arXiv:2304.04548v1 [math.NT] 4 Apr 2023

孙智伟的两个同余猜想的证明

GUO-SHUAI MAO

Abstract. 本文主要证明孙智伟的两个同余猜想。设 $p\equiv 3$ (模 4) 为素数。则

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\pmod{p^3}.$$

对于任意奇素数 p，若 $p=x^2+y^2$ 与 $4|x-1$、$2|y$，则

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k}+\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(2k+1)\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\equiv 2\left(\frac{2}{p}\right)x\pmod{p^3}.$$

1. Introduction

设 $p>3$ 是一个素数。Rodriguez-Villegas [8] 猜想

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{16^k}\equiv\left(\frac{-1}{p}\right)\pmod{p^2},$$

该结论由E.Mortenson [7] 通过一种涉及 p-进伽马函数和 Gross-Koblitz 公式（用于特征和）的高级工具予以证实，上述 $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ 表示 Legendre符号。Sun[16] 将上述同余式推广为以下形式：设 $p>3$为素数，且 $d\in\{0,1,\ldots,(p-1)/2\}$。那么

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}\binom{2k}{k+d}}{16^k}\equiv\left(\frac{-1}{p}\right)+p^2\frac{(-1)^d}{4}E_{p-3}\left(d+\frac{1}{2}\right)\pmod{p^3}.$$

关键词与短语：同余式；调和数；卢卡斯数列；勒让德符号；二元二次型。数学主题分类：主要分类 11A07；次要分类 05A10；11B68；11E25。本研究得到国家自然科学基金（项目编号 12001288）资助。

这与 $d=0$ 得出:

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{16^k}\equiv\left(\frac{-1}{p}\right)+p^2E_{p-3}\pmod{p^3},$$

该结果最初由 Sun 借助软件证明 [13] Sigma[9]。对于 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, 上述 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{E_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是由下式定义的欧拉数和欧拉多项式。

$$E_0=1\quad\text{and}\quad\sum_{\substack{k=0\\2|k}}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}=0\quad\text{for}\ \ n\in\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\ldots\},$$

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_k}{2^k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

在 [16], Sun还证明了，如果 $p\equiv 3$ (模 4)是素数，那么

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv-\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\equiv\frac{(-1)^{(p+1)/4}2p}{\binom{(p+1)/2}{(p+1)/4}}\pmod{p^2}.$$

在 [14, 猜想 5.5], 中，Sun 提出了以下猜想。

猜想 1.1. 如果 $p\equiv 3$ （模 4）是一个素数，那么

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\pmod{p^3}.\tag{1.1}$$

本文的第一个目标是证明上述猜想。

定理 1.1。猜想 1.1 成立。

令 p 为奇素数。Sun [15, 注 1.1] 猜想,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k}+\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(2k+1)\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}$$
$$\equiv\begin{cases}2\left(\frac{2}{p}\right)x\pmod{p^3} & \text{if } p=x^2+y^2\ (4|(x-1)\ \&\ 2|y),\\ 0\pmod{p^2} & \text{if } p\equiv 3\pmod 4.\end{cases}$$

该猜想的 $p\equiv 3$ (模 4) 情形已由 Sun 在[16, 定理 1.3(i)]中证实。现在我们证明该猜想的 $p\equiv 1$ (模 4) 情形。

定理 1.2.对于任意奇素数 p，若 $p=x^2+y^2$ 与 $4|x-1, 2|y$，则

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k}+\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(2k+1)\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\equiv 2\left(\frac{2}{p}\right)x\pmod{p^3}.$$

本文安排如下。下一节将证明定理 1.1。第 2 节用于证明定理 1.2。我们的证明运用了若干涉及调和数的同余关系和组合恒等式，其中部分计算借助符号求和软件包 Sigma [9]完成。

2. Proof of Theorem 1.1

对于 $n,m\in\mathbb{Z}^+$，定义

$$H_n^{(m)}:=\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k^m},\quad H_0^{(m)}:=0,$$

这些带有 $m=1$ 的数通常称为经典调和数。

引理 2.1. ([10, 11]) 设 $p>5$ 是一个素数。那么

$$H_{\lfloor p/4\rfloor}\equiv -3q_p(2)+\frac{3}{2}pq_p^2(2)-(-1)^{(p-1)/2}pE_{p-3}\pmod{p^2},$$
$$H_{(p-1)/2}\equiv -2q_p(2)\pmod{p},\quad H_{p-1}\equiv 0\pmod{p^2},$$
$$H_{p-1}^{(2)}\equiv H_{(p-1)/2}^{(2)}\equiv 0\pmod{p},\quad H_{\lfloor p/4\rfloor}^{(2)}\equiv(-1)^{(p-1)/2}4E_{p-3}\pmod{p},$$

其中 $q_p(a)=(a^{p-1}-1)/p$ 表示费马商。

由上述引理，容易看出，对于任意奇素数 p 以及每个整数 $0\le k\le p-1$,

$$H_{p-1-k}=\sum_{j=1}^{p-1-k}\frac{1}{j}=\sum_{j=k+1}^{p-1}\frac{1}{p-j}\equiv H_k-H_{p-1}\equiv H_k\pmod{p}.\quad(2.1)$$

引理 2.2.（[17, 引理 4.2]）设 $p=2n+1$ 是一个奇素数，并设 $k\in\{0,1,\ldots,n\}$。那么

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2k}{k}/(-4)^k}\equiv 1-p\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}+\frac{p^2}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}\right)^2$$
$$-\frac{p^2}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\pmod{p^3}.$$

引理 2.3. 设 $p>5$ 是一个满足 $p\equiv 3$ （模 4）的素数。那么

$$\binom{-1/4}{\frac{p-1}{2}}^{-1}\equiv\frac{(-1)^{(p+1)/4}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}(1-3p+pq_p(2))\pmod{p^2}.$$

证明。设 $m=(3p-1)/4, t=-3/4$。根据引理 2.1和（2.1），我们有

$$\begin{aligned}\binom{m+pt}{(p-1)/2}&=\frac{(m+pt)\cdots(m+pt-(p-1)/2+1)}{((p-1)/2)!}\\&\equiv\frac{m\cdots(m-(p-1)/2+1)}{((p-1)/2)!}(1+pt(H_m-H_{m-(p-1)/2}))\\&\equiv\binom{(3p-1)/4}{(p-1)/2}(1+3p)\pmod{p^2}.\end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned}\binom{(3p-1)/4}{(p-1)/2}&=\binom{(3p-1)/4}{(p+1)/4}=(-1)^{(p+1)/4}\binom{-p+(p-1)/2}{(p+1)/4}\\&\equiv(-1)^{(p+1)/4}\binom{(p-1)/2}{(p+1)/4}(1-p(H_{(p-1)/2}-H_{(p-3)/4}))\\&\equiv(-1)^{(p+1)/4}\binom{(p-1)/2}{(p+1)/4}(1-pq_p(2))\pmod{p^2}.\end{aligned}$$

我们立即得到,

$$\binom{-1/4}{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{(p+1)/4}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}(1+3p-pq_p(2))\pmod{p^2},$$

因此

$$\binom{-1/4}{\frac{p-1}{2}}^{-1}\equiv\frac{(-1)^{(p+1)/4}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}(1-3p+pq_p(2))\pmod{p^2}.$$

现在，引理 2.3 的证明完成了。 □

设 $p>3$ 是素数。1862 年，Wolstenholme [20] 证明了著名的同余式。

$$\frac{1}{2}\binom{2p}{p}=\binom{2p-1}{p-1}\equiv 1\pmod{p^3}.\tag{2.2}$$

鉴于 [2, (3.99)]，我们得到以下恒等式,

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{n}{2k}2^{n-2k}.\tag{2.3}$$

现在我们计算 $\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2k}{k}^2/8^k$ 模 p^3。由 (2.3)，我们有

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}}{8^k}\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{2j}{j}\binom{k}{2j}2^{k-2j}=\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2j}{j}}{4^j}\sum_{k=2j}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}\binom{k}{2j}}{4^k}.$$

由 Sigma，我们可以得到并证明以下恒等式：

$$\sum_{k=2j}^{n-1}\frac{\binom{2k}{k}\binom{k}{2j}}{4^k}=\frac{n\binom{2n-1}{n-1}\binom{n-1}{2j}}{4^{n-1}(4j+1)}.$$

将 $n=p$ 代入上述恒等式，并利用 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}&=\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2j}{j}}{4^j}\frac{p\binom{2p-1}{p-1}\binom{p-1}{2j}}{4^{p-1}(4j+1)}\\&\equiv\frac{p}{4^{p-1}}\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2j}{j}}{4^j}\frac{1-pH_{2j}}{4j+1}\pmod{p^3},\end{aligned}$$

其中还用到了费马小定理以及以下事实：

$$\binom{p-1}{2j}=\prod_{i=1}^{2j}\left(\frac{p-i}{i}\right)=\prod_{i=1}^{2j}\left(1-\frac{p}{i}\right)\equiv 1-pH_{2j}\pmod{p^2}.$$

根据引理 2.2，可得

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}}{(4j+1)4^j}\equiv\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{(4j+1)}\left(1+p\left(H_{2j}-\frac{1}{2}H_j\right)\right)\pmod{p^2}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv\frac{p}{4^{p-1}}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{(4j+1)}-\frac{p^2}{2}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^jH_j}{(4j+1)}\pmod{p^3}.$$

再次根据 Sigma，我们可以找到并证明以下恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{4k+1}=\frac{1}{4n+1}\frac{(-1)^n}{\binom{-1/4}{n}},\tag{2.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{4k+1}H_k=-\frac{1}{4n+1}\frac{(-1)^n}{\binom{-1/4}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k}.\tag{2.5}$$

将 $n=(p-1)/2$ 代入上述恒等式，并注意到 $n\equiv 1$（模 2），我们得到

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv\frac{p}{4^{p-1}}\frac{1+2p}{\binom{-1/4}{(p-1)/2}}+\frac{p^2}{2}\frac{1}{\binom{-1/4}{(p-1)/2}}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k}\pmod{p^3}.$$

根据引理 2.3，并注意到 $4^{1-p}=(1+pq_p(2))^{-2}\equiv 1-2pq_p(2)\pmod{p^2}$，我们有

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\left(p(1-p-pq_p(2))+\frac{p^2}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-\frac14}{k}(-1)^k}{k}\right)\pmod{p^3}.$$

由 $[2,(1.134)]$ 并注意到 $(p+1)/2\equiv 0$（模 2），我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p-1}{4}}\frac{\binom{\frac{3p-1}{4}}{k}(-1)^k}{k}&=(-1)^{\frac{p+1}{2}}\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p-1}{4}}\frac{\binom{k-1}{\frac{p-1}{2}}}{k}=\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{k+(p-1)/2}{(p-1)/2}}{k+(p+1)/2}\\&\equiv 2\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{k+(p-1)/2}{k}}{2k+1}\equiv 2\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{-\frac{p+1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\\&\equiv 2\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\pmod{p}.\end{aligned}$$

将 $n=(3p-1)/4$ 代入 $[2,(1.45)]$,，再由(2.1)和引理 2.1，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-\frac14}{k}(-1)^k}{k}&\equiv\sum_{k=1}^{\frac{3p-1}{4}}\frac{\binom{\frac{3p-1}{4}}{k}(-1)^k}{k}-\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p-1}{4}}\frac{\binom{\frac{3p-1}{4}}{k}(-1)^k}{k}\\&=-H_{(3p-1)/4}-2\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\\&\equiv 3q_p(2)-2\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\pmod{p}.\end{aligned}$$

因此，模 p^3 下有

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}$$

$$\equiv\frac{(-1)^{\frac{p+1}4}}{\binom{\frac{p-1}2}{\frac{p-3}4}}\left(p\left(1-p+\frac12pq_p(2)\right)-p^2\sum_{k=0}^{(p-3)/4}\frac{\binom{\frac{p-1}2}{k}(-1)^k}{2k+1}\right).\quad(2.6)$$

引理 2.4. 对任意素数 $p>5$ 以及每个整数 $0\le k\le(p-1)/2$, 我们有

$$H_{p-1-2k}\equiv H_{2k}+pH_{2k}^{(2)}\pmod{p^2},$$
$$H_{(p-1)/2-k}\equiv H_{(p-1)/2}+2H_{2k}-H_k+2pH_{2k}^{(2)}-\frac{p}{2}H_k^{(2)}\pmod{p^2},$$
$$H_{p-1-2k}^{(2)}\equiv-H_{2k}^{(2)}\pmod p,\quad H_{(p-1)/2-k}^{(2)}\equiv H_k^{(2)}-4H_{2k}^{(2)}\pmod p.$$

证明。由引理 2.1 可得

$$H_{p-1-2k}=\sum_{j=1}^{p-1-2k}\frac1j=\sum_{j=2k+1}^{p-1}\frac{1}{p-j}=\sum_{j=2k+1}^{p-1}\frac{p+j}{p^2-j^2}\equiv-\sum_{j=2k+1}^{p-1}\frac{p+j}{j^2}$$
$$=-(pH_{p-1}^{(2)}-pH_{2k}^{(2)}+H_{p-1}-H_{2k})\equiv H_{2k}+pH_{2k}^{(2)}\pmod{p^2},$$

$$H_{(p-1)/2-k}=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}2-k}\frac1j=\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}2}\frac{1}{\frac{p+1}2-j}$$
$$=2\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}2}\frac{p+2j-1}{p^2-(2j-1)^2}\equiv-2\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}2}\frac{p+2j-1}{(2j-1)^2}$$
$$=-2\left(p\left(H_{p-1}^{(2)}-\frac14H_{\frac{p-1}2}^{(2)}-H_{2k}^{(2)}+\frac14H_k^{(2)}\right)+H_{p-1}-\frac12H_{\frac{p-1}2}-H_{2k}+\frac12H_k\right)$$
$$\equiv H_{(p-1)/2}+2H_{2k}-H_k+2pH_{2k}^{(2)}-\frac{p}{2}H_k^{(2)}\pmod{p^2},$$

$$H_{p-1-2k}^{(2)}=\sum_{j=1}^{p-1-2k}\frac{1}{j^2}=\sum_{j=2k+1}^{p-1}\frac{1}{(p-j)^2}\equiv\sum_{j=2k+1}^{p-1}\frac{1}{j^2}$$
$$=H_{p-1}^{(2)}-H_{2k}^{(2)}\equiv-H_{2k}^{(2)}\pmod p$$

and

$$H_{(p-1)/2-k}^{(2)}=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}2-k}\frac{1}{j^2}=\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}2}\frac{1}{(\frac{p+1}2-j)^2}\equiv4\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}2}\frac{1}{(2j-1)^2}$$
$$=4\left(H_{p-1}^{(2)}-\frac14H_{\frac{p-1}2}^{(2)}-H_{2k}^{(2)}+\frac14H_k^{(2)}\right)\equiv H_k^{(2)}-4H_{2k}^{(2)}\pmod p.$$

□

现在我们计算 $\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2k}{k}^2/(-16)^k$ 模 p^3。

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}+\sum_{k=(p+1)/2}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}.$$

鉴于引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\\&\equiv\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2}{\left(1-p\sum_{j=1}^k\frac{1}{2j-1}+\frac{p^2}{2}\left(\sum_{j=1}^k\frac{1}{2j-1}\right)^2-\frac{p^2}{2}\sum_{j=1}^k\frac{1}{(2j-1)^2}\right)^2}\\&\equiv S_1+2pS_2+2p^2S_3+p^2S_4\ (\mathrm{mod}\ p^3),\end{aligned}$$

其中

$$S_1=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2,$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\sum_{j=1}^k\frac{1}{2j-1},$$

$$S_3=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(\sum_{j=1}^k\frac{1}{2j-1}\right)^2,$$

$$S_4=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\sum_{j=1}^k\frac{1}{(2j-1)^2}.$$

由于 $(p-1)/2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，因此我们有

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}-k}\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2=-\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2.$$

因此

$$S_1=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2=0.\tag{2.7}$$

由此结合引理 2.4 可得

$$S_2=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^{(p-1)/2-k}\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{p-1-2k}-\frac{1}{2}H_{(p-1)/2-k}\right)$$
$$\equiv -\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(\frac{1}{2}H_k+\frac{p}{4}H_k^{(2)}\right)\pmod{p^2}$$

and

$$S_3=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\right)^2$$
$$= \sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^{(p-1)/2-k}\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{p-1-2k}-\frac{1}{2}H_{(p-1)/2-k}\right)^2$$
$$\equiv -\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(\frac{1}{4}H_k^2-\frac{1}{2}H_kH_{(p-1)/2}\right)\pmod{p}.$$

由引理 2.4 可得

$$S_4=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{2k}^{(2)}-\frac{1}{4}H_k^{(2)}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^{(p-1)/2-k}\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{p-1-2k}^{(2)}-\frac{1}{4}H_{(p-1)/2-k}^{(2)}\right)$$
$$\equiv \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2H_k^{(2)}\pmod{p}.$$

因此,

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\equiv -p\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k-\frac{p^2}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k^2$$
$$+p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_kH_{\frac{p-1}{2}}-\frac{p^2}{4}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k^{(2)}$$
$$= -p\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k+p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_kH_{\frac{p-1}{2}}$$
$$-\frac{p^2}{4}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(2H_k^2+H_k^{(2)}\right)\pmod{p^3}.$$

根据 Sigma，我们可以找到并证明以下恒等式，

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{k}^2H_k=\frac{(-16)^n}{8n\binom{2n}{n}},$$
$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{k}^2\left(2H_k^2+H_k^{(2)}\right)$$
$$=\frac{1}{8n^2}-\frac{(-16)^n}{8n^2\binom{2n}{n}}\bigg(1+2nH_n-6nH_{2n}+n\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}$$
$$-12n\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}-12n\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}\bigg).$$

将 $n=(p+1)/4$ 代入上述恒等式，我们得到

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k=\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\frac{2^{p-1}}{p+1}$$
$$\equiv\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}(1-p+pq_p(2))}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\pmod{p^2}$$

and

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(2H_k^2+H_k^{(2)}\right)$$
$$\equiv2-\frac{4(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\bigg(\frac{3}{2}q_p(2)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}-3\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}$$
$$-3\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}\bigg)\pmod{p}.$$

因此，模 p^3 下，我们有

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\equiv-\frac{p^2}{2}-\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}p\left(1-p+\frac{3}{2}pq_p(2)\right)+\frac{p^2}{4}\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\times$$
$$\bigg(\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}-12\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}-12\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}\bigg).$$

引理 2.5.（[13, 引理 2.1]）对于任意素数 $p>3$ 和 $1\le j\le p-1$，我们有

$$j\binom{2j}{j}\binom{2(p-j)}{p-j}\equiv 2p(-1)^{\lfloor 2j/p\rfloor-1}\pmod{p^2}.$$

根据此引理，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}&\equiv\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\frac{4p^2}{k^2\binom{2p-2k}{p-k}^2(-16)^k}=\frac{4p^2}{(-16)^p}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-16)^k}{(p-k)^2\binom{2k}{k}^2}\\&\equiv-\frac{p^2}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-16)^k}{k^2\binom{2k}{k}^2}\equiv-\frac{p^2}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2}\\&\equiv-p^2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-1)^k}{\binom{\frac{p-3}{2}}{k-1}^2}=p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{(-1)^k}{\binom{\frac{p-3}{2}}{k}^2}\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

由 `Sigma`，我们可以找出并证明以下恒等式，

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{\binom{2n}{k}^2}=(2n+1)\frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}\left(\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\right).$$

将 $n=(p-3)/4$ 代入这个恒等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{(-1)^k}{\binom{\frac{p-3}{2}}{k}^2}&\equiv-\frac{1}{2}\frac{(-1)^{\frac{p-3}{4}}}{\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\left(\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\right)\\&\equiv-\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\left(\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\right)\pmod{p}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}&\equiv-\frac{p^2}{2}-\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}p\left(1-p+\frac{3}{2}pq_p(2)\right)+\frac{p^2}{4}\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\times\\&\left(\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}-12\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}-12\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}\right)\\&-p^2\frac{(-1)^{\frac{p+1}{4}}}{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}}\left(\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\right)\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

鉴于 (2.6)，要证明定理 1.1，我们只需证明

$$\begin{aligned}&-2q_p(2)-2\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}-\frac{1}{2}\bigg(\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}\\&-12\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}-12\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}\bigg)\\&+2\left(\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\right)\pmod p.\end{aligned}\tag{2.8}$$

而

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}&\equiv-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}{k4^k}=-\frac{1}{2}\sum_{k=\frac{p-3}{4}}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}4^k}{((p-1)/2-k)2^{p-1}}\\&\equiv\sum_{k=\frac{p-3}{4}}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}4^k}{2k+1}\pmod p.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\equiv\sum_{k=\frac{p-3}{4}}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}4^k}{2k+1}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\\&\equiv\sum_{k=\frac{p-3}{4}}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}-2\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-3}{4}}(-1)^{\frac{p-3}{4}}\\&\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}-\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{4}}(-1)^{\frac{p+1}{4}}\pmod p.\end{aligned}$$

因此，(2.8) 等价于

$$\begin{aligned}&-2q_p(2)-2\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\\&\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}+6\bigg(\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}+\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}\bigg)\end{aligned}$$

$$+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\pmod p. \tag{2.9}$$

容易看出,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}&=\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{(2k+1)^2(-16)^{k+1}}\\&=-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)(k+1)(-16)^k}\\&=-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)(-16)^k}+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}&=\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{(2k+1)(-16)^{k+1}}\\&=-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}+\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)(-16)^k}=-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)(-16)^k}.$$

因此，(2.9) 等价于

$$\begin{aligned}-2q_p(2)-2\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}&\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}-\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)(-16)^k}\\&\quad+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{2k+1}\pmod p.\end{aligned} \tag{2.10}$$

容易得到

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)(-16)^k}\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}{(2k+1)4^k}=\sum_{k=\frac{p+1}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}4^k}{(p-2k)2^{p-1}}$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\sum_{k=\frac{p+1}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}4^k}{k}\equiv -\frac{1}{2}\sum_{k=\frac{p+1}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}\pmod p.$$

由 `Sigma`，我们可以得到并证明以下恒等式，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2n+1}{k}(-1)^k}{k-(2n+1)}=-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}.$$

将 $n=(p-3)/4$ 代入上述恒等式，可得

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}&\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{k-(p-1)/2}\\&=-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}-\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}\pmod p.\end{aligned}$$

因此，(2.10) 等价于

$$-2q_p(2)\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}\pmod p.\tag{2.11}$$

由 [18, (1.14)], 可知

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{k}\equiv -5\frac{F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)}}{p}\pmod p,\tag{2.12}$$

其中，$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是众所周知的斐波那契数列，其定义为

$$F_0=0,\ F_1=1,\ \text{and } F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\text{ for }\ n=1,2,3,\ldots.$$

其伴随的卢卡斯数列 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 定义为

$$L_0=2,\ L_1=1,\ \text{and } L_{n+1}=L_n+L_{n-1}\text{ for }\ n=1,2,3,\ldots.$$

容易看出

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}2^{p-1}}{(p-2k)4^k}\equiv-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}\pmod p.$$

因此，(2.11) 等价于

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}\equiv-\frac{15}{2}\frac{F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)}}{p}+4q_p(2)\pmod p.\tag{2.13}$$

鉴于 [19, (32) 和 (28)] 以及 [18, 第 15],页中的最后一个同余式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}&\equiv 2\frac{-\left(\frac12+\frac{\sqrt5}{4}\right)^p-\left(\frac12-\frac{\sqrt5}{4}\right)^p+1}{p}\\&=-2\frac{(2+\sqrt5)^p+(2-\sqrt5)^p-4^p}{p4^p}\\&=-2\frac{L_{3p}-4^p}{p4^p}=-2\frac{(L_p-1)(L_p^2+L_p+4)+4-4^p}{p4^p}\\&\equiv-3\frac{L_p-1}{p}-2\frac{1-4^{p-1}}{p4^{p-1}}\equiv-\frac{15}{2}\frac{F_{p-(\frac{p}{5})}}{p}+4q_p(2)\pmod p.\end{aligned}$$

因此，对于每个满足 $p>5$ with $p\equiv 3$ (mod 4) 的素数，我们得到定理 1.1；而 $p=3$ 的情形可直接验证。因此，定理 1.1 的证明完成。□

3. Proof of Theorem 1.2

2010 年，J. B. Cosgrave 和 K. Dilcher [1] 得到：对于任意满足 $p\equiv 1$ (mod 4) 的素数，若 $p=x^2+y^2$ with $x\equiv 1$ (mod 4)，则

$$\begin{aligned}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\equiv&\left(2x-\frac{p}{2x}-\frac{p^3}{8x^3}\right)\times\\&\left(1+\frac12pq_p(2)+\frac18p^2\left(2E_{p-3}-q_p^2(2)\right)\right)\pmod{p^3}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

并且鉴于 [21, 定理 4.11], ，对于任意满足 $p\equiv 1$ (mod 4) 的素数，若 $p=x^2+y^2$ with $x\equiv 1$ (mod 4)，我们有

$$\binom{(3p-3)/4}{(p-1)/4}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(2x-\frac{p}{2x}\right)\left(1-\frac{p}{2}q_p(2)\right)\pmod{p^2}.\tag{3.2}$$

引理 3.1. 对于任意素数 $p\equiv 1$ (模 4) 和 $p>5$，如果 $p=x^2+y^2$满足 $x\equiv 1$ (模 4)，则

$$\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{(p-1)/2}{j}(-1)^j}{4j+3}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\frac{1-2p+\frac{p}{2}q_p(2)+\frac{p}{4x^2}}{2x}\pmod{p^2},$$

$$\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{(p-1)/2}{j}(-1)^jH_j}{4j+3}\equiv-\frac{1}{2x}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-3/4}{k}(-1)^k}{k}\pmod p.$$

证明。根据 Sigma，我们可以找到并证明以下恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{4k+3}=\frac{(-1)^n}{(4n+3)\binom{-3/4}{n}},$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(-1)^k H_k}{4k+3}=-\frac{(-1)^n}{(4n+3)\binom{-3/4}{n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{-3/4}{k}(-1)^k}{k}.$$

与引理 2.3 的证明类似，我们可以得到】【：

$$\begin{aligned}\binom{-3/4}{(p-1)/2}&\equiv\binom{(3p-3)/4}{(p-1)/2}\left(1-\frac{3p}{4}(H_{(3p-3)/2}-H_{(p-1)/4})\right)\\&\equiv\binom{(3p-3)/4}{(p-1)/2}\pmod{p^2},\end{aligned}$$

因此，将 $n=(p-1)/2$ 代入上述恒等式和(3.2)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{4j+3}&=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{(1+2p)\binom{-3/4}{\frac{p-1}{2}}}\equiv\frac{1-2p}{\binom{-3/4}{\frac{p-1}{2}}}\equiv\frac{(-1)^{\frac{p-1}{4}}(1-2p)}{\left(2x-\frac{p}{2x}\right)\left(1-\frac{p}{2}q_p(2)\right)}\\&\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\frac{1}{2x}\left(1-2p+\frac{p}{2}q_p(2)+\frac{p}{4x^2}\right)\pmod{p^2}\end{aligned}$$

and

$$\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{(p-1)/2}{j}(-1)^j H_j}{4j+3}\equiv-\frac{1}{2x}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-3/4}{k}(-1)^k}{k}\pmod{p}.$$

这就证明了引理 3.1。 □

引理3.2. 对于任意素数 $p\equiv 1$ （模 4）和 $p>5$，若 $p=x^2+y^2$ 与 $x\equiv 1$ （模 4），则

$$\begin{aligned}\frac{p}{2\cdot 4^{p-1}}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}\binom{p-1}{2j}}{(4j+1)4^j}&\equiv\frac{p}{4^p}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k}+(-1)^{\frac{p-1}{4}}\\&\times\left(x-\frac{p}{4x}-\frac{p^2}{16x^3}-\frac{3px}{2}q_p(2)+\frac{3p^2}{8x}q_p(2)+3p^2xq_p^2(2)\right)\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

证明。根据引理 2.2，我们有

$$p\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}\binom{p-1}{2j}}{(4j+1)4^j}\equiv p\sum_{\substack{j=0\\ j\neq(p-1)/4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}\binom{p-1}{2j}}{(4j+1)4^j}+\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}}{2^{\frac{p-1}{2}}}$$

$$\equiv p\sum_{\substack{j=0\\ j\neq\frac{p-1}{4}}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{4j+1}(1-pH_{2j})\left(1+p\left(H_{2j}-\frac{1}{2}H_j\right)\right)+\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}}{2^{\frac{p-1}{2}}}$$

$$\equiv p\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{4j+1}\left(1-\frac{p}{2}H_j\right)+T_1\pmod{p^3},$$

其中

$$T_1=\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}}{2^{\frac{p-1}{2}}}-\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(1-\frac{p}{2}H_{(p-1)/4}\right).$$

众所周知，莫利同余 [6]:

$$\binom{p-1}{(p-1)/2}\equiv(-1)^{(p-1)/2}4^{p-1}\pmod{p^3}\ \text{ for prime }\ p>3.\qquad(3.3)$$

并根据 [4, 引理 5.3], ，我们有

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{2}{p}\right)\left(1+\frac{p}{2}q_p(2)-\frac{p^2}{8}q_p^2(2)\right)\pmod{p^3}.$$

结合引理 2.1、(3.1) 和 $(-1)^{\frac{p-1}{4}}=\left(\frac{2}{p}\right)$（因为 $p\equiv1$（模 4）），可得

$$\begin{aligned}T_1&\equiv\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\left(2^{\frac{3p-3}{2}}-(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(1-\frac{p}{2}H_{(p-1)/4}\right)\right)\\&\equiv\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(1+\frac{3p}{2}q_p(2)+\frac{3p^2}{8}q_p^2(2)-\left(1-\frac{p}{2}H_{(p-1)/4}\right)\right)\\&\equiv\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{9p^2}{8}q_p^2(2)-\frac{p^2}{2}E_{p-3}\right)\\&\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{9p^2x}{4}q_p^2(2)-p^2xE_{p-3}\right)\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

将 $n=(p-1)/2$ 代入 (2.4)、(2.5)，并根据引理 2.1，可得

$$\begin{aligned}p\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{4k+1}&=p\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{(2p-1)\binom{-1/4}{\frac{p-1}{2}}}\\&=\frac{\frac{p-1}{2}!}{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+1)\cdots(\frac{p}{4}-1)(\frac{p}{4}+1)\cdots(\frac{p}{4}+\frac{p-1}{4})}\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{p-1}{2}!}{\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{p^2}{16}-i^2\right)} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\left(1+\frac{p^2}{16}H^{(2)}_{\frac{p-1}{4}}\right)$$
$$\equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\left(1+\frac{p^2}{4}E_{p-3}\right) \pmod{p^3}$$

and

$$-\frac{p^2}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k H_k}{4k+1} \equiv \frac{p}{2}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k} \pmod{p}.$$

因此,

$$\begin{aligned} p\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}\binom{p-1}{2j}}{(4j+1)4^j} \equiv& (-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\left(1+\frac{p^2}{4}E_{p-3}\right) \\ &+ (-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{9p^2x}{4}q_p^2(2)-p^2xE_{p-3}\right) \\ &+ \frac{p}{4^p}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k} \pmod{p^3}. \end{aligned}$$

注意到 $4^{p-1} = 1 + 2pq_p(2) + p^2q_p^2(2)$，并结合 (3.1)，我们立即得到所需结果。至此，引理 3.2 的证明完成。□

现在我们计算 $\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\binom{2k}{k}^2/8^k$ 模 p^3。由 (2.3)，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k} &= \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}}{8^k}\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{2j}{j}\binom{k}{2j}2^{k-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{(p-1)/2}\frac{\binom{2j}{j}}{4^j}\sum_{k=2j}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}\binom{k}{2j}}{4^k}. \end{aligned}$$

根据 `Sigma`，我们可以得到并证明以下恒等式:

$$\sum_{k=2j}^{n-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}\binom{k}{2j}}{4^k} = \frac{n\binom{2n-1}{n-1}\binom{n-1}{2j}(n(4j+1)+4j+2)}{4^{n-1}(4j+1)(4j+3)}.$$

将 $n=p$ 代入上述恒等式，并由(2.2)得

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k} = \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}}{4^j}\frac{p\binom{2p-1}{p-1}\binom{p-1}{2j}(p(4j+1)+4j+2)}{4^{p-1}(4j+1)(4j+3)}$$

$$\equiv\frac{p}{4^{p-1}}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}\binom{p-1}{2j}}{4^j}\left(\frac{p}{4j+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{4j+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{4j+1}\right)\pmod{p^3},$$

鉴于引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2j}{j}(1-pH_{2j})}{(4j+3)4^j}\\&\equiv\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{4j+3}\left(1+p\left(H_{2j}-\frac{1}{2}H_j\right)\right)(1-pH_{2j})\\&\equiv\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{4j+3}\left(1-\frac{p}{2}H_j\right)\pmod{p^2}.\end{aligned}$$

结合引理 3.1，这就得到

$$\begin{aligned}&p^2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}}{(4k+3)4^k}+\frac{p}{2\cdot4^{p-1}}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(1-pH_{2k})}{(4k+3)4^k}\\&\equiv\frac{p^2}{2x}(-1)^{\frac{p-1}{4}}+\frac{p}{2\cdot4^{p-1}}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{j}(-1)^j}{(4j+3)}\left(1-\frac{p}{2}H_j\right)\\&\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{p}{4x}-\frac{3p^2}{8x}q_p(2)+\frac{p^2}{16x^3}+\frac{p^2}{8x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-3/4}{k}(-1)^k}{k}\right)\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

因此，根据引理 3.2，我们可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv&(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(x-\frac{3px}{2}q_p(2)+3p^2xq_p^2(2)\right)\\&+(-1)^{\frac{p-1}{4}}\frac{p^2}{8x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-3/4}{k}(-1)^k}{k}\\&+\frac{p}{4^p}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k}\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

根据 [12, 引理 3.1]和引理 2.1，我们有

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-\frac14}{k}(-1)^k}{k}\equiv\frac{p}{4}H^{(2)}_{\frac{p-1}{2}}-H_{\frac{p-1}{2}}-\frac{p}{4}H^{(2)}_{\frac{p-1}{4}}-\frac{p}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}$$

$$\equiv 3q_p(2)-\frac{3p}{2}q_p^2(2)-\frac{p}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}\pmod{p^2}.$$

由此结合 (3.1) 和 $4^{p-1}=1+2pq_p(2)+p^2q_p^2(2)$, 可得

$$\frac{p}{4^p}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-1/4}{k}(-1)^k}{k}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\times$$
$$\left(\frac{3px}{2}q_p(2)-\frac{3p^2}{8x}q_p(2)-3p^2xq_p^2(2)-\frac{p^2x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}\right)\pmod{p^3}.$$

由 [2, (1.45)、(1.134)],可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{-3/4}{k}(-1)^k}{k}&\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{3p-3}{4}}{k}(-1)^k}{k}\\&=\sum_{k=1}^{\frac{3p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{3p-3}{4}}{k}(-1)^k}{k}-\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p-3}{4}}\frac{\binom{\frac{3p-3}{4}}{k}(-1)^k}{k}\\&=-H_{\frac{3p-3}{4}}+\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p-3}{4}}\binom{k-1}{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k}\\&\equiv 3q_p(2)+2\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\pmod{p}.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(k+1)\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\times$$
$$\left(x-\frac{p^2x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}+\frac{p^2}{4x}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\right)\pmod{p^3}.\qquad(3.4)$$

现在我们计算 $\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(2k+1)\binom{2k}{k}^2/(-16)^k$ 模 p^3。根据引理 2.2, 我们有

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k+1)\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k+1)(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2}{\left(1-p\sum_{j=1}^k\frac{1}{2j-1}+\frac{p^2}{2}\left(\sum_{j=1}^k\frac{1}{2j-1}\right)^2-\frac{p^2}{2}\sum_{j=1}^k\frac{1}{(2j-1)^2}\right)^2}$$
$$\equiv A_1+2pA_2+2p^2A_3+p^2A_4\ (\mathrm{mod}\ p^3),$$

其中

$$A_1=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(2k+1)(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2,$$
$$A_2=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(2k+1)(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\right),$$
$$A_3=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(2k+1)(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\right)^2,$$
$$A_4=\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(2k+1)(-1)^k\binom{(p-1)/2}{k}^2\left(H^{(2)}_{2k}-\frac{1}{4}H^{(2)}_k\right).$$

由引理 2.4 可得

$$A_2=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(2k+1)(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(p-2k)(-1)^{\frac{p-1}{2}-k}\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_{p-1-2k}-\frac{1}{2}H_{\frac{p-1}{2}-k}\right)$$
$$\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(p-2k)(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(\frac{1}{2}H_k-\frac{1}{2}H_{\frac{p-1}{2}}+\frac{p}{4}H^{(2)}_k\right)\ (\mathrm{mod}\ p^2)$$

and

$$A_3=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(2k+1)(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\right)^2$$
$$=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(p-2k)(-1)^{\frac{p-1}{2}-k}\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_{p-1-2k}-\frac{1}{2}H_{\frac{p-1}{2}-k}\right)^2$$
$$\equiv-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_k^2-2H_kH_{\frac{p-1}{2}}+H^2_{\frac{p-1}{2}}\right)\ (\mathrm{mod}\ p).$$

由引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}A_4&=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(2k+1)(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_{2k}^{(2)}-\frac{1}{4}H_k^{(2)}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(p-2k)(-1)^{\frac{p-1}{2}-k}\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\left(H_{p-1-2k}^{(2)}-\frac{1}{4}H_{\frac{p-1}{2}-k}^{(2)}\right)\\&\equiv\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k^{(2)}\pmod p.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k+1)\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\\\equiv&\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(2k+1)(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2+p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(H_k-H_{\frac{p-1}{2}})\\&-2p\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(H_k-H_{\frac{p-1}{2}})\\&+p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(2H_kH_{\frac{p-1}{2}}-H_{\frac{p-1}{2}}^2)\\&-\frac{p^2}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(2H_k^2+H_k^{(2)})\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

由 `Sigma`，我们可以找出并证明以下恒等式,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2n}(2k+1)(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n(2n+1)\binom{2n}{n},\\&\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n},\\&\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2H_k=\frac{1}{2}(-1)^n\binom{2n}{n}(H_{2n}+H_n),\\&\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kk\binom{2n}{k}^2H_k\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{(-16)^n}{\binom{2n}{n}}+\frac{(-1)^n}{4}\binom{2n}{n}+\frac{(-1)^n n}{2}\binom{2n}{n}(H_{2n}+H_n).$$

将 $n=(p-1)/4$ 代入上述恒等式后，由引理 2.1 和 (3.1) 可得。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(2k+1)(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2-2p\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(H_k-H_{\frac{p-1}{2}})\\ \equiv&(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(x-\frac{p^2x}{8}q_p^2(2)+\frac{p^2x}{2}q_p(2)+\frac{p^2}{8x}q_p(2)-\frac{p^2x}{4}E_{p-3}\right)\pmod{p^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(H_k-H_{\frac{p-1}{2}})&=\frac{p^2}{2}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}(H_{\frac{p-1}{4}}-H_{\frac{p-1}{2}})\\&\equiv-p^2x(-1)^{\frac{p-1}{4}}q_p(2)\pmod{p^3}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&p^2\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(2H_kH_{\frac{p-1}{2}}-H_{\frac{p-1}{2}}^2)\\&\equiv-4p^2q_p(2)\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2H_k-4p^2q_p^2(2)\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2\\&\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{p^2}{2x}q_p(2)-2p^2xq_p(2)-3p^2xq_p(2)^2\right)\pmod{p^3}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k+1)\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\\&\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(x+\frac{5p^2}{8x}q_p(2)-\frac{5p^2x}{2}q_p(2)-\frac{25p^2x}{8}q_p(2)^2-\frac{p^2x}{4}E_{p-3}\right)\\&\quad-\frac{p^2}{2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(2H_k^2+H_k^{(2)})\pmod{p^3}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

根据 Sigma，我们可以找到并证明以下复杂的恒等式:

$$\sum_{k=0}^{2n}k(-1)^k\binom{2n}{k}^2(2H_k^2+H_k^{(2)})=\frac{2n-3}{4}+\frac{3}{4}\frac{(-16)^n}{\binom{2n}{n}}-\frac{n}{2}(-1)^n\binom{2n}{n}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(-16)^n}{\binom{2n}{n}}\left(H_{2n}-\frac{1}{3}H_n\right)+\frac{n(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}\left(H_{2n}^{(2)}+\frac{1}{2}H_n^{(2)}\right)$$
$$+\frac{(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}(H_{2n}+H_n)+\frac{n(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}(H_{2n}+H_n)^2$$
$$-\frac{5n(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}+\frac{3n(-1)^n}{4}\binom{2n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{2k}{k}}$$
$$+2n(-1)^n\binom{2n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)\binom{2k}{k}}+\frac{15}{4}\frac{(-16)^n}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{(-16)^n}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}-3\frac{(-16)^n}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}.$$

将 $n=(p-1)/4$ 代入此恒等式，然后根据引理 2.1 和（3.1），我们有

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^k\binom{\frac{p-1}{2}}{k}^2(2H_k^2+H_k^{(2)})\equiv$$
$$-\frac{7}{8}+(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{3}{8x}+\frac{x}{4}-\frac{25x}{4}q_p^2(2)+\frac{3}{4x}q_p(2)-\frac{x}{2}E_{p-3}-5xq_p(2)\right)$$
$$+(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{5x}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}-\frac{3x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{2k}{k}}-x\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{(2k-1)\binom{2k}{k}}\right.$$
$$\left.+\frac{15}{8x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}+\frac{1}{8x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}-\frac{3}{2x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}\right)\pmod p.$$

将其代入 (3.5)，再结合 (3.4)，可知要证明定理 1.2，我们只需证明

$$-\frac{3}{16x}-\frac{x}{8}+\frac{q_p(2)}{4x}+\frac{7}{16}(-1)^{\frac{p-1}{4}}-\frac{x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{\frac{p-1}{2}}{k}}+\frac{1}{4x}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}$$
$$-\frac{5x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}+\frac{3x}{16}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{2k}{k}}+\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{(2k-1)\binom{2k}{k}}-\frac{15}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}$$
$$-\frac{1}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}+\frac{3}{4x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}\equiv 0\pmod p.\qquad(3.6)$$

根据 Sigma，我们可以得到并证明以下恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{2n}{k}}=H_{2n}^{(2)}+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\binom{2k}{k}}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k\binom{2k}{k}}+4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)\binom{2k}{k}}.$$

将 $n=(p-1)/4$ 代入该恒等式，再结合 (3.6)，我们只需证明

$$\begin{aligned}&-\frac{3}{16x}-\frac{x}{8}+\frac{q_p(2)}{4x}+\frac{7}{16}(-1)^{\frac{p-1}{4}}+\frac{x}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k\binom{2k}{k}}+\frac{1}{4x}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}\\&-\frac{5x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}-\frac{15}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}-\frac{1}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}\\&+\frac{3}{4x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}\equiv 0\pmod p.\end{aligned}\tag{3.7}$$

根据 Sigma，我们可以找到并证明的是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2n}{k}(-1)^k}{k}=-H_{2n}+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k\binom{2k}{k}(-1)^k}{(2k-1)^2}.$$

将 $n=(p-1)/4$ 代入此恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{k}&=-H_{\frac{p-1}{2}}+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}+\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{2k+1}\\&\equiv -H_{\frac{p-1}{2}}+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=\frac{p+3}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}\pmod p.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{2k+1}&=\sum_{k=\frac{p+3}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{p-2k}\\&\equiv-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k}{k}\\&\equiv\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=\frac{p+3}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}\pmod p.\end{aligned}$$

因此，(3.7) 等价于

$$-\frac{3}{16x}-\frac{x}{8}+\frac{q_p(2)}{4x}+\frac{7}{16}(-1)^{\frac{p-1}{4}}+\frac{x}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k\binom{2k}{k}}+\frac{3}{32x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}$$
$$-\frac{1}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}}{k(-16)^k}-\frac{5x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}-\frac{15}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}$$
$$+\frac{3}{4x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p). \tag{3.8}$$

容易验证，

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)^2(-16)^k}=\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{2\binom{2k}{k}}{(2k+1)(k+1)(-16)^{k+1}}$$
$$=-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$\equiv\frac{1}{8}\sum_{k=\frac{p+3}{4}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\binom{2k}{k}(-1)^k}{k}+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}\ (\mathrm{mod}\ p).$$

结合 (2.12) 和 (2.13)，可得 (3.8) 等价于

$$-\frac{3}{16x}-\frac{x}{8}+\frac{7}{16}(-1)^{\frac{p-1}{4}}+\frac{x}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k\binom{2k}{k}}-\frac{5x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}$$
$$-\frac{15}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}+\frac{3}{32x}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p). \tag{3.9}$$

将 $t=-1, n=(p-1)/4$ 代入 [5, (25)]，并由 (3.1) 可得

$$\frac{x}{4}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{k\binom{2k}{k}}-\frac{5x}{8}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{(-1)^k}{\binom{2k}{k}}\equiv\frac{x}{8}-\frac{1}{16}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\ (\mathrm{mod}\ p).$$

因此，为了证明 (3.9)，我们只需证明

$$-\frac{3}{16x}+\frac{3}{8}(-1)^{\frac{p-1}{4}}-\frac{15}{16x}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}+\frac{3}{32x}\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}$$
$$\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p). \tag{3.10}$$

由 Sigma，我们可以找到并证明以下恒等式：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{k+1}-10\right)}{4^k}=-\frac{2n+1}{n+1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}+\frac{(18n+5)2^{4n}-(16n+4)5^{2n}}{(2n+1)2^{4n}}$$
$$-\frac{3(4n+1)}{2(2n+1)}\frac{5^{2n}}{2^{4n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{4}{25}\right)^k.$$

将 $n=(p-1)/4$ 代入此恒等式，并由(3.1)，可得

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}-10\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(-16)^k}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{k}\left(\frac{1}{k+1}-10\right)}{4^k}$$
$$\equiv 1-\frac{4x}{3}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\pmod p.$$

再结合这一事实：

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-5}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}=1-\frac{\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}}{\frac{p+3}{4}(-16)^{\frac{p-1}{4}}}+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}$$
$$\equiv 1-\frac{8x}{3}(-1)^{\frac{p-1}{4}}+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(-16)^k}\pmod p$$

由此可得 (3.10) 正确。
因此，对于每个满足 $p>5$ 且 $p\equiv 1$ (模4)以及 $p=x^2+y^2$ (4|($x-1$)& $2|y$) 的素数，我们得到定理 1.2； $p=5$ 的情形可直接验证。

因此，定理 1.2 的证明完成。 □

致谢。作者感谢 R. Tauraso 教授提供参考文献 [19] ，以证明（2.13）。作者受到国家自然科学基金（项目编号：12001288）的资助。

References

[1] J. B. Cosgrave 和 K. Dilcher，关于二项式系数的高斯与雅可比定理的模 p^3 类比，《Acta Arith.》142 (2010)，第 2 期，103–118 页。[2] H. W. Gould，《组合恒等式》，Morgantown Printing and Binding Co.，1972。[3] E. Lucas，关于欧拉数及三角函数微分系数模素数的同余，《法国数学会公报》6 (1878)，49–54 页。[4] G.-S. Mao 和 J. Wang，关于涉及 Domb 数和调和数的一些同余，《国际数论杂志》15 (2019)，2179–2200 页。

[5] S. Mattarei 和 R. tauraso，关于中心二项式和与有限多对数的同余，《数论杂志》133 (2013)，第 1 期，131–157 页。[6] F. Morley，关于同余式 $2^{4n} \equiv (-1)^n (2n)!/(n!)^2$, 的注记，其中 $2n+1$ 是素数，《数学年刊》9 (1895)，168–170 页。[7] E. Mortenson，Rodriguez-Villegas 关于某个截断超几何函数的超同余猜想，《数论杂志》99 (2003)，139–147 页。[8] F. Rodriguez-Villegas，卡拉比–丘流形的超几何族，载于《卡拉比–丘簇与镜像对称》（多伦多，安大略省，2001），第 223–231 页，Fields Inst. Commun.，38，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[9]C. Schneider，符号求和助力组合数学，《Lothar 组合研讨会》56 (2007)，文章 B56b。[10] Z.-H. Sun，关于伯努利数和伯努利多项式的同余，《离散应用数学》105 (2000)，第 1–3 期，193–223 页。[11] Z.-H. Sun，涉及伯努利数和欧拉数的同余，《数论杂志》128 (2008)，第 2 期，280–312 页。[12]Z.-H. Sun，关于伯努利多项式的超同余，《国际数论杂志》11 (2015)，第 8 期，2393–2404 页。[13] 孙智伟，超同余与欧拉数，《中国科学：数学》54 (2011)，第 12 期，2509–2535 页。[14] 孙智伟，关于与中心二项式系数相关的同余，《数论杂志》13 (2011)，第 11 期，2219–2238 页。[15] 孙智伟，关于涉及三个二项式系数乘积的和，《Acta Arith.》156 (2012)，第 2 期，123–141 页。[16] 孙智伟，涉及两个二项式系数乘积的超同余，《有限域及其应用》22 (2013)，24–44 页。[17] 孙智伟，关于 π^3 及相关同余的一个新级数，《国际数学杂志》26 (2015)，第 8 期，1550055（23 页）。[18] 孙智伟和 R. Tauraso，关于中心二项式系数的新同余，《应用数学进展》45 (2010)，第 1 期，125–148 页。[19] S. Mattarei 和 R. Tauraso，从生成级数到多项式同余，《数论杂志》182 (2018)，179–205 页。[20] J. Wolstenholme，关于素数的某些性质，《应用数学季刊》5 (1862)，35–39 页。[21] K. M. Yeung，关于二项式系数的同余，《数论杂志》33 (1989)，1–17 页。

(Guo-Shuai Mao) Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, People's Republic of China, maogsmath@163.com