arXiv:2304.04594v1 [math.FA] 10 Apr 2023

通过其正部映射的次可加性刻画 σ-Dedekind 完备 Riesz 空间

A. B.N´emeth数学与计算机科学学院巴贝s-博尧伊大学，Kog˘alniceanu街 1-3,
RO-400084 克卢日-纳波卡，罗马尼亚 邮箱:
nemab@math.ubbcluj.ro

摘要

实向量空间 X的凸锥 M 和 N上的两个收缩映射 M和 N分别称为互极的，如果 $M+N=I$和 $MN=NM=0$.在本文中证明了，如果锥M 和N 是生成的、 σ-单调完备的，且 M和N 是 σ-单调连续的，那么 M 和 N 的次可加性（分别关于由 M 和 N 导出的序关系）蕴含 M和 N是格锥。(X, M) 和 (X,N) 成为 σ-戴德金完备的 Riesz空间， M和 $-N$ 分别是(X, M) 中的正部映射和负部映射；N 和 $-M$ 分别是 (X, N) 中的正部映射和负部映射。

1. 引言

若欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 由单纯形锥定序，也就是说，该锥由 $\mathbb{R}^m$ 中 m 个线性无关的元素生成，那么这种序就是格序；换言之，对于任意一对 x、 $y\in\mathbb{R}^m$，都存在 $x\vee y=\sup\{x,y\}$ 和 $x\wedge y=\inf\{x,y\}$，且格运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 是连续的。著名的 Youdine 定理 [13] 断言了上述显然命题的逆命题：若 $\mathbb{R}^m$ 配备了格序 $\leq$，且格运算 $\vee$ 和 $\wedge$连续，那么该序的正锥 $\mathrm{K}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{m}}:\ \mathbf{0}\leq\mathbf{x}\}$ 是单纯形锥。其证明远非简单。正是这一点促使人们将 $\mathbb{R}^m$ 中的单纯形锥称为 Youdine 锥。

（所有有限维格锥的分类已在 [5], 中完成，并由此也得到了 Youdine 定理的证明这一特例。）

Youdine 定理的无限维推广毫无意义，因为闭的无限维格锥具有相当多样的几何形态。

因此，我们的方法有所不同：它通过一个单一性质——正部映射的次可加性——来刻画一大类 Riesz 空间。

2. 基本术语

实向量空间 X 中的非空集合 K 称为凸锥，如果

(i) 对所有 $x \in$ K 和 $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty,\quad \lambda x \in$ K，并且如果

(ii) 对所有 x、$y \in$ K，$\quad x + y \in$ K。

如果凸锥 K 满足 K $\cap$(−K) $= \{0\}$，则称其为尖凸锥。
如果凸锥满足 K − K= X，则称其为生成凸锥。
如果 X 是一个拓扑向量空间，则其中的闭、尖生成凸锥称为真凸锥。

由尖凸锥 K 定义的关系 $\leq$ 为：$x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in$ K。特别地，我们有 K $= \{$x $\in$ X : 0 $\leq$ x$\}$。关系 $\leq$ 是序关系，即它具有自反性、传递性和反对称性；它具有平移不变性，即 $x + z \leq y + z, \forall x, y, z \in X$ 满足 $x \leq y$；并且具有数乘不变性，即 $\lambda x \leq \lambda y, \forall x, y \in X$ 满足 $x \leq y$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_+$。

反过来，对于 X 中每个具有数乘不变性、平移不变性和反对称性的序关系 $\leq$，都存在一个尖凸锥 K，定义为 K $= \{$x $\in$ X : 0 $\leq$ x$\}$，并且满足：$x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in$ K。锥 K 称为 $(X, \leq)$ 的正锥。$(X, \leq)$（或 $(X,$ K$)$）称为有序向量空间，简称 o.v.s.；我们也使用记号 $\leq = \leq_K$.

映射 R : $(X, \leq) \to (X, \leq)$ 若 $x \leq y \Rightarrow Rx \leq Ry$. R，则称为保序的；若满足 $R(x + y) \leq Rx + Ry$，则称为次可加的，其中任意 $x, y \in X$。

有序向量空间$(X, \leq)$称为格序的，如果对于每个 $x, y \in X$ 存在 $x \vee y :=$ sup$\{x, y\}$。在这种情况下，正锥 K 称为格锥。

格锥是尖的且生成的。

格序向量空间称为Riesz空间。记 $x^+ = 0 \vee x$ 和$x^- = 0 \vee (-x)$。那么，$x = x^+ - x^-$。 x^+ 称为 x 的正部， x^- 称为 x的负部。映射 $x \to x^+$ 称为正部映射。

备注1设 $(X,$ K$)$是一个Riesz空间。则映射$^+$ 和 $^-$ 的以下性质是显然的（例如参见 *[2], [11]*。）

1. 映射 $^+$ 是幂等的，即$(x^+)^+ = x^+, \forall\, x \in X$。 2. 映射 $^+$ 是次可加的，即 $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+, \forall\, x, y \in X$.3. 若 $x^+ = (-x)^+ = 0 \Rightarrow x = 0$，因为 K 是尖的。 4.$^+$ 是保序的，即 $x \leq y \Rightarrow x^+ \leq y^+$； 5. $x^+ - x^- = x$, $\forall\, x \in X$。 6.$(x^+)^- = (x^-)^+ = 0, \forall\, x \in X.$

如果 X 赋有向量空间拓扑，那么正部映射的连续性等价于其正锥 K 的闭性。

若巴拿赫空间 X 中的闭尖锥 K$\subset X$ 满足：由$x_n \in$ K、 $x_n \to 0$和 $0 \leq y_n \leq x_n$ 可推出 $y_n \to 0.$ ，则称其为正规锥。具有正规正锥的有序巴拿赫空间称为正规空间。

若锥 K 和有序巴拿赫空间 (X, K) 中的每个单调有序有界序列都收敛，则称其为正则。

有限维巴拿赫空间中的每个闭尖凸锥都是正常且正则的。

可分希尔伯特空间中的每个闭正规锥都是正则。（ [3]）

3. 序完备有序向量空间

定义 1 如果有序向量空间 X，$\leq$ 中每个有上界的递增序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都有上确界 $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in X.$，则称其为 σ-单调完备有序向量空间。

如果每个有上界的集合 S（可数集合 S）$\subset X$ 都在 X 中有上确界，则称有序向量空间 $(X, \leq)$ 为戴德金完备（σ-戴德金完备）有序向量空间。

Riesz 空间是 σ-单调完备的，当且仅当它是 σ-Dedekind 完备的 $e.$

有序向量空间的 σ-单调完备性是一种非常宽松的条件。这一概念出现在 Riesz 空间理论中，并与单调收敛定理等相关（见例 4）。此处的有序向量空间都是 Riesz 空间，但在我们的例 1、2、3 中，也有一些算子代数的例子，其中 σ-单调完备的序并非格序（例如参见 $[12]$）。

我　们的主要结果在有序正则巴拿赫空间的背景下也有意义。

例 1 每个正则有序巴拿赫空间 (X, K)，只要其正锥 K 是闭的，就是 σ-单调完备的有序向量空间。事实上，由于 K 是闭的，每个递增且序有界的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 在 X中都收敛到 $a \in X$, $a_n \leq a$, $\forall n \in \mathrm{N}$，且当 $a_n \leq w, \forall n \in \mathrm{N}$ 时 $a \leq w$。

当且仅当它也是 Riesz 空间时，它是 σ-Dedekind 完备的。

示例2实可分希尔伯特空间 H 中的每个闭正规锥 K都是正则的（ *[3]*），因此（H, K）是 σ-单调完备有序向量空间。

示例 3 每个 m维实欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 中的闭凸尖锥K 都是正规锥，因此是正则的，从而 ($\mathbb{R}^m$,K) 是 σ-单调完备的有序向量空间。

示例4 令$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间。用 $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示 X 上 μ-可积实值函数的向量空间。在 X 中，按序关系 $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ $\mu-$几乎处处（μ-a.e.），L 成为一个 Riesz空间（$L, \leq$）。该空间的正锥 K是 X 上 μ-a.e. 非负的 μ-可积函数的集合。

由勒贝格控制收敛定理（例如参见 *[1]*）可知，若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 K 中一个有上界的 $\leq$-递增序列，则 $f_n(x) \to f(x)\mu$-几乎处处成立于 X，$f \in$ K 是集合 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上确界。因此，$(L, \leq)$ 是一个 σ-序完备有序向量空间。

例 5 考虑有序向量空间 $(\mathbb{R}^2, \leq)$，其中 $\leq$ 是字典序，即由.....定义的序关系。

$$y = (y^1, y^2) \leq (x^1, x^2) = x, \Leftrightarrow x^1 > y^1, \ \ or\ x^1 = y^1 \ \ and \ y^2 \leq x^2.$$

$(\mathbb{R}^2, \leq)$ 是一个非 σ-序完备的 Riesz 空间。

事实上，$\{a_n\}_{n=}^{\infty}$ 与 $a_n = (0, n)$ 是一个递增序列，每个 $w = (w^1, w^2)$ $w^1 > 0$ 都是它的上界，但这样的 w 都不可能是最小上界。

4. σ-单调连续映射

定义 2 按照前一节引入的约定，符号 $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示有序向量空间 $(X, \leq)$ 中递增序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上确界。考虑到这一约定，映射 T: $(X, \leq) \to (X, \leq)$ 称为 σ-单调连续映射，若

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} Ta_n = T(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) \tag{1}$$

只要 $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ 存在。该公式隐含地假设 T 在有序集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上是保序的，并且递增序列 $\{Ta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上确界 $T(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n)$ 存在。

例 6 设 $(X, \leq)$ 是一个具有闭正锥的有序正则向量空间。则每个保序连续映射 $T: X \to X$ 都是 σ-单调连续的。

例 7 设 $(X$.K) 是一个 Riesz 空间。用 M 表示该空间的正部映射。我们知道，M（注 1）是保序且幂等的。假设递增序列 $\{a_n\}$ 的上确界 $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ 存在。那么我们有

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} Ma_n = M(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = Ma. \tag{2}$$

事实上，序列 $(Ma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是递增的，并且根据 M 的保序性，元素 Ma 是该序列的一个上界。设 w 是任意满足 $Ma_n \leq w, \forall n$ 的元素。由 M 的保序性和幂等性，以及 $Ma, w \in$ K 这一事实，可得 $Ma_n \leq Ma \leq Mw = w, \forall n \in$N。因此， Ma 是递增序列 $(Ma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的上确界。我们已经证明，Riesz 空间中的正部映射是 σ-单调连续的。

5. 互极回缩在锥体上

定义 3 设 X 为向量空间，0 为其零映射， I 为其恒等映射。映射 M、 N： $X \to X$ 称为互极回缩，当且仅当

(i) $\mathbf{M} := MX$ *and* $\mathbf{N} := NX$ *are convex cones,*

(ii) $M + N = I$,

(iii) $MN = NM = 0$.

记作 the　由 M（分别由 N）诱导的序关系，其中 $\leq_M$（分别为 $\leq_N$）。

约定：关于收缩的任何序理论考量，均以其值域所诱导的序为准。

例如 M 是保序的，如果 $x \leq_M y \Rightarrow Mx \leq_M My$，　N 是次可加的意味着$N(x + y) \leq_N Nx + Ny$，　$\forall x$，　$y \in X$。

我们将称 M 和 N 互为极锥。

例 8 设 $(X,$ K$)$ 是一个 Riesz 空间。那么，牢记备注 1，映射 M 和　N（定义为　$Mx = x^+$、$Nx = -x^-$、$\forall x \in X$）是互极回缩。

我们已经看到（例 7），　M 是 σ-单调连续的。同样的结论也适用于用　N 表示的负部映射。

我们还提到，M $:=$ $MX =$K，　N $:=$ $NX =$ –K，因此 M 和 N 都是生成锥。

为简便起见，我们将由格锥定义的序关系下的正部映射称为格收缩映射。

例 9 设 K 是可分实希尔伯特空间 $(H, \langle,\rangle)$ 中的闭凸锥。那么 K$^\circ$　定义为

$$\mathbf{K}^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle \leq \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{K}\},$$

称为 K 的极锥。极锥是一个闭凸锥。

令　P_K ：　$H \to$ K 和　P_{K° ：　$H \to$ K$^\circ$ 分别为投影到闭凸锥 K 和 K$^\circ$ 上的映射，即，定义为

$$P_K x = \operatorname{argmin}\{\|x - y\| : y \in \mathbf{K}\} \;\; and \;\; \mathbf{P}_{\mathbf{K}^\circ}\mathbf{x} = \operatorname{argmin}\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in \mathbf{K}^\circ\}.$$

Moreau 定理　*[4]* 断言，　P_K 和 P_{K° 是互极回缩。

例 10 设　X 为巴拿赫空间，K $\subset X$ 为真锥，且　$y \in$ int K。记φ 为 K 关于其内点　y的闵可夫斯基泛函。则由下式定义的映射

$$Mx = \varphi(x)y, \quad and \quad Nx = x - \varphi(x)y, \forall\, x \in X$$

是互极回缩　*[10]*。

6. 主要结果

对于向量空间　X　上的一般映射　Q、　R、　S：　$X \to X$，我们采用以下约定：

$$(Q + R)S = QS + RS, \;\; \text{but} \;\; Q(R + S) = QS + RS \;\; \text{only if} \;\; Q \;\; \text{is additive} \; .$$

命题 1 如果 M 和 N 是互极回缩，则

(i) M和 N是幂等的，即 $M^2 = M$和 $N^2 = N$。

(ii) $\mathbf{M} = \{x \in X : Nx = 0\}$ *and* $\mathbf{N} = \{x \in X : Mx = 0\}$.

(iii) 如果 X 是拓扑向量空间，且其中一个收缩映射是连续的，那么另一个也连续，并且凸锥 M 和 N 是闭的。

证明。
(i) 由于 $M =(I - N)$，我们有 $M^2 =(I - N)M = M - NM = M$.断言 (ii) 和 (iii) 也显然成立。

□

命题2 如果对于互极的次可加回缩 M 和 N，它们的值域 M 和 N 分别都是生成锥，则

$$\mathbf{N} = -\mathbf{M}.$$

证明。我们首先看到

$$\{Mx + My - M(x + y) : x, y \in X\} = \mathbf{M} \tag{3}$$

and

$$\{Nx + Ny - N(x + y) : x, y \in X\} = \mathbf{N}. \tag{4}$$

任取 $x \in$M。由于 N 是生成的，存在元素 $u, v \in$ N，使得 $x = u - v$。因此

$$x = Mx = Mx + Mv - M(x + v),$$

因为 $v, x + v \in$ N。这证明了 (3)，由对称性也证明了 (4)。
最后，我们有

$$\{Nx + Ny - N(x + y) : x, y \in X\} = \{(I - M)x + (I - M)y - (I - M)(x + y) : x, y \in X\} = \\ -\{Mx + My - M(x + y) : x, y \in X\},$$

它与 (3) 和 (4) 一起证明了我们的结论。

□

注 2 值得注意的是，对于互极回缩 M和 N，条件 N $= -$M 通过公式 (5) 意味着其中一个收缩映射的次可加性蕴含另一个收缩映射的次可加性。

命题 3 设 M 和 N 是互极的次可加收缩映射，其生成锥分别为 M 和 N。那么它们也具有保序性。

证明。我们证明 M 的保序性。

任取 $v \in \mathbf{N}$ 和 $x \in X$。

Then

$$Mx \leq_M M(x-v) + Mv = M(x-v).$$

因此

$$Mx \leq_M My, \text{ with } y = x - v, \text{ or whenever } x - y \in \mathbf{N}.$$

由命题 2，$\mathbf{N} = -\mathbf{M}$

$$Mx \leq_M My, \text{ whenever } x - y \in -\mathbf{M}, \text{ or whenever } \mathbf{x} \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{y}.$$

□

命题 4 设 M 和 N 是互极的 σ-序连续收缩映射，其值域分别为生成的 σ-序完备空间 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$。若 M 是 $\leq_M$-保序的（N是 $\leq_N$-保序的），则 $\mathbf{M}$（$\mathbf{N}$）是一个格锥。

证明。

设 M 是 $\leq_M$-保序的。在此证明中，我们令 $\leq = \leq_M$，并假设此证明中的所有序论考量均相对于此关系。

对于任意固定的 $y \in X$，我们定义 M_y： $X \to X$，由 $M_y x = y + M(x-y)$给出。由于 M 是 σ-序连续且保序的， M_y 也同样是 σ-序连续且保序的。此外，$y \leq M_y x$。

我们将证明$\mathbf{M}$ 是一个格锥。也就是说，对于任意两个元素u 和 v，存在$\sup\{u, v\} \in X$。如果 u 和 v 是可比较的，则该陈述是显然的。假设它们不可比较。首先我们注意到集合 $\{u, v\}$ 有一个上界。事实上，由于 $\mathbf{M}$是生成的，存在 u_1、 u_2、 v_1、 $v_2 \in \mathbf{M}$，使得 $u = u_1 - u_2$和 $v = v_1 - v_2$。因此， $u_1 + v_1$是集合 $\{u, v\}$的一个上界。设 w是集合 $\{u, v\}$的任意上界；也就是说，是$(u + \mathbf{M}) \cap (\mathbf{v} + \mathbf{M})$ 的任意元素。映射 M_u 和 M_v 是保序的。此外，$M_u w = u + M(w - u) = u + (w - u) = w$，类似地 $M_v w = w$。考虑映射 $G = M_u \circ M_v$ 和 $H = M_v \circ M_u$。它们是保序的，因为 M_u 和 M_v 是保序的。此外， $Gw = Hw = w$。

记 $v_n = H^n v$、 $u_1 = M_u v$ 和 $u_n = G^{n-1} u_1$。我们有 $u \leq M_u v = u_1$。此外，$u \leq M_u v$ 蕴含 $v \leq M_v u \leq M_v \circ M_u v = v_1$，因此有 $u_1 = M_u v \leq M_u v_1$，或等价地，$u_1 \leq M_u \circ M_v \circ M_u v = G u_1 = u_2$。注意到 G、 H 是保序的，$Gw = Hw = w$，关系式

$$v \leq v_1 \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq w$$

and

$$u \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq w$$

可通过数学归纳法加以验证。我们进一步有

$$\begin{aligned} v_n = H^n v = (M_v \circ M_u)^n v = M_v \circ (M_u \circ M_v)^{n-1} \circ M_u v = M_v \circ G^{n-1} u_1 \\ = M_v u_n \end{aligned} \tag{6}$$

and

$$u_{n+1} = Gu_n = M_u \circ M_v u_n = M_u v_n. \tag{7}$$

由于序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 递增，且分别以上界 w、$u \le u_n \le w$ 和 $v \le v_n \le w$ 为界。由 M 的 σ-序完备性以及 M_u 和 M_v 的 σ-序连续性和保序性，我们有

$$u^* = \bigvee_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \bigvee_{n=1}^{\infty} M_u v_n = M_u(\bigvee_{n=1}^{\infty} v_n) = M_u v^* \quad \text{and} \tag{8}$$

$$v^* = \bigvee_{n=1}^{\infty} v_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} M_v u_n = M_v(\bigvee_{n=1}^{\infty} u_n) = M_v u^* \tag{9}$$

使得

$$u \le u^* \le w \quad \text{and} \quad v \le v^* \le w. \tag{10}$$

因此，我们有 $v^* - u^* + u^* - v = M(u^* - v)$ 和 $u^* - v^* + v^* - u = M(v^* - u)$，或者等价地，$(I - M)a = Na = c \in$N 和 $(I - M)b = Nb = -c$，其中 $a = u^* - v$、$b = v^* - u$ 和 $c = u^* - v^*$。因此，我们必须有 $u^* - v^* = c = 0$. 因此 $u^* = v^* = \sup\{u, v\}$。□

我们提醒一下，格锥所诱导的序关系的正部映射称为格收缩映射。

命题 5 假设 M 和 N 是互极回缩，其值域分别为 M和 N。若N $=$ –M，M 是格锥，并且 M 是 $\le_M$-保序的，则 M 是 M 的格收缩映射。

证明。令 L 为格锥 M的格收缩映射。则 L 是 $\le_M$-保序的，并且对任意 $x \in X$都有 $x \le_M Lx \in$ M。由于 M 是 $\le_M$-保序的，我们有

$$Mx \le_M M(Lx) = Lx, \ \forall \ x \in X. \tag{11}$$

对任意 $x \in X$，$x - Mx = Nx \in$N $=$ –M，因此 $x \le_M Mx$。由 L的 $\le_M$-保序性可得

$$Lx \le_M L(Mx) = Mx, \forall x \in X,$$

结合 (11)，即可证明该引理。 □

综合前述命题的结果，我们得到以下结论

定理1 设 M 和 N 是互极回缩，设凸锥M $= Mx$ 和N $= NX$ 是 σ-单调完备且生成的凸锥，并设 M 和 N 是σ-单调连续的。则 M 和 N 的次可加性意味着 M和 N是格锥，$(X,$ M)和 $(X,$ N) 变为 σ-单调完备的里斯空间，M 和 $-N$分别是 $(X,$M) 中的正部映射和负部映射；N 和 $-M$ 分别是 $(X,$ N) 中的正部映射和负部映射。

证明。

在整个证明过程中，我们将在以下假设下进行： $M: X \to X$ 和$N: X \to X$ 是值域为凸锥 M $= MX$ 和 N $=NX$的互极收缩映射。于是：1. M和 N是幂等的，M $= \{x \in X: Nx = 0\}$，N $=$b $\{x \in X: Mx = 0\}$，由命题 1 得出。2. 如果 M 和 N 是次可加的，且 M 和 N 是生成的，那么由命题 2 可得 N $=$ –M。3. 如果 N $=$ – M 且 M 和 N 是次可加的，那么由命题 3 可知它们是保序的。4. 如果 M (N) 是 σ-单调完备的，且 M (N) 是 σ-单调连续的，并且 N $=$ –M，那么由命题 4 可知 M (N) 是格锥。5. 如果 N $=$ –M 且 M (N) 是格锥，那么由命题 5 可知 M (N) 是格收缩映射。

由此还可得，(X, M) ((X, N)) 是一个 Riesz 空间，其中 M (N) 是正部映射， $-N$ ($-M$) 是负部映射。

□

由于一般 Riesz 空间中正部映射的 σ-单调序连续性以及负部映射的负号（参见例 7 和例 8），又由于格锥是生成锥，因此我们得出，这些结果与上述定理表明，正部映射的次可加性这一性质刻画了 σ-Dedekind 完备 Riesz 空间。（另参见注 2。）

7. 备注与评论

1. 上述定理中的条件——M 和 N 都是生成锥（命题 2、3 和 5 中用到了这一条件）——是必要的。

事实上，例 10 中的互极回缩 M 和 N 都是次可加的（ [10]），但 M 是一维的，因此若 dim $X \geq 2$ ，它就不是生成锥，因而不是格锥；N 是真锥，因此一般而言它不是格锥。

2. 对于希尔伯特空间 H 中在闭锥 K 及其极锥 K◦ 上的度量投影 P_K 和 P_{K°（例 9），其中一个的保序性意味着另一个的次可加性，反之亦然。（ [7]）。在 $H = \mathbb{R}^m$ 的情形下，K 和 K◦ 都是特殊形式的单纯形锥。在这种情形下， P_K 和 P_{K° 均具有次可加性，当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^m_+$ 中某个笛卡尔参考系的正正交象限 $\mathbb{R}^m$。（事实上，它们分别是 $\mathbb{R}^m_+$ 和 $-\mathbb{R}^m_+$ 上的格映射。）

3.唯一使用 σ 完备性和 σ-序连续性的地方是命题4。该命题的证明沿用了S. Z. N´emeth在 [6]中定理的证明，并对其进行了推广。（文献中首次使用了凸锥上收缩映射的抽象概念。）

4.本篇短文的想法源自对 [8], [9] 和 [10]中所谓非对称向量范数的一些研究。

参考文献

[1] H. Bauer. 测度与积分理论。Walter de Gruyter，柏林，2001。[2] W.A.J. Luxemburg 和 A.C. Zaanen。《里斯空间》。North Holland，1971。[3] C. W. McArthur. 哪些空间中的每个闭正规锥都是正则的? 《爱丁堡数学学会会刊》，17:111–125，1970。[4] J. J. Moreau. D ´ecomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cˆones mutuellement polaires. 科学院报告，255:238–240，1962。[5] A. B. N´emeth. 有限维格锥的面结构。《潘诺尼亚数学》15/2:175-198，2004。[6] S. Z. N´emeth. 希尔伯特空间中的保序回缩锥。《非线性分析》73，495-499，2010。[7] S. Z. N´emeth. 凸锥上的度量投影与其对偶锥上的度量投影之间的对偶性。《数学分析与应用杂志》392，171-t78，2012。[8] A. B. N´emeth 和 S. Z. N´emeth. 锥上的次可加回缩与非对称向量范数。arXiv 2005 10508，2020。[9] A. B. N´emeth. 凸锥上的互极回缩。arXiv 2012 04530v1，2020。[10] A. B. N´emeth. 真非对称范数的几何。arXiv 2101 05680v1，2021。[11] H. H. Schaefer. 巴拿赫格与正算子。施普林格出版社，1974。[12] J. D. M. Wright. 取值于偏序向量空间的测度。《伦敦数学学会会刊》，25: 675-688，1972。[13] A. Youdine. Solution des deux probl `emes de la the ´orie des espaces semi-ordonn ´es. Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad´emie des Sciences de l'URSS，23:418–422，1939。