WAIT：信息技术进展研讨会，布达佩斯，2022年

基于切线的隐式曲线的一种推广

Ágoston Sipos

布达佩斯科技经济大学控制工程与信息技术系

arXiv:2304.04577v1 [cs.CG] 10 Apr 2023

摘要

定义二次隐式曲线的一种方法是指定两条切线，以及一条经过切点的割线。[1] 本文将证明，这种方法可以推广到更多切线的情形，从而得到更高次数的曲线。

1. 引言

隐式曲线广泛应用于逼近和设计。它们的优点包括：(1) 可以非常高效地与参数曲线求交；(2) 易于根据点位于曲线哪一侧对点进行分类；(3) 只需在方程中加上一个常数即可简单地定义偏移曲线。然而，它们也存在一些缺点，例如：(1) 很难生成沿曲线分布的点；(2) 隐式曲线可能——而且通常确实会——具有多个非预期的分支。

使用隐式曲线进行设计未必直观。通常，它们是形如 $f(x,y) = 0$ 的数学公式，但函数 f 通常没有自然的几何解释（简单对象，如直线和圆除外）。

对于二次曲线，Liming[1] 提出了一种利用切线和割线表示曲线的方法。这意味着无需处理在几何上没有意义的二次函数系数；相反，只需计算这些直线，并将其代入一个固定公式，即可求出隐式曲线在任意点处的值。

本文将介绍一种方法，用于推广这一方法，使其能够由更多预先指定的切线来定义曲线，而所得曲线的次数也会相应提高。

2. 前人工作

Liming 的圆锥曲线（二次曲线）方法[1] 如下（另见图 1）：

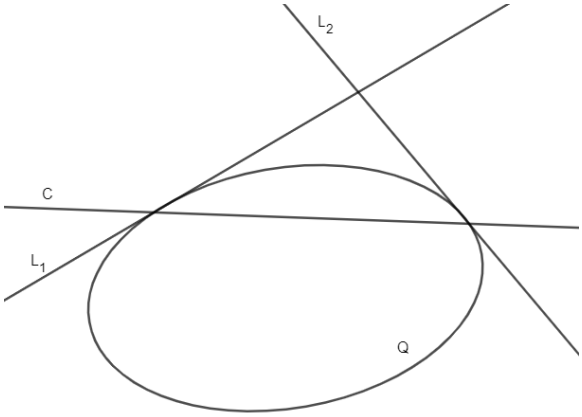


图 1：Liming 方法示例

1. 设 $L_1, L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为两条以隐式形式表示的直线，它们是所求曲线的两条（不同）切线。2. 设 $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为曲线的一条割线，经过两个切点。3. 那么，$\forall \lambda \in (0;1)$：该曲线

$$Q(x,y) = (1-\lambda) \cdot L_1(x,y) \cdot L_2(x,y) - \lambda \cdot C^2(x,y) \quad (1)$$

是满足切线条件的非奇异二次曲线。

对于三维曲面，有多种类似的方案，例如函数样条[2]，它是 Liming 方法针对任意数量切向曲面的直接推广。不过，在所有情况下，如何描述都并不明确。

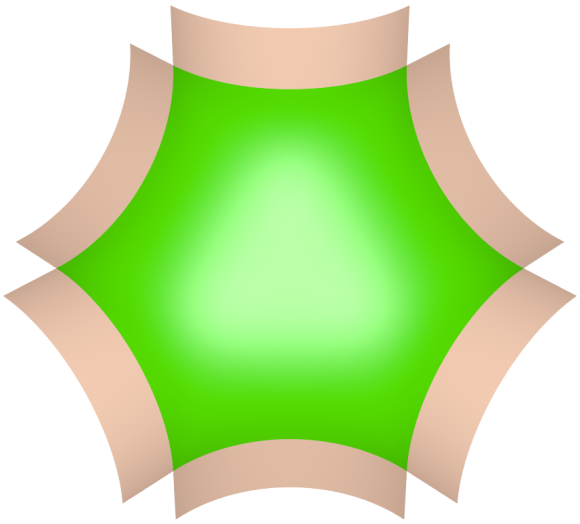


图 2：三维六边形 I-patch

横截曲面，它是 Liming 中割线的类比。

另一种三维方法是*I-patch*[3]（图 2），它由n 个带状（相切）曲面（R_i）和n 个边界曲面（B_i）定义。该补片的方程为

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i R_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} B_j^2 \right) + w_0 \prod_{j=1}^{n} B_j^2. \tag{2}$$

I-patch 还有另一种形式，即忠实 *I-patch*[4]:

$$\hat{I} = \frac{I}{\sum_{i=1}^{n} w_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} B_j^2}. \tag{3}$$

它有多方面的优势，因为它没有孤立点，而且距离度量更加均匀。不过，使用归一化 *I-patch*也能实现第一个目标:

$$I^* = \frac{I}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} B_j^2}. \tag{4}$$

3. 关于 Liming 方法的注记

很容易看出，Liming 曲线是单侧二维 I-片，具有 $R_1 = L_1 \cdot L_2, B_1 = C$ 和 $w_0 = \frac{1-\lambda}{\lambda} w_0$。

我们还将利用黎明方法的以下重要性质。虽然这一性质直观易懂，但我们在文献中未找到相关证明，因此将给出一个证明。

引理 1 设Q 为一条二次隐式曲线，L_1, L_2 为其两条不同的切线，C为经过切点的割线。则，$\exists \lambda \in (0;1)\ \omega \in \mathbb{R}$ s.t.

$$(1-\lambda) \cdot L_1 \cdot L_2 - \lambda \cdot C^2 \equiv \omega \cdot Q. \tag{5}$$

证明 令 (x,y) 为满足 $Q(x,y) = 0$、$L_1(x,y) \neq 0$、$L_2(x,y) \neq 0$ 的点。令

$$\lambda := \frac{L_1(x,y) \cdot L_2(x,y)}{L_1(x,y) \cdot L_2(x,y) + C^2(x,y)} \tag{6}$$

这意味着该点也位于我们的曲线上。 .
一般二次隐式曲线的形式为

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \tag{7}$$

具有 6 个系数，尽管将它们乘以同一个标量并不会改变该曲线。
在满足这两个切线条件的基础上拟合一条曲线，并额外要求插值（x,y），意味着有一个包含5 个方程的齐次线性系统（见附录 A）。这意味着解空间的维数为一，因此任意两个解彼此之间都只相差一个标量倍数。

□

4. 由四条切线定义的曲线

设 $L_i (i = 1..4)$ 为四条互不相同的切线，$\mathbf{p}_i (i = 1..4)$ 为切点。

定理 1 设 C_1 为一条经过 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$,的直线，C_2 经过 $\mathbf{p}_3$ 和 $\mathbf{p}_4$。那么，双侧 I-片的族

$$I_{\mathbf{w}} := w_1 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot C_2^2 + w_2 \cdot L_3 \cdot L_4 \cdot C_1^2 + w_0 \cdot C_1^2 \cdot C_2^2 \tag{8}$$

满足切线条件。此外，如果存在一条满足所约束切线的二次曲线，归一化的 I-patch I^* 在系数选择恰当时可以重现该曲线。

证明 第一条陈述显然由 I-patch 的性质推出：例如，在 $\mathbf{p}_1$, 中利用$L_1(\mathbf{p}_1) = 0$ 和$C_1(\mathbf{p}_1) = 0$;

$$I_{\mathbf{w}}(\mathbf{p}_1) = 0 + 0 + 0 = 0 \tag{9}$$

and

$$\nabla I_{\mathbf{w}}(\mathbf{p}_1) = c_1(\mathbf{p}_1) \cdot \nabla L_1(\mathbf{p}_1) + \mathbf{v}_1(\mathbf{p}_1) \cdot L_1(\mathbf{p}_1) + \\ + c_2(\mathbf{p}_1) \cdot 2 \cdot C_1(\mathbf{p}_1) \cdot \nabla C_1(\mathbf{p}_1) + \mathbf{v}_2(\mathbf{p}_1) \cdot C_1^2(\mathbf{p}_1), \tag{10}$$

其中 c_1, c_2为实值函数，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$为向量值函数。利用这些约束，我们得到

$$\nabla I_{\mathbf{w}}(\mathbf{p}_1) = c_1(\mathbf{p}_1) \cdot \nabla L_1(\mathbf{p}_1) + 0 + 0 + 0, \tag{11}$$

这意味着该点位于曲线上，并且梯度的方向与直线的梯度方向相同，因此 L_1 确实是一条切线。 □

对于第二个命题，设Q 为目标二次曲线，

$$R_1 := L_1 L_2 \tag{12}$$

$$R_2 := L_3 L_4 \tag{13}$$

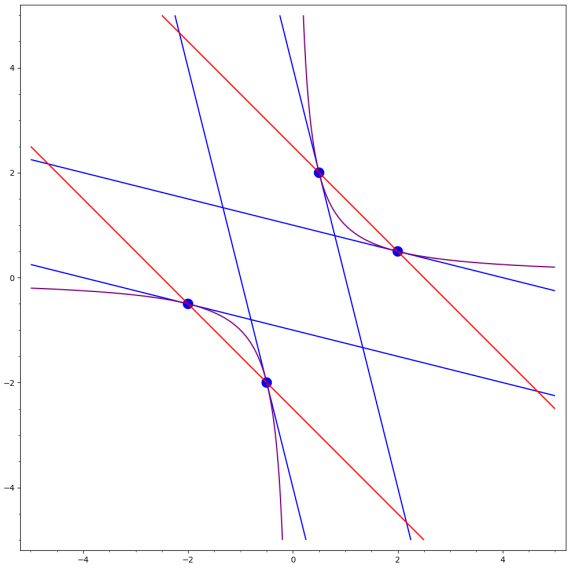


图 3：重现双曲线

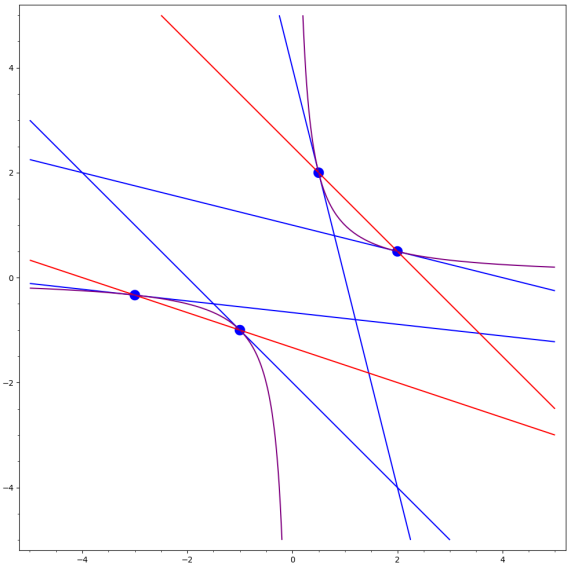


图 4：用不同的切线重现双曲线

$$S_{i,\omega,\lambda} := \omega((1-\lambda)R_i + \lambda C_i^2) \tag{14}$$

根据引理 1，$\exists \omega_1, \lambda_1 : S1_{,\omega_1,\lambda_1} \equiv Q$，类似地 $\exists \omega_2, \lambda_2 :$ $S2_{,\omega_2,\lambda_2} \equiv Q$现在，一方面

$$\begin{aligned} S_{1,\omega_1,\lambda_1}C_2^2 + S_{2,\omega_2,\lambda_2}C_1^2 = \\ = \omega_1(1-\lambda_1)R_1C_2^2 + \omega_1\lambda_1C_1^2C_2^2 + \\ + \omega_2(1-\lambda_2)R_2C_1^2 + \omega_2\lambda_2C_1^2C_2^2 \end{aligned} \tag{15}$$

另一方面

$$S_{1,\omega_1,\lambda_1}C_2^2 + S_{2,\omega_2,\lambda_2}C_1^2 = Q \cdot (C_1^2 + C_2^2) \tag{16}$$

这意味着，对于

$$w_1 = \omega_1(1-\lambda_1) \tag{17}$$
$$w_2 = \omega_2(1-\lambda_2) \tag{18}$$
$$w_0 = \omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2; \tag{19}$$

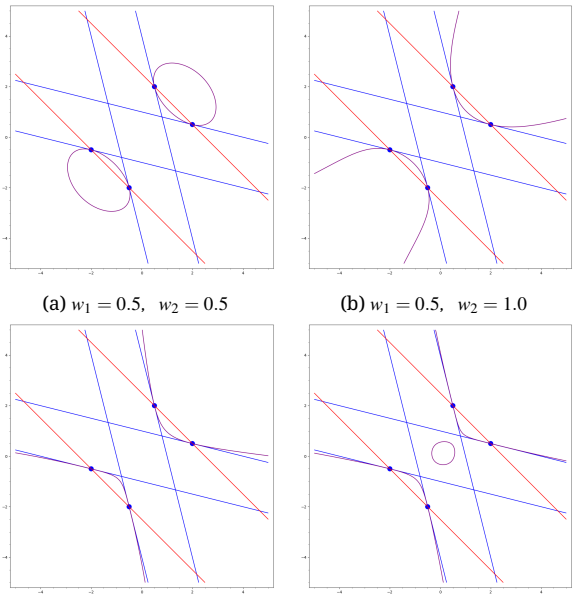
$$I_{[w_1,w_2,w_0]} \equiv Q \cdot (C_1^2 + C_2^2), \tag{20}$$

所以 $I_{\mathbf{w}}^* \equiv Q$ □

5. 示例

四切线曲线当然取决于w_i 权重，因此，对于给定的切线配置，可以得到许多不同的曲线。

图中，蓝色线条表示切线，红色线条表示割线，生成的曲线本身以紫色显示。



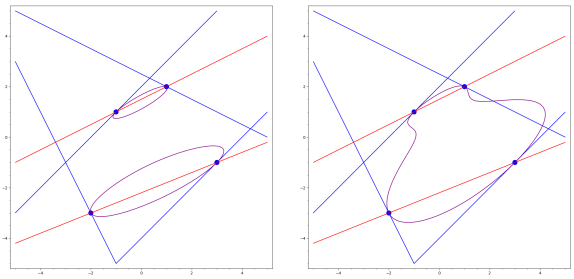
(a) $w_1 = 0.5,\ w_2 = 0.5$ (b) $w_1 = 0.5,\ w_2 = 1.0$

(c) $w_1 = 0.8,\ w_2 = 2.0$ (d) $w_1 = 2.0, w_2 = 1.5$

图5：在与图3相同的数据上使用不同的系数

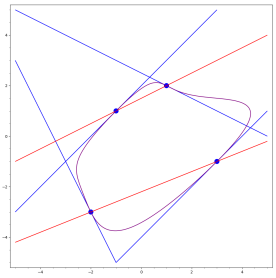
在图 3 和图 4 中，可以看到通过选取双曲线上的四个点和四条切线，并在第一个示例中设置 $w_1 = w_2 = 4/9$、$w_0 = 32/81$，即可重现该双曲线。在第二个示例中，正确的权重为 $w_1 = 3/4$，$w_2 = 4/9$ 和 $w_0 = 985/1296$。

从图5中可以看出，改变权重会极大地改变曲线的形状。

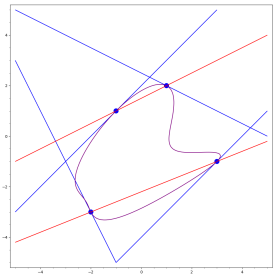


(a) $w_1 = 0.2, w_2 = 1.2$

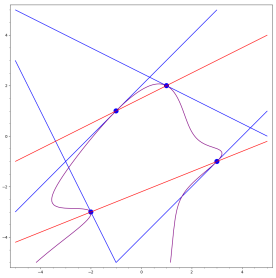
(b) $w_1 = 0.2, w_2 = 4.6$



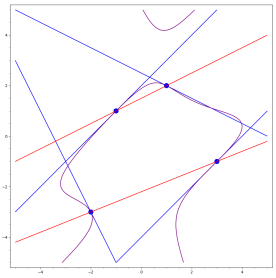
(c) $w_1 = 1.0, w_2 = 6.0$



(d) $w_1 = 1.2,\ w_2 = 0.4$



(e) $w_1 = 1.8, w_2 = 0.4$



(f) $w_1 = 2.2, w_2 = 3.8$

图 6：一般示例中的不同系数

图6展示了一个包含一般切线和六种可能系数设置的示例。

致谢

本研究得到匈牙利科学研究基金（OTKA，编号：124727：三维中一般拓扑无关自由曲面的建模）的资助。作者感谢 Tamás Várady 提供咨询和宝贵意见。

附录 A： 约束方程组

根据 Bajaj 和 Ihm[5]，二维中的切向约束可以用以下方程描述（（x，y）是要插值的点，（dx，dy）是指定的梯度）。

$$f(x,y) = 0 \tag{21}$$
$$dx \cdot \partial_y f(x,y) - dy \cdot \partial_x f(x,y) = 0 \tag{22}$$

现在，将此应用于未知二次曲线 $f(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f$，它应通过点 (x_1,y_1)，且梯度为 (m_1,n_1)；通过点 (x_2,y_2)，且梯度为 (m_2,n_2)；以及点 (x_3,y_3)（未指定梯度）。

偏导数为

$$\partial_x f(x,y) = 2a \cdot x + b \cdot y + d \tag{23}$$
$$\partial_y f(x,y) = 2c \cdot y + b \cdot x + e \tag{24}$$

因此，方程组将是

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = 0 \tag{25}$$
$$ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + f = 0 \tag{26}$$
$$ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + f = 0 \tag{27}$$
$$m_1 \cdot (2cy_1 + bx_1 + e) - n_1 \cdot (2ax_1 + by_1 + d) = 0 \tag{28}$$
$$m_2 \cdot (2cy_2 + bx_2 + e) - n_1 \cdot (2ax_2 + by_2 + d) = 0 \tag{29}$$

这是关于（a,b,c,d,e,f）的 5 个方程，因此解空间确实是 $6-5=1$ 维的。

参考文献

1. R. A. Liming. 流线型机身的圆锥放样。《航空工程与航空航天技术》，19(7):222–228，1947。 2. J. Li, J. Hoschek, and E. Hartmann. 用于曲线、曲面和实体插值与逼近的G^{n-1}-泛函样条。《计算机辅助几何设计》，7(1-4):209–220，1990。 3. T. Várady, P. Benk˝o, G. Kós, and A. Rockwood. 隐式曲面再探——I-片。在《几何建模》，第323–335页。Springer，2001。 4. Á. Sipos, T. Várady, and P. Salvi. 用隐式多边曲面逼近三角网格。《计算机辅助设计与应用》，19(5):1015–1028，2022。 5. C. L. Bajaj and I. Ihm. 采用 Hermite 插值的代数曲面设计。《*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）》，11(1):61–91，1992。