arXiv:2304.04586v1 [math.CA] 10 Apr 2023

高光滑度函数类宽度的渐近估计 *

A.S. Serdyuk 和 I.V. Sokolenko

摘要。我们为 2π-周期函数 φ的卷积类的柯尔莫哥洛夫宽度、伯恩斯坦宽度、线性宽度和投影宽度给出了双侧估计，其中 $\|\varphi\|_2 \le 1$，核$\Psi_{\bar\beta}$固定且由生成-∞，其傅里叶级数具有 $\sum\limits_{k=1}\psi(k)\cos(kt-\beta_k\pi/2)$的形式，其中 $\psi(k)\ge 0$，$\sum\psi^2(k)<\infty$，$\beta_k\in\mathbb{R}$，在空间 C中。我们证明，对于快速递减的序列 $\psi(k)$（特别地，如果 $\lim\limits_{k\to\infty}\psi(k+1)/\psi(k)=0$），所得估计是渐近等式。我们确立了，这些卷积类的宽度的渐近等式由三角傅里叶和实现。

2010 年数学主题分类：41A46，42A10。

关键词：伯恩斯坦宽度，柯尔莫哥洛夫宽度，线性宽度，投影宽度，傅里叶和，Weyl-Nagy 类，广义泊松积分类，(ψ,β)-积分，渐近等式

引言

设 L_p、 $1\le p<\infty$为 2π–周期函数空间，这些函数在 $[-\pi,\pi$上 f 按 p 次幂可和，其中范数由公式给出

$$\|f\|_{L_p}=\|f\|_p=\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

L_∞ 是空间　　可测且本质有界的 2π周期函数 f 空间，配备范数

$$\|f\|_{L_\infty}=\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_t|f(t)|,$$

C 为.....的空间　连续的 2π–周期函数 f，其中范数由等式定义

$$\|f\|_C=\max_t|f(t)|.$$

用 $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1\le p\le\infty$ 表示所有可表示为卷积的 2π-周期函数 f 的集合

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt,\quad a_0\in\mathbb{R},\quad \varphi\in B^0_p, \tag{1}$$

$$B^0_p=\{g\in L_p:\ \|g\|_p\le 1,\ g\perp 1\},$$

*本研究部分由资助项目 H2020-MSCA-RISE-2019年（项目编号：873071，SOMPATY：谱优化：从数学到物理学与先进技术）提供支持。

其中卷积核 $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$ 固定且由生成元给出，其傅里叶级数的形式为

$$S[\Psi_{\bar{\beta}}](t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) \geq 0. \tag{2}$$

¯表示式 (1)中的函数 f 被称为函数 φ 的 (ψ, β)-积分，记作 $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}\varphi\,(f = \mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}\varphi)$。如果 $\psi(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, 则表示式(1) 中的函数 φ 被称为函数 f 的 $(\psi, \bar{\beta})$-导数，记作 $f_{\bar{\beta}}^{\psi}(\varphi = f_{\bar{\beta}}^{\psi})$。$(\psi, \bar{\beta})$-积分¯和 (ψ, β)-导数的概念由 Stepanets引入（例如参见 [30,31]）。由于 $\varphi \in L_p$ 和 $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$，所以形如 (1) 的函数 f 是连续函数，即 $C_{\bar{\beta},p}^{\psi} \subset C$ （见 [31, 命题 3.9.2。]）。

在 $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ 的情况下，类 $C_{\bar{\beta},p}^{\psi}$ 记作 $C_{\beta,p}^{\psi}$。

对于 $\psi(k) = k^{-r}, r > 0$, 类 $C_{\bar{\beta},p}^{\psi}$和 $C_{\beta,p}^{\psi}$分别记作 $W_{\bar{\beta},p}^{r}$和 $W_{\beta,p}^{r}$。类 $W_{\beta,p}^{r}$ 是著名的 Weyl-Nagy 类（例如参见 [12, 29–31]）。换言之，$W_{\beta,p}^{r}, 1 \leq p \leq \infty$ 是 2π-周期函数 f 构成的类，这些函数可表示为如下形式的卷积

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x - t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

形式如下的 Weyl-Nagy 核 $B_{r,\beta}$

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

其中函数为 $\varphi \in B_{p}^{0}$。公式 (3) 中的函数 φ 称为函数 f 的 Weyl-Nagy 导数，记作 f_{β}^{r}。

若 $r \in \mathbb{N}$ 且 $\beta = r$，则形式为 (4) 的函数 $B_{r,\beta}$ 是著名的伯努利核，相应的类 $W_{\beta,p}^{r}$ 与著名的类 W_{p}^{r} 相同。后者由具有直到（包括）$(r-1)$ 阶绝对连续导数 $f^{(k)}$ 且满足 $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$ 的 -周期函数 f 构成。此外，对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$ $f_{(r)}(x) = f_{r}^{r}(x) = \varphi(x)$，其中 φ 是公式 (3) 中的函数。

对于 $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$、 $\alpha > 0$、 $r > 0$, 类 $C_{\bar{\beta}、p}^{\psi}$和 $C_{\beta、p}^{\psi}$分别记作 $C^{\alpha}_{\bar{\beta}\,p}{}^{r}$和 $_{\beta\,p}{}^{r}$。集合 $_{\beta\,p}{}^{r}$ 是广义泊松积分的众所周知的类（例如参见 [30,31]），即由

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x - t) P_{\alpha,r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_{p}^{0}, \tag{5}$$

广义泊松核生成的卷积类

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \alpha > 0, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

设 $\mathfrak{N}$ 是空间 $C\,(\mathfrak{N} \subset C)$ 中的某个函数类。量

$$E_n(\mathfrak{N})_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_n(f)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_C \tag{7}$$

称为函数类 $\mathfrak{N}$ 中的元素由阶数为 $n-1$ 的三角多项式 T_{n-1} 子空间 $\mathcal{T}_{2n-1}$ 进行的最佳一致逼近:

$$T_{n-1}(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),\quad \alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}.$$

类 $K=C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1\le p\le\infty$ 的最佳逼近 $E_n(K)_C$ 的阶估计（因此，类 $W^r_{\beta,p}$, $C^{\alpha,\beta}{}^r_p$, 和 $C^{\psi}_{\beta,p}$ 的阶估计）取决于序列 $\psi(k)$ 趋于零的速度；相关结果尤其见于 Temlyakov [35], Hrabova 和 Serdyuk [5], Serdyuk 与 Stepanyuk [25,26] 的著作。

如果序列 $\psi(k)$ 比任何几何级数都更快地趋于零，那么最佳一致逼近的渐近方程甚至也是已知的（例如，参见作者的著作[24] 及其中所列的参考文献）。

在 [24] 中，已证明对于这类函数类 $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$ 以下渐近方程成立。

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C\sim\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C\sim\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\psi(n),\quad 1\le p\le\infty,\tag{8}$$

其中

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})=\sup_{f\in C^{\psi}_{\bar\beta,p}}\|f-S_{n-1}(f)\|_C,$$

$S_{n-1}(f)$是函数 f的 $n-1$阶傅里叶和， $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，并且 $A(n)\sim B(n)$作为$n\to\infty$ 意味着$\lim_{n\to\infty}A(n)/B(n)=1$.

对于 $p=\infty$，在 $K=W^r_{\bar\beta,\infty}, r>0$ 的情形，以及在 $K=C^{\alpha,\bar\beta}{}^r_{\infty}, r\ge1$ 和 $K=C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}(K=C^{\psi}_{\beta,\infty})$ 的情形下，对序列 ψ 和 $\bar\beta$ 施加某些限制时，最佳一致逼近的精确值已由 Favard [6,7], 、Akhiezer 和 Krein [1], 、Krein [10],、Nagy [12], 、Stechkin [29], 、Dzyadyk [3,4], 、Sun [33], 、Bushanskij [2], 、Pinkus [13], 、Serdyuk [15–19] 等人的研究确定。

对于 $p=2$ 以及任意的 $\bar\beta=\beta_k\in\mathbb{R}$, $\sum\psi^2(k)<\infty$，量 $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,2})_C$ 的精确值也已知（见 [23]）。

本文中，我们建立了空间 C 中类 $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ 的 Kolmogorov 宽度、Bernstein 宽度、线性宽度和投影宽度的双边估计；在对序列 $\psi(k)$ 施加某些限制时，这些估计将成为渐近方程（特别是，如果 $\lim_{k\to\infty}\psi(k+1)/\psi(k)=0$）。

设 K 是 C 的一个凸中心对称子集， B 是空间 C 的单位球。再设 F_N 是空间 C 中任意一个 N 维子空间， $N\in\mathbb{N}$，而 $\mathcal{L}(C,F_N)$ 是从 C 到 F_N 的线性算子集合。用 $\mathcal{P}(C,F_N)$ 表示集合 $\mathcal{L}(C,F_N)$ 的投影算子子集，也就是线性投影到集合 F_N 上的算子 A 的集合，使得当 $f\in F_N$ 时 $Af=f$。这些量

$$b_N(K,C)=\sup_{F_{N+1}}\sup\{\varepsilon>0:\varepsilon B\cap F_{N+1}\subset K\},\tag{9}$$

$$d_N(K,C)=\inf_{F_N}\sup_{f\in K}\inf_{u\in F_N}\|f-u\|_C,\tag{10}$$

$$\lambda_N(K,C)=\inf_{F_N}\inf_{A\in\mathcal{L}(C,F_N)}\sup_{f\in K}\|f-Af\|_C,\tag{11}$$

$$\pi_N(K,C)=\inf_{F_N}\inf_{A\in\mathcal{P}(C,F_N)}\sup_{f\in K}\|f-Af\|_C,\tag{12}$$

分别称为集合 K 在空间 C中的 Bernstein、Kolmogorov、线性和投影 N-宽度。

在 $K = C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ （尤其是 $W^{r}_{\beta,p}$ 和 $C^{\psi}_{\beta},_{p}$）的情形下，包含宽度（9）–（12）阶估计的结果，例如可见于 Tikhomirov [36], Pinkus [13],Kornejchuk [8], Kushpel' [11], Romanyuk [14], Temlyakov [34, 35] 等人的著作。

1 主要结果

本文的主要结果如下。

¯定理1. 设 $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$、 $\beta_k \in \mathbb{R}$ 和 $\psi(k) > 0$ 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{13}$$

那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，以下不等式成立。

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\psi^2(n)} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi^2(k)} \right)^{-\frac{1}{2}} \leq P_{2n}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}, C) \leq P_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}, C) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

其中， P_N 是宽度 b_N、 d_N、 λ_N 或 π_N 中的任意一种。

此外，如果 $\psi(k)$ 满足条件

$$\lim_{n \to \infty} \max \left\{ \psi(n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi^2(k)} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\psi(n)} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = 0, \tag{15}$$

那么下列渐近等式成立

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} P_{2n}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}, C) \\ P_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}, C) \end{matrix} \right\} =& \psi(n) \Bigg(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ &+ \mathcal{O}(1) \max \left\{ \psi(n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi^2(k)} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\psi(n)} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \Bigg), \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\mathcal{O}(1)$ 是在所有参数下均一致有界的量。

等式 (16) 由三角傅里叶和 $S_{n-1}(f)$ 实现。

证明。在文献 [23] 中已证明，若条件 (13) 成立，则下列等式成立

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; S_{n-1})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

由于将每个函数 $f \in C$ 映射到其部分傅里叶和的算子是一个线性投影算子，因此根据 (17)

$$\pi_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}, C) \leq \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; S_{n-1})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathfrak{N} \subset C$

$$P_{2n}(\mathfrak{N}, C) \leq P_{2n-1}(\mathfrak{N}, C),$$

其中 P_N是宽度 b_N、 d_N、 λ_N和 π_N中的任意一个，此外，对于所有 $N \in \mathbb{N}$

$$b_N(\mathfrak{N}, C) \leq d_N(\mathfrak{N}, C) \leq \lambda_N(\mathfrak{N}, C) \leq \pi_N(\mathfrak{N}, C). \tag{19}$$

因此，根据 (18)，我们得到公式 (14) 中宽度 P_N 的上界估计。

要在(14)中得到所需的下界估计，只需证明

$$b_{2n}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}, C) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\psi^2(n)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi^2(k)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

在（$2n+1$）维空间 $\mathcal{T}_{2n+1}$三角多项式 T_n阶中，考虑如下形式的球

$$B_{2n+1} = \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\psi^2(n)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi^2(k)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \tag{21}$$

并证明以下嵌入

$$B_{2n+1} \subset C^{\psi}_{\bar{\beta},2}. \tag{22}$$

对于任意三角多项式

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{23}$$

¯来自球 B_{2n+1} 其 (ψ, β)-导数具有如下形式

$$(T_n)^{\psi}_{\bar{\beta}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\psi(k)} \cos\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2} \right) + \frac{b_k}{\psi(k)} \sin\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k \cos\frac{\beta_k\pi}{2}}{\psi(k)} \cos kx - \frac{a_k \sin\frac{\beta_k\pi}{2}}{\psi(k)} \sin kx + \frac{b_k \cos\frac{\beta_k\pi}{2}}{\psi(k)} \sin kx + \frac{b_k \sin\frac{\beta_k\pi}{2}}{\psi(k)} \cos kx \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi(k)} \left(\left(a_k \cos\frac{\beta_k\pi}{2} + b_k \sin\frac{\beta_k\pi}{2} \right) \cos kx + \left(-a_k \sin\frac{\beta_k\pi}{2} + b_k \cos\frac{\beta_k\pi}{2} \right) \sin kx \right). \tag{24}$$

根据帕塞瓦尔等式，由（24）可得

$$\left\| (T_n)^{\psi}_{\bar{\beta}} \right\|_2 = \sqrt{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^2(k)} \left(\left(a_k \cos\frac{\beta_k\pi}{2} + b_k \sin\frac{\beta_k\pi}{2} \right)^2 + \left(-a_k \sin\frac{\beta_k\pi}{2} + b_k \cos\frac{\beta_k\pi}{2} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^2(k)} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

根据形式为 (23) 的多项式 T_n 的帕塞瓦尔等式，我们得到

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx. \tag{26}$$

因此，我们有一个不等式链

$$a_k^2+b_k^2\le\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|T_n\|_C^2\,dx=2\|T_n\|_C^2\,, \tag{27}$$

因此，我们得到了关于 $\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ 的如下形式的估计

$$\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le\sqrt{2}\,\|T_n\|_C\,,\quad k=\overline{1,n}. \tag{28}$$

对于 $k=n$ 的情形，可以改进这一估计。为此，我们考虑一个三角多项式

$$\tau_n(x):=\frac{T_n(x)}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\cos kx+\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\sin kx)\right)$$

$$=\frac{\rho_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k\cos(kx+\theta_k), \tag{29}$$

其中

$$\rho_0=\frac{a_0}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},\quad \rho_k=\frac{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},\quad k=\overline{1,n-1},\quad \rho_n=1,$$

并且 θ_k 满足

$$\begin{cases}\cos\theta_k=\dfrac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}},\ k=\overline{1,n},\\ \sin\theta_k=\dfrac{-b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}},\ k=\overline{1,n}.\end{cases}$$

正如 由 [9, 命题 2.9.1] 可知，对于所有 $p\in[1,\infty]$ ， 以下不等式成立 s

$$\|\tau_n(\cdot)\|_p\ge\|\cos n(\cdot)\|_p,$$

并且，因此，对于 $p=\infty$

$$\|\tau_n\|_C\ge 1. \tag{30}$$

由（29）和（30）可得

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{\|T_n\|_C}{\|\tau_n\|_C}\le\|T_n\|_C\,. \tag{31}$$

利用方程（1）以及估计式（28）和（31），我们有

$$\left\|(T_n)_{\bar\beta}^{\psi}\right\|_2=\sqrt{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k^2+b_k^2}{\psi^2(k)}+\frac{a_n^2+b_n^2}{\psi^2(n)}\right)^{\frac12}$$

$$\le\sqrt{\pi}\left(2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\|T_n\|_C^2}{\psi^2(k)}+\frac{\|T_n\|_C^2}{\psi^2(n)}\right)^{\frac12}=\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\psi^2(n)}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac12}\|T_n\|_C\,. \tag{32}$$

由于多项式 T_n 属于形式为 (21) 的球 B_{2n+1}，由 (1) 可得，

$$\left\|(T_n)_{\bar{\beta}}^{\psi}\right\|_2 \leq 1. \tag{33}$$

嵌入（22）得到了证明。

不等式 (20) 由 Berstein 宽度 $b_{2n}(C_{\bar{\beta},2}^{\psi}, C)$的定义和嵌入 (22) 得出。关系式 (18)-(20) 证明了不等式 (14)。

为证明在满足条件 (15) 时的渐近方程 (16)，首先我们注意到，

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^2(k)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \psi(n) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

and

$$\left(\frac{1}{\psi^2(n)} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\psi(n)} + \left(2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

由 (35) 可得

$$\left(\frac{1}{\psi^2(n)} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\frac{1}{\psi(n)} + \left(2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \psi(n) - \left(\frac{1}{\frac{1}{\psi(n)}} - \frac{1}{\frac{1}{\psi(n)} + \left(2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \psi(n) - \frac{\left(2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\psi(n)}\left(\frac{1}{\psi(n)} + \left(2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$= \psi(n)\left(1 - \frac{\left(2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\psi(n)} + \left(2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \geq \psi(n)\left(1 - \psi(n)\left(2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{36}$$

因此，由 (14) 和 (34) 可知，一方面，

$$P_{2n}(C_{\bar{\beta},2}^{\psi}, C) \leq P_{2n-1}(C_{\bar{\beta},2}^{\psi}, C) \leq \psi(n)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}\psi(n)}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k)\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{37}$$

另一方面，由于 (14)】【。

$$P_{2n}(C_{\bar{\beta},2}^{\psi}, C) \geq \psi(n)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\psi(n)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{38}$$

结合式 (37) 和 (38)，我们可以写出方程

$$P_{2n}(C_{\bar{\beta},2}^{\psi}, C) = \psi(n)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \gamma_n^{(1)}\right), \tag{39}$$

$$P_{2n-1}(C_{\bar{\beta},2}^{\psi}, C) = \psi(n)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \gamma_n^{(2)}\right), \tag{40}$$

其中对于 $\gamma_n^{(i)}, i = 1,2$，下列双边不等式成立

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\psi(n)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}} \le \gamma_n^{(i)} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\psi(n)}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

如果条件 (15) 得到满足，那么根据 (39)–(41)，渐近方程 (16) 成立。

定理1已证明。 □

我们注意到，条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\psi^2(n)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k) = 0 \tag{42}$$

当 $\psi(k)$ 满足条件 D_0 时，该条件得到满足：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{43}$$

为确保这一点，我们来设定

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}.$$

由 (43) 可知， $\varepsilon_n \downarrow 0$ as $n \to \infty$. 因此，我们得到

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k) = \psi^2(n)\left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi^2(n)} + \frac{\psi^2(n+2)}{\psi^2(n+1)}\frac{\psi^2(n+1)}{\psi^2(n)} + \dots\right)$$

$$\le \psi^2(n)\left(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^4 + \dots\right) = \psi^2(n)\frac{\varepsilon_n^2}{1-\varepsilon_n^2} = o(\psi^2(n)).$$

让我们证明，对于严格递减的序列 ψ ，满足形式为 (43) 的条件 D_0 确保以下等式成立

$$\lim_{n\to\infty}\psi^2(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)} = 0. \tag{44}$$

为此，我们使用斯托尔茨定理，根据该定理，关系式 (44) 由下列等式推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)} - \sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\psi^2(k)}}{\frac{1}{\psi^2(n)} - \frac{1}{\psi^2(n-1)}} = 0. \tag{45}$$

由于

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^2(k)} - \sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\psi^2(k)}}{\frac{1}{\psi^2(n)} - \frac{1}{\psi^2(n-1)}} = \frac{\frac{1}{\psi^2(n-1)}}{\frac{1}{\psi^2(n)} - \frac{1}{\psi^2(n-1)}} = \frac{\frac{\psi^2(n)}{\psi^2(n-1)}}{1 - \frac{\psi^2(n)}{\psi^2(n-1)}},$$

于是由 (43) 可得 (45)。

综上，我们得到如下结论。

¯推论1.1. 设 $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$、 $\beta_k \in \mathbb{R}$，且序列 $\psi(k) > 0$ 严格递减并满足形式为 (43) 的条件 D_0 。那么当 $n \to \infty$ 时，渐近等式 (16) 成立。

下面给出定理1在一些重要特殊情形下的推论。

定理 2. 设 $\bar{\beta}=\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$、 $\beta_k\in\mathbb{R}$ 和 $n\in\mathbb{N}.$，则对所有 $r\geq\dfrac{n+1}{2}$，以下不等式成立

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{-r}\left(1-\frac{4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2r}}{1+4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}\leq P_{2n}(W_{\bar{\beta},2}^{r},C)\\&\leq P_{2n-1}(W_{\bar{\beta},2}^{r},C)\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{-r}\left(1+\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r}}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{46}$$

其中 P_N是宽度 b_N、 d_N、 λ_N或 π_N中的任一种。

证明。令 $\psi(k)=k^{-r},r>1.$ 显然，条件（13）得以满足。由于对于 $2r\geq n+1,n\in\mathbb{N},$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}&<\frac{1}{(n+1)^{2r}}+\int_{n+1}^{\infty}\frac{dt}{t^{2r}}=\frac{1}{(n+1)^{2r}}+\frac{1}{(2r-1)(n+1)^{2r-1}}=\frac{1}{(n+1)^{2r}}\frac{2r+n}{2r-1}\\&\leq\frac{1}{(n+1)^{2r}}\frac{4r-1}{2r-1}\leq\frac{1}{(n+1)^{2r}}\left(2+\frac{1}{2r-1}\right)\leq\frac{1}{n^{2r}}\frac{2+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^{2r}},\end{aligned}\tag{47}$$

然后，根据定理1中等式（14）右侧可得一个估计。

$$P_{2n-1}(W_{\bar{\beta},2}^{r},C)\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{-r}\left(1+\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{48}$$

另一方面，对于 $r\geq\dfrac{n+1}{2}$和 $\psi(k)=k^{-r}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\psi^{2}(n)}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\psi^{2}(k)}=n^{2r}+2\sum_{k=1}^{n-1}k^{2r}\leq n^{2r}+2\left((n-1)^{2r}+\int_{1}^{n-1}t^{2r}dt\right)\\&=n^{2r}+2\left((n-1)^{2r}+\frac{(n-1)^{2r+1}}{2r+1}-\frac{1}{2r+1}\right)<n^{2r}+2\left((n-1)^{2r}+\frac{(n-1)^{2r+1}}{n+2}\right)\\&<n^{2r}+4(n-1)^{2r}=n^{2r}\left(1+4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2r}\right).\end{aligned}\tag{49}$$

由定理1的不等式(14)左侧及公式(49)，我们得到一个估计。

$$P_{2n}(W_{\bar{\beta},2}^{r},C)\geq\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{-r}\left(\frac{1}{1+4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{-r}\left(1-\frac{4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2r}}{1+4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{50}$$

结合估计式 (48) 和 (50)，我们得到 (46)。定理 2 得证。 . □

注意，如果条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}=\infty\tag{51}$$

成立，那么对于 $\psi(k)=k^{-r}$，条件 (43) 也成立，因为

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^{r}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-r}=\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}\right)^{-\frac{r}{k+1}}\leq e^{-\frac{r}{k+1}}\to 0,\ k\to\infty.$$

在关系式 (46) 中令 $n\to\infty$ 取极限，可得以下结论。

¯定理 3.设 $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$、 $\beta_k \in \mathbb{R}$、 $n \in \mathbb{N}$，且条件 (51) 得到满足。则以下渐近等式成立

$$\left.\begin{array}{l} P_{2n}(W^r_{\bar{\beta},2}, C) \\ P_{2n-1}(W^r_{\bar{\beta},2}, C) \end{array}\right\} = n^{-r}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \mathcal{O}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-r}\right), \tag{52}$$

其中， P_N是宽度 b_N、 d_N、 λ_N 或 π_N 中的任意一个，而 $\mathcal{O}$(1) 是关于所有参数一致有界的量。

还要注意，等式 (52) 可由公式 (16) 和估计式 (49) 很容易得到。 (47)

¯定理 4. 设 $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$、 $\beta_k \in \mathbb{R}$、 $\alpha > 0$、 $r > 1$、 $n \in \mathbb{N}$ 和满足

$$(n-1)^r > \frac{1}{\alpha}, \tag{53}$$

则以下不等式成立

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r}\left(1 - \frac{2\gamma_{\alpha,r,n} e^{-2\alpha r(n-1)^{r-1}}}{1 + 2\gamma_{\alpha,r,n} e^{-2\alpha r(n-1)^{r-1}}}\right)^{\frac{1}{2}} \le P_{2n}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},2}, C)$$

$$\le P_{2n-1}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},2}, C) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r}\left(1 + e^{-2\alpha r n^{r-1}}\left(1 + \frac{1}{2\alpha r n^{r-1}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{54}$$

其中 P_N 是宽度 b_N、 d_N、 λ_N 或 π_N 中的任意一种，并且

$$\gamma_{\alpha,r,n} = \left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-1)^{r-1}} + e^{-2\alpha(n-1)^r} \max\left\{e^{4\alpha}, \frac{e^2}{\alpha^{1+1/r}}\right\}\right). \tag{55}$$

证明。首先注意，如果 $\alpha > 0$、 $r > 1$、 $n \in \mathbb{N}$ 满足条件 (53)，那么对于形如

$$I_{n-1} := \int_1^{n-1} e^{2\alpha t^r} dt, \quad \alpha > 0,\ r > 1, \tag{56}$$

以下不等式成立

$$I_{n-1} \le \frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{\alpha r(n-1)^{r-1}} + \max\left\{e^{4\alpha}, \frac{e^2}{\alpha^{1+1/r}}\right\}. \tag{57}$$

事实上，通过分部积分，我们有

$$I_{n-1} = \frac{1}{2\alpha r}\int_1^{n-1} t^{1-r} de^{2\alpha t^r} = \frac{1}{2\alpha r}\left(\frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{(n-1)^{r-1}} - e^{2\alpha}\right) + \frac{r-1}{2\alpha r}\int_1^{n-1} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt. \tag{58}$$

对于 $0 < 2\alpha < 1$，考虑到 (53)，我们得到

$$\int_1^{n-1} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt = \int_1^{\alpha^{-1/r}} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt + \int_{\alpha^{-1/r}}^{n-1} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt < \frac{e^2}{\alpha^{1/r}} + \alpha \int_{\alpha^{-1/r}}^{n-1} e^{2\alpha t^r} dt \le \frac{e^2}{\alpha^{1/r}} + \alpha I_{n-1}. \tag{59}$$

由 (58) 和 (59) 在条件 (53) 下可得

$$I_{n-1} < \frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{2\alpha r(n-1)^{r-1}} + \frac{e^2}{2\alpha^{1+1/r}} + \frac{1}{2} I_{n-1}$$

and

$$I_{n-1} < \frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{\alpha r(n-1)^{r-1}} + \frac{e^2}{\alpha^{1+1/r}}, \quad 0 < 2\alpha < 1. \tag{60}$$

对于 $2\alpha \geq 1$，我们得到

$$\int_1^{n-1} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt = \int_1^{2^{1/r}} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt + \int_{2^{1/r}}^{n-1} \frac{e^{2\alpha t^r}}{t^r} dt \leq \int_1^{2^{1/r}} e^{2\alpha t^r} dt + \frac{1}{2} \int_{2^{1/r}}^{n-1} e^{2\alpha t^r} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{2^{1/r}} e^{2\alpha t^r} dt + \frac{1}{2} I_{n-1} < \frac{2^{1/r}-1}{2} e^{4\alpha} + \frac{1}{2} I_{n-1} < \frac{e^{4\alpha}}{2} + \frac{1}{2} I_{n-1}. \tag{61}$$

由（58）和（61），在条件（53）下，我们得到

$$I_{n-1} < \frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{2\alpha r(n-1)^{r-1}} + \frac{e^{4\alpha}}{4\alpha} + \frac{1}{4\alpha} I_{n-1} < \frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{2\alpha r(n-1)^{r-1}} + \frac{e^{4\alpha}}{2} + \frac{1}{2} I_{n-1}$$

and

$$I_{n-1} < \frac{e^{2\alpha(n-1)^r}}{\alpha r(n-1)^{r-1}} + e^{4\alpha}, \quad 2\alpha \geq 1. \tag{62}$$

不等式（57）由（60）和（62）推出。

对于 $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$, 在条件（53）下，考虑到当 $r > 1$ 和$n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1 > \frac{r}{n},$$

我们得到

$$\psi^2(n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi^2(k)} = e^{-2\alpha n^r} \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\alpha k^r} \leq e^{-\alpha n^r} \left(e^{2\alpha(n-1)^r} + \int_1^{n-1} e^{2\alpha t^r} dt \right)$$

$$\leq e^{-2\alpha n^r} \left(e^{2\alpha(n-1)^r} \left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-1)^{r-1}} + e^{-2\alpha(n-1)^r} \max\left\{ e^{4\alpha}, \frac{e^2}{\alpha^{1+1/r}} \right\} \right) \right)$$

$$\leq e^{-2\alpha(n-1)^r((1+\frac{1}{n-1})^r - 1)} \gamma_{\alpha,r,n} \leq \gamma_{\alpha,r,n} e^{-2\alpha r(n-1)^{r-1}}. \tag{63}$$

因此，根据定理1中不等式（14）的左侧以及（63），在条件（53）下，我们得到宽度 $P_{2n}(C^{\alpha,\overset{r}{\bar{\beta}},2,}, C)$ $\alpha > 0$, $r > 1$ 所需的下界估计

$$P_{2n}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},2}, C) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{2\alpha n^r} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\alpha k^r} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r} \left(1 - \frac{2\gamma_{\alpha,r,n} e^{-2\alpha r(n-1)^{r-1}}}{1 + 2\gamma_{\alpha,r,n} e^{-2\alpha r(n-1)^{r-1}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{64}$$

正如 [30, 第 163 页164]所示

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} < e^{-\alpha n^r} \left(1 + \frac{1}{\alpha r n^{r-1}} \right) e^{-\alpha r n^{r-1}}, \quad r > 1, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

因此，

$$\frac{1}{\psi^2(n)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k)=e^{2\alpha n^r}\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-2\alpha k^r}<\left(1+\frac{1}{2\alpha r n^{r-1}}\right)e^{-2\alpha r n^{r-1}}. \tag{66}$$

因此，由定理1的不等式(14)右侧以及公式(66)，我们得到一个估计。

$$P_{2n}(W^r_{\bar{\beta},2},C)\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha n^r}\left(1+e^{-2\alpha r n^{r-1}}\left(1+\frac{1}{2\alpha r n^{r-1}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{67}$$

结合估计式（64）和（67），我们得到（54）。定理 4 得证。 □

当 $n\to\infty$ 时，对关系式 (54) 取极限，我们得到如下结论。

¯定理 5. 设 $\beta=\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$、$\beta_k\in\mathbb{R}$、$\alpha>0$、$r>1$、$n\in\mathbb{N}$，且条件 (53) 得到满足。那么，当 $n\to\infty$ 时，以下渐近等式成立

$$\left.\begin{matrix}P_{2n}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},2},C)\\P_{2n-1}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},2},C)\end{matrix}\right\}=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\mathcal{O}(1)\gamma_{\alpha,r,n}e^{-\alpha r(n-1)^{r-1}}\right), \tag{68}$$

其中，P_N是宽度 b_N、d_N、λ_N或 π_N中的任一种，且$\gamma_{\alpha,r,n}$由(55)定义，而 $\mathcal{O}$(1)是关于所有参数一致有界的量。

请注意，定理 5 补充了文献 [17,21,22,28,32]，的结果，这些结果给出了具有经典或广义泊松核的卷积类宽度的精确估计。由定理 4 和定理 5 的证明可知，式 (68) 中的宽度渐近等式由三角傅里叶和实现。关于一致度量下广义泊松积分类 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}_{p}$,上傅里叶和偏差的渐近等式，可参见文献 [20,27,31] 等。

参考文献

[1] AkhiezerN.I.,KreinM. G.可微周期函数通过三角多项式的最佳逼近。苏联科学院学报 1937，15 (3)，107-112。（俄文）[2] Bushanskii A.V.某些函数的平均最佳调和逼近。《函数逼近理论及其应用研究》，乌克兰苏维埃社会主义共和国科学院数学研究所，基辅，1978，29-37。（俄文）[3] DzyadykV.K. 关于由绝对单调函数积分所得核所确定的周期函数类的最佳逼近。苏联科学院通报，数学系列 1959，23(6)，933-950。（俄文）[4] Dzyadyk V.K. 关于由绝对单调核的线性组合的积分所定义的周期函数类的最佳逼近。数学札记 1974，16 (5)，691-701。[5] HrabovaU.Z., SerdyukA.S.(ψ,β)-微分函数类的最佳逼近和傅里叶和逼近的阶估计。《乌克兰数学杂志》2014，65 (9)，1319-1331。 https://doi.org/10.1007/s11253-014-0861-7[6] Favard J. 关于周期函$\acute{e}$数通过三角多$\acute{e}$项式的逼近。《法国科学院汇刊》1936，203，1122-1124。（法文）

[7] Favard J. 关于用三角多项式逼近某些函数类的最佳方法。数学科学通报。1937年，61，209–224，243–256。（法文）é Korneichuk N.P. 逼近理论中的精确常数。《数学及其应用百科全书》，第38卷。剑桥大学出版社，剑桥，1991年。[8] Korneichuk N.P.、Babenko V.F.、Ligun A.A. 多项式和样条的极值性质。Naukova Dumka，基辅，1992年。（俄文）[9] Krein M.G. 周期函数最佳逼近理论。苏联科学院学报，1938年，18（4-5），245-249。（俄文）[10] Kushpel' A.K. 解析函数类的宽度估计。《乌克兰数学杂志》，1989年，41（4），493-496。https://doi.org/10.1007/BF01060633[11] ..Sz.-Nagy B. 关于变换三角展开的某些极值问题。1. 周期情形，《莱比锡科学院数学-物理组报告》，1938年，90，103–134。（德文）[12] Pinkus A. 逼近理论中的 n-宽度，施普林格出版社，柏林，1985年。[13] Romanyuk A.S. 多变量周期函数类的逼近特征。乌克兰国家科学院数学研究所论文集。基辅，2012年。（俄文）[14] Serdyuk A.S. 周期函数卷积类的最佳逼近。乌克兰数学杂志，1995年，47（9），1435-1440。https://doi.org/10.1007/BF01057518[15]Serdyuk A.S. 周期函数卷积类的宽度和最佳逼近估计。傅里叶级数：理论与应用（卡缅涅茨-波多利斯基，1997），乌克兰国家科学院数学研究所论文。数学应用，1998年，20，286-299。（乌克兰文）[16] Serdyuk A.S. 周期函数卷积类的宽度和最佳逼近。《乌克兰数学杂志》，51，第5期（1999年），748-763。https://doi.org/10.1007/BF02591709[17] Serdyuk A.S. 周期函数卷积类中的最佳逼近。函数逼近理论及相关问题。乌克兰国家科学院数学研究所论文。数学应用，2002年，35，172-194。（乌克兰文）[18] Serdyuk A.S. 高光滑性周期函数卷积类的最佳逼近和宽度。《乌克兰数学杂志》，2005年，57（7），1120-1148。https://doi.org/10.1007/s11253-005-0251-2[19] Serdyuk A.S. 一致度量下用傅里叶和逼近解析函数类。《乌克兰数学杂志》，2005年，57（8），1275-1296。https://doi.org/10.1007/s11253-005-0261-0[20] Serdyuk A.S.、Bodenchuk V.V. 泊松积分类的柯尔莫哥洛夫宽度的精确值。《逼近理论杂志》，2013年，173，89-109。https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.05.002[21] Serdyuk A.S.、Sokolenko I.V. 来自[22]的函数的泊松积分类的最佳逼近的渐近行为。《逼近理论杂志》，2011年，163，1692-1706。https://doi.org/10.1016/j.jat.2011.06.008。

_[23] Serdyuk A.S.、Sokolenko I.V. 通过线性方法对（ψ、β）–可微函数类进行一致逼近。函数逼近理论及相关问题，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，基辅，2011年，第8卷（第1期），181–189页。（乌克兰语）[24] Serdyuk A.S.、Sokolenko I.V. 高光滑性周期函数卷积类的最佳一致逼近的渐近估计。《数学科学杂志》2021年，第252卷（第4期），526–540页。https://doi.org/10.1007/s10958-020-05178-1[25] Serdyuk A.S.、Stepanyuk T.A. 一致度量与积分度量下无限可微函数类的最佳逼近估计。《乌克兰数学杂志》2015年，第66卷（第9期），1393–1407页。https://doi.org/10.1007/s11253-015-1134-9[26] Serdyuk A.S.、Stepanyuk T.A. 一致度量下低光滑性周期函数卷积类的最佳逼近及傅里叶和逼近的阶估计。《乌克兰数学杂志》2015年，第66卷（第12期），1862–1882页。https://doi.org/10.1007/s11253-015-1056-6[27] Serdyuk A.S.、Stepanyuk T.A. 广义泊松积分类中的傅里叶和一致逼近。《数学分析》2019年，第45卷（第1期），201–236页。https://doi.org/10.1007/s10476-018-0310-1[28] Shevaldin V.T. 泊松核卷积类的宽度。《数学札记》1992年，第51卷（第6期），611–617页。https://doi.org/10.1007/BF01263308[29] Stechkin S.B. 关于用三角多项式对某些周期函数类进行最佳逼近，《苏联科学院通报，数学系列》1956年，第20卷，643–648页。（俄语）[30] Stepanets A.I.《周期函数的分类与逼近》。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1995年。[31] Stepanets A.I.《逼近理论方法》。乌得勒支，VSP，2005年。[32]Stepanets A.I.、Serdyuk A.S. 周期函数卷积类在 C 和 L度量下宽度的下界。《乌克兰数学杂志》1995年，第47卷（第8期），1271–1282页。https://doi.org/10.1007/BF01057715[33] Sun Yong-sheng，关于用三角多项式对周期可微函数进行最佳逼近。II。《苏联科学院通报，数学系列》1961年，第25卷（第1期），143–152页。（俄语）[34] Temlyakov V.N. 关于无限可微函数类宽度的估计。《数学札记》1990年，第47卷（第5期），155–157页。（俄语）[35] Temlyakov V.N.《周期函数的逼近》，《计算数学分析丛书》，新星科学出版社，纽约州科马克，1993年。[36] Tikhomirov V.M. 逼近理论中的若干问题。逼近理论中的若干问题。莫斯科大学出版社，莫斯科，1976年。（俄语）

联系方式

A.S. Serdyuk 01024，乌克兰，基辅-4，Tereschenkivska街3号
serdyuk@imath.kiev.ua I.V. Sokolenko
01024，乌克兰，基辅-4，Tereschenkivska街3号 sokol@imath.kiev.ua