = \int_{z_1}^{z} \frac{z'\,dz'}{\eta}, \tag{40e}$$

$$J(x,y,z) = \int_{z_1}^{z} \frac{dz'}{\eta}. \tag{40f}$$

$$I_p(x,y,z) = \left(I - J\frac{\eta_e}{\eta_e^{'}} \right), \tag{40g}$$

$$I_s(x,y,z) = J\eta_e. \tag{40h}$$

另一方面，使用归一化变换坐标表示的p-θ 质量守恒广义雷诺方程和速度分量的系数及积分项如下所示:

$$\bar{I}(X,Y,Z) = \int_0^{Z} \frac{Z'\,dZ'}{\bar{\eta}}, \tag{41a}$$

$$\bar{J}(X,Y,Z) = \int_0^{Z} \frac{dZ'}{\bar{\eta}}, \tag{41b}$$

$$\bar{I}_1(X,Y) = \bar{I}(X,Y,1) = \int_0^{1} \frac{Z\,dZ}{\bar{\eta}}, \tag{41c}$$

$$\bar{J}_1(X,Y) = \bar{J}(X,Y,1) = \int_0^{1} \frac{dZ}{\bar{\eta}}, \tag{41d}$$

$$\bar{I}_p(X,Y,Z) = H^2 \left[\bar{I}(X,Y,Z) - \bar{J}(X,Y,Z) \frac{\bar{I}_1(X,Y)}{\bar{J}_1(X,Y)} \right], \tag{41e}$$

$$\bar{I}_s(X,Y,Z) = \frac{\bar{J}(X,Y,Z)}{\bar{J}_1(X,Y)}, \tag{41f}$$

$$\bar{R}_1 = \int_0^1 \bar{\rho} \left(\int_0^Z \frac{dZ'}{\bar{\eta}} \right) dZ, \tag{41g}$$

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \bar{\rho} \left(\int_0^Z \frac{Z'\, dZ'}{\bar{\eta}} \right) dZ, \tag{41h}$$

$$\bar{R}_3 = \int_0^1 \bar{\rho}\, dZ, \tag{41i}$$

$$\bar{\varepsilon}(X,Y) = H^3 \left[\frac{\bar{I}_1(X,Y)\bar{R}_1(X,Y)}{\bar{J}_1(X,Y)} - \bar{R}_2(X,Y) \right], \tag{41j}$$

$$\bar{\rho}_e^*(X,Y) = \frac{2\bar{R}_1(X,Y)}{\bar{J}_1(X,Y)}, \tag{41k}$$

$$\bar{\rho}_1^*(X,Y) = \left[\bar{R}_3(X,Y) - \frac{2\bar{R}_1(X,Y)}{\bar{J}_1(X,Y)} \right], \tag{41l}$$

$$\bar{\rho}_e(X,Y) = \bar{R}_3(X,Y). \tag{41m}$$

离散（$p-\theta$）归一化变换域中的广义雷诺方程 E 系数

假设控制体面上的变量等于周围节点处相应变量的平均值，例如 $(\bar{\varepsilon})_w=\left[(\bar{\varepsilon})_W+(\bar{\varepsilon})_P\right]\Big/2=\left[(\bar{\varepsilon})_{k,\,i-1}+(\bar{\varepsilon})_{k,\,i}\right]\Big/2$，因此式 系数 14 中的系数定义如下

$$\alpha_D=\left[(\bar{\varepsilon})_w\cdot(\delta Y)_w\Big/(\delta X)_w\right] \tag{42a}$$

$$\alpha_C=-(\delta Y)_w\cdot\left[\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_i\cdot\theta_i\cdot D_{k-1,l}^{i,j}-\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_{i-1}\cdot\theta_{i-1}\cdot D_{k-1,l}^{i-1,j}\right] \tag{42b}$$

$$\alpha=\alpha_D+\alpha_C \tag{42c}$$

$$\begin{aligned}\beta_D=&-\left[(\bar{\varepsilon})_w\cdot(\delta Y)_w\Big/(\delta X)_w\right]-\left[(\bar{\varepsilon})_e\cdot(\delta Y)_e\Big/(\delta X)_e\right]\\&-r_{xy}^2\left[(\bar{\varepsilon})_n\cdot(\delta X)_n\Big/(\delta Y)_n\right]-r_{xy}^2\left[(\bar{\varepsilon})_s\cdot(\delta X)_s\Big/(\delta Y)_s\right]\end{aligned} \tag{43a}$$

$$\beta_C=-(\delta Y)_w\cdot\left[\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_i\cdot\theta_i\cdot D_{k,l}^{i,j}-\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_{i-1}\cdot\theta_{i-1}\cdot D_{k,l}^{i-1,j}\right] \tag{43b}$$

$$\beta=\beta_D+\beta_C \tag{43c}$$

$$\gamma_D=\left[(\bar{\varepsilon})_e\cdot(\delta Y)_e\Big/(\delta X)_e\right] \tag{44a}$$

$$\gamma_C=-(\delta Y)_e\cdot\left[\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_i\cdot\theta_i\cdot D_{k+1,l}^{i,j}-\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_{i-1}\cdot\theta_{i-1}\cdot D_{k+1,l}^{i-1,j}\right] \tag{44b}$$

$$\gamma=\gamma_D+\gamma_C \tag{44c}$$

$$\zeta_D=0 \tag{45a}$$

$$\zeta_C=0 \tag{45b}$$

$$\zeta=\zeta_D+\zeta_C \tag{45c}$$

$$\lambda_D=0 \tag{46a}$$

$$\lambda_C=0 \tag{46b}$$

$$\lambda=\lambda_D+\lambda_C \tag{46c}$$

$$\varphi_D=(\bar{p})_N\cdot r_{xy}^2\cdot\left[(\bar{\varepsilon})_n\cdot(\delta X)_n\Big/(\delta Y)_n\right]+(\bar{p})_S\cdot r_{xy}^2\cdot\left[(\bar{\varepsilon})_n\cdot(\delta X)_s\Big/(\delta Y)_s\right] \tag{47a}$$

$$\begin{aligned}\varphi_C=&\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_i\cdot\theta_i\cdot\left[H_i-\left(\left[D_{k-1,l}^{i,j}\cdot\bar{p}_{k-1,l}\right]-\left[D_{k,l}^{i,j}\cdot\bar{p}_{k,l}\right]-\left[D_{k+1,l}^{i,j}\cdot\bar{p}_{k+1,l}\right]\right)\right]\\&-\left(\bar{\rho}_e^*U_m+\bar{\rho}_1^*U_1\right)_{i-1}\cdot\theta_{i-1}\cdot\left[H_{i-1}-\left(\left[D_{k-1,l}^{i-1,j}\cdot\bar{p}_{k-1,l}\right]-\left[D_{k,l}^{i-1,j}\cdot\bar{p}_{k,l}\right]-\left[D_{k+1,l}^{i-1,j}\cdot\bar{p}_{k+1,l}\right]\right)\right]\end{aligned} \tag{47b}$$

$$\varphi=\varphi_D+\varphi_C \tag{47c}$$

F 系数　　归一化变换域中的离散能量方程　　n

使用 $[[\,]]$ Pantankar算子，其中 $[[A,B]]$ 表示A和 B 中较大的值，[51], 并假设在控制体面处计算的变量等于周围节点处相关变量的平均值，例如$(\bar{k})_w = [(\bar{k})_W + (\bar{k})_P]/2 = [(\bar{k})_{k,i-1} + (\bar{k})_{k,i}]/2$，因此，方程 17 中的系数定义为

$$\alpha_D = -(\varepsilon)^2 \cdot \bar{k}_w \cdot H_w \cdot S_w / (\delta X)_w \tag{48a}$$

$$\alpha_C = -[[(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^X)_w \cdot Pe \cdot S^w, 0]] \tag{48b}$$

$$\alpha = \alpha_D + \alpha_C \tag{48c}$$

$$\gamma_D = -(\varepsilon)^2 \cdot \bar{k}_e \cdot H_e \cdot S_e / (\delta X)_e \tag{49a}$$

$$\gamma_C = -[[-(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^X)_e \cdot Pe \cdot S^e, 0]] \tag{49b}$$

$$\gamma = \gamma_D + \gamma_C \tag{49c}$$

$$\zeta_D = -(r_{xy}\varepsilon)^2 \cdot \bar{k}_n \cdot H_n \cdot \mathcal{S}_n / (\delta Y)_n \tag{50a}$$

$$\zeta_C = -[[-(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Y)_n \cdot Pe \cdot \mathcal{S}_n, 0]] \tag{50b}$$

$$\zeta = \zeta_D + \zeta_C \tag{50c}$$

$$\lambda_D = -(r_{xy}\varepsilon)^2 \cdot \bar{k}_s \cdot H_s \cdot \mathcal{S}_s / (\delta Y)_s \tag{51a}$$

$$\lambda_C = -[[(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Y)_s \cdot Pe \cdot \mathcal{S}_s, 0]] \tag{51b}$$

$$\lambda = \lambda_D + \lambda_C \tag{51c}$$

$$\phi_D = -(\bar{k}_t \cdot S_t) \cdot [1 + (\varepsilon^2 \cdot [(\nabla_X \cdot H)_t]^2 \cdot Z_t^2) + ((\varepsilon r_{xy})^2 \cdot [(\nabla_Y \cdot H)_t]^2 \cdot Z_t^2)] / (H \cdot (\delta Z)_t) \tag{52a}$$

$$\phi_C = -[[-(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Z)_t \cdot Pe \cdot S_t, 0]] \tag{52b}$$

$$\phi = \phi_D + \phi_C \tag{52c}$$

$$\psi_D = -(\bar{k}_b \cdot S_b) \cdot [1 + (\varepsilon^2 \cdot [(\nabla_X \cdot H)_b]^2 \cdot Z^2{}_b) + ((\varepsilon r_{xy})^2 \cdot [(\nabla_Y \cdot H)_b]^2 \cdot Z^2{}_b)] / (H \cdot (\delta Z)_b) \tag{53a}$$

$$\psi_C = -[[(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Z)_b \cdot Pe \cdot S_b, 0]] \tag{53b}$$

$$\psi = \psi_D + \psi_C \tag{53c}$$

$$\beta_D = -\alpha_D - \gamma_D - \zeta_D - \lambda_D - \phi_D - \psi_D \beta_C = [[(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^X)_e \cdot Pe \cdot S^e, 0]] + [[(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Y)_n \cdot Pe \cdot S^n, 0]] + [[(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Z)_t \cdot Pe \cdot S_t, 0]] + [[-(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^X)_w \cdot Pe \cdot S^w, 0]] + [[-(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Y)_s \cdot Pe \cdot S^s, 0]] + [[-(\bar{\rho}\bar{c}_p \tilde{V}^Z)_b \cdot Pe \cdot S_b, 0]] \beta = \beta_D + \beta_C \tag{54a, 54b, 54c}$$

$$\varphi = [(\bar{\bar{Q}}_p)_P + (\bar{\bar{Q}}_{cp})_P + (\bar{\bar{Q}}_\Phi)_P + (\bar{\bar{q}}_V)_P] \cdot (\Delta \mathcal{V})_P \tag{55a}$$

G变换与无量纲参数

用于将控制方程从笛卡尔坐标系转换为归一化变换曲线网格系统的参数，以及与热弹流润滑框架相关的其他有量纲和无量纲参数。

表1。 相关符号及其相应的定义和数学表达式。

符号	参数	值
$A^i_j, \bar{A}^i_j$	坐标变换和逆坐标变换- 换矩阵	方程 25，26
A_X	沿x方向的归一化曲率	$A_X = (L_x)^2(2R_x h_0)^{-1}$
A_Y	沿y方向的归一化曲率	$A_Y = \left(L_y\right)^2\left(2R_y h_0\right)^{-1}$
a	圆形点接触的赫兹接触半宽度 [m]	一个 $= \sqrt[3]{(3W_L R')/(2E')}$
Br，Br*	布林克曼数与修正布林克曼数	$\mathrm{Br} = \frac{\eta_0 u_e^2}{k_0 T_0}, \mathrm{Br}^* = (\beta_0 T_0 Br)$
$c_p, \bar{c}_p$	有量纲 [J/kg.K] 和归一化比热容	$\bar{c}^p = c_p * \left(c_{p_0}\right)^{-1}$
$D^{i,j}_{k,l}$	影响系数矩阵元素	-
E_1, E_2	下部（1）和上部（2）固体的弹性模量 [Pa]	-
E'	有效弹性模量 [Pa]	$E' = 2\left[(1-\nu_1{}^2)/E_1) + (1-\nu_2{}^2)/E_2\right]^{-1}$
$\bar{G}$	无量纲材料参数	$\bar{G} = \alpha * E'$
$\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^i$	协变和逆变基向量	方程 28，29
$\boldsymbol{g}^{ij}, \boldsymbol{g}^{ij}$	协变和逆变度量系数	方程式30
h, H	有量纲 [m] 和归一化膜厚	$H = h * (h_0)^{-1} = (z_2 - z_1) * (h_0)^{-1}$
h_0, H_0	变形前两个物体之间的 [m] 和无量纲刚性间距 两个物体变形前	$H_0 = \frac{h_0/R}{2.69\ \bar{U}^{0.67}\ \bar{G}^{0.53}\ \bar{W}^{-0.067}\left(1-0.61e^{-0.73}\right)} =$
J	雅可比矩阵	方程 25
$\bar{k}, k$	有量纲 [W/m.K] 和归一化热导率	$\bar{k} = k * (k_0)^{-1}$
L_x, L_y	接触在滑动方向和横向方向上的特征长度，分别为 分别为逆向	（$L_x = L^y = a$ 用于圆形接触）
N_x, N_y	分别沿x方向和y方向的网格密度	-
$\vec{\boldsymbol{n}}$	法向单位向量	-
nb	相邻节点	-
Pe	佩克莱数	佩 $= \left(\rho_0 c_{p_0} u_e L_x \varepsilon^2\right)/k_0$
Pr	普朗特数	$\mathrm{Pr} = \left(\eta_0 c_{p_0}\right)/k_0$
$\bar{p}, p$	有量纲 [Pa]和无量纲压力	$\bar{p} = p * \left[\left(\varepsilon^2 L_x\right)/(\eta_0 u_e)\right]$
p_{cav}	空化压力 [Pa]	-
$\dot{q}_V, \bar{q}_V$	有量纲 [W/m^3] 以及 归一化 热量速率 源/汇	$\bar{q}_V = \dot{q}_V\left(\varepsilon^2 L_x^2\right)(k_0 T_0)^{-1}$
R'	有效曲率半径 [m]	($R' = R_x = R^y$ 对于圆形接触)
R_x	固体 (1,2) 在中心处的等效曲率半径 在x方向的接触 [m]	$R_x = (R_{x1} R_{x2}) * (R_{x1} + R_{x2})^{-1}$

R^y 固体（1、2）在接触中心沿 y方向的等效曲率半径 $R^y = (R^{y1}R^{y2}) * (R^{y1} + R^{y2})^{-1}$米 [m]$r^{xy}$ 长度纵横比 $r^{xy} = L_x * \left(L_y\right)^{-1}$滑滚比 $SRR = u_s / u_e$滑滚比 SRR_x、SRR^y 滑动方向和横向的滑动速度与卷吸速度之比 $SRR_x = u_s / u_e$、$SRR^y = v_s / u_e$T，$\bar{}T$ 有量纲温度 [K] 和无量纲温度 $\bar{}T = T * (T_0)^{-1} T_0$ 环境温度 [K] - t，τ 有量纲时间 [s] 和无量纲时间 $\tau = t * (u_e / L_x)$ U_1, V_1 下部固体在 x 和 y 方向的无量纲速度 $U_1 = u_1 / u_e$, $V_1 = v_1 / u_e$ $\bar{}U$ 无量纲速度参数 $\bar{}U = u_m \eta_0 * \left(E' R'\right)^{-1}$u, v, w 物理笛卡尔空间中的流速分量，分别对应式 9a、9b、9c 的 x、y 和 z 方向 [m/s]u_e, v_e 滑动和横向方向的卷吸速度 $u_e = (u_1 + u_2) / 2$, $v_e = (v_1 + v_2) / 2$[m/s]u_m(x, y) 表面的一般平均速度 [m/s], u_m(x, y) $= u_e$若 u_1 和 u_2 在空间中为常数 $u_m(x, y) = \left[u_1(x, y) + u_2(x, y)\right] / 2$$u_s$, v_s 滑动和横向方向的滑动速度 $u_s = (u_2 - u_1)$, $v_s = (v_2 - v_1)$ u_1,u_2 下部（1）和上部（2）固体在 x 方向的速度 -[m/s]$\bar{}V^X$, $\bar{}V^Y$, $\bar{}V^Z$ 归一化变换域中的逆变速度分量，分别对应式 10a、10b、10c 的 X、Y、和 Z 方向 v_1,v_2 下部（1）和上部（2）固体在 y 方向的速度 -[m/s]$\bar{}W$ 无量纲载荷参数 $\bar{}W = W_L * \left(E' R'^2\right)^{-1}$ W_L 施加载荷 [N] - x, X 滑动方向上的有量纲和无量纲长度 [m] $X = x * (L_x)^{-1} y$, Y 横向上的有量纲和无量纲长度 [m] $Y = y * \left(L_y\right)^{-1} Z_1, Z_2$ 相对于参考原点的下部（1）和上部（2）无量纲固体高度 $Z_1 = z_1 * (h_0)^{-1}$, $Z_2 = z_2 * (h_0)^{-1}$z, Z 薄膜厚度方向上的有量纲和无量纲长度 [m] $Z = (z - z_1) * (h(x, y))^{-1}$方向 z_1,z_2 相对于参考原点的下部（1）和上部（2）固体高度 - 参考原点α 压力-黏度系数 [m^2/N] -β, $\bar{\beta}$ 有量纲和无量纲压缩性 [m^2/N] $\bar{\beta} = \beta * (\beta_0)^{-1}$$\dot{\gamma}$, $\bar{\dot{\gamma}}$ 有量纲和无量纲剪切速率 [s^{-1}] $\bar{\dot{\gamma}} = \dot{\gamma} * \left[(h_0) / (u_e)\right]$$\delta X_i$, δY_i, δZ_i 面 i 的无量纲长度、宽度和高度 -δ, $\bar{\delta}$ 有量纲和无量纲表面弹性变形 [m] $\bar{\delta} = \delta * (h_0)^{-1}$$\varepsilon$ 无量纲长度尺度 $\varepsilon = h_0 * (L_x)^{-1}$$\zeta$, η, γ 曲线坐标系 -η, $\bar{\eta}$ 有量纲和无量纲动力黏度 [Pa.s] $\bar{\eta} = \eta * (\eta_0)^{-1}$

η_0, ρ_0, k_0,c^{p_0}, 环境动力黏度 [Pa.s], 密度 [kg/m^3], 导热系数β_0 W/m.K [比热容], J/kg.K [和压缩性] m [/N^2, 分别为], 流体膜占比 -θ ,ν_1下部（1）和上部（2）固体的泊松比 - ν_2 ,ρ有量纲和归一化密度 $\bar{\rho}$ kg/m [^{3}] $\bar{\rho} = \rho * (\rho_0)^{-1}$扩散率$\sigma_0$ W.m [.J^2k $^{-1}$] $\sigma_0 = c_0 * \left(\rho_{0p_0}\right)^{-1}\tau_e$ 等效剪切应力 [Pa] $\tau_e = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}\tau_0$ 艾林剪切应力 [Pa] -ω_{min}, ω_{max} PGMA 松弛因子的最小和最大阈值 -ω_{ψ}^{n}, ω_{ψ}^{n-1} 当前（n）和前一迭代步（n – 1）的松弛因子 - S^f 垂直于控制体（CV）面的表面向量 f -ΔV 控制体（CV）的体积ΔV = (δX) (δY) (δZ) $\vec{R}_{\psi}^{n}$, $\vec{R}_{\psi}^{n-1}$ 当前（n）和前一迭代步（n – 1）的残差场 -

参考文献

1. J. Blazek，《计算流体力学：原理与应用》，Butterworth-Heinemann，英国英格兰牛津，2015。doi:10.1016/C2013-0-19038-1。2. H. Versteeg，《计算流体力学导论：有限体积法》，Pearson，英国英格兰伦敦，2007。3. D. Lee，《运用有限体积计算建模技术探索弹流润滑》，博士论文，伦敦帝国理工学院，英国英格兰伦敦（2018）。doi:10.25560/81590。4. S. Ogawa, T. Ishiguro，一种计算运动物体周围流场的方法，《计算物理学杂志》69 (1) (1987) 49–68。doi:10.1016/0021-9991(87)90155-0。5. H. Q. Yang, K. T. Yang, J. R. Lloyd，采用非正交曲线坐标计算垂直和水平平行六面体封闭空间中的浮力流动，《国际数值方法工程杂志》25 (2) (1988) 331–345。doi:10.1002/nme.1620250205。6. G. D. Raithby, P. F. Galpin, J. P. Van Doormaal，使用通用正交坐标预测复杂几何形状中的热量与流体流动，《数值传热》9 (2) (1986) 125–142。doi:10.1080/10407788608913469。7. G. Cannata, C. Petrelli, L. Barsi, F. Gallerano，在随时间变化的曲线坐标系中对纳维–斯托克斯方程的逆变积分形式进行数值积分，以模拟三维自由表面流动，《连续介质力学与热力学》31 (2) (2019) 491–519。doi:10.1007/s00161-018-0703-1。8. I. Jarrah, Rizwan-uddin，通用二维曲线坐标下的节点积分法——应用于采用四边形单元离散化区域中的对流–扩散方程，《国际传热与传质杂志》187 (2022) 122559。doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122559。9. T. Kajishima, K. Taira，《计算流体力学》，Springer International Publishing，瑞士沙夫豪森，2017。10. H. Q. Yang, S. D. Habchi, A. J. Przekwas，非正交曲线坐标下纳维–斯托克斯方程的一般强守恒形式，《AIAA杂志》32 (5) (1994) 936–941。doi:10.2514/3.12077。11. M. Vinokur，曲线坐标系下的气体动力学守恒方程，《计算物理学杂志》14 (2) (1974) 105–125。doi:10.1016/0021-9991(74)90008-4。12. V. D. Liseikin，《网格生成方法》（科学计算），Springer，德国柏林，2017。13. M. Farrashkhalvat，《基础结构网格生成：非结构网格生成简介》，Butterworth-Heinemann，英国英格兰牛津，2003。14. J. Thompson，计算流体力学中的网格生成技术综述，载于：第21届航空航天科学会议，第1983-447卷，美国航空航天学会，1983，第1–36页。doi:10.2514/6.1983-447。15. T. Han, R. S. Paranjpe，有限长度滑动轴承热流体动力性能的有限体积分析，《摩擦学汇刊》112 (3) (1990) 557–565。doi:10.1115/1.2920293。16. S. A. Roberts, D. R. Noble, E. M. Benner, P. R. Schunk，使用三维壳有限元模型模拟多相流体动力润滑流动，《计算流体》87 (2013) 12–25。doi:10.1016/j.compfluid. 2012.08.009。17. F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish，《计算流体力学中的有限体积法》，Springer International Publishing，瑞士沙夫豪森，2016。18. D. Dowson，流体薄膜润滑的广义雷诺方程，《国际机械科学杂志》4 (2) (1962) 159–170。doi:10.1016/S0020-7403(62)80038-1。19. H. Elrod, M. Adams，一种用于空化和供油不足问题的计算机程序，载于：利兹–里昂摩擦学研讨会，第1卷，1975，第37–41页。20. H. G. Elrod，一种空化算法，《润滑技术杂志》103 (3) (1981) 350–354。doi:10.1115/1.3251669。21. B. Jakobsson，考虑汽化的有限长度滑动轴承，《查尔姆斯理工大学学报》，瑞典，第190期（1965）。22. L. Floberg，论流体动力润滑，特别关注空穴下压力和空化区域中的流束数量，《斯堪的纳维亚理工学院学报：机械工程系列》第19期（1965）。23. L. Floberg，《论液体的抗拉强度》，机械元件部/隆德理工大学学报，瑞典隆德，隆德理工大学，1973。24. R. F. Ausas, M. Jai, G. C. Buscaglia，一种用于含空化动态润滑问题的质量守恒算法，《摩擦学汇刊》131 (3) (2009)。doi:10.1115/1.3142903。25. M. Miraskari, F. Hemmati, A. Jalali, M. Y. Alqaradawi, M. S. Gadala，对滑动轴承通用空化算法的稳健改进，《摩擦学汇刊》139 (3) (2017)。doi:10.1115/1.4034244。26. F. J. Profito, M. Giacopini, D. C. Zachariadis, D. Dini，一种用于求解

雷诺润滑方程的通用有限体积法及质量守恒空化模型，《摩擦学快报》60 (18) (2015) 1–21。doi:10.1007/s11249-015-0588-0。27. D. Zhu, J. Wang，《界面力学：接触与润滑理论及方法》，CRC Press，美国佛罗里达州博卡拉顿，2019。28. W. Habchi，《弹流润滑问题的有限元建模》，Wiley，美国新泽西州霍博肯，2018。29. J. H. Ferziger, M. Peri´c, R. L. Street，《流体动力学计算方法》，Springer International Publishing，瑞士沙夫豪森，2020。30. T. J. Chung，《计算流体力学》，剑桥大学出版社，英国英格兰剑桥，2002。doi:10.1017/CBO9780511606205。31. I. Demirdzic，一种用于计算复杂几何形状中流动的有限体积法，博士论文，伦敦帝国理工学院，英国（1982）。32. M. Peric，一种用于预测复杂管道中三维流体流动的有限体积法，博士论文，伦敦帝国理工学院，英国（1985）。33. D. Drikakis, W. Rider，《不可压缩流与低速流的高分辨率方法》，Springer，德国柏林，2005。34. X. Ai，采用半系统方法和多重网格方法对粗糙表面线接触与点接触弹流润滑进行数值分析（第1卷和第2卷），博士论文，美国西北大学（1993）。35. Q. J. Wang, L. Sun, X. Zhang, S. Liu, D. Zhu，基于FFT的计算接触力学方法，《机械工程前沿》6 (2020)。doi:10.3389/fmech.2020.00061。36. L. A. E. Hough，压力作用于边界部分区域时半无限固体中产生的应力，《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑：数学或物理学论文集》228 (659-669) (1929) 377–420。doi:10.1098/rsta.1929.0009。37. S. Ardah, F. J. Profito, D. Dini，一种用于热弹流润滑的集成有限体积框架，《国际摩擦学》177 (2023) 107935。doi:10.1016/j.triboint.2022.107935。38. S. Liu, Q. Wang, G. Liu，一种用于接触分析的通用离散卷积与FFT（DC-FFT）方法，《Wear》243 (1) (2000) 101–111。doi:10.1016/S0043-1648(00)00427-0。39. T. Verstraete, S. Scholl，用于预测共轭传热的分区方法稳定性分析，《国际传热与传质杂志》101 (2016) 852–869。doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer. 2016.05.041。40. J. Degroote，流固耦合的分区模拟，《计算方法工程档案》20 (3) (2013) 185–238。doi:10.1007/s11831-013-9085-5。41. M. Kaneta, P. Yang, I. Krupka, M. Hartl，氮化硅与钢圆形接触中的热弹流润滑基础，《机械工程师学会会刊J辑：工程摩擦学杂志》229 (8) (2015) 929–939。doi:10.1177/1350650114565679。42. M. Kaneta, K. Matsuda, H. Nishikawa，接触材料热学性质和滑滚比对弹流润滑的影响，《摩擦学杂志》144 (6) (2022)。doi:10.1115/1.4053095。43. N. Ohno，汽车用环形无级变速器流体的高压特性，《国际摩擦学》40 (2) (2007) 233–238。doi:10.1016/j.triboint.2005.09.015。44. J. Lu, T. Reddyhoff, D. Dini，利用红外显微镜研究弹流润滑流变学和摩擦中的热效应，《国际摩擦学》146 (2020) 106179。doi:10.1016/j.triboint.2020.106179。45. M. Hartinger, T. Reddyhoff，弹流润滑线接触的计算流体力学建模与温度和摩擦测量结果的比较，《国际摩擦学》126 (2018) 144–152。doi:10.1016/j.triboint.2018.05.012。46. S. Bair, S. Flores-Torres，高压和高应力下聚α烯烃混合物的黏度，《摩擦学汇刊》141 (2) (2019)。doi:10.1115/1.4041124。47. R. Larsson, O. Andersson，高压下润滑剂的导热系数和热容，《机械工程师学会会刊J辑：工程摩擦学杂志》214 (4) (2000) 337–342。doi:10.1243/1350650001543223。48. H. Nguyen-Schäfer, J.-P. Schmidt，《面向物理学家和工程师的张量分析与初等微分几何》，Springer，德国柏林，2017。49. H. Daiguji, B. R. Shin，采用曲线坐标网格求解不可压缩和可压缩纳维–斯托克斯方程的若干数值格式，《Sadhana》18 (3) (1993) 431–476。doi:10.1007/BF02744365。50. F. White，《黏性流体流动》，第3版，McGraw-Hill，美国纽约，2007。51. S. Patankar，《数值传热与流体流动》，CRC Press，美国佛罗里达州博卡拉顿，1980。