arXiv:2304.04524v1 [math.AC] 10 Apr 2023

整闭理想的 Ratliff-Rush 滤过、Hilbert 系数与约化数

KUMARI SALONI 和 ANOOT KUMAR YADAV

Abstract. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-primary 理想。我们根据低阶 Hilbert 系数 $e_i(I)$ $0 \leq i \leq 2$ 及 I 的约化数，建立第三 Hilbert 系数 $e_3(I)$ 的界。当 $d = 3$ 时，这些界的边界情形刻画了 I 的 Ratliff-Rush 滤过的某些性质。尽管这些性质弱于深度 $G(I) \geq 1$，但它们保证三维情形下 $r_J(I)$ 的约化数满足 Rossi界。在此背景下，我们证明，若深度 $G(I) \geq d-3$，则 $r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + e_2(I)(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) - e_3(I)$。我们还讨论第四 Hilbert 系数 $e_4(I)$ 的符号。

1. Introduction

Rossi 的一项著名结果 [25] 给出了一个维数为二维的 Cohen-Macaulay 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 中 $\mathfrak{m}$-主理想I 的约化数界。Rossi界关于 I 的重数和第一 Hilbert 系数呈线性关系。如何在更高维数下建立相同的界，仍是一个未解决的问题。本文受到我们在三维情形下推广 Rossi 证明的兴趣所启发。我们有两个重要观察。首先，理想的高阶 Hilbert 系数可能会出现在这个界中，见定理 5.6。其次，理想的 Ratliff-Rush 滤过最好在某种意义下表现良好，见注 3.10。

在全文中，设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 且具有无限剩余域的 Cohen-Macaulay局部环，并且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-准素理想。一个 I-可容许滤过 I $=\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个理想序列，满足 (i) $I_{n+1} \subseteq I_n$，(ii) $I_m I_n \subseteq I_{m+n}$ 以及 (iii) $I^n \subseteq I_n \subseteq I^{n-k}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。I 的一个约化是一个理想 $J \subseteq I_1$，满足 $JI_n = I_{n+1}$ （对 $n \gg 0$），如果它在所有约化中关于包含关系是极小的，则称其为极小约化。如果剩余域$R/\mathfrak{m}$ 是无限的，那么I 的一个极小约化存在，并且由 d 个元素生成。极小约化在 Hilbert 函数和爆炸代数的研究中十分重要。对于 I 的一个极小约化 J，我们定义

$$r_J(\mathcal{I}) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid I_n \neq JI_{n-1}\} \text{ and } r(\mathcal{I}) = \min\{r_J(\mathcal{I}) \mid J \text{ is a minimal reduction of } \mathcal{I}\}.$$

上述数分别称为 I 关于 J 的约化数和 I 的约化数。当 I 是 I-进滤过 $\{I^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 时，我们分别用 $r_J(I)$ 和 $r(I)$ 代替 r_J(I) 和 r(I)。

在高维推广 Rossi界 的主要困难之一是，$r_J(I)$ 相对于表面元的表现并不理想。这一事实与 r_J 的 Ratliff-Rush

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13H10, 13D40, 13A30.*Key words and phrases.*Cohen-Macaulay 局部环，约化数，Ratliff-Rush 滤过，Hilbert 系数。第二作者受印度政府 UGC 奖学金资助。

滤过密切相关。我们更一般地回顾 I-可容许滤过 I 的定义。I 的 Ratliff-Rush 滤过为滤过 $\{\widetilde{I_n} = \bigcup (I_{n+t} : I^t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$。设 $x \in I$ 是 $I_{t\geq 0}\widetilde{\qquad\qquad}$ 和 $R' = R/(x)$ 的表面元。若对所有 $n \geq 1.$，都有 $I^n R' = I^n R'$，则称 I 的 Ratliff-Rush 滤过模 x 表现良好。在注 3.10 中，我们证明，在三维 Cohen-Macaulay 局部环中，若 I 的 Ratliff-Rush 滤过模表面元 $x \in I$ 表现良好，则 Rossi界 对 $r_J(I)$ 成立。鉴于此，自然要寻找使 I 的 Ratliff-Rush 滤过表现良好的条件，最好是可计算的条件。正如本文将要看到的，Hilbert 系数能在一定程度上控制这一性质。在三维情形下，Puthenpurakal 提出的一个充分条件是 Hilbert 系数 $e_2(I)$ 和 $e_3(I)$（定义见下文）为零。然而，若 I 是整闭的，则 $e_2(I) = 0$ 意味着 $G(I)$ 是 Cohen-Macaulay，这一条件更强。

I的 Hilbert系数是唯一的整数 e_i(I)、 $0 \leq i \leq d$，使函数$H_{\mathcal{I}}(n) := \ell(R/I_n)$ 对于 $n \gg 0$: 与以下多项式重合

$$P_{\mathcal{I}}(x) = e_0(\mathcal{I})\binom{x+d-1}{d} - e_1(\mathcal{I})\binom{x+d-2}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(\mathcal{I}).$$

此处， $\ell(*)$表示长度函数。函数 $H_{\mathcal{I}}(n)$和多项式 $P_{\mathcal{I}}(x)$分别称为I的Hilbert-Samuel函数和 Hilbert-Samuel多项式。详情请参阅[27] 。对于I ={I^n}$_{n\in\mathbb{Z}}$，我们用 $e_i(I)$代替 e_i(I)。Hilbert系数包含有关理想 I、环 R 以及与 I相关的爆炸代数的深刻信息。

关于前三个系数的研究很多，即 $e_i(I)$ 对于 $0 \leq i \leq 2.$。一旦遇到 $e_3(I)$，这些系数的性质便会发生变化。例如，Northcott [21]证明了 $e_1(I) \geq 0$，而 Narita [20] 证明了 $e_2(I) \geq 0$。在同一篇论文中，Narita 证明了 $e_3(I)$ 可以为负。然而，若深度 $G(I) \geq d-1$，则 $e_3(I) \geq 0$，这是 Marley [16] 的结果；若 I 是正规理想，则 $e_3(I) \geq 0$，这是 Itoh [13] 和 Huckaba-Huneke [11] 的结果。之后，Corso-Polini-Rossi [4] 证明，若 I^q 是整闭的，则对充分大的 q， $e_3(I) \geq 0$。当 I 是整闭的时，Itoh[12] 证明，若 $e_2(I) \leq 2.$，则 $e_3(I) = 0$。在 [24], 中，Puthenpurakal 证明，对于一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想 I，若 $e_2(I) = 0$，或若 $r_J(I) \leq 2$，则 $e_3(I) \leq 0$。此外，Mafi-Naderi [15], 证明，若$e_2(I) \leq 1$，则 $e_3(I) \leq 0$。当 I 是整闭的时，我们可以将其中一些结果作为主要定理的简单推论得到。我们得到，若 $e_2(I) \leq 2$，则 $e_3(I) \leq 0$；若 $e_2(I) = 3$，则 $e_3(I) \leq 2$。关于 Hilbert 系数的符号与消失的讨论，可见于 [2], [3], [6], [7], [14], [17],[19], [28] 等文献。

假设 $G(I) \geq d-1$。那么，Marley [16] 证明了 $e_3(I) \geq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。本文的下述定理是 Marley的结果 的推广。正如例 3.4所示，Marley的假设更强。

定理 1.1. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-初等理想。假设 I 的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列 $x_1, \ldots, x_{d-2} \in I$ 的表现良好。那么 $e_3(I) \geq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。

上述定理给出了 I 的 Ratliff-Rush 滤过在模去一个表面元后表现良好的必要条件。设 I 是一个整闭理想。在推论 4.8 中，我们证明，若满足以下条件之一，则 $e_3(I) \leq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$: (i)$r_J(I) \leq 3$; (ii) $e_2(I) \leq 3$; (iii) $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) \leq 2$；或 (iv) $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \leq 1.$。事实上，当 $d = 3$ 时，我们证明在上述所有情形下，等式 $e_3(I) = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$

成立，当且仅当 I 的 Ratliff-Rush 滤过在模去一个表面元后表现良好。这些结论是以下定理的推论。

定理 1.2. 设 $(R,\mathfrak{m})$是一个维数为 $d \geq 3$的 Cohen-Macaulay 局部环， I 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-primary 理想，并且 J 是 I 的一个极小约化。则

$$e_3(I) \leq \frac{(r_J(I)-1)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big); \tag{1}$$

$$e_3(I) \leq \frac{\big(e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I)\big)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big) \text{ and} \tag{2}$$

$$e_3(I) \leq \frac{\big(e_2(I)-1\big)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big). \tag{3}$$

此外，假设 $d = 3$ ，且等式在 (1)、(2) 或 (3) 中任一式成立。那么， I 的 Ratliff-Rush 滤过模去一个表面元后表现良好。反过来，假设 I 的 Ratliff-Rush 滤过模去一个约化序列 $x_1, \ldots, x_{d-2} \in I$ 后表现良好。那么，(i) 若 $r_J(I) \leq 3$，则 (1) 中的等式成立；(ii) 若 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) \leq 2$ ，则 (2) 中的等式成立；以及 (iii) 若 $e_2(I) \leq 3$，则 (3) 中的等式成立。

如例 4.7 所示，若 I 不是整闭的，则上述不等式未必成立。因此，我们得到

$$e_3(I) \leq (e_2(I)-1)^2/2$$

对于整闭的 $\mathfrak{m}$-主理想 I。定理 1.2 给出了三维情形下 Ratliff-Rush 滤过模表面元表现良好的充分必要条件，如例 5.1 和例 5.2 所示。此外，该定理还有一些有趣的应用。为将 Rossi 在三维情形下的结果推广，我们证明了以下关于整闭理想的结果，从而改进了先前已知的界。

定理 1.3. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环， I 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-主理想，且 $J \subseteq I$ 是 I 的一个极小约化。假设 $\operatorname{depth} G(I) \geq d-3$。则

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + e_2(I)(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) - e_3(I).$$

对于 I 的一个极小约化 J，我们设

$$\widetilde{r}_J(\mathcal{I}) := \sup\{n \in \mathbb{Z} | \widetilde{I_n} \neq J\widetilde{I_{n-1}}\}.$$

假设 $d = 2$。已知 $\widetilde{r}_J$(I) $\leq r_J$(I)，参见 [18] 和 [26]。假设 I_1 是整闭的。在引理 3.8 中，我们证明

$$\widetilde{r}_J(\mathcal{I}) \leq e_2(\mathcal{I}) - e_1(\mathcal{I}) + e_0(\mathcal{I}) - \ell(R/I_1) + 2. \tag{4}$$

在 [5], Elias 证明了，对于 $n \gg 0$，深度 $G(I^n)$是常数。此外，对于 $n \gg 0$，深度 $G(I^n) \geq 1$ 当且仅当 I 含有一个正则元。在 [23], Puthenpurakal给出了深度 $G(I^n) \geq 2$. 的充要条件。假设 $d \geq 4$。在定理 5.3中，我们证明：(i)如果 $e_4(I) < 0$，那么对于 $n \gg 0$ ，深度 $G(I^n) \leq 2$ ；以及 (ii) 如果对于充分大的 q ， I^q 是整闭的，并且$r_J(I) \leq 3$，那么 $e_4(I) \leq 0$. 。后者此前已针对渐近正规理想 [15, 在定理 2.5] 中得到证明。在命题5.5 中，我们部分恢复了关于 $e_3(I)$ 消失的 [4, 推论 4.5] ，并进一步证明了该上界

$$e_3(I) \leq \ell(I^3/JI^2) + \ell((J \cap I^3)/JI^2) \tag{5}$$

对于整闭理想 I，在定理 5.9 中 $r_J(I) \leq 3$。
本文共分为五节。第2节简要介绍相关记号。第3节证明定理1.1及式（4）中给出的界。定理1.2在第4节中证明。最后一节陈述定理1.3、关于$e_4(I)$的签名的结果，以及式（5）中给出的 $e_3(I)$ 的界。文中还提供了一些例子来支持我们的结果。

2. Notation

I. 众所周知，I的希尔伯特级数，定义为 $H(\mathrm{I}\ t) = \sum \ell(I_n/I_{n+1})t^n$，是一个有理$_{n\geq 0}$函数，即存在唯一的有理多项式 $h_{\mathcal{I}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ 满足 $h_{\mathcal{I}}(1) \neq 0$ 使得

$$H(\mathcal{I}, t) = \frac{h_{\mathcal{I}}(t)}{(1-t)^d}.$$

对于每个 $i \geq 0$，我们定义 $e_i(\mathrm{I}) = \frac{h^{(i)}{}_{\mathcal{I}}(1)}{i!}$，其中 $h^{(i)}{}_{\mathcal{I}}(1)$表示多项式 $h_{\mathcal{I}}(t)$ 在 $t = 1$ 处的 i 阶形式导数。整数 $e_i(\mathrm{I})$称为I的 Hilbert系数，并且对于$0 \leq i \leq d$，这些系数与引言中早先定义的相同。详情请参阅 [8] 。我们将 $\widetilde{e_i}(I)$ 记作当$\mathrm{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$. 时的系数 $e_i(\mathrm{I})$

II. I 的后验数 $\eta(I)$ 定义为 $\eta(I) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid P_I(m) = H_I(m) \text{ for} m \geq n\}$。

III.对于一个分次模 $M = \oplus M_n$， M_n 表示其 n次分次部分，而 $M(-j)$表示将分次模$_{n\geq 0}$向左平移 M 度得到的模 $j.$。类似地，对于复形 $C_.$，我们将 $C_.(-j)$记作将复形 $C_.$ 向左平移 j.度得到的复形。
IV.I 的 Rees环为$\mathrm{R}(\mathrm{I}) = \oplus I_n t^n \subseteq R[t]$ 其中 t 是不定元，而I 的伴随$_{n\geq 0}$分次环为 $G(\mathrm{I}) = \oplus I_n/I_{n+1}$。当 $\mathrm{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ 时，分别用 $R(I)$和 $G(I)$ 表示 Rees 环和伴随$_{n\geq 0}$分次环。置 $\mathrm{R}_+ = \oplus_{n\geq 1} I_n t^n$.

V. 假设 $x_1, \ldots, x_s$ 是 R 中的一个序列。我们分别用 $\underline{x}$ 和 $(\underline{x})$ 表示序列 $x_1, \ldots, x_s$ 以及理想 $(x_1, \ldots, x_s) \subseteq R$。对于模去表面元，我们使用记号 I' 和 R'。

VI. 对于数值函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，我们令 $\triangle f(n) = f(n+1) - f(n)$，并可递归地对所有 $i \geq 1$ 定义 $\triangle^i f(n) := \triangle(\triangle^{i-1} f(n))$。

VII.我们将F记作滤过$\{I^n\}_{n\geq 0}$，并对于一个具有极小约化 J 的 I 可容许滤过 I，$v_n(\mathrm{I}) = \ell(I_{n+1}/JI_n)$。为便于今后参考，我们回顾 [25, 定理 1.3]的证明中的以下不等式:

$$r_J(I) \leq \sum_{n\geq 0} v_n(\mathcal{F}) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1. \tag{6}$$

3. Ratliff-Rush filtration and $e_3(I)$

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环。Marley [16, 推论 2.9],证明，若 $\operatorname{depth} G(I) \geq d-1$，则 $e_3(I) \geq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$；Rossi [25] 证明，若 $\operatorname{depth} G(I) \geq d-2$，则 $r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1$。从下一个例子可以明显看出，即使 $\operatorname{depth} G(I) = 0$，上述两个界仍然成立。本节讨论，对于这两个结果，关于 $G(I)$ 的深度条件可以替换为关于 I 的 Ratliff-Rush 滤过行为的一个较弱条件。

例 3.1. [15, 例 3.7] 设 $R = k[x,y,z]_{(x,y,z)}$ 和 $I = (x^4, y^4, z^4, x^3y, xy^3, y^3z, yz^3)$。则 $\operatorname{depth} G(I) = 0$, I 的希尔伯特级数为

$$H(I,t) = \frac{30 + 12t + 22t^2 + 8t^3 - 2t^4 - 12t^5 + 6t^6}{(1-t)^3}$$

且希尔伯特多项式为

$$P_I(n) = 64\binom{n+2}{3} - 48\binom{n+1}{2} + 4\binom{n}{1}.$$

因此, $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = -10$ 且 $e_3(I) = 0$. 我们还注意到, $J = (x^4, y^4, z^4)$ 是 I 的一个极小约化, 且 $r_J(I) = 4 \le 14 = e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I)$。

~回顾一下, 理想 I 的 Ratliff-Rush 闭包 I 是以下理想链的稳定值:

$$I \subseteq (I^2 : I) \subseteq (I^3 : I^2) \subseteq \ldots \subseteq (I^{n+1} : I^n) \subseteq \ldots$$

理解 I 的幂的 Ratliff-Rush 闭包与表面元 $x_1 \in I$之间的相互作用很有意义。一般来说, 对于所有 $n \ge 0$, $\widetilde{I^n}R' \subseteq \widetilde{I^nR'}$, 而当 $n \gg 0$时等式成立, 其中 $R' = R/(x_1)$。

定义 3.2. 设 $x_1, \ldots, x_s \in I$ 是一个约化序列。则我们称

(1) I 的 Ratliff-Rush 滤过模 x_1 表现良好, 如果对所有 $n \ge 0$, $\widetilde{I^n}R' = \widetilde{I^nR'}$; (2) I 的 Ratliff-Rush 滤过模 $x_1, \ldots, x_s$ 表现良好, 如果对所有 $1 \le i \le s$, $I/(x_1, \ldots, x_{i-1})$ 模 $R/(x_1, \ldots, x_{i-1})$ 中 x_i 的像表现良好, 其中 $(x_1, \ldots, x_{i-1}) = (0)$, 对 $i = 1$ 成立。

容易看出, 上述定义等价于 [24, 定义 4.4] 中给出的定义。如果 I 的 Ratliff-Rush 滤过模某个约化序列表现良好, 那么模任意约化序列也表现良好。这由 [24, 推论 4.7] 得出。此处我们回顾文献中的一些相关讨论, 主要来自 [23] 和 [24]。按照 [23], , 我们定义 $L^I(R) = \bigoplus_{n\ge 0} R/I^{n+1}$. 。正合列

$$0 \to R(I) \to R[t] \to L^I(R)(-1) \to 0$$

在 $L^I(R)$上定义了一个 $R(I)$-模结构。注意, $L^I(R)$不是有限生成的 $R(I)$-模。然而, 支集在 $\mathfrak{M} = m \oplus R(I)_+$ 中的局部上同调模 $H^i_{\mathcal{M}}(L^I(R))$ 对于 $0 \le i \le 2$都是 $*$-Artinian 的, 参见 [23, 第 4] 节。对于一个表面元 $x \in I$, 对每个 $n \ge 1$, 我们都有如下 R-模的正合列:

$$0 \longrightarrow \frac{I^{n+1} : x}{I^n} \longrightarrow \frac{R}{I^n} \xrightarrow{\psi_n^x} \frac{R}{I^{n+1}} \longrightarrow \frac{R'}{I^{n+1}R'} \longrightarrow 0,$$

其中 $R' = R/(x)$ 和$\psi_n^x(r + I^n) = xr + I^{n+1}$ 对所有 $r \in R$ 均成立。记 $I' = IR'$。这给出了一个由 $R(I)$-模组成的正合列:

$$0 \longrightarrow B^I(x,R) \longrightarrow L^I(R)(-1) \xrightarrow{\psi^x} L^I(R) \xrightarrow{\rho} L^{I'}(R') \longrightarrow 0 \tag{7}$$

其中 ψ^x 是乘以 x 的映射, 且

$$B^I(x,R) = \bigoplus_{n\ge 0} \frac{I^{n+1} : x}{I^n}.$$

注意，对所有 $n \gg 0$，都有 $I^{n+1} : x = I^n$。因此， $H^0_{\mathcal{M}}(B^I(x,R)) = B^I(x,R)$。(7)中的正合列诱导出一个局部上同调模的长正合列，参见 [23, 第 6]节：

$$(8) \quad 0 \longrightarrow B^I(x,R) \longrightarrow H^0_{\mathcal{M}}(L^I(R))(-1) \longrightarrow H^0_{\mathcal{M}}(L^I(R)) \longrightarrow H^0_{\mathcal{M}}(L^{I'}(R')) \longrightarrow H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R))(-1) \longrightarrow H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R)) \longrightarrow H^1_{\mathcal{M}}(L^{I'}(R')) \longrightarrow \dots.$$

由 [23, 命题 4.7], $H^0_{\mathcal{M}}(L^I(R)) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^{n+1}}{I^{n+1}}$. 为方便起见，我们记 $b_I := \ell(B^I(x,R))$ 和 $s_I := \ell(H^0(L^{I'}(R'))$. 注意 $b_I - s_I \leq 0$.

注3.3. (1) 由 [24, 定理 2.3]， I 的 Ratliff-Rush 滤过模 x表现良好，当且仅当 $H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R)) = 0$. 等价地， $b_I - s_I = 0$. 为此，考虑式 (8) 中模的长度。我们有

$$\ell(B^I(x,R)) - \ell(H^0_{\mathcal{M}}(L^I(R))) + \ell(H^0_{\mathcal{M}}(L^I(R))) - \ell(H^0_{\mathcal{M}}(L^{I'}(R'))) + \ell(Im) = 0$$

其中 $Im := Image(H^0_{\mathcal{M}}(L^{I'}(R')) \to H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R)(-1)))$。因此， $b_I - s_I = 0$ 当且仅当 $Im = 0$ 当且仅当 $\ker(H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R)(-1)) \to H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R))) = 0$ 这等价于 $H^1_{\mathcal{M}}(L^I(R)) = 0$ 由 [23, 引理 1.10] 和 [23, 命题 4.4]。

(2) 假设 $\operatorname{depth} G(I) \geq 2$。那么 $I^{n+1} : x = I^n$ 对所有 $n \geq 0$ 都成立，这给出 $b_I = 0$。此外，$\operatorname{depth} G(I') \geq 1$ 意味着 $\widetilde{I'^{n+1}} = I'^{n+1}$ 对所有 $n \geq 0$都成立。因此， $H^0_{\mathcal{M}}(L^{I'}(R')) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{\widetilde{I'^{n+1}}}{I'^{n+1}} = 0$, 这给出 $s_I = 0$。由（1）可知， I 的 Ratliff-Rush 滤过模去一个表面元后表现良好。反过来未必成立，例 3.4 即可说明这一点。

(3) 假设 I 是一个正规 $\mathfrak{m}$-初等理想。那么 $\widetilde{I^n} + (x) : (x) = \widetilde{I^n : (x)} = \widetilde{I^{n-1}}$ 对所有 $n \geq 1$成立，当且仅当 $\operatorname{depth} G(I') \geq 1$. 。因此，对于正规 $\mathfrak{m}$–初等理想 I， I 的 Ratliff-Rush 滤过模去 x 后表现良好，当且仅当 $\operatorname{depth} G(I) \geq 2$.

例 3.4. [4, 例 3.8] 设 $R = Q[[x,y,z]]$ 和 $I = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, xy, yz, xz)$。希尔伯特级数为

$$H(I,t) = \frac{5 + 6t^2 - 4t^3 + t^4}{(1-t)^3}.$$

然后 $e_2(I) = e_3(I) = 0$。根据 [24, 定理 6.2], Ratliff-Rush 滤过 I 在模去一个表面元后表现良好。然而，深度 $G(I) = 0$ 与 $x^2 \in (I^2 : I) \subseteq \widetilde{I}$， 但 $x^2 \notin I$。同样，在这种情况下，我们有 $0 = e_3(I) \geq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = -1$.

现在我们证明下面的结果，它可以看作是 Marley的结果 [16,推论 2.9] 的推广。

定理3.5。设$(R,\mathfrak{m})$是一个维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-初等理想。假设 I 的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列$x_1, x_2, \dots, x_{d-2} \in I$表现良好。那么 $e_3(I) \geq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。

我们需要以下引理。

引理3.6. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个三维 Cohen-Macaulay 局部环， I 是一个 $\mathfrak{m}$-准素理想， $x \in I$ 是一个表面元。那么

$$e_3(I) = \widetilde{e_3}(I') + b_I - s_I.$$

证明。根据 [27, 命题1.2], $e_3(I) = e_3(I') + b_I$。由于$\dim R' = 2$，我们有 $e_3(I') = \widetilde{e_3}(I') - s_I$利用 [24, 1.5(b)]。□

定理3.5的证明。假设 $d = 3$。我们记 $R' = R/(x_1)$ 和 $I' = I/(x_1)$。对于 $0 \le i \le 2$，我们有 $e_i(I) = e_i(I') = \widetilde{e_i}(I')$。利用 [10, 推论 4.13], 我们有

$$
\begin{aligned}
e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) &= e_2(I') - e_1(I') + e_0(I') - \ell(R'/I') \\
&= \widetilde{e_2}(I') - \widetilde{e_1}(I') + \widetilde{e_0}(I') - \ell(R'/I') \\
&= \sum_{n\ge 1} n\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) - \sum_{n\ge 0} \ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) + \ell(R'/J') - \ell(R'/I') \\
&= \sum_{n\ge 1} n\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) - \sum_{n\ge 1} \ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) - \ell(\widetilde{I'}/J') + \ell(I'/J') \\
&\le \sum_{n\ge 1} n\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) - \sum_{n\ge 1} \ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) - \ell(I'/J') + \ell(I'/J') \\
&= \sum_{n\ge 2} (n-1)\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}})
\end{aligned} \tag{9}
$$

另一方面，根据 [27, 定理 2.5], 我们有

$$
\widetilde{e_3}(I') = \sum_{n\ge 2} \binom{n}{2} \ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}). \tag{10}
$$

现在设 I 的Ratliff-Rush 滤过模 x_1表现良好。根据引理3.6和注3.3的第(1)部分，$e_3(I) = \widetilde{e_3}(I') = \sum_{n\ge 2}\binom{n}{2}\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) \ge \sum_{n\ge 2}(n-1)\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) \ge e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。

现在假设 $d \ge 4$ 以及 I的Ratliff-Rush 滤过模 $x_1, \ldots, x_{d-2}$表现良好。令$I' = I/(x_1, \ldots, x_{d-3})$和 $R' = R/(x_1, \ldots, x_{d-3})$。那么 I'的Ratliff-Rush 滤过模 x_{d-2}表现良好。根据归纳假设，

$$
e_3(I') \ge e_2(I') - e_1(I') + e_0(I') - \ell(R'/I').
$$

由于对于 $0 \le i \le 3$，$e_i(I) = e_i(I')$。因此，$e_3(I) \ge e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。 □

由此可直接得到 Marley的结果。

推论 3.7. 设 R 是维数为 $d \ge 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-准素理想。设 $\operatorname{depth} G(I) \ge d - 1.$。则 $e_3(I) \ge e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。

证明。设 $d = 3$。则 $\operatorname{depth} G(I) \ge 2$，这意味着根据注3.3的第 (2) 部分，$I$ 的 Ratliff-Rush 滤过模去一个表面元后表现良好。结论由定理3.5得出。

设 $d \ge 4.$。令 $x \in I$ 为一个表面元。则 $\dim R' = d - 1$，$\operatorname{depth} G(I') \ge d - 2$，且对于 $0 \le i \le 3.$，$e_i(I') = e_i(I)$。根据归纳假设，$e_3(I) = e_3(I') \ge e_2(I') - e_1(I') + e_0(I') - \ell(R'/I') = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I).$ □

命题 3.9 讨论的是定理3.5在某些限制条件下的边界情形。为此，我们需要下面这个本身也很有趣的引理。目前尚不清楚 Rossi界能否推广到二维中滤过 I 的约化数，也就是说，$r_J(I) \le e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I_1) + 1$ 是否成立。在 [18], 中，作者证明了 $\widetilde{r}_J(I) \le e_2(I) + 1$。下面的引理在某些情形下改进了上述界。

引理 3.8. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个二维 Cohen-Macaulay 局部环， I 是一个 $\mathfrak{m}$-主理想，且 $\mathcal{I}=\{I_n\}$ 是一个 I-容许滤过。假设 I_1 是一个整闭理想。那么，对于 $\mathcal{I}$ 的一个极小约化 J ，有

$$\widetilde{r}_J(\mathcal{I}) \leq e_2(\mathcal{I}) - e_1(\mathcal{I}) + e_0(\mathcal{I}) - \ell(R/I_1) + 2.$$

证明。由于 $\ell(I_1/J) = \ell(I_1/J)$, 对于 $0 \leq i \leq 2$, $e_i(\mathcal{I}) = \widetilde{e}_i(\mathcal{I})$，且深度 $G(\mathcal{I}) \geq 1$，按照 (9) 中对滤过所作的类似计算将得到

$$e_2(\mathcal{I}) - e_1(\mathcal{I}) + e_0(\mathcal{I}) - \ell(R/I_1) = \sum_{n\geq 2}(n-1)\ell(\widetilde{I_{n+1}}/J\widetilde{I_n}).$$

这对所有 $n \geq e_2(\mathcal{I}) - e_1(\mathcal{I}) + e_0(\mathcal{I}) - \ell(R/I_1) + 2$均给出 $\ell(\widetilde{I_{n+1}}/J\widetilde{I_n}) = 0$。因此， $\widetilde{r}_J(\mathcal{I}) \leq e_2(\mathcal{I}) - e_1(\mathcal{I}) + e_0(\mathcal{I}) - \ell(R/I_1) + 2$. □

命题 3.9. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个三维Cohen-Macaulay局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-准素整闭理想。假设 $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \leq 1$。那么 $e_3(I) = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$当且仅当 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个表面元 $x \in I$ 表现良好。

证明。由 [12, 引理 11]，存在 I 的一个表面元 x ，使得 $I/(x)$ 是 $R' = R/(x)$ 的一个整闭理想。令 $I' = IR'$ 和 $J' = JR'$。则 $e_2(I') - e_1(I') + e_0(I') - \ell(R'/I') = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \leq 1$. 由引理 3.8, $\widetilde{r}_{J'}(I') \leq 3$。由此得到 $\widetilde{e}_3(I') = \ell((I')^3/J'(I')^2)$ ，利用 (10) 以及 $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = \ell((I')^3/J'(I')^2)$，利用 (9)。因此，由引理 3.6， $e_3(I) = \widetilde{e}_3(I') + b_I - s_I = \ell((I')^3/J'(I')^2) + b_I - s_I = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) + b_I - s_I$。现在， $e_3(I) = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$ 当且仅当 $b_I - s_I = 0$ ，这等价于根据注3.3的第 (1) 部分， I 的 Ratliff-Rush 滤过模 x 表现良好。□

我们以如下评论结束本节。

评论 3.10. 假设 $d = 3$ 且 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个超曲面元后表现良好。那么 Rossi界成立, 即 $r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1$.

证明. 设 $\mathcal{F} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ ，且 $J = (x_1, x_2, x_3) \subseteq I$ 是 I的一个极小约化。记 $R' = R/(x_1)$, 并令 $\mathcal{F}' = \{\widetilde{I^n + (x_1)}/(x_1)\}_{n\geq 0}$。由于对所有 $n \geq 0$都有 $\widetilde{I^n}R' = \widetilde{I^nR'}$，可得 depth $G(\mathcal{F}') \geq 1$。因此，depth $G(\mathcal{F}) \geq 2$.。于是，由 [10, 定理 4.7]，有 $e_1(I) = e_1(\mathcal{F}) = \sum v_n(\mathcal{F})$。现在$n\geq 0$利用 (6)，可得 $r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1$. □

4. Bounds for $e_3(I)$

如前所述， I 的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列表现良好，是一个有用的条件。然而，这仍然涉及 I 和 I'. 的所有 Ratliff-Rush 幂。定理3.5给出了一个可计算的必要条件，用以判断 I 的 Ratliff-Rush 滤过是否表现良好。本节中，我们证明整闭理想 I的 $e_3(I)$的上界。因此，我们在三维情形下，得到 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个表面元表现良好的充分条件。

定理 4.1. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环， I 是一个 $\mathfrak{m}$-primary 整闭理想，且 J 是 I 的一个极小约化。那么

$$e_3(I) \leq \frac{(r_J(I)-1)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big). \tag{11}$$

此外，假设等式 (11) 成立且 $d = 3$，那么 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个表面元表现良好。反过来，若 I 的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列 $x_1, \dots, x_{d-2} \in I$ 表现良好，且 $r_J(I) \le 3$，那么等式 (11) 成立。

证明。设 $d = 3$。设 $x \in I$ 为表面元，使得 $I/(x)$ 是 $R' = R/(x)$ 的整闭理想。令 $I' = IR'$ 和 $J' = JR'$，则 $\dim R' = 2$，且对 $0 \le i \le 2$，有 $e_i(I) = e_i(I') = \widetilde{e_i}(I')$。由于 I' 是整闭的，我们有 $\ell(I'/J') = \ell(I'/J')$，从而在 (9) 中取等号，即，

$$e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = \sum_{n\ge 2} (n-1)\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^n}).$$

注意，$\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^n}) = 0$ 对于 $n \ge \widetilde{r}_{J'}(I')$。现在利用 (9) 和 (10)，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{e_3}(I') - \frac{(r_J(I)-1)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big) &= \sum_{n\ge 2}^{\widetilde{r}_{J'}(I')-1} \Big[\binom{n}{2} - \frac{(r_J(I)-1)(n-1)}{2}\Big]\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^n}) \\ &= \sum_{n\ge 2}^{\widetilde{r}_{J'}(I')-1} \frac{(n-1)}{2}(n - (r_J(I)-1))\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^n}) \\ &\le 0\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $\widetilde{r}_{J'}(I') \le r_{J'}(I') \le r_J(I)$ 根据 [18, 定理 2.1] 因此 $(n-1)(n-(r_J(I)-1)) \le 0$ 对每个 $2 \le n \le \widetilde{r}_{J'}(I') - 1$。现在根据引理3.6,

$$e_3(I) = \widetilde{e_3}(I') + (b_I - s_I) \le \widetilde{e_3}(I') \le \frac{(r_J(I)-1)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big). \tag{13}$$

假设 $e_3(I) = \binom{r_J(I-1)}{2}(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I))$. 那么根据 (13)，我们得到 $\widetilde{e_3}(I') + (b_I - s_I) = \widetilde{e_3}(I')$，这意味着 $b_I^2 - s_I = 0$. 因此，根据注3.3的第 (1) 部分，I 的 Ratliff-Rush 滤过模 x表现良好。

现在假设 $d \ge 4$ 和 $x \in I$ 是一个表面元，使得 $I' = I/(x)$ 是整闭的。由于 $r_{J'}(I') \le r_J(I)$，根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}e_3(I) = e_3(I') &\le \frac{(r_{J'}(I')-1)}{2}\big(e_2(I') - e_1(I') + e_0(I') - \ell(R'/I')\big) \\ &\le \frac{(r_J(I)-1)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big).\end{aligned}$$

假设 $r_J(I) \le 3$，且 I 的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列x_1，…，x_{d-2} 表现良好。那么，利用定理3.5和 (11)，我们得到 $e_3(I) = \binom{r_J(I-1)}{2}(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I))$. □

我们为整闭理想 I. 证明了 $e_3(I)$ 的另外两个界

定理 4.2. 设 (R, m) 是维数为 $d \ge 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-主整闭理想。那么

$$e_3(I) \le \frac{\big(e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I)\big)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big). \tag{14}$$

此外，假设 $d = 3$ 且等式(14)成立，则 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个表面元表现良好。反之，如果 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个约化序列 x_1、…、$x_{d-2} \in I$ 且 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) \le 2$，则等式 (14) 成立。

证明。设 $d = 3$。令 $x \in I$ 为一个表面元，使得 $I/(x)$ 是 R' 的整闭理想。如 (12) 中所示，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{e_3}(I') - \frac{(\widetilde{r}_{J'}(I')-1)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big) &= \sum_{n\geq 2}^{\widetilde{r}_{J'}(I')-1}\Big[\binom{n}{2} - \frac{(\widetilde{r}_{J'}(I')-1)(n-1)}{2}\Big]\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) \\ &= \sum_{n\geq 2}^{\widetilde{r}_{J'}(I')-1}\frac{(n-1)}{2}(n-(\widetilde{r}_{J'}(I')-1))\ell(\widetilde{I'^{n+1}}/J'\widetilde{I'^{n}}) \\ &\leq 0\end{aligned} \tag{15}$$

由于$(n-1)(n-(\widetilde{r}_{J'}(I')-1)) \leq 0$ 对于每个 $2 \leq n \leq \widetilde{r}_{J'}(I')-1$. 根据 [18, 定理 2.1], 我们有$\widetilde{r}_{J'}(I') \leq r_{J'}(I')$。因此,

$$\begin{aligned}\widetilde{e_3}(I') &\leq \frac{(\widetilde{r}_{J'}(I')-1)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big) \\ &\leq \frac{(r_{J'}(I')-1)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big) \\ &\leq \frac{e_1(I')-e_0(I')+\ell(R'/I')}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big) \\ &= \frac{e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big)\end{aligned} \tag{16}$$

其中，最后一个不等式由二维中的Rossi界得到 [25, 推论 1.5]。最后，为了得到该结果，我们按照定理 4.1 的证明使用 $e_3(I) = \widetilde{e}_3(I') + b_I - s_I \leq \widetilde{e_3}(I')$。
假设 $e_3(I) = (e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I))/2\,(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I))$。那么，由(16)可得，$\widetilde{e_3}(I') + (b_I - s_I) = \widetilde{e_3}(I')$，这意味着 $b_I - s_I = 0$. 因此，根据注3.3的第(1)部分，I 的Ratliff-Rush 滤过模 x表现良好。
现在假设 $d \geq 4$ 和 $x \in I$ 是一个表面元，且 $I' = I/(x)$ 是整闭的。那么，根据归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}e_3(I) = e_3(I') &\leq \frac{(e_1(I')-e_0(I')+\ell(R'/I'))}{2}\Big(e_2(I')-e_1(I')+e_0(I')-\ell(R/I)\Big) \\ &= \frac{(e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I))}{2}\Big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\Big).\end{aligned}$$

假设 $(e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I)) \leq 2$，且 I的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列 $x_1, \ldots, x_{d-2} \in I$表现良好。那么，利用定理3.5和 (14)，我们得到

$$e_3(I) = \frac{\big(e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I)\big)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big). \qquad \square$$

推论 4.3. 设 (R,m) 是维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-primary 整闭理想。那么

$$e_3(I) \leq \frac{\big(e_2(I)-1\big)}{2}\big(e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)\big). \tag{17}$$

此外，假设 $d = 3$，且等式 (17) 成立，那么 I 的 Ratliff-Rush 滤过模一个表面元表现良好。反过来，若 I 的 Ratliff-Rush 滤过模约化序列 $x_1, \ldots, x_{d-2}$ 表现良好，且 $e_2(I) \leq 3$，那么等式 (17) 成立。

证明.我们可以假设 $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \geq 1$。否则，$e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = 0$并且根据定理4.1，$e_3(I) \leq 0$。我们有 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) \leq e_2(I) - 1$。因此，

(17) 中的不等式由定理 4.2 得出。
此外，假设 $d = 3$. 那么，利用（16）和引理3.6，我们得到

$$e_3(I) = \widetilde{e}_3(I) + b_I - s_I \leq \widetilde{e}_3(I) \leq \frac{(e_2(I)-1)}{2}(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)). \tag{18}$$

现在，假设 $e_3(I) = \frac{(e_2(I)-1)}{2}(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I))$. 那么由 (18)， $\widetilde{e}_3(I') + (b_I - s_I) = \widetilde{e}_3(I')$，这意味着 $b_I - s_I = 0$。因此，根据注3.3的第(1)部分， I 的 Ratliff-Rush 滤过模表面元表现良好。反之，假设 $e_2(I) \leq 3$ ，且 I的 Ratliff-Rush 滤过模表面序列 $x_1, \ldots, x_{d-2}$ 表现良好。于是利用定理3.5和 (17)，可得结论。□

在 [24, 命题 6.4] 和 [15, 命题 2.6], 中，作者证明了对于一个 $\mathfrak{m}$-准素理想 I，$e_2(I) \leq 1$ 蕴含 $e_3(I) \leq 0$. 。对于一个整闭的 $\mathfrak{m}$-准素理想 I，我们得到如下推论。

推论 4.4. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-初等整闭理想。那么 $e_3(I) \leq (e_2(I) - 1)^2/2$。

证明。假设 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) = 0$。那么 $G(I)$ 是Cohen-Macaulay，且 $e_3(I) = 0 \leq (e_2(I) - 1)^2/2$。现在令 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) \geq 1$。那么根据推论 4.3,

$$e_3(I) \leq \frac{(e_2(I)-1)(e_2(I)-1)}{2}$$ □

注记4.5.假设 $d = 3$ ，且(14) 中等号成立，则 (11) 中等号也成立。反之不成立，例 4.6 清楚地表明了这一点。

证明。假设 (14) 中等号成立，则 I 的 Ratliff-Rush 滤过模表面元表现良好。因此，由注 3.10 和定理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned} e_3(I) &\leq \frac{(r_J(I)-1)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big) \\ &\leq \frac{e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I)}{2}\big(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)\big) \\ &= e_3(I). \end{aligned}$$ □

如下例所示，定理 4.1 中的界是紧的。

例4.6. [4, 例 3.2] 令 $R = K[[x, y, z]]$，其中 x、 y、 z是不定元，且 K是特征为 $\neq 3$的域。令 $N = (x^4, x(y^3 + z^3), y(y^3 + z^3), z(y^3 + z^3))$，并设 $I = N + \mathfrak{m}^5$，其中 $\mathfrak{m}$ 是 R的极大理想。理想 I 是一个正规 $\mathfrak{m}$-primary理想， $r_J(I) = 3$ 对于 I 的任意极小约化 J ，并且我们有

$$H(I, t) = \frac{31 + 43t + t^2 + t^3}{(1-t)^3}$$

这给出 $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = 1 = e_3(I)$。因此，根据定理 4.1，我们得到等式，这表明 I 的 Ratliff-Rush 滤过模表面元具有良好性质，而 $(e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I)) 2 (e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) = 3/2 > e_3(I)$，且 $(e_2(I)-1) 2 (e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) = 3/2 > e_3(I)$。注意， $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) = 3$ ，且 $e_2(I) = 4$。

回顾例 3.1 可知，定理4.1、定理 4.2 和定理 4.3 中给出的界对于非整闭的 $\mathfrak{m}$-初等理想未必成立。

例 4.7. 我们有 $(r_J(I)-1) \not\geq (e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I))= -15$，$(e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I)) \not\geq (e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I)) = -70$ 并且 $(e_2(I)-1) \not\geq (e_2(I)-e_1(I)+e_0(I)-\ell(R/I))= -15$，其中 $e_3(I) = 0$.

现在我们汇总满足 $e_3(I) \leq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$ 的情形。在第（2）部分，我们重新得到 [15, 定理 2.8]。

推论 4.8. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-初级整闭理想。若满足以下条件之一，则 $e_3(I) \leq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$:

(1) $r_J(I) \leq 3$. (2) $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \leq 1$.(3) $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) \leq 2$.(4) $e_2(I) \leq 3$.

此外，若 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) = 2$，则 $e_3(I) = e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。

证明。(1) 由定理 4.1 可得，因为 $(r_J(I) - 1)/2 \leq 1$。

(2)假设 $d = 3$。令 x 为 I 的表面元，使得 $I' = I/(x)$在 $R' = R/(x)$ 中是整闭的。于是，根据引理 3.8，$\widetilde{r}_{J'}(I') \leq 3$。因此，根据引理3.6 和 (15)，我们得到 $e_3(I) \leq \widetilde{e}_3(I') \leq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。对于 $d \geq 4$，该不等式由对 d 的归纳法得出。(3) 这由定理 4.2 中的界得出。(4) 这由推论 4.3 中的界得出。

对于最后一部分，设 $e_1(I)-e_0(I)+\ell(R/I) = 2$。那么，根据 [22, 定理 4.5], 深度 $G(I) \geq d-1$以及 $I^4 = JI^3$。因此，由推论 3.7，$e_3(I) \geq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)$。□

5. Applications

本节将给出前几节定理的一些有趣推论。

I. 在 [24, 定理 6.2], 中，Puthenpurakal 证明了 $e_2(I) = e_3(I) = \cdots = e_d(I) = 0$ 意味着，Ratliff-Rush 滤过在模去一个约化序列后表现良好。然而，当 I 是整闭的时，根据 Itoh[12, 推论 13]的结果，我们知道 $e_2(I) = 0$ 意味着 $G(I)$ 是 Cohen-Macaulay 的。在此背景下，我们在下面讨论两个例子。第一个例子展示了这样一种情形： $e_2(I) \neq 0$，深度 $G(I) = 0$，但 I 的 Ratliff-Rush 滤过表现良好。第二个例子是定理3.5以及推论 4.3 的一个应用。

例 5.1. [22, 定理 5.2] 设 $m \geq 0, d \geq 2$ 和 k 为一个无限域。考虑幂级数环 $D = k[[\{X_j\}_{1\leq j\leq m}, Y, \{V_j\}_{1\leq j\leq d}, \{Z_j\}_{1\leq j\leq d}]]$，其中有 $m + 2d + 1$ 个不定元，以及理想 $\mathfrak{a} = [(X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y)].[(X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y) + (V_i \mid 1 \leq i \leq d)] + (V_iV_j \mid 1 \leq i, j \leq d, i \neq j) + (V_i^3 - Z_iY \mid 1 \leq i \leq d)$。定义 $R = D/\mathfrak{a}$，并令 x_i, y, v_i, z_i 分别表示 X_i, Y, V_i, Z_i 在 R中的像。设 $\mathfrak{m} = (x_j \mid 1 \leq j \leq m) + (y) + (v_j \mid 1 \leq j \leq d) + (z_j \mid 1 \leq j \leq d)$为 R 中的极大理想，并令 $Q = (z_j \mid 1 \leq j \leq d)$。那么

(1) R 是 Cohen-Macaulay 局部环，维数为 $R = d$，(2) Q 是 $\mathfrak{m}$ 的极小约化，且 $r_Q(\mathfrak{m}) = 3$，(3) G的深度$\mathfrak{m} = 0$，(4) $e_0(\mathfrak{m}) = m + 2d + 2$； $e_1(\mathfrak{m}) = m + 3d + 2$； $e_2(\mathfrak{m}) = d + 1$ 且 $e_i(\mathfrak{m}) = 0$，对于 $3 \leq i \leq d$.

因此 $e_3(\mathfrak{m}) = 0 = (r_Q(\mathfrak{m})-1)_2(e_2(\mathfrak{m}) - e_1(\mathfrak{m}) + e_0(\mathfrak{m}) - \ell(R/\mathfrak{m}))$.当 $d = 3$时， $\mathfrak{m}$ 的Ratliff-Rush 滤过关于表面元的模运算表现良好，这是由定理 4.1 得出的。

例 5.2. $[4,$例 3.5$]$设 $R = k[[X,Y,Z,U,V,W]]/(Z^2, ZU, ZV, UV, YZ - U^3, XZ - V^3)$ 是一个三维 Cohen-Macaulay 局部环，且 X,Y,Z,U,V,W 是不定元。令 x,y,z,u,v,w 表示 X,Y,Z,U,V,W 在 R 和 $m = (x,y,z,u,v,w)$ 中对应的像。那么 $G(\mathfrak{m})$ 的深度为 1，且

$$H(\mathfrak{m},t) = \frac{1+3t+3t^3-t^4}{(1-t)^3}$$

由此得到 $e_2(\mathfrak{m}) = 3, e_1(\mathfrak{m}) = 8, e_0(\mathfrak{m}) = 6, \ell(R/\mathfrak{m}) = 1, e_3(\mathfrak{m}) = -1$。因此 $e_2(\mathfrak{m}) - e_1(\mathfrak{m}) + e_0(\mathfrak{m}) - \ell(R/\mathfrak{m}) = 0$ ，且 $e_3(\mathfrak{m}) = -1.$ 。因此，根据定理3.5或推论 4.3，Ratliff-Rush 滤过对表面元取模后表现不佳。

在 $[24,$定理 3.5$]$, 中已证明，如果 $d = 2, I$是整闭的，并且 $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) = 0$，那么 I 的 Ratliff-Rush滤过模表面元后表现良好。例 5.2 表明，上述结果不能推广到三维。

II. 现在我们证明关于 $e_4(I)$ 的签名的一个结果。在 $[5],$ ，Elias 证明了对于 $n \gg 0$，$\operatorname{depth} G(I^n)$ 是常数。在定理 5.3 的第一部分中，我们给出了 $\operatorname{depth} G(I^n) \geq 3$ 对于 $n \gg 0.$ 的一个必要条件。第二部分是 $[15,$ 定理 2.5$]$ 的推广，其讨论的是 I 为渐近正规理想的情形。

定理 5.3. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是维数为 $d = 4$ 的 Cohen-Macaulay 局部环。设 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-初等理想，且 J 是 I 的一个极小约化。

(1) 假设对于某个 $q \geq \eta(I)$，有 $\operatorname{depth} G(I^q) \geq 3$ 。则 $e_4(I) \geq 0$.(2) 假设对于某个 $q \geq \eta(I)$， I^q 是整闭的，且 $r_J(I) \leq 3$。则 $e_4(I) \leq 0$。

证明。设 $q \geq \eta(I)$。我们有

$$\ell(R/I^n) = e_0(I)\binom{n+3}{4} - e_1(I)\binom{n+2}{3} + e_2(I)\binom{n+1}{2} - e_3(I)\binom{n}{1} + e_4(I) \tag{19}$$

对于 $n \geq \eta(I)$，并且

$$\ell(R/(I^q)^n) = \epsilon_0\binom{n+3}{4} - \epsilon_1\binom{n+2}{3} + \epsilon_2\binom{n+1}{2} - \epsilon_3\binom{n}{1} + \epsilon_4 \tag{20}$$

对于 $n \gg 0$ ，其中对 $0 \leq i \leq 4$，有 $\epsilon_i = e_i(I^q)$。由于 $\ell(R/(I^q)^n) = \ell(R/I^{qn})$，利用 (19) 和 (20)，我们得到

$$\begin{aligned}\ell(R/I^{qn}) &= e_0(I)\binom{nq+3}{4} - e_1(I)\binom{nq+2}{3} + e_2(I)\binom{nq+1}{2} - e_3(I)\binom{nq}{1} + e_4(I)\\ &= \epsilon_0\binom{n+3}{4} - \epsilon_1\binom{n+2}{3} + \epsilon_2\binom{n+1}{2} - \epsilon_3\binom{n}{1} + \epsilon_4\end{aligned}$$

对于 $n \gg 0$。比较各项系数后，我们得到

$$\epsilon_0 = e_0(I)q^4,\ \epsilon_1 = \frac{3}{2}e_0(I)(q^4-q^3) + e_1(I)q^3,\ \epsilon_2 = \frac{e_0(I)}{12}(11q^2+7q^4-18q^3) + e_1(I)(q^3-q^2) + e_2(I)q^2,$$
$$\epsilon_3 = e_0(I)\binom{q}{4} + e_1(I)\binom{q}{3} + e_2(I)\binom{q}{2} + e_3(I)\binom{q}{1} \text{ and } \epsilon_4 = e_4(I).$$

因此,

$$\epsilon_3 - \epsilon_2 + \epsilon_1 - \epsilon_0 + \ell(R/I^q) = -e_0(I)\binom{q+3}{4} + e_1(I)\binom{q+2}{3} - e_2(I)\binom{q+1}{2} + e_3(I)\binom{q}{1} + \ell(R/I^q)$$

$$=e_4(I).$$

由于 $q \geq \eta(I)$。现在假设深度 $G(I^q) \geq 3$. 则 $e_4(I) = \epsilon_3 - (\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_0 - \ell(R/I^q)) \geq 0$ 根据推论 3.7。

对于第二部分，假设 I^q 是整闭的。利用定理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned} e_4(I) =& \epsilon_3 - (\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_0 - \ell(R/I^q)) \\ &\leq \frac{(r(I^q)-3)}{2}\Big(\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_0 - \ell(R/I^q)\Big) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(\lceil (r(I)-3)/q \rceil\Big)(\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_0 - \ell(R/I^q)) \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 [9, 引理 2.7]得出。此处，$\lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x\}$。现在，如果$r_J(I) \leq 3$，则 $\lceil r(I) - 3/q \rceil \leq 0$，结论随即得出。□

例5.4。 [15, 例3。1] 设 $R = k[x,y,z,u]_{(x,y,z,u)}$ 和 $I = (x^3,\ y^3,\ z^3,\ u^3,\ xy^2,\ yz^2,\ zu^2,\ xyz,\ xyu)$。那么 $J = (x^3,\ y^3,\ z^3,\ u^3)$ 是 I 的极小约化，且 $r_J(I) = 4$。此外，$G(I)$ 的深度为 $= 2$，希尔伯特级数为

$$H(I,t) = \frac{33 + 19t + 21t^2 + 7t^3 + 5t^4 - 3t^5 - t^6}{(1-t)^4}$$

且希尔伯特多项式为

$$P_I(n) = 81\binom{n+3}{4} - 81\binom{n+2}{3} + 27\binom{n+1}{2} + 23\binom{n}{1} - 50.$$

因此，$e_0(I) = 81$, $e_1(I) = 81$, $e_2(I) = 27$, $e_3(I) = -23$, $e_4(I) = -50$. 因此，利用定理 5.3，我们有 $2 =$ 深度 $G(I) \leq$ 深度 $G(I^n) \leq 2$ 对于 $n \gg 0$。

A 如定理 5.3 的证明中所做的三维类似计算，给出了等式 y

$$e_3(I) = e_2(I^q) - e_1(I^q) + e_0(I^q) - \ell(R/I^q) \tag{21}$$

对于 $q \geq \eta(I)$。有关详细计算，请参阅 [4] 中的定理4.1 的证明。我们在下文部分恢复了 [4, 推论 4.5] 。

命题 5.5。令 $(R,\mathfrak{m})$为一个 Cohen-Macaulay 局部环，其维数为 $d = 3$，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-primary理想。假设对于某个 $q \geq \eta(I)$，I^q 是整闭的，且 $r(I^q) \leq 2$。则 $e_3(I) = 0$。

证明。由 (21) 和定理 4.1，

$$e_3(I) = e_3(I^q) \leq \frac{(r(I^q)-1)}{2}\Big(e_2(I^q) - e_1(I^q) + e_0(I^q) - \ell(R/I^q)\Big) = \frac{(r(I^q)-1)}{2}e_3(I).$$

假设 $e_3(I) \neq 0$。则得到 $r(I^q) \geq 3$ 这就矛盾了。 □

III. 接下来，我们证明整闭理想I的约化数 $r_J(I)$的一个上界。如果深度 $G(I) \geq d-2$，那么根据 [25, 推论 1.5], 我们有

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1.$$

我们证明如下结果。

定理 5.6. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 3$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-准素理想。假设 $G(I)$ 的深度为 $\geq d-3$。那么

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + e_2(I)(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) - e_3(I).$$

我们的证明改进了 [18, 定理 4.1] 中讨论的方法。我们简要回顾n来自 [18] 的一些思路。按照 [8], , I 的第二 Hilbert 函数定义为 $H^2_{\mathcal{I}}(n) = \sum H_{\mathcal{I}}(i)_{i=0}$，而第二 Hilbert 多项式，记作 $P^2_{\mathcal{I}}(n)$，是一个多项式，它在 n 取较大值时与$H^2_{\mathcal{I}}(n)$一致。令 $\underline{x}$ 表示 R 中的一个序列 x_1、...、x_m，并令 n 为一个整数。我们按照 [10] 中的方法，通过对 m 归纳来定义修正 Koszul 复形 $C_\cdot(\underline{x}, \mathrm{I}\ n)$：对于 $m = 1$，$C_\cdot(x_1, \mathrm{I}\ n)$ 是复形

$$0 \longrightarrow R/I_{n-1} \xrightarrow{x_1} R/I_n \longrightarrow 0$$

并且对于 $m > 1$，考虑链映射 $f : C_\cdot(x_1,\dots,x_{m-1}, \mathrm{I}\ n-1) \to C_\cdot(x_1,\dots,x_{m-1}, \mathrm{I}\ n)$，它定义为乘以 x_m。定义 $C_\cdot(x_1,\dots,x_m, \mathrm{I}\ n)$ 为 f 的映射柱。那么 $C_\cdot(x_1,\dots,x_m, \mathrm{I}\ n)$ 具有如下形式

$$0 \longrightarrow R/I_{n-m} \longrightarrow (R/I_{n-m+1})^m \longrightarrow (R/I_{n-m+2})^{\binom{m}{2}} \longrightarrow \quad \dots \quad \longrightarrow R/I_n \longrightarrow 0.$$

为方便记号，当 m 的值明确时，我们记 $C_\cdot(\mathrm{I}\ n) = C_\cdot(x_1, x_2,\dots, x_m, \mathrm{I}\ n)$ 和 $C'_\cdot(\mathrm{I}\ n) = C_\cdot(x_1, x_2,\dots, x_{m-1}, \mathrm{I}\ n)$。对于任意整数 n，存在一个复形的正合列

$$0 \longrightarrow C'_\cdot(\mathcal{I}, n) \longrightarrow C_\cdot(\mathcal{I}, n) \longrightarrow C'_\cdot(\mathcal{I}, n-1)[-1] \longrightarrow 0$$

从而诱导出同调模的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_i(C'_\cdot(\mathcal{I}, n)) \longrightarrow H_i(C_\cdot(\mathcal{I}, n)) \longrightarrow H_{i-1}(C'_\cdot(\mathcal{I}, n-1)) \xrightarrow{\pm x_m} H_{i-1}(C'_\cdot(\mathcal{I}, n)) \longrightarrow \cdots.$$

我们回顾一下 [10, §4.] 中的下列公式。对于每个 n 和 $1 \le i \le d$,

$$e_i(\mathcal{I}) = \sum_{n=i}^{\infty} \tbinom{n-1}{i-1} \Delta^d[P_{\mathcal{I}}(n-d) - H_{\mathcal{I}}(n-d)] \text{ and} \tag{22}$$

$$\Delta^d[P_{\mathcal{I}}(n-d) - H_{\mathcal{I}}(n-d)] = \ell(I_n/JI_{n-1}) - \sum_{i=2}^{d} (-1)^i \ell(H_i(C_\cdot(\mathcal{I}, n))) \tag{23}$$

其中 $J = (x_1,\dots, x_d)$是I 的极小约化，且 $H_i(C_\cdot(\mathrm{I}\ n)) = H_i(C_\cdot(x_1,\dots, x_d, \mathrm{I}\ n))$.

~~定理 5.6 的证明。假设 $d = 3$。令 F $= \{I^n\}$，且 $x \in I$ 是 I 的表面元，使得 I' 是整闭的。那么 x 也是滤过 F 的表面元。假设 $J = (x, y, z)$ 是 I 的极小约化。令 $R' = R/(x)$ 和 F$' = \{\mathrm{F}'_n = \widetilde{I^n}_{+(x)}(x)\}$。由于 depth $G(\mathrm{F}) \ge 1$，我们有 $v_n(\mathrm{F}) = v_n(\mathrm{F}')$。利用 (22) 和 (23)，得到~~

$$e_1(\mathcal{F}') = \sum_{n\ge 0} v_n(\mathcal{F}') - \sum_{n\ge 1} \ell(H_2(C_\cdot(\mathcal{F}', n))). \tag{24}$$

由于 x是 F 的表面元，$e_1(I) = e_1(\mathrm{F}) = e_1(\mathrm{F}')$。因此，利用 (6) 和 (24)，我们得到

$$r_J(I) \le e_1(I) + \sum_{n\ge 1} \ell(H_2(C_\cdot(\mathcal{F}', n))) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1. \tag{25}$$

由 [10,引理 3.2],可得 $H_2(C_\cdot(\mathrm{F}' n)) = \mathcal{F}'_{n-1}:(y',z')\mathcal{F}'_{n-2}$。由于 $\mathrm{F}'_{n-1} : (y', z') \subseteq \widetilde{\mathrm{F}'_{n-2}}$,

$$\ell(H_2(C_\cdot(\mathcal{F}', n))) \le \ell\left(\frac{\widetilde{\mathcal{F}'_{n-2}}}{\mathcal{F}'_{n-2}}\right).$$

因此，对于 $m \gg 0$，我们有

$$0 \le \sum_{n=0}^{m} \ell(H_2(C_\cdot(\mathcal{F}', n))) \le \sum_{n=0}^{m} \ell\left(\frac{\widetilde{\mathcal{F}'_{n-2}}}{\mathcal{F}'_{n-2}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{m} \ell(R'/\mathcal{F}'_{n-2}) - \sum_{n=0}^{m} \ell(R'/\widetilde{\mathcal{F}'_{n-2}}) \\ &= \widetilde{e}_3(\mathcal{F}') - e_3(\mathcal{F}') \\ &= \widetilde{e}_3(\mathcal{F}') - e_3(\mathcal{F}) \quad (\text{by } [8, \text{Proposition } 1.5]) \\ &= \widetilde{e}_3(\mathcal{F}') - e_3(I) \end{aligned}$$

这给出

$$0 \leq \sum_{n\geq 0} \ell(H_2(C_\cdot(\mathcal{F}', n))) \leq \widetilde{e}_3(\mathcal{F}') - e_3(I). \tag{26}$$

由（25）和（26），可得

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + \widetilde{e}_3(\mathcal{F}') - e_3(I). \tag{27}$$

根据 [1, 命题 4.4], , 对所有 $n \geq -1$，有

$$P_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(n) - H_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(n) = \ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'})))_{n+1}). \tag{28}$$

现在将上述方程两边对 $m \gg 0$ 求和，可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} \ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'})))_{n+1}) &= \sum_{n=0}^{m} P_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(n) - \sum_{n=0}^{m} H_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{m} P_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(n) - H^2_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(m) \\ &= \widetilde{e}_0(\mathcal{F}')\binom{m+3}{3} - \widetilde{e}_1(\mathcal{F}')\binom{m+2}{2} + \widetilde{e}_2(\mathcal{F}')\binom{m+1}{1} - P^2_{\widetilde{\mathcal{F}'}}(m) \\ &= \widetilde{e}_3(\mathcal{F}'). \end{aligned}$$

由于 R'是一个 2 维 Cohen-Macaulay 局部环，因此根据 [1, 引理 4.7]，对所有 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathrm{R}(\widetilde{\ }\mathrm{F}\prime)))_n) \leq \ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathrm{R}(\widetilde{\ }\mathrm{F}\prime)))_{n-1})$。现在在方程（28）中代入 $n = -1$，得到

$$\ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'})))_0) = \widetilde{e}_2(\mathcal{F}') = e_2(\mathcal{F}') = e_2(\mathcal{F}) = e_2(I)$$

因此,

$$\widetilde{e}_3(\mathcal{F}') = \sum_{n=0}^{m} \ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'})))_{n+1}) \leq \sum_{n=0}^{a_2(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'}))} \ell((H^2_{\mathcal{R}_+}(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'})))_0) = a_2(\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{F}'}))e_2(I).$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中 $a_2(\mathrm{R}(\mathrm{F}\prime)) \leq a_2(G(\mathrm{F}\prime))$。由 [16, 推论 5.7(2)], $a_2(G(\mathrm{F}\prime)) = \widetilde{r}(\mathrm{F}\prime) - 2$。因此，利用 (27)，我们得到

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + (\widetilde{r}(\mathcal{F}') - 2)e_2(I) - e_3(I).$$

利用引理 3.8，我们得到

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + e_2(I)(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) - e_3(I).$$

对于 $d \geq 4$，令 $x \in I$ 为 I 的表面元，使得 $I' = I/(x)$ 是整闭的。则$\sim e_i(I') = e_i(I)$对于 $0 \leq i \leq 3$，且深度 $G(I') \geq d - 4$.。由于深度$G(I) \geq 1$，我们有 $I^n = I^n$ 对于所有$n \geq 1$，这意味着 $r_J(I) = r_{J'}(I')$ 根据 [18,引理 3.1]。因此，通过归纳,

$$\begin{aligned} r_J(I) = r_{J'}(I') &\leq e_1(I') - e_0(I') + \ell(R'/I') + 1 + e_2(I')(e_2(I') - e_1(I') + e_0(I') - \ell(R'/I')) - e_3(I') \\ &= e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + e_2(I)(e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I)) - e_3(I). \end{aligned}$$

□

当深度 $G(I) \geq d-3$时，则根据 [18, 定理 4.1],

$$r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1 + e_2(I)(e_2(I)-1) - e_3(I) \tag{29}$$

对于一个 $\mathfrak{m}$-主理想 I。对于一个整闭理想 I，如果 $G(I)$ 不是 Cohen-Macaulay，则 $e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) > 1$这意味着 $e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) < e_2(I) - 1$. 这表明，当 I 是整闭的时，定理 5.6 中的界优于上述 (29) 中的界。下面的例子对此予以佐证。

例 5.7。在例 5.1 中，设 $d = 3$。那么 $r_Q(\mathfrak{m}) = 3$，而我们的界 $e_1(\mathfrak{m}) - e_0(\mathfrak{m}) + \ell(R/\mathfrak{m}) + 1 + e_2(\mathfrak{m})(e_2(\mathfrak{m}) - e_1(\mathfrak{m}) + e_0(\mathfrak{m}) - \ell(R/\mathfrak{m})) - e_3(\mathfrak{m}) = 5$；而定理 4.1] 中给出的界为 $e_1(\mathfrak{m}) - e_0(\mathfrak{m}) + \ell(R/\mathfrak{m}) + 1 + e_2(\mathfrak{m})(e_2(\mathfrak{m}) - 1) - e_3(\mathfrak{m}) = 17$。

下面陈述 Rossi界成立时整闭理想的一种情形。

推论 5.8. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是三维 Cohen-Macaulay 局部环，I 是一个 $\mathfrak{m}$-主整闭理想，且 $e_2(I) = e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I)$，并且 $e_3(I) \geq 0$. 。那么，对于一个极小约化 $J \subseteq I$，有 $r_J(I) \leq e_1(I) - e_0(I) + \ell(R/I) + 1$ 。

IV. 最后我们指出，利用（22）和（23），我们有

$$e_3(\mathcal{I}) = \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(I_n/JI_{n-1}) - \sum_{i=2}^{d} (-1)^i \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(H_i(C_\cdot(\mathcal{I},n))).$$

假设 $d = 3$。那么

$$\begin{aligned} e_3(\mathcal{I}) &= \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(I_n/JI_{n-1}) - \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(H_2(C_\cdot(\mathcal{I},n))) + \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(H_3(C_\cdot(\mathcal{I},n))) \\ &\leq \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(I_n/JI_{n-1}) + \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} \ell(H_3(C_\cdot(\mathcal{I},n))). \end{aligned}$$

Fr来自修正 Koszul 复形 $C_\cdot(\mathrm{I}\ n)$，我们有 $H_3(C_\cdot(\mathrm{I}\ n)) = (I_{n-2} : J)/I_{n-3}$。因此 e,

$$e_3(\mathcal{I}) \leq \sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} [\ell(I_n/JI_{n-1}) + \ell((I_{n-2} : J)/I_{n-3})].$$

当 $r_J(I) \leq 3.$ 时，我们得到以下结果，这是定理4.1的推论。注意，对于一个整闭理想 I，如果 $r_J(I) \leq 2$，那么 $G(I)$ 是Cohen-Macaulay，且 $e_3(I) = 0$ （参见 [4,定理 3.6]）。

定理 5.9。设 $(R,\mathfrak{m})$为一个Cohen-Macaulay 局部环，其维数为 $d \geq 3$，I 一个 $\mathfrak{m}$-primary 整闭理想，且 J 为 I 的极小约化。如果 $r_J(I) \leq 3$，那么

$$e_3(I) \leq \ell(I^3/JI^2) + \ell((J \cap I^3)/JI^2).$$

证明。我们有 $e_1(I) \geq \sum_{n\geq 0} \ell(I^{n+1}/(J \cap I^{n+1})) = e_0(I) - \ell(R/I) + \sum_{n\geq 1} \ell(I^{n+1}/(J \cap I^{n+1}))$根据 [10, 定理 4.7(a)] 以及 $e_2(I) \leq \sum_{n\geq 1} n\ell(I^{n+1}/JI^n)$ 根据 [4, 定理 3.1]。这给出，

$$e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \leq \sum_{n\geq 1} n\ell(I^{n+1}/JI^n) - \sum_{n\geq 1} \ell(I^{n+1}/(J \cap I^{n+1})).$$

由于 I 是整闭的，我们有 $(I^2 \cap J) = JI$。现在由定理 4.1 可得

$$\begin{aligned} e_3(I) &\leq e_2(I) - e_1(I) + e_0(I) - \ell(R/I) \\ &\leq \ell(I^2/JI) + 2\ell(I^3/JI^2) - \ell(I^2/(J \cap I^2)) - \ell(I^3/(J \cap I^3)) \\ &= \ell(I^3/JI^2) + \ell((J \cap I^3)/JI^2). \end{aligned}$$

□

References

[1] C. Blancafort, *On Hilbert functions and cohomology*,J.Algebra 92 (1997),439-459.[2] C. H. Linh andT. T.Q. Tan, *Bounds for Hilbert Coefficient*, TaiwaneseJ.Math. 25(2021), 1159-1172.[3] C.H. Linh and V. D. Trung, *Hilbert coefficients and the depth of associated graded rings with respest toparameter ideals*, Vietnam J. Math.47 (2019), 第 2 期, 431-422.[4] A. Corso, C.Polini andM. E. Rossi, *Depth of associated graded rings via Hilbert coefficients of ideals*, J. Pure Appl. Algebra 201(2005), 126-141.[5] J. Elias, *Depth of higher associated graded rings*,J.London Math. Soc.70(2004), 41-58.[6] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong,K. Ozeki, T.T.Phuong and W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaualyness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, J. London Math. Soc. (2), 81 (2010), 679-695.[7] S. Goto andK. Ozeki, *Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters*, Contemp. Math. 555 (2011) 97-118.[8] A. Guerrieri and M. E. Rossi, *Hilbert Coefficients of Hilbert Filtrations*, J.Algebra 199(1998), 40-61.[9] L.T. Hoa, *Reduction number and Rees algebras of power of an ideal*, Proc.Amer. Math. Soc.,119 (1993), 第 2 期, 415-422.[10] S.Huckaba andT. Marley, *Hilbert coefficients and the depths of associated graded rings*,J. Lond.Math. Soc. (2) 56 (1997), 第 1 期, 64-76.[11] S.Huckaba and C. Huneke, *Normal ideals in regular rings*, J. Reine Angew. Math. 510 (1999), 63-82.[12] S. Itoh, *Hilbert coefficients of integrally closed ideals*, J. Algebra176(1995), 638-652.[13] S. Itoh, *Coefficients of normal Hilbert polynomials*, J. Algebra 150(1992), 101-117.[14] C. H,Linh, *Castelnuovo-Mumford regularity and Hilbert coefficients of parameter ideals*,TaiwaneseJ. Math. 23(2019), 第 5期, 1115-1131.[15] A.Mafi and D. Naderi, *Result on the Hilbert coefficient and reduction numbers*, Proc. Indian Acad.Sci. Math.Sci. 129 (2019). 第 4期. 论文编号 60, 12 页.[16] T. Marley, Cohen-Macaulay 局部环中理想的 Hilbert函数, 博士论文,Purdue 大学(1989).[17] L. Mccune, *Hilbert coefficients of parameter ideal*, J.Commut. Algebra 5 (2013) 第 3期, 399-412.[18] M. Mandaland K. Saloni, *Bounds for the reduction number of primary ideal in dimension three*,待发表, Proc. Amer. Math. Soc. (arXiv.2209.13319)[19] M. Mandal, B.Singh and J. K. Verma, *On some conjectures about the chern numbers of filtration*, J. Algebra325 (2011), 第 1 期, 147-162.[20] M. Narita, *A note on the coefficients of the Hilbert characteristic functions in semi-regular local rings*,Proc. Cambridge Philos. Soc. 59(1963),269-275.[21] D. G. Northcott, *A note on the coefficients of the abstract Hilbert function*, J.London Math. Soc. 35 (1960) 209-214.[22] K. Ozeki and M.E. Rossi, *The Structure of the Sally module of integrally closed ideals*, Nagoya MathJ. 227(2017), 49-76.[23] Tony J. Puthenpurakal, *Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded rings:Part I*, J. Pure Appl. Algebra208 (2007), 159-176. [24] Tony J. Puthenpurakal, *Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded rings: Part II*, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), 611-631.[25] M. E. Rossi, *A bound on the reduction number of a primary ideal*, Proc.Amer. Math.Soc.128(5) (1999), 1325-1332.[26] M. Rossi and I. Swanson, *Notes on the behaviour of the Ratliff-Rush filtration*, Contemp.Math. 331 (2001), 313-328.[27] M. E. Rossi and G. Valla, *Hilbert functions of filtered modules*, Lecture Notes ofthe Unione Matematica Italiana,9. Springer-Verlag, Berlin; UMI,Bologna, 2010. xviii+100 页.[28] A. Saikiaand K. Saloni, *Bounding Hilbert coefficient of paramater ideals*, J.Algebra, 501 (2018), 328-344.

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Patna, Bihta, Patna 801106, India
Email address: ksaloni@iitp.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Patna, Bihta, Patna 801106, India
Email address: anoot_2021ma06@iitp.ac.in, vicky.anoot@gmail.com