arXiv:2304.04621v1 [math.NT] 10 Apr 2023

αn^θ的泊松对相关

MAKSYM RADZIWI-L-L 和 ANDREI SHUBIN

ABSTRACT. 我们证明，形如 $\alpha n^\theta \pmod 1$ 的数列在 $\alpha > 0$ 和 $0 < \theta < \frac{43}{117} = \frac{1}{3} + 0.0341\ldots$ 时具有泊松对相关。这改进了 Lutsko、Sourmelidis 和 Technau 的先前结果；他们证明了在 $\alpha > 0$ 和 $0 < \theta < \frac{14}{41} = \frac{1}{3} + 0.0081\ldots$ 时成立。

我们利用一种放大方法以及 Bombieri-Iwaniec 双重大筛，将证明泊松对相关的问题转化为一个计数问题。随后，我们借助 Robert-Sargos 和（Fouvry-Iwaniec-）Cao-Zhai 的界，以非最优方式解决该计数问题。指数 $\theta = \frac{2}{5}$ 是我们的方法所能达到的极限。

1. INTRODUCTION

实数 -值序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 若对任意 $0 < a < b <$ 都是模 *1* 等分布 1,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \#\big\{n \leqslant N : \{x_n\} \in [a, b]\big\} = b - a.$$

等分布是序列最基本的性质之一，体现了其伪随机行为。Weyl [23]证明，序列 x_n 模 1 等分布等价于证明指数和中的抵消

$$\sum_{n<N} e(kx_n) = o(N),$$

对每个固定整数 $k \neq 0$ 均成立。随后，Weyl 证明，对于所有无理数 α 和 $d \geqslant 1$ 阶整数， αn^d 都是等分布的。Fejer 和 Csillag （ [11, 推论 2.1],[5]）在 $d > 0$ 不是整数且 α 非零时，证明了同一性质。

等分布是一种“宏观”性质：它只提供关于大小为 $\asymp 1$ 的区间内点数的信息。一个更精细的问题是考察“微观”性质，也就是尺度为 $\asymp \frac{1}{N}$ 时的分布性质。该尺度下最常见的统计量是间隙分布，它描述间距 $N(y_{k+1}-y_k)$，其中$y_1 < y_2 < \ldots < y_N$ 是 x_1、.....、 $x_N \in [0, 1]$ 的一个排序。

很自然地可以预期，序列 αn^θ （满足 $\theta \notin \mathbb{Z}$ 且 $\alpha \neq 0$ ）的分布如同模 1 意义下的随机点集。这引出了以下猜想。

猜想 1. 设 $\alpha \neq 0$ 和 $\theta > 0$ 满足 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 和 $\theta \notin \mathbb{Z}$。令 $y_1^{(N)} < \ldots < y_N^{(N)}$ 表示点 αn^θ （模 1）的一种阶，其中 $n < N$。那么，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\Big\{ i < N : N(y_{i+1}^{(N)} - y_i^{(N)}) \in (a,b) \Big\} \to \int_a^b e^{-t} dt.$$

我们称此时的间隙分布为泊松分布。

我们排除$\theta = \frac{1}{2}$ 这种情况，因为 Elkies-McMullen [7] 已经证明，此时的间隙分布并非泊松分布。这也是目前唯一已知间隙分布存在的情况。两点相关是一种比间隙分布更弱的统计量。认为序列 αn^θ 表现得像随机序列，这一信念引出了关于两点相关的以下猜想。

猜想 2. 设 $\alpha \neq 0$ 和 $\theta > 0$ 满足$\theta \neq \frac{1}{2}$ 和 $\theta \notin \mathbb{Z}$。那么，对于任意 $s > 0$,

$$R_2\Big([-s,s], \alpha n^\theta, N\Big) := \frac{1}{N} \cdot \#\Big\{ 1 \leqslant n \neq m \leqslant N : N\|\alpha n^\theta - \alpha m^\theta\| \leqslant s \Big\} \to 2s$$

当 $N \to \infty$ 时，且其中 $\|x\|$ 表示 x 到最近整数的距离。只要这一条件成立，我们就称序列 αn^θ 具有泊松对相关（*PPC*）。

可以将两点相关看作间距分布的二阶矩。特别地，如果所有更高阶 m-相关性都存在且服从泊松分布，则猜想1将随之成立（见 [12, 附录 A]）。

我们现在简要总结关于猜想2的研究现状。大致而言，结果分为两类：允许对 α 或 θ进行平均的度量结果，或对特定 α 和 θ有效的确定性结果。就度量结果而言，对于形如 αn^d 且 $d \geqslant 2$ [9, 15, 18, 19] 为整数的序列，几乎所有 α都已证明具有 PPC。此外，Heath-Brown 提供了一种算法，用于在 [9]中构造此类 α的一个稠密集合。$d = 2$ 的情形尤其受到关注，这是由于它与量子混沌的联系（见 [3, 17]）。对于形如 αn^θ 且具有非整数固定$\theta > 0$ 的序列，继 Aistleitner、El-Baz 和 Munsch [1],以及 Rudnick 和 Technau [20]之后，已知几乎所有 α 都具有 PPC。另一方面，在 [22] 中，Technau和 Yesha 证明，对于几乎所有 $\theta > 7$，序列 n^θ 具有 PPC。

对于特定的 θ 和 α，能够得到的确定性结果更加难寻。对于$\theta = \frac{1}{2}$，El-Baz、Marklof和 Vinogradov [6] 证明了序列（$\sqrt{n}$）$_{n\neq\square}$ 具有 PPC。最后，Lutsko、Sourmelidis 和 Technau [14] 最近验证了所有形如 αn^θ的序列都具有 PPC，其中 $\alpha > 0$和 $0 < \theta < \frac{14}{41} = \frac{1}{3} + 0.008\ldots$。超越$\frac{1}{3}$需要对某些指数和给出非平凡界。本文的目标是通过运用强大的指数和技术来扩展 θ 的范围。

定理 1.1。 序列 αn^θ 对所有 $\alpha > 0$和 $0 < \theta < \frac{43}{117} = \frac{1}{3} + 0.03418\ldots$都具有泊松对相关。

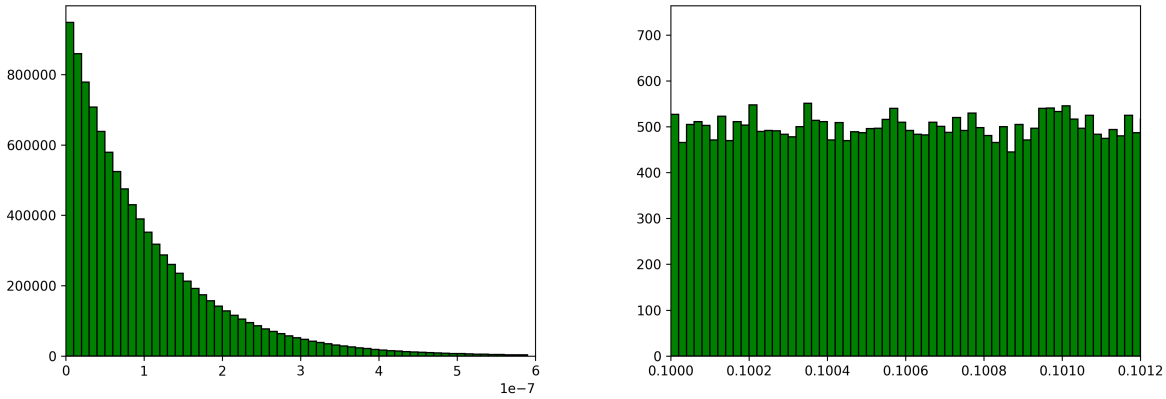


FIGURE 1. 序列 $n^{1/3}$ 的间隙和间距分布，步长为 $\frac{0.1}{N}$， $N = 10^7$ 表示间隙， $N = 5000$ 表示间距。

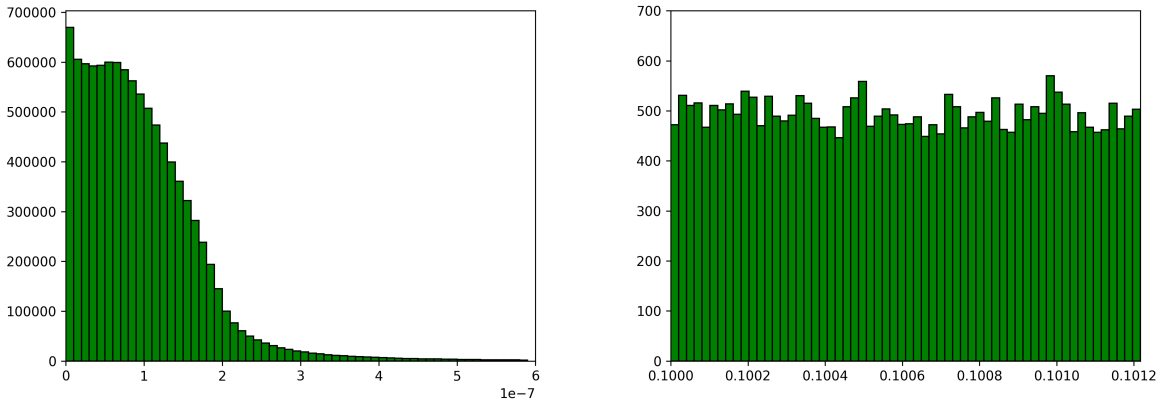


FIGURE 2. 序列的间隙和间距分布$n^{1/2}$，步长为 $\frac{0.1}{N}$， $N = 10^7$ 表示间隙，而 $N = 5000$，$\overline{n} \neq \square$表示间距。Elkies 和 McMullen [7] 证明了这种情况下的间隙分布不是泊松分布，而 El-Baz、Marklof 和 Vinogradov [6] 则表明其两点相关函数是泊松的。

1.1. 化归为指数和及证明概要。我们按标准方式定义两点相关函数的积分版本：

$$\tilde{R}_2\big(f, \{x_n\}, N\big) := \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant N} f\big(N(x_i - x_j + k)\big). \tag{1.1}$$

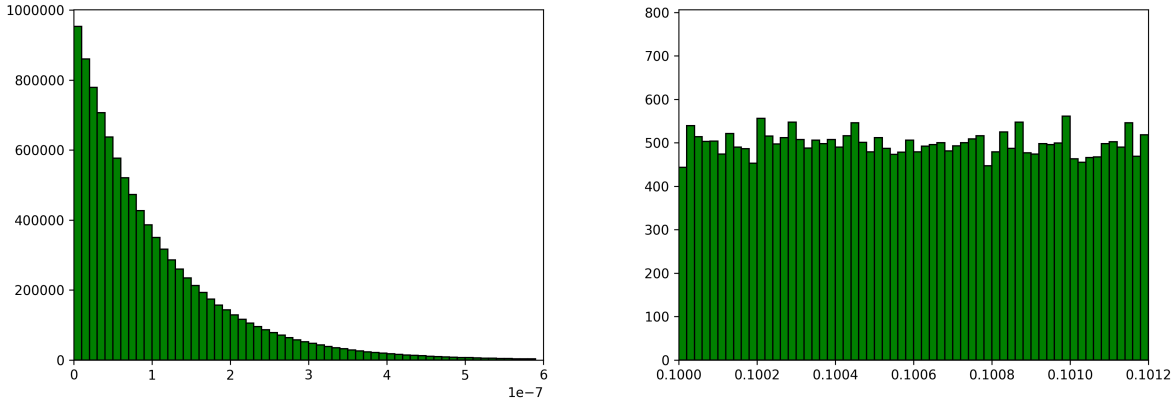


FIGURE 3. 序列 $n^{2/3}$ 的间隙和间距分布，步长为 $\frac{0.1}{N}$， $N = 10^7$ 对于间隙，以及 $N = 5000$ 对于间距。

条件 $\|x_i - x_j\| \leqslant \frac{s}{N}$ 等价于对某个 $k \in \mathbb{Z}$， $N(x_i - x_j + k) \in [-s, s]$。当 N 相对于 s 变得很大时，这样的 k 只有一个。于是

$$\lim_{N\to+\infty} R_2\big([-s,s],\{x_n\},N\big) = \lim_{N\to+\infty} \tilde{R}_2\big(\mathbb{1}_{[-s,s]},\{x_n\},N\big).$$

对 $\mathbb{1}_{[-s,s]}$ 进行平滑处理并展开为傅里叶级数后，关于αn^θ 的 PPC 问题便归结为关于指数和的问题。下面对此进行陈述。

命题 1.1。 设定 $\alpha > 0$ 和 $\theta > 0$ 。假设对于每个偶数光滑紧支集函数 f 以及每个 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2}{N^2} \sum_{0<|k|\leqslant N^{1+\varepsilon}} \widehat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e(\alpha k y^\theta)\Big|^2 = f(0).$$

那么，序列 αn^θ 具有泊松对相关（*PPC*）。

因此，猜想2 归结为证明某些指数和在平均意义下具有平方根消去。

由于相位 $\alpha k y^\theta$ 的增长率为 $\ll \alpha N^{1+\theta+\varepsilon}$，其一阶导数远小于 N。因此，一个自然的第一步是分别对关于 k、 y_1 和 y_2 的三个求和应用泊松求和公式，因为这会将每个求和的长度缩短为 N^θ。以下命题将这一步形式化。

命题1.2。 令 $\alpha, \theta, \varepsilon$ 为实数，使得 $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $3\varepsilon < \theta < 1-3\varepsilon$，并对于 $K, Y_1, Y_2 > 0$ 定义子集 $\mathcal{N}(K, Y_1, Y_2)$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(K,Y_1,Y_2) := \big\{\eta : \eta = m_1^{-\theta/(1-\theta)} - m_2^{-\theta/(1-\theta)},\ \textit{where}\\ \alpha\theta K(2Y_1)^{\theta-1} \leqslant m_1 < 2\alpha\theta K Y_1^{\theta-1};\\ \alpha\theta K(2Y_2)^{\theta-1} \leqslant m_2 < 2\alpha\theta K Y_2^{\theta-1};\\ m_1 < m_2\big\}.\end{aligned}$$

那么我们有

$$\frac{2}{N^2}\sum_{k\leqslant N^{1+\varepsilon}} \hat{f}\big(\frac{k}{N}\big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e\big(\alpha k y^{\theta}\big)\Big|^2 = f(0) + O\Big(N^{-\theta/2+\varepsilon/2}\log N + N^{-1/4+\theta/4+3\varepsilon/4}\log N + S(N)\Big), \tag{1.2}$$

其中

$$S(N) := \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K\leqslant N^{1+\varepsilon}\\ dyadic}}\sum_{\substack{Y_1,Y_2\leqslant N\\ dyadic}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\max_{K\leqslant\tilde{K}\leqslant 2K}\big|\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2)\big|, \tag{1.3}$$

$$\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2) := \sum_{\eta\in\mathcal{N}(K,Y_1,Y_2)}\Big(\frac{1}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)}\sum_{L\leqslant\ell<\tilde{L}}\frac{c_1}{\sqrt{\eta}}\Big(\frac{\ell}{\eta}\Big)^{1/(2\theta)-1} e\big(c_2\ell^{1/\theta}\eta^{1-1/\theta}\big),$$

$$L = \frac{c_3\eta}{1-\theta}K_1^{\theta/(1-\theta)},\qquad \tilde{L} = \frac{c_3\eta}{1-\theta}K_2^{\theta/(1-\theta)},\qquad c_3 = (\alpha\theta)^{1/(1-\theta)}\Big(\frac{1}{\theta}-1\Big),$$
$$c_1 = \frac{1-\theta}{\sqrt{c_3\theta}}\Big(\frac{1-\theta}{c_3}\Big)^{1/(2\theta)-1},\qquad c_2 = -\theta\Big(\frac{1-\theta}{c_3}\Big)^{1/\theta-1},$$

$$K_1 := \max\Big(K, \frac{m_1}{2\alpha\theta Y_1^{\theta-1}}, \frac{m_2}{2\alpha\theta Y_2^{\theta-1}}\Big), \tag{1.4}$$

$$K_2 := \min\Big(\tilde{K}, \frac{m_1}{\alpha\theta(2Y_1)^{\theta-1}}, \frac{m_2}{\alpha\theta(2Y_2)^{\theta-1}}\Big). \tag{1.5}$$

（（1.2）中的误差项的隐含常数取决于 f、 α、 θ 和 ε。

类似的变换曾用于 [14]。命题 1.2的一个应用，结合 $\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2)$ 对 $|S(K,Y_1,Y_2)|$ 右侧的平凡上界，可在范围 $\varepsilon < \theta < \frac{1}{3} - \varepsilon$内得到定理1.1 。因此，若要超出$1/3$，就需要对 $S(N)$ 给出非平凡界。顺便指出，这样的非平凡界并不总是可能的；例如，对于 $\alpha = 1$ 和 $\theta \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots\}$，我们有 $S(N) \gg 1$。

作为初步近似，

$$S(N) \approx N^{-1/2-3\theta/2} \sum_{\eta \in \mathcal{N}} \sum_{\ell \sim N^\theta} e\Big(\ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta}\Big)$$

其中

$$\mathcal{N} := \Big\{ m_1, m_2 \sim N^\theta : m_1^{-\theta/(1-\theta)} - m_2^{-\theta/(1-\theta)} \Big\}.$$

为便于说明，我们还可以假设 $\mathcal{N}$ 的元素处于“通常位置”，因而大小为 $\asymp N^{-\theta^2/(1-\theta)}$。给定 $\eta \in \mathcal{N}$，我们令 $\widetilde{\eta} := \eta N^{\theta^2/(1-\theta)}$，使得对于通常的 $\eta \in \mathcal{N}$，我们有 $|\widetilde{\eta}| \asymp 1$。同样地，对于 $\ell \sim N^\theta$，我们记作 $\ell := \ell/N^\theta$，从而有 $|\ell| \asymp 1$。为了界定 $S(N)$，我们应用 Hölder 不等式。

$$S(N) \ll N^{-1/2-3\theta/2} \Big(\#\mathcal{N}\Big)^{1-1/k} \cdot \Big(\sum_{\eta \in \mathcal{N}} \Big| \sum_{\ell \sim N^\theta} e\Big(\ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta}\Big)\Big|^k \Big)^{1/k}.$$

我们注意到，相位的大小为 $X := N^{1+\theta}$。使用双重大筛法，我们得到以下界，

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in \mathcal{N}} \Big| \sum_{\ell \sim N^\theta} e\Big(\ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta}\Big)\Big|^k & \\ \ll X^{1/2} \cdot \Big(\sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{N}} \mathbf{1}\Big(\Big|\widetilde{\eta}_1^{1-1/\theta} - \widetilde{\eta}_2^{1-1/\theta}\Big| \leqslant \frac{1}{X}\Big)\Big)^{1/2} & \cdot \\ \Big(\sum_{\ell_1, \ldots, \ell_{2k} \sim N^\theta} \mathbf{1}\Big(\Big|\widetilde{\ell}_1 + \ldots - \widetilde{\ell}_{2k}\Big| \leqslant \frac{1}{X}\Big)\Big)^{1/2}. & \end{aligned}$$

在最佳情况下，指示函数中每个事件的概率都是 $1/X$。注意排除对角线项后，在最佳情况下可得到如下界限，

$$\sum_{\eta \in \mathcal{N}} \Big| \sum_{\ell \sim N^\theta} e\Big(\ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta}\Big)\Big|^k \ll N^{(1+\theta)/2} \Big(N^{2\theta} + \frac{N^{4\theta}}{N^{1+\theta}}\Big)^{1/2} \cdot \Big(N^{k\theta} + \frac{N^{2k\theta}}{N^{1+\theta}}\Big)^{1/2}.$$

如果 θ_k 是这种方法所能得到的最优指数，那么我们会得到 $\theta_2 = \frac{1}{3}$、$\theta_3 = \theta_4 = \frac{2}{5}$、$\theta_5 = \frac{5}{13}$、$\theta_6 = \frac{3}{8}$，其后是更小的指数。因此，最有利的指数选择是 $k = 4$。遗憾的是，我们无法直接解决对所有大小为 $\approx N^\theta$ 的 $(\ell_1, \ldots\ldots, \ell_8)$ 八元组进行计数的问题，使得，

$$|\ell_1^{1/\theta} + \ldots - \ell_8^{1/\theta}| \leqslant N^{-\theta}.$$

相反，我们对该问题稍作扰动，并应用两次范德科普特差分，从而得到，

$$\sum_{\eta\in\mathcal{N}}\Big|\sum_{\ell\sim N^{\theta}}e(\ell^{1/\theta}\eta^{1-1/\theta})\Big|^4\ll$$
$$\frac{N^{4\theta}\#\mathcal{N}}{H_1^2}+\frac{N^{4\theta}\#\mathcal{N}}{H_2}+\frac{N^{3\theta}}{H_1H_2}\sum_{\eta\in\mathcal{N}}\sum_{\substack{0<|h_1|\leqslant H_1\\0<|h_2|\leqslant H_2}}\gamma(h_1,h_2)\sum_{\ell\sim N^{\theta}}e\Big(\eta^{1-1/\theta}\ t(\ell,h_1,h_2)\Big)$$

其中

$$t(\ell,h_1,h_2):=((\ell+h_1+h_2)^{1/\theta}-(\ell+h_2)^{1/\theta})-((\ell+h_1)^{1/\theta}-\ell^{1/\theta}).$$

现在我们应用双重大筛法，从而得到以下界

$$\sum_{\eta\in\mathcal{N}}\sum_{\substack{0<|h_1|\leqslant H_1\\0<|h_2|\leqslant H_2}}\gamma(h_1,h_2)\sum_{\ell\sim N^{\theta}}e\Big(\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1,h_2)\Big)\ll X^{1/2}\mathcal{B}_1^{1/2}\mathcal{B}_2^{1/2}$$

其中 $X:=N^{1-\theta}H_1H_2$ 且

$$\mathcal{B}_1:=\sum_{\eta_1,\eta_2\in\mathcal{N}}\mathbf{1}\Big(|\widetilde{\eta}_1^{1-1/\theta}-\widetilde{\eta}_2^{1-1/\theta}|\leqslant\frac{1}{X}\Big)$$

and

$$\mathcal{B}_2:=\sum_{\substack{0<|h_1|,|h_1'|\leqslant H_1\\0<|h_2|,|h_2'|\leqslant H_2}}\sum_{\ell,\ell'\sim N^{\theta}}\mathbf{1}\Big(\Big|\widetilde{t}(\ell,h_1,h_2)-\widetilde{t}(\ell',h_1',h_2')\Big|\leqslant\frac{1}{X}\Big)$$

~其中，与之前一样， $t(\ell,h_1,h_2)$表示 $t(\ell,h_1,h_2)$的一个经过适当归一化的版本，使得$|t(\ell,h_1,h_2)|\asymp 1$。我们利用泰勒展开以及 Robert-Sargos 的界 [16], 来估计 $\mathcal{B}_1$，该界对满足以下条件、大小为 M 的四元组 (m_1,m_2,m_3,m_4) 的数量给出了最优界：

$$|m_1^{\alpha}+m_2^{\alpha}-m_3^{\alpha}-m_4^{\alpha}|\leqslant\delta.$$

接下来，我们利用 $\mathcal{B}_2$ 曹和翟的结果对其进行估计 [4]。“平移变量”的此类界可追溯至 Fouvry-Iwaniec 的工作 [8]，之后 Liu 对其进行了改进 [13]，Sargos-Wu 也作出了改进 [21]。鉴于曹-翟界的复杂性（参见引理4.4），我们不在此陈述其精确界。只需指出，代入所有这些界后，我们可以适当地选取 H_1 和H_2，从而得到以下主要技术命题：

命题 1.3. 设 α，ε，$\mathcal{N}$和 $S(N)$ 如命题 *1.2*所述，并设 θ满足 $3\varepsilon<\theta<\frac{43}{117}-5\varepsilon$。则有

$$S(N)=o(1)\qquad when\ N\to+\infty,$$

其中隐含常数取决于 α、θ 和 ε。

定理1.1 显然可由命题1.1、1.2 和1.3得出。我们在第1.1 节证明命题2。随后，我们在第1.2 节证明命题3，并在第1.3节证明命题4。

1.2. **Not化**。我们使用实特征 $e(x) := e^{2\pi ix}$ 的标准记号。

关系 $f(x) \ll g(x)$和 $f(x) = O(g(x))$表示，对于一个固定的数 $C > 0$ 以及所有足够大的 x， $|f(x)| \leqslant Cg(x)$。符号 $\ll_\varepsilon$ 和 O_ε 表示常数 C 可能取决于参数 ε。关系 $f(x) = o(g(x))$ 对于$g(x) > 0$表示 $f(x)/g(x) \to 0$，当 $x \to +\infty$ 时。关系 $f(x) \asymp g(x)$ 表示$f(x) \ll g(x) \ll f(x)$。最后，关系 $f(x) \sim g(x)$ 表示 $f(x)/g(x) \to 1$，当$x \to +\infty$时。

为简洁起见，通常不注明对二进区间求和的上下限，例如$\sum_{K、Y_1、Y_2、R}$。

1.3. **致谢**。 第一作者获得了 NSF 项目 DMS-1902063 的资助。第二作者感谢奥地利科学基金 FWF（I4945-N）提供的支持。第二作者还感谢 Christoph Aistleitner、Tim Browning 以及他们研究团队的成员，在他短期访问期间进行了有益的交流。

2. Reduction to exponential sums

本节证明命题 1.1。存在一列 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 函数f_j^+ 以及 f_j^-，使得 $f_j^- \leqslant \mathbb{1}_{[-s,s]} \leqslant f_j^+$ 对所有 j,

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f_j^+(x) - f_j^-(x)\big)dx \to 0$$

当 $j \to +\infty$ 时，ˆ 且 $f_j^\pm(x) \ll x^{-A}$ 对任意大的 $A > 0$成立。于是，为证明定理 1.1，只需证明对于任意 $f \in C_c^\infty(R)$，都有

$$\tilde{R}_2\big(f, \{\alpha n^\theta\}, N\big) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

when $N \to +\infty$. 对 $k \in \mathbb{Z}$ 的求和应用泊松求和公式，我们得到 n

$$\tilde{R}_2\big(f, \{\alpha n^\theta\}, N\big) = \frac{1}{N^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) \sum_{1 \leqslant y_1 \neq y_2 \leqslant N} e\big(\alpha k(y_1^\theta - y_2^\theta)\big).$$

移去项 $k = 0$ 后，我们得到

$$\tilde{R}_2\big(f, \{\alpha n^\theta\}, N\big) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) \sum_{1 \leqslant y_1 \neq y_2 \leqslant N} e\big(\alpha k(y_1^\theta - y_2^\theta)\big) + \hat{f}(0) + O\Big(\frac{\hat{f}(0)}{N}\Big).$$

为方便起见，我们加上并减去对角项 $y_1 = y_2$:

$$\tilde{R}_2\big(f, \{\alpha n^\theta\}, N\big) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e\big(\alpha k y^\theta\big)\Big|^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{1\leqslant y\leqslant N}\hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) + \hat{f}(0) + O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

注意，项 $k = 0$ 被误差 $O(1/N)$ 吸收。通过泊松求和，

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{1\leqslant y\leqslant N}\hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) = \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) = f(0).$$

因此，

$$\tilde{R}_2\big(f, \{\alpha n^\theta\}, N\big) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e\big(\alpha k y^\theta\big)\Big|^2 - f(0) + \hat{f}(0) + O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

由于 $\hat{} f(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$，问题归结为证明:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e\big(\alpha k y^\theta\big)\Big|^2 = f(0) + o(1).$$

不失一般性，我们可以假设 f 是偶数。那么，最后一个公式等价于

$$\frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e\big(\alpha k y^\theta\big)\Big|^2 = f(0) + o(1).$$

由于$\hat{}$ 的快速衰减 $f(x$，对 k 的求和可以限制为 $k\leqslant N^{1+\varepsilon}$，其中 $\varepsilon > 0$ 可以任意小。因此，为证明定理 1.1 ，只需证明

$$\frac{2}{N^2}\sum_{k\leqslant N^{1+\varepsilon}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\Big|\sum_{1\leqslant y\leqslant N} e\big(\alpha k y^\theta\big)\Big|^2 = f(0) + o_\varepsilon(1) \tag{2.1}$$

对任意 $\theta < \frac{43}{117} - 5\varepsilon$ （比如）。

3. Proof of Proposition 1.2

3.1. **在 y 上的泊松求和。** 我们使用以下形式的泊松求和公式（参见 [10, 定理 8。16]）：

引理 3.1。 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的实函数，满足

$$\Lambda \leqslant f''(x) \leqslant c\Lambda, \qquad |f^{(3)}(x)| \leqslant c\Lambda(b-a)^{-1}, \qquad |f^{(4)}(x)| \leqslant c\Lambda(b-a)^{-2}$$

对某些 $\Lambda > 0$ 和 $c \geqslant 1$成立。则

$$\sum_{a<n<b} e\big(f(n)\big) = \sum_{\alpha<m<\beta} \frac{1}{\sqrt{f''(x_m)}} e\Big(f(x_m) - mx_m + \frac{1}{8}\Big) + R_f(a,b),$$

其中 $\alpha = f'(a)$ $\beta = f'(b)$, $f'(x_m) = m$,

$$R_f(a,b) \ll \Lambda^{-1/2} + c^2 \log(\beta - \alpha + 1).$$

当 Y_1 和 Y_2 的大小相差很大时，我们使用 van der Corput 定理估计它们的贡献（参见 [10, 定理 8。20]）：

引理 3.2. 设 $b - a \geqslant 1$, $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数，且 $\nu \geqslant 2$ 满足$\Lambda \leqslant f^{(\nu)}(x) \leqslant c\Lambda$，其中 $\Lambda > 0$ 且 $c \geqslant 1$。那么

$$\sum_{a<n<b} e\big(f(n)\big) \ll \Lambda^{\kappa}(b-a) + \Lambda^{-\kappa}(b-a)^{1-2^{2-\nu}}$$

其中 $\kappa = (2^{\nu} - 2)^{-1}$，且隐含常数是绝对的。

将（ $y \leqslant N$中的和拆分为2.1）上的二进区间（Y， $2Y$], 使得$Y \leqslant N/2$。然后，应用引理 3.1 并取 $f(y) = -\alpha k y^{\theta}$，代入 $m \to -m$，再取共轭，得到

$$\sum_{Y \leqslant y<2Y} e\big(\alpha k y^{\theta}\big) = T_k(Y) + R_k(Y),$$

其中

$$T_k(Y) = \sum_{\alpha\theta k(2Y)^{\theta-1} \leqslant m < \alpha\theta k Y^{\theta-1}} \frac{c_4}{\sqrt{k}} \Big(\frac{k}{m}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} m^{-\theta/(1-\theta)} - \frac{1}{8}\Big),$$

$$c_4 = \frac{1}{\sqrt{\alpha\theta(1-\theta)}} \big(\alpha\theta\big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)}, \qquad c_3 = \big(\alpha\theta\big)^{1/(1-\theta)} \Big(\frac{1}{\theta} - 1\Big),$$

$$R_k(Y) \ll \frac{Y^{1-\theta/2}}{\sqrt{k}} + \max\big(1, \log(kY^{\theta-1})\big). \tag{3.1}$$

同样，将关于 $k \leqslant N^{1+\varepsilon}$ 在（2.1）中的求和拆分为二进区间（K， $2K$]:

$$\frac{2}{N^2} \sum_{K} \sum_{K \leqslant k < 2K} \hat{f}\big(\frac{k}{N}\big) \Big| \sum_{Y} \big(T_k(Y) + R_k(Y)\big) \Big|^2 =: \frac{2}{N^2} \sum_{K} \Big(S_{1,1}(K) + S_{1,2}(K) + S_{2,1}(K) + S_{2,2}(K) \Big),$$

其中，各求和 $S_{1,1}, S_{1,2}, S_{2,1}, S_{2,2}$ 分别对应于 $T_k(Y_1)T_k(Y_2)$、 $T_k(Y_1)\overline{R_k(Y_2)}$、$R_k(Y_1)\overline{T_k(Y_2)}$、$R_k(Y_1)\overline{R_k(Y_2)}$。

ˆ 我们首先估算来自 $S_{2,\ 2}$ 的贡献。直接应用 $f(k/N)\ \ll\ 1$和 (3.1，可得

$$S_{2,2}(K)=\sum_{K\leqslant k<2K}\hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\sum_{Y_1,Y_2}R_k(Y_1)\overline{R_k(Y_2)}\ll K(\log N)^2\Big(\Big(\frac{N^{1-\theta/2}}{\sqrt{K}}\Big)^2+\big(\log K\big)^2\Big).$$

因此,

$$\frac{2}{N^2}\sum_{K}S_{2,2}(K)\ll N^{-\theta}(\log N)^3+N^{-1+\varepsilon}(\log N)^5, \tag{3.2}$$

这是可忽略的。

和 $S_{1,\ 2}$ 以及 $S_{2,\ 1}$ 相似，因此我们只考虑 $S_{1,\ 2}$:

$$S_{1,2}(K)=\sum_{K\leqslant k<2K}\hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\sum_{Y_1,Y_2}T_k(Y_1)\overline{R_k(Y_2)}.$$

对关于 $K\leqslant k<2K$ 的求和应用柯西不等式，我们得到

$$S_{1,2}(K)\leqslant\sum_{Y_1,Y_2}\Big(\sum_{K\leqslant k<2K}\big|\hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\big|^2|R_k(Y_2)|^2\frac{k^{(2-\theta)/(1-\theta)}}{k}\Big)^{1/2}\cdot$$
$$\Big(\sum_{K\leqslant k<2K}\Big|\sum_{\alpha\theta k(2Y_1)^{\theta-1}\leqslant m<\alpha\theta kY_1^{\theta-1}}\Big(\frac{c_4}{m}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)}e\Big(c_3k^{1/(1-\theta)}m^{-\theta/(1-\theta)}-\frac{1}{8}\Big)\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

因此,

$$S_{1,2}(K)\ll\sum_{Y_1,Y_2}\Big(\sum_{K\leqslant k<2K}|R_k(Y_2)|^2k^{1/(1-\theta)}\Big)^{1/2}\big|U_{1,2}(K)\big|^{1/2}, \tag{3.3}$$

其中

$$U_{1,2}(K):=\sum_{K\leqslant k<2K}\sum_{\substack{m_1,m_2\in\\ [\alpha\theta k(2Y_1)^{\theta-1},\alpha\theta kY_1^{\theta-1})}}\Big(\frac{c_4^2}{m_1m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)}e\Big(c_3k^{1/(1-\theta)}\eta(m_1,m_2)\Big),$$

其中 $\eta(m_1,\ m_2)\ =\ m_1^{-\theta/(1-\theta)}-m_2^{-\theta/(1-\theta)}$。改变求和的阶，我们得到

$$U_{1,2}(K)=\sum_{\substack{m_1,m_2\in\\ [\alpha\theta K(2Y_1)^{\theta-1},2\alpha\theta KY_1^{\theta-1})}}\Big(\frac{c_4^2}{m_1m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)}\sum_{K\leqslant k<2K}{}'e\Big(c_3k^{1/(1-\theta)}\eta(m_1,m_2)\Big),$$

其中 $\sum'$ 表示带有附加限制的求和即行即用

$$m_1,m_2\in[\alpha\theta k(2Y_1)^{\theta-1},\alpha\theta kY_1^{\theta-1}].$$

接下来，代入

$$m_1 := m, \qquad m_2 := m + r.$$

不妨设 $m_1 \leqslant m_2$，这意味着 $r \geqslant 0$。接下来，我们可以将和 $U_{1,2}$ 拆分为对角项（$r = 0$）和非对角项（$r > 0$）。此外，我们还可以将非对角和拆分到二进区间 $r \in (R, 2R]$，其中 R 满足 $R \leqslant (2 - 2^{\theta-1})\alpha\theta K Y_1^{\theta-1}$。于是得到

$$U_{1,2}(K) = D_{1,2}(K) + \sum_{R} \sum_{R \leqslant r < 2R} \sum_{\substack{m:\ m, m+r \in \\ [\alpha\theta K(2Y_1)^{\theta-1}, 2\alpha\theta K Y_1^{\theta-1})}} \Big(\frac{c_4^2}{m(m+r)}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} {\sum_{K \leqslant k < 2K}}' e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)}\eta\Big), \tag{3.4}$$

其中 $\eta = \eta(m, m+r) = m^{-\theta/(1-\theta)} - (m+r)^{-\theta/(1-\theta)} \sim r m^{-1/(1-\theta)}$。注意，对 k 的求和可能为空；在这种情况下，所需的界立即成立。

注释 3.1。从现在起，我们假设 $\alpha\theta K Y_1^{\theta-1} \geqslant 10$。在这种情况下，对 m 的求和包含不止一项。否则，我们显然有 $U_{1,2}(K) \ll K$，根据 (3.3)，这意味着

$$S_{1,2}(K) \ll \sum_{\substack{Y_1, Y_2 \\ Y_1 \gg K^{1/(1-\theta)}}} \Big(\Big(\frac{Y_2^{1-\theta/2}}{\sqrt{K}}\Big)^2 K^{1/(1-\theta)}\Big)^{1/2} K^{1/2} \ll K^{1/(2-2\theta)} N^{1-\theta/2} \log N,$$

其对右端项的贡献不超过 (1.2)不超过

$$\frac{2}{N^2} \sum_{K \ll N^{1-\theta}} K^{1/(2-2\theta)} N^{1-\theta/2} \log N \ll N^{-1/2-\theta/2} \log N,$$

这可以忽略不计。

对于对角项 $D_{1,2}(K)$，我们有

$$D_{1,2}(K) \leqslant \sum_{K \leqslant k < 2K} \sum_{\substack{m \in \\ [\alpha\theta K(2Y_1)^{\theta-1}, 2\alpha\theta K Y_1^{\theta-1})}} \Big(\frac{c_4}{m}\Big)^{(2-\theta)/(1-\theta)} \ll K^{-\theta/(1-\theta)} Y_1. \tag{3.5}$$

接下来，我们处理以下内容的非对角部分：$U_{1,2}$。我们将引理3.2的第一部分应用于 k（假设其非空）中的内层求和，其中3.4)，取 $\Lambda = R Y_1 K^{-2}$ 和 $\nu = 2$。于是得到

$${\sum_{K \leqslant k < 2K}}' e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)}\eta\Big) \ll K\big(R Y_1 K^{-2}\big)^{1/2} + \big(R Y_1 K^{-2}\big)^{-1/2} = (R Y_1)^{1/2} + K(R Y_1)^{-1/2}.$$

因此，将此界与（3.4）和（3.5）结合，我们得到

$$U_{1,2}(K) \ll K^{-\theta/(1-\theta)}Y_1 + \sum_R \Big(RKY_1^{\theta-1}(KY_1^{\theta-1})^{-(2-\theta)/(1-\theta)}\big[(RY_1)^{1/2} + K(RY_1)^{-1/2}\big]\Big) \ll K^{-\theta/(1-\theta)}Y_1 + K^{1/2-\theta/(1-\theta)}Y_1^{3\theta/2} + K^{-1/2-\theta/(1-\theta)}Y_1^{\theta/2} \ll K^{-\theta/(1-\theta)}Y_1 + K^{1/2-\theta/(1-\theta)}Y_1^{3\theta/2}.$$

因此，由（3.3），

$$S_{1,2}(K) \ll \sum_{Y_1,Y_2} \Big(\sum_{K\leqslant k<2K} \max\Big(1, \big(\log(kY_2^{\theta-1})\big)^2, \frac{Y_2^{2-\theta}}{k}\Big) k^{1/(1-\theta)}\Big)^{1/2} \cdot \big(K^{-\theta/(1-\theta)}Y_1 + K^{1/2-\theta/(1-\theta)}Y_1^{3\theta/2}\big)^{1/2} \ll \sum_{Y_1,Y_2} \big(K^{1/2}\log N + Y_2^{1-\theta/2}\big)\big((KY_1)^{1/2} + (KY_1^{\theta})^{3/4}\big).$$

这里我们使用了不等式 $\max(1, (\log kY_2^{\theta-1})^2) \leqslant (\log N)^2$。最后，

$$S_{1,2}(K) \ll N^{1-\theta/2}\log N\big((KN)^{1/2} + (KN^{\theta})^{3/4}\big),$$

因此

$$\frac{2}{N^2}\sum_K S_{1,2}(K) \ll \frac{\log N}{N^2}\big(N^{2-\theta/2+\varepsilon/2} + N^{7/4+\theta/4+3\varepsilon/4}\big), \tag{3.6}$$

当 $\varepsilon < \theta < 1-3\varepsilon$时，它是 $o(1)$。来自 $S_{2,1}(K)$ 的贡献可类似地估计。

现在只需评估来自 $S_{1,1}(K)$ 的贡献：

$$S_{1,1}(K) = \sum_{Y_1,Y_2}\sum_{K\leqslant k<2K} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)T_k(Y_1)\overline{T_k(Y_2)} =: D_{1,1}(K) + E_{1,1}(K),$$

其中 $D_{1,\ 1}(K)$ 是对角项 ($Y_1 = Y_2$, $m_1 = m_2$)，

$$D_{1,1}(K) = \sum_Y \sum_{K\leqslant k<2K} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big)\frac{1}{\alpha\theta(1-\theta)k}(\alpha k\theta)^{(2-\theta)/(1-\theta)} \sum_{\alpha\theta k(2Y)^{\theta-1}\leqslant m<\alpha\theta kY^{\theta-1}} m^{-(2-\theta)/(1-\theta)}.$$

作者： [2, 定理 3。2], 内层求和为

$$\frac{\big(\alpha\theta kY^{\theta-1}\big)^{1-(2-\theta)/(1-\theta)} - \big(2^{\theta-1}\alpha\theta kY^{\theta-1}\big)^{1-(2-\theta)/(1-\theta)}}{1-(2-\theta)/(1-\theta)} + O\big((KY)^{-(2-\theta)/(1-\theta)}\big).$$

化简系数并利用 $\sum_Y Y = N + O(1)$，我们得到的是

$$S_{1,1}(K) = \sum_Y \sum_{K \leqslant k < 2K} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) Y + O\Big(\sum_Y \sum_{K \leqslant k < 2K} k^{1/(1-\theta)} (KY)^{-(2-\theta)/(1-\theta)}\Big) +$$

$$E_{1,1}(K) = N \sum_{K \leqslant k < 2K} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) + O\big(K\big) + O\big(\log N\big) + E_{1,1}(K).$$

最后，

$$\frac{2}{N^2} \sum_K S_{1,1}(K) = \tag{3.7}$$

$$\frac{2}{N} \sum_{k \leqslant N^{1+\varepsilon}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) + O\Big(\frac{1}{N}\Big) + O\Big(\frac{(\log N)^2}{N^2}\Big) + \frac{2}{N^2} \sum_K E_{1,1}(K) =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{N}\Big) + O\Big(\frac{(\log N)^2}{N^2}\Big) + \frac{2}{N^2} \sum_K E_{1,1}(K) =$$

$$f(0) + O\Big(\frac{(\log N)^2}{N^2}\Big) + \frac{2}{N^2} \sum_K E_{1,1}(K).$$

为了完成命题 1.2，我们需要证明带有 $E_{1,1}(K)$ 的和被 $S(N)$（见1.3）所给出的量所界定。

3.2. **在 k上的泊松求和**。我们有

$$E_{1,1}(K) = \sum_{Y_1, Y_2} \sum_{K \leqslant k < 2K} \hat{f}\Big(\frac{k}{N}\Big) \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ \alpha\theta k (2Y_i)^{\theta-1} \leqslant m_i < \alpha\theta k Y_i^{\theta-1}}} \Big(\frac{c_4}{\sqrt{k}}\Big)^2 \Big(\frac{k^2}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} \cdot$$

$$e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} \eta(m_1, m_2)\Big).$$

ˆ 我们首先通过分部求和去掉因子 $f(k/N)$:

引理3.3。令 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 为复数序列，且 $c > 1$ 为常数。如果 $T > 0$ 满足 $|b_k - b_{k+1}| \leqslant T/k$，那么

$$\Big| \sum_{A < k < B} a_k b_k \Big| \leqslant \Big(\max_{A \leqslant k \leqslant cA} |b_k| + O(T) \Big) \max_{A \leqslant \tilde{A} \leqslant cA} \Big| \sum_{A \leqslant k < \tilde{A}} a_k \Big|$$

对于满足 $A \leqslant B \leqslant cA$ 的任意正整数 A 和 B。

ˆ 现在我们将引理3.3应用于 $E_{1,1}(K)$，其中 $b_k = f(k/N)$ 和

$$a_k = \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ \alpha\theta k (2Y_i)^{\theta-1} \leqslant m_i < \alpha\theta k Y_i^{\theta-1}}} \Big(\frac{c_4}{\sqrt{k}}\Big)^2 \Big(\frac{k^2}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} \eta(m_1, m_2)\Big).$$

^^ 由于显然 $|f(k/N)-f((k+1)/N)| \ll 1/N$，我们可以选择 $T \asymp 1$。因此，

$$E_{1,1}(K) \ll \sum_{Y_1,Y_2} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \Big| \sum_{K \leqslant k < \tilde{K}} c_4^2 k^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \cdot \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ \alpha\theta k(2Y_i)^{\theta-1} \leqslant m_i < \alpha\theta k Y_i^{\theta-1}}} \Big(\frac{1}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} \eta(m_1,m_2)\Big)\Big|.$$

接下来，我们移除因子 $c_4^2 k^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}$ 从对 k 的求和中，这是通过第二次应用引理 3.3并取

$$a_k = \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ \alpha\theta k(2Y_i)^{\theta-1} \leqslant m_i < \alpha\theta k Y_i^{\theta-1}}} \Big(\frac{1}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} \eta(m_1,m_2)\Big),$$

$$b_k = c_4^2 k^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}, \qquad T = cK^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}$$

其中 $c>0$ 为某个常数。注意，

$$\big|b_k - b_{k+1}\big| \ll \frac{1}{k} k^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}.$$

因此，

$$E_{1,1}(K) \ll K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \sum_{Y_1,Y_2} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \Big| \sum_{K \leqslant k < \tilde{K}} \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ \alpha\theta k(2Y_i)^{\theta-1} \leqslant m_i < \alpha\theta k Y_i^{\theta-1}}} \Big(\frac{1}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} \eta(m_1,m_2)\Big)\Big|.$$

改变求和阶次，我们得到

$$E_{1,1}(K) \ll K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \sum_{Y_1,Y_2} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \Big| \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ \alpha\theta K(2Y_i)^{\theta-1} \leqslant m_i < 2\alpha\theta K Y_i^{\theta-1}}} \Big(\frac{1}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} \sum_{K_1 \leqslant k \leqslant K_2} e\Big(c_3 k^{1/(1-\theta)} \eta(m_1,m_2)\Big)\Big|, \tag{3.8}$$

其中 K_1 且 K_2 定义于（1.4）和（1.5）。

由于 m_1 与 m_2之间具有对称性，我们可以将限制条件 $m_1 < m_2$加入（3.8）中的相应求和。然后，将引理3.1 应用于关于 k 的求和

在（3.8）中，我们得到

$$E_{1,1}(K) \ll K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \sum_{Y_1,Y_2} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \Big| \sum_{\eta \in \mathcal{N}(K,Y_1,Y_2)} \Big(\frac{1}{m_1 m_2}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} \cdot \sum_{L \leqslant \ell < \tilde{L}} \frac{c_1}{\sqrt{\eta}} \Big(\frac{\ell}{\eta}\Big)^{1/(2\theta)-1} e\Big(c_2 \ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta} + \frac{1}{8}\Big)\Big|, \tag{3.9}$$

其中 $\tilde{L}$，$\tilde{L}$，c_1，c_2 已在命题 1.2中定义。因子 $e(1/8)$ 不影响内层双重和的绝对值，因此可以省略。结合估计式（3.2）、（3.6）、（3.7）和（3.9），即可完成证明。

4. Proof of Proposition 1.3

4.1. 范德科普特差分法。按照命题 1.2 的记号，将 (3.9) 中对 $\eta \in \mathcal{N}(K,Y_1,Y_2)$ 的求和记为 $\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2)$。设记号 $m_2 =: m$, $m_1 =: m - r$。接下来考虑对 r 的求和。该和有 $\asymp KY_1^{\theta-1}$ 项，一侧带有限制$r \ll KY_2^{\theta-1}$，另一侧则带有限制（当 $Y_1 > 2Y_2$ 时） $r \gg KY_2^{\theta-1}$。我们将其拆分到如下二进区间 $(R, 2R]$：

$$\big|\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2)\big| = \sum_{\substack{R \ll KY_2^{\theta-1} \\ \text{dyadic}}} \big|W(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big|,$$

其中

$$W(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R) := \sum_{\eta \in \mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)} \Big(\frac{1}{(m-r)m}\Big)^{(2-\theta)/(2-2\theta)} \sum_{L \leqslant \ell < \tilde{L}} \frac{c_1}{\sqrt{\eta}} \Big(\frac{\ell}{\eta}\Big)^{1/(2\theta)-1} e\big(c_2 \ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta}\big)$$

with

$$\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) := \big\{\eta : \eta = m_1^{-\theta/(1-\theta)} - m_2^{-\theta/(1-\theta)},\ \text{where}$$
$$\alpha\theta K(2Y_1)^{\theta-1} \leqslant m_1 < 2\alpha\theta K Y_1^{\theta-1};$$
$$\alpha\theta K(2Y_2)^{\theta-1} \leqslant m_2 < 2\alpha\theta K Y_2^{\theta-1};$$
$$m_1 < m_2,\ m_2 - m_1 \in [R, 2R)\big\}.$$

应用柯西不等式，我们得到

$$\big|W(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big|^2 \leqslant \Big(\sum_{\eta \in \mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)} \Big(\frac{1}{(m-r)m}\Big)^{(2-\theta)/(1-\theta)} \Big(\frac{1}{\eta}\Big)^{1/\theta-1}\Big)\cdot \Big(\sum_{\eta \in \mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)} \Big|\sum_{L \leqslant \ell < \tilde{L}} \ell^{1/(2\theta)-1} e\big(c_2 \ell^{1/\theta} \eta^{1-1/\theta}\big)\Big|^2\Big).$$

对于 $\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)$ 中的项数，我们显然有

$$\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \ll \begin{cases} KY_1^{\theta-1}KY_2^{\theta-1}, & \text{if } Y_1 > 2Y_2; \\ RKY_2^{\theta-1}, & \text{if } Y_2/2 \leqslant Y_1 \leqslant 2Y_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

事实上，$\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)=0$ 当 Y_1 远大于 Y_2，且同时，R 相较于 $KY_2^{\theta-1}$很小时。还要注意，根据定义，当 $Y_1 \leqslant Y_2/4$时，$\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) = 0$。接下来，回顾一下

$$L \asymp \eta K^{\theta/(1-\theta)}. \tag{4.2}$$

对于 $\eta \in \mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)$，有 $\eta \asymp Z$, 其中

$$Z = Z(K,Y_1,Y_2,R) := \begin{cases} Y_1^\theta K^{-\theta/(1-\theta)}, & \text{if } Y_1 > 2Y_2; \\ RY_2K^{-1/(1-\theta)}, & \text{if } Y_2 \leqslant Y_1 \leqslant 2Y_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

然后，对关于 ℓ （其中 $a_\ell = e\,(c_2\ell^{1/\theta}\eta^{1-1/\theta})$ 、$b_\ell = \ell^{1/(2\theta)-1}$、 $T = L^{1/(2\theta)}$）的求和应用分部求和，我们得到

$$\begin{aligned} \big|W(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big|^2 \ll \\ \Big(\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\Big(\frac{1}{KY_1^{\theta-1}KY_2^{\theta-1}}\Big)^{(2-\theta)/(1-\theta)}\Big(\frac{1}{Z}\Big)^{1/\theta-1}\Big)\cdot \\ \big(ZK^{\theta/(1-\theta)}\big)^{1/\theta-2}\Big(\sum_{\substack{\eta\in\mathcal{N}(K,Y_1,Y_2)\\ \eta\asymp Z}}\Big|\sum_{L\leqslant\ell<L_1} e\big(c_2\ell^{1/\theta}\eta^{1-1/\theta}\big)\Big|^2\Big) = \\ \#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)K^{-3/(1-\theta)}(Y_1Y_2)^{2-\theta}Z^{-1}\Big(\sum_{\substack{\eta\in\mathcal{N}(K,Y_1,Y_2)\\ \eta\asymp Z}}\Big|\sum_{L\leqslant\ell<L_1} e\big(c_2\ell^{1/\theta}\eta^{1-1/\theta}\big)\Big|^2\Big). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} &\big|\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2)\big| \ll \\ &\big(K^{-3/(1-\theta)}(Y_1Y_2)^{2-\theta}\big)^{1/2}\sum_{\substack{R\ll KY_2^{\theta-1}\\ \text{dyadic}}}\Big(\frac{\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}{Z}\Big)^{1/2}U(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)^{1/2}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$U(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R) := \sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\Big|\sum_{L\leqslant\ell<L_1} e\big(c_2\ell^{1/\theta}\eta^{1-1/\theta}\big)\Big|^2. \tag{4.5}$$

˜为估计 $U(K,\ K,\ Y_1,\ Y_2,\ R)$，我们首先应用范德科普特不等式（见 [10,引理 8。17]）：

引理 4.1。 对于任意复数 z_n 我们有

$$\Big|\sum_{a<n<b} z_n\Big|^2 \leqslant \Big(1+\frac{b-a}{H}\Big)\sum_{|h|<H}\Big(1-\frac{|h|}{H}\Big)\sum_{a<n,n+h<b} z_{n+h}\overline{z_n},$$

其中 H 是任意正整数。

将此引理应用于 ℓ （4.5）中的求和，其中 $H = H_1 = L^{\kappa_1}$ 对于某个$0<\kappa_1<1$，该参数将在稍后选定，我们得到

$$\big|U(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big| \leqslant$$
$$\sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\Big(1+\frac{L_1-L}{H_1}\Big)\sum_{|h_1|<H_1}\Big(1-\frac{|h_1|}{H_1}\Big)\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1)\Big),$$

其中

$$t(\ell,h_1) := (\ell+h_1)^{1/\theta}-\ell^{1/\theta}.$$

Then

$$\big|U(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big| \ll$$
$$\sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\Big(\frac{L^2}{H_1}+\frac{L}{H_1}\sum_{0<|h_1|<H_1}\Big|\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1)\Big)\Big|\Big) \ll$$
$$\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\frac{L^2}{H_1}+\frac{L}{H_1}\sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\sum_{0<|h_1|<H_1}\Big|\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1)\Big)\Big|.$$

再次应用柯西不等式，我们得到

$$\big|U(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big| \leqslant \#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\frac{L^2}{H_1}+\frac{L}{H_1}\Big(\sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\sum_{0<|h_1|<H_1}1\Big)^{1/2}\cdot$$
$$\Big(\sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\sum_{0<|h_1|<H_1}\Big|\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1)\Big)\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

接下来，我们第二次应用引理4.1 ，取 $H = H_2 = L^{\kappa_2}$ 其中某个$0<\kappa_2<1$，具体取值稍后确定:

$$\big|U(K,\tilde{K},Y_1,Y_2,R)\big| \ll \#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\frac{L^2}{H_1}+\frac{L}{H_1}\big(\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)H_1\big)^{1/2}\cdot$$
$$\Big(\sum_{\eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)}\sum_{0\leqslant|h_1|<H_1}\Big(1+\frac{L_1-h_1-L}{H_2}\Big)\cdot$$
$$\sum_{0<|h_2|<H_2}\gamma(h_2)\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1-h_2} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1,h_2)\Big)\Big)^{1/2},$$

其中 $\gamma(h_2) := 1 - |h_2|/H_2$,

$$t(\ell, h_1, h_2) := \big((\ell + h_2 + h_1)^{1/\theta} - (\ell + h_2)^{1/\theta}\big) - \big((\ell + h_1)^{1/\theta} - \ell^{1/\theta}\big).$$

因此,

$$\begin{aligned}\big|U(K, \tilde{K}, Y_1, Y_2, R)\big| \ll \\ \#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)\frac{L^2}{H_1} + \frac{L}{H_1}\big(\#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)H_1\big)^{1/2}\Big(\#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)H_1\frac{L^2}{H_2}\Big)^{1/2} + \\ \frac{L}{H_1}\big(\#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)H_1\big)^{1/2}\Big(\frac{L}{H_2}\Big)^{1/2}\cdot \\ \Big(\Big|\sum_{\substack{\eta, h_1, h_2 \\ \eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \\ 0<|h_i|<H_i}} \gamma(h_2) \sum_{L\leqslant \ell < L_1 - h_1 - h_2} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell, h_1, h_2)\Big)\Big|\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

我们将最后一个不等式改写为

$$\begin{aligned}(4.6)\quad \big|U(K, \tilde{K}, Y_1, Y_2, R)\big| \leqslant A_1(R) + A_2(R) + \\ A_3(R)\Big(\Big|\sum_{\substack{\eta, h_1, h_2 \\ \eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \\ 0<|h_i|<H_i}} \gamma(h_2) \sum_{L\leqslant \ell < L_1 - h_1 - h_2} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell, h_1, h_2)\Big)\Big|\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

其中

$$A_1(R) := \#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)\frac{L^2}{H_1}, \qquad A_2(R) := \#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)\frac{L^2}{H_2^{1/2}},$$

$$A_3(R) := \frac{L^{3/2}(\#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2))^{1/2}}{(H_1H_2)^{1/2}}.$$

将（4.6）中的界代入（4.4），得到

$$\begin{aligned}\big|\tilde{S}(K, \tilde{K}, Y_1, Y_2)\big| \ll \\ \big(K^{-3/(1-\theta)}(Y_1Y_2)^{2-\theta}\big)^{1/2}\sum_R \Big(\frac{\#\mathcal{N}_R(K, Y_1, Y_2)}{Z}\Big)^{1/2}\Big(|A_1(R)|^{1/2} + \\ |A_2(R)|^{1/2} + |A_3(R)|^{1/2}\Big(\Big|\sum_{\substack{\eta, h_1, h_2 \\ \eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \\ 0<|h_i|<H_i}} \gamma(h_2) \sum_{L\leqslant \ell < L_1 - h_1 - h_2} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell, h_1, h_2)\Big)\Big|\Big)^{1/4}\Big).\end{aligned}$$

于是有

$$\tilde{S}(K,\tilde{K},Y_1,Y_2) \ll \sum_R \Big(B_1(R)+B_2(R)+ \\ B_3(R)\Big(\Big|\sum_{\substack{\eta,h_1,h_2\\ \eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\\ 0<|h_i|<H_i}}\gamma(h_2)\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1-h_2} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1,h_2)\Big)\Big|\Big)^{1/4}\Big),$$

其中

$$B_1(R) := \Big(K^{-3/(1-\theta)}(Y_1Y_2)^{2-\theta}\frac{\#\mathcal{N}_R^2(K,Y_1,Y_2)L^2}{ZH_1}\Big)^{1/2}, \tag{4.7}$$

$$B_2(R) := \Big(K^{-3/(1-\theta)}(Y_1Y_2)^{2-\theta}\frac{\#\mathcal{N}_R^2(K,Y_1,Y_2)L^2}{ZH_2^{1/2}}\Big)^{1/2}, \tag{4.8}$$

$$B_3(R) := \Big(K^{-3/(1-\theta)}(Y_1Y_2)^{2-\theta}\frac{\#\mathcal{N}_R^2(K,Y_1,Y_2)L^{3/2}}{Z(H_1H_2)^{1/2}}\Big)^{1/2}. \tag{4.9}$$

将其代入（1.3），得到

$$S(N) \ll \frac{1}{N^2}\sum_{K,Y_1,Y_2} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\max_{K\leqslant\tilde{K}\leqslant 2K}\sum_R \Big(B_1(R)+B_2(R)+ \\ B_3(R)\Big(\Big|\sum_{\substack{\eta,h_1,h_2\\ \eta\in\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\\ 0<|h_i|<H_i}}\gamma(h_2)\sum_{L\leqslant\ell<L_1-h_1-h_2} e\Big(c_2\eta^{1-1/\theta}t(\ell,h_1,h_2)\Big)\Big|\Big)^{1/4}\Big) =: \\ S_{B_1}(N)+S_{B_2}(N)+S_{B_3}(N), \tag{4.10}$$

其中，记号 $S_{B_i}(N)$ 的含义显而易见。

首先，我们估计 $S_{B_1}(N)$ 和 $S_{B_2}(N)$。

情形 *1.* $Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2$. 合并（4.1）、（4.2）、（4.3）、和（4.7），我们得到

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\sum_R B_1(R)\ll$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}K^{-3/(2(1-\theta))}(Y_1Y_2)^{1-\theta/2}.$$

$$\sum_R \frac{RKY_2^{\theta-1}RY_2K^{-1}}{\left(RY_2K^{-1/(1-\theta)}\right)^{1/2}\left(RY_2K^{-1}\right)^{\kappa_1/2}}\ll \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{\kappa_1/2}Y_1^{1-\theta/2}Y_2^{1/2+\theta/2-\kappa_1/2}.$$

$$\sum_R R^{3/2-\kappa_1/2}\ll \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{3/2}Y_1^{1-\theta/2}Y_2^{-1+2\theta-\kappa_1\theta/2}\ll N^{-1/2+3\theta/2-\kappa_1\theta/2+3\varepsilon/2}.$$

同样地,

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\sum_R B_2(R)\ll$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}K^{-3/(2(1-\theta))}(Y_1Y_2)^{1-\theta/2}.$$

$$\sum_R \frac{RKY_2^{\theta-1}RY_2K^{-1}}{\left(RY_2K^{-1/(1-\theta)}\right)^{1/2}\left(RY_2K^{-1}\right)^{\kappa_2/4}}\ll \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{\kappa_2/4}Y_1^{1-\theta/2}Y_2^{1/2-\kappa_2/4+\theta/2}.$$

$$\sum_R R^{3/2-\kappa_2/4}\ll \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} K^{3/2}Y_1^{1-\theta/2}Y_2^{-1+2\theta-\kappa_2\theta/4}\ll N^{-1/2+3\theta/2-\kappa_2/4+3\varepsilon/2}.$$

情形 *2*。 $Y_1>2Y_2$。我们有

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\sum_R B_1(R)\ll$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\sum_R K^{-3/(2(1-\theta))}(Y_1Y_2)^{1-\theta/2}\frac{K^2(Y_1Y_2)^{\theta-1}Y_1^\theta}{Y_1^{\theta/2}K^{-\theta/(2(1-\theta))}Y_1^{\kappa_1\theta/2}}\ll$$

$$\frac{\log N}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}} K^{3/2}Y_1^{\theta-\kappa_1\theta/2}Y_2^{\theta/2}\ll N^{-1/2+3\theta/2-\kappa_1\theta/2+3\varepsilon/2}\log N.$$

同理，

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\sum_R B_2(R) \ll$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\sum_R K^{-3/(2(1-\theta))}(Y_1Y_2)^{1-\theta/2}\frac{K^2(Y_1Y_2)^{\theta-1}Y_1^{\theta}}{Y_1^{\theta/2}K^{-\theta/(2(1-\theta))}Y_1^{\kappa_2\theta/4}} \ll$$

$$\frac{\log N}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}} K^{3/2}Y_1^{\theta/2}Y_2^{\theta-\kappa_2\theta/4} \ll N^{-1/2+3\theta/2-\kappa_2\theta/4+3\varepsilon/2}\log N.$$

因此，

$$S_{B_1}(N) \ll N^{-1/2+3\theta/2-\kappa_1\theta/2+3\varepsilon/2}\log N, \tag{4.11}$$

$$S_{B_2}(N) \ll N^{-1/2+3\theta/2-\kappa_2\theta/4+3\varepsilon/2}\log N. \tag{4.12}$$

在本文余下部分，我们将估计 $S_{B_3}(N)$。

4.2. **双重大筛法**。我们通过结合 η、ℓ、h_1 和 h_2的技术，处理关于五重指数和的问题。具体而言，我们使用双重大筛法（如 [16,引理 8]中所述），将该和化归为两个间距不等式。

引理 4.2。定义

$$S=\sum_{k\leqslant K}\sum_{\ell\leqslant L}a(k)b(\ell)e\big(Xu(k)v(\ell)\big),$$

$$\mathcal{B}_1=\sum_{\substack{1\leqslant k_1,k_2\leqslant K\\ |u(k_1)-u(k_2)|\leqslant X^{-1}}}1,\qquad \mathcal{B}_2=\sum_{\substack{1\leqslant \ell_1,\ell_2\leqslant L\\ |v(\ell_1)-v(\ell_2)|\leqslant X^{-1}}}1,$$

其中 $|a(k)|\leqslant 1$、$|b(\ell)|\leqslant 1$ 是复值函数，$|u(k)|\leqslant 1$、$|v(\ell)|\leqslant 1$ 是实值函数。然后

$$S\ll X^{1/2}\mathcal{B}_1^{1/2}\mathcal{B}_2^{1/2}.$$

为方便起见，我们将 h_1 和 h_2 在 $S_{B_3}(N)\tilde{}$ $\tilde{}$在（4.10）中的求和范围从 $|h_i|<H_i$ 改为二进区间 $h_i\asymp H_i,$，其中 H_i 表示

~ ~二进区间。存在 $H_1 \leqslant H_1$ 和 $H_2 \leqslant H_2$，使得

$$S_{B_3}(N) \ll \frac{\log N}{N^2} \sum_{K,Y_1,Y_2} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \sum_{R} B_3(R) \cdot \Big(\Big| \sum_{\substack{\eta,h_1,h_2 \\ \eta \in \mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \\ h_i \asymp \tilde{H}_i}} \gamma(h_2) \sum_{L \leqslant \ell < L_1 - h_1 - h_2} e\Big(c_2 \eta^{1-1/\theta} t(\ell, h_1, h_2)\Big) \Big| \Big)^{1/4}.$$

接下来，我们将引理 4.2 应用于关于 η、h_1、h_2、ℓ 在（4.10）中的内层求和，其中 $a \equiv 1$，$b = \gamma(h_2)$，$X = Z^{1-1/\theta} L^{1/\theta - 2} \tilde{H}_1 \tilde{H}_2$。

$$\mathcal{B}_1 = \sum_{\substack{\eta_1,\eta_2 \in \mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \\ |\eta_1^{\Theta} - \eta_2^{\Theta}| \leqslant Z^{\Theta} X^{-1}}} 1, \qquad \Theta := 1 - \frac{1}{\theta},$$

$$\mathcal{B}_2 = \sum_{\substack{L \leqslant \ell, \tilde{\ell} < L_1 - h_1 - h_2 \\ h_1 \asymp \tilde{H}_1,\ h_2 \asymp \tilde{H}_2 \\ |t(\ell,h_1,h_2) - t(\tilde{\ell},\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)| \leqslant TX^{-1}}} 1, \qquad T = L^{1/\theta - 2} \tilde{H}_1 \tilde{H}_2.$$

然后，利用（4.9），我们得到

$$S_{B_3}(N) \ll \frac{\log N}{N^2} \sum_{K,Y_1,Y_2} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \sum_{R} B_3(R) X^{1/8} \mathcal{B}_1^{1/8} \mathcal{B}_2^{1/8} \ll \frac{1}{N^2} \sum_{K,Y_1,Y_2} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \max_{K \leqslant \tilde{K} \leqslant 2K} \sum_{R} K^{-3/(2(1-\theta))} (Y_1 Y_2)^{1-\theta/2} \cdot \frac{\big(\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) L\big)^{3/4}}{Z^{1/2} (H_1 H_2)^{1/4}} X^{1/8} \mathcal{B}_1^{1/8} \mathcal{B}_2^{1/8}. \tag{4.13}$$

我们分别估计 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$。首先，我们用一个更大的量替换 $\mathcal{B}_1$。我们去掉限制条件 $r \in [R, 2R)$，并令

$$\eta_1 := m_1^{-\theta/(1-\theta)} - m_2^{-\theta/(1-\theta)}, \qquad \eta_2 := m_3^{-\theta/(1-\theta)} - m_4^{-\theta/(1-\theta)},$$

其中 $m_1, m_3 \asymp K Y_1^{\theta-1}$和 $m_2, m_4 \asymp K Y_2^{\theta-1}$。应用一阶泰勒近似于

$$\Big(\big(m_3^{-\theta/(1-\theta)} - m_4^{-\theta/(1-\theta)}\big)^{\Theta} + O(Z^{\Theta} X^{-1}) \Big)^{1/\Theta},$$

我们得到的是

$$m_1^{-\theta/(1-\theta)} - m_2^{-\theta/(1-\theta)} = m_3^{-\theta/(1-\theta)} - m_4^{-\theta/(1-\theta)} + O\big(ZX^{-1}\big).$$

Then

$$\mathcal{B}_1 \leqslant \sum_{\substack{\alpha\theta K(2Y_1)^{\theta-1} \leqslant m_1, m_3 < 2\alpha\theta K Y_1^{\theta-1} \\ \alpha\theta K(2Y_2)^{\theta-1} \leqslant m_2, m_4 < 2\alpha\theta K Y_2^{\theta-1} \\ |m_1^\beta - m_2^\beta - m_3^\beta + m_4^\beta| \leqslant cZX^{-1}}} 1 \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant m_1, \ldots, m_4 < 4\alpha\theta K Y_2^{\theta-1} \\ |m_1^\beta - m_2^\beta - m_3^\beta + m_4^\beta| \leqslant cZX^{-1}}} 1,$$

其中 $\beta := -\theta/(1-\theta)$ 且 $c > 0$ 是相应的常数。为了估计这一量，我们对 Robert 和 Sargos 不等式稍作变形（参见 [16, 定理 2]）：

引理 4.3。设 $M \geqslant 2$ 为整数，$a_2 > a_1 \geqslant 0$、$\delta > 0$ 和 $\alpha \neq 0$、1 为实数，$\mathcal{N}(M, \delta)$ 为满足不等式的整数四元组 (m_1, m_2, m_3, m_4) 的数量，其中 $a_1 M \leqslant m_i < a_2 M$、$i = 1$、……、4

$$|m_1^\alpha + m_2^\alpha - m_3^\alpha - m_4^\alpha| \leqslant \delta M^\alpha.$$

Then

$$\mathcal{N}(M, \delta) \ll_\varepsilon M^{2+\varepsilon} + \delta M^{4+\varepsilon}.$$

因此，

$$\mathcal{B}_1 \ll_{\varepsilon_1} (KY_2^{\theta-1})^{2+\varepsilon_1} + \big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)} ZX^{-1}\big)(KY_2^{\theta-1})^{4+\varepsilon_1} \tag{4.14}$$

其中某个 $\varepsilon_1 > 0$。

我们利用曹和翟的结果估计 $\mathcal{B}_2$（参见 [4, 定理 1 和 2]）：

引理 4.4。设 M、H_1、H_2 为整数，$\geqslant 10$ 使得 $H_1 \leqslant H_2 \leqslant M^{2/3-\varepsilon}$、$\Delta > 0$、$\alpha \neq 0$、1、2、3 为实数，且设 $T := M^{\alpha-2} H_1 H_2$。此外，设 $\mathcal{F}(M, H_1, H_2, \Delta)$ 为满足条件的六元组 $(m, \tilde{m}, h_1, h_1, h_2, h_2)$ 的数量，其中 $M \leqslant m$、$\tilde{m} < 2M$、h_1、$h_1 \asymp H_1$，以及 h_2、$h_2 \asymp H_2$，满足

$$\big|t(m, h_1, h_2) - t(\tilde{m}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2)\big| \leqslant \Delta T.$$

Then

$$\mathcal{F}(M, H_1, H_2, \Delta) M^{-2\varepsilon} \ll M H_1 H_2 + \Delta (M H_1 H_2)^2 + M^{-2} H_1^2 H_2^6 + H_1^2 H_2^{8/3}.$$

或者，如果 H_1 远小于 H_2，即有 $H_1 M^\varepsilon < H_2 \leqslant M^{1-\varepsilon}$，且有 $H_1 H_2 \leqslant M^{3/2-\varepsilon}$，那么同样有不等式

$$\mathcal{F}(M, H_1, H_2, \Delta) M^{-2\varepsilon} \ll M H_1 H_2 + \Delta (M H_1 H_2)^2 + (M H_1^7 H_2^9)^{1/4} + M^{-2} H_1^4 H_2^4 + (\Delta M^4 H_1^{15} H_2^{17})^{1/8} + (\Delta M^4 H_1^3 H_2)^{1/2} + (H_1^{13} H_2^{15})^{1/6} + (\Delta M^2 H_1^8 H_2^{10})^{1/4} + (M^{-1} H_1^5 H_2^6)^{1/2}.$$

首先，我们假设 H_1 和 H_2 至少相差 L^{ε_1} 倍。具体而言，我们有 $H_1 L^{\varepsilon_1} \ll H_2$ 或 $H_2 L^{\varepsilon_1} \ll H_1$，其中 ε_1 将在稍后选定。情形 $H_1 \approx H_2$ 将在本文末尾讨论。应用第二

引理的4.4的第二部分 $\mathcal{B}_2$ 我们得到

$$\mathcal{B}_2 \ll_{\varepsilon_1} L^{2\varepsilon_1}\Big(L\tilde{H}_1\tilde{H}_2+X^{-1}(L\tilde{H}_1\tilde{H}_2)^2+(L\tilde{H}_1^7\tilde{H}_2^9)^{1/4}+L^{-2}\tilde{H}_1^4\tilde{H}_2^4+(X^{-1}L^4\tilde{H}_1^{15}\tilde{H}_2^{17})^{1/8}+ (X^{-1}L^4\tilde{H}_1^3\tilde{H}_2)^{1/2}+(\tilde{H}_1^{13}\tilde{H}_2^{15})^{1/6}+(X^{-1}L^2\tilde{H}_1^8\tilde{H}_2^{10})^{1/4}+(L^{-1}\tilde{H}_1^5\tilde{H}_2^6)^{1/2}\Big).$$

这里我们对 ε_1作出相同的选择。

接下来注意到，当 $\tilde{H}_1$ 和 $\tilde{H}_2$ 取~ ~其最大值时，表达式 $X^{1/8}\mathcal{B}_1^{1/8}\mathcal{B}_2^{1/8}$ 达到最大值，也就是说，当 $H_1 = H_1$ 和 $H_2 = H_2$时。因此，

$$S_{B_3}(N) \ll \frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2}\sum_{K,Y_1,Y_2} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1}\max_{K\leqslant\tilde{K}\leqslant 2K}\sum_{R} K^{-3/(2(1-\theta))}(Y_1Y_2)^{1-\theta/2}\cdot \frac{\big(\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)L\big)^{1/4}}{Z^{1/2}(H_1H_2)^{1/4}}\big(Z^{1-1/\theta}L^{1/\theta-2}H_1H_2\big)^{1/8}\cdot \Big((KY_2^{\theta-1})^2+\big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)}ZX^{-1}\big)(KY_2^{\theta-1})^4\Big)^{1/8}\cdot \Big(LH_1H_2+X^{-1}(LH_1H_2)^2+(LH_1^7H_2^9)^{1/4}+L^{-2}H_1^4H_2^4+(X^{-1}L^4H_1^{15}H_2^{17})^{1/8}+ (X^{-1}L^4H_1^3H_2)^{1/2}+(H_1^{13}H_2^{15})^{1/6}+(X^{-1}L^2H_1^8H_2^{10})^{1/4}+(L^{-1}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

接下来，我们再次考虑两种情形。

情形 *1*。 $Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2$。

由（4.1）、（4.2）和（4.3）可得

$$\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)\ll RKY_2^{\theta-1},\qquad Z\asymp RY_2K^{-1/(1-\theta)},\qquad L\asymp ZK^{\theta/(1-\theta)}\asymp RY_2K^{-1},$$
$$X = Z^{1-1/\theta}L^{1/\theta-2}H_1H_2 = K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1H_2.$$

Then

$$S^{(1)}_{B_3}(N) := S_{B_3}(N;\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2) \ll \tag{4.15}$$
$$\frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} Y_1^{1-\theta/2}Y_2^{1/2+\theta/4}\sum_R \frac{R}{(H_1H_2)^{1/4}}\cdot$$
$$\big(K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1H_2\big)^{1/8}\Big((KY_2^{\theta-1})^2+\frac{(KY_2^{\theta-1})^4}{K^3Y_2^{\theta-2}R^{-2}H_1H_2}\Big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(RY_2K^{-1}H_1H_2+\frac{(RY_2K^{-1}H_1H_2)^2}{K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1H_2}+(RY_2K^{-1}H_1^7H_2^9)^{1/4}+(RY_2K^{-1})^{-2}H_1^4H_2^4+$$
$$\Big(\frac{(RY_2K^{-1})^4H_1^{15}H_2^{17}}{K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1H_2}\Big)^{1/8}+\Big(\frac{(RY_2K^{-1})^4H_1^3H_2}{K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1H_2}\Big)^{1/2}+(H_1^{13}H_2^{15})^{1/6}+$$
$$\Big(\frac{(RY_2K^{-1})^2H_1^8H_2^{10}}{K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1H_2}\Big)^{1/4}+((RY_2K^{-1})^{-1}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

对 R 求和的主要贡献来自 R 最大的情形，即 $R\asymp KY_2^{\theta-1}$。这对应于 $Z\asymp Y_2^{\theta}K^{-\theta/(1-\theta)}$, $X\asymp KY_2^{-\theta}H_1H_2$, $L\asymp Y_2^{\theta}$, $H_1\asymp Y_2^{\kappa_1\theta}$,$H_2\asymp Y_2^{\kappa_2\theta}$。于是我们得到。

$$S^{(1)}_{B_3}(N)\ll\frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}}\frac{KY_2^{1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\cdot$$
$$\big(KY_2^{-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}\Big((KY_2^{\theta-1})^2+\frac{(KY_2^{\theta-1})^4}{KY_2^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(Y_2^{\theta}H_1H_2+\frac{(Y_2^{\theta}H_1H_2)^2}{KY_2^{-\theta}H_1H_2}+(Y_2^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4}+Y_2^{-2\theta}H_1^4H_2^4+$$
$$\Big(\frac{Y_2^{4\theta}H_1^{15}H_2^{17}}{KY_2^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8}+\Big(\frac{Y_2^{4\theta}H_1^3H_2}{KY_2^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/2}+(H_1^{13}H_2^{15})^{1/6}+$$
$$\Big(\frac{Y_2^{2\theta}H_1^8H_2^{10}}{KY_2^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/4}+(Y_2^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

对 K， Y_1， Y_2 求和时，最大贡献来自 Y_2 （即$\asymp Y_1$）且 K取最大值的情形，也就是 Y_1， $Y_2 \asymp N$, $K \asymp N^{1+\varepsilon}$。因此，

$$S_{B_3}^{(1)}(N) \ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(N^{1-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}\Big(N^{2\theta}+\frac{N^{4\theta}}{N^{1-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8}\cdot \tag{4.16}$$
$$\Big(N^{\theta}H_1H_2+\frac{\big(N^{\theta}H_1H_2\big)^2}{N^{1-\theta}H_1H_2}+(N^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4}+N^{-2\theta}H_1^4H_2^4+(N^{5\theta-1}H_1^{14}H_2^{16})^{1/8}+$$
$$(N^{5\theta-1}H_1^2)^{1/2}+(H_1^{13}H_2^{15})^{1/6}+(N^{3\theta-1}H_1^7H_2^9)^{1/4}+(N^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

情形 *2.* $Y_1 > 2Y_2$。

由（4.1）、（4.2）和（4.3）可得

$$\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2) \ll KY_1^{\theta-1}KY_2^{\theta-1}, \qquad Z = Y_1^{\theta}K^{-\theta/(1-\theta)}, \qquad L \asymp ZK^{\theta/(1-\theta)} = Y_1^{\theta},$$
$$X \asymp KY_1^{-\theta}H_1H_2.$$

化简（4.13）右侧，得到

$$S_{B_3}^{(2)}(N) := S_{B_3}\big(N;\ Y_1 > 2Y_2\big) \ll$$
$$\frac{\log N}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}}\frac{KY_1^{1/4+\theta/2}Y_2^{1/4+\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(KY_1^{-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}\mathcal{B}_1^{1/8}\mathcal{B}_2^{1/8},$$

其中，$(\log\ N)$ 因子来自对 R求和。

这里我们还需要考虑另外两种情况。首先，假设对 $\mathcal{B}_1$ 的界中的第一项（4.14）占主导:

情形 *2.1.* $(KY_2^{\theta-1})^{2+\varepsilon_1} \gg \big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)}ZX^{-1}\big)(KY_2^{\theta-1})^{4+\varepsilon_1}$.

该条件可以改写为 $Y_2^{2-\theta} \gg KY_1^{2\theta}(H_1H_2)^{-1}$。我们有

$$S_{B_3}^{(2.1)}(N) := S_{B_3}\big(N;\ Y_1 > 2Y_2;\ Y_2^{2-\theta} \gg KY_1^{2\theta}(H_1H_2)^{-1}\big) \ll \frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2} \sum_{\substack{K,Y_1,Y_2 \\ Y_1>2Y_2 \\ Y_2^{2-\theta}\gg KY_1^{2\theta}(H_1H_2)^{-1}}} \frac{KY_1^{1/4+\theta/2}Y_2^{1/4+\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(KY_1^{-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}\cdot \big(KY_2^{\theta-1}\big)^{1/4}\Big(Y_1^{\theta}H_1H_2 + \frac{(Y_1^{\theta}H_1H_2)^2}{KY_1^{-\theta}H_1H_2} + (Y_1^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4} + Y_1^{-2\theta}H_1^4H_2^4 + \Big(\frac{Y_1^{4\theta}H_1^{15}H_2^{17}}{KY_1^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8} + \Big(\frac{Y_1^{4\theta}H_1^3H_2}{KY_1^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/2} + (H_1^{13}H_2^{15})^{1/6} + \Big(\frac{Y_1^{2\theta}H_1^8H_2^{10}}{KY_1^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/4} + (Y_1^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}. \tag{4.17}$$

回想一下，$H_1H_2 = Y_{(\ \kappa_1+\kappa_2\ \theta)}$，其中 $\kappa_1+\kappa_2 \leqslant \frac{3}{2} - \varepsilon_1$。$S_{B_3}^{(2.1)}(N)$ 的上界中，最大的贡献来自 K, Y_1, Y_2^{1}。因此我们得到

$$S_{B_3}^{(2.1)}(N) \ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(N^{1-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}N^{\theta/4}\cdot \Big(N^{\theta}H_1H_2 + \frac{\big(N^{\theta}H_1H_2\big)^2}{N^{1-\theta}H_1H_2} + (N^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4} + N^{-2\theta}H_1^4H_2^4 + (N^{5\theta-1}H_1^{14}H_2^{16})^{1/8} + (N^{5\theta-1}H_1^2)^{1/2} + (H_1^{13}H_2^{15})^{1/6} + (N^{3\theta-1}H_1^7H_2^9)^{1/4} + (N^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}. \tag{4.18}$$

Case 2.2. $(KY_2^{\theta-1})^{2+\varepsilon_1} \ll \big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)}ZX^{-1}\big)(KY_2^{\theta-1})^{4+\varepsilon_1}$.

类似地，这个条件可以改写为 $Y_2^{2-\theta} \ll KY_1^{2\theta}(H_1H_2)^{-1}$。由于在这种情况下， $\mathcal{B}_1$ (4.14) 的上界中第二项占主导，因此我们得到：

$$S_{B_3}^{(2.2)}(N) := S_{B_3}\big(N;\ Y_1 > 2Y_2;\ Y_2^{2-\theta} \ll KY_1^{2\theta}(H_1H_2)^{-1}\big) \ll \tag{4.19}$$
$$\frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2} \sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2\\ Y_2^{2-\theta}\ll KY_1^{2\theta}(H_1H_2)^{-1}}} \frac{KY_1^{1/4+\theta/2}Y_2^{1/4+\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(KY_1^{-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(\frac{(KY_2^{\theta-1})^4}{KY_1^{-2\theta}Y_2^{\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8}\Big(Y_1^{\theta}H_1H_2 + \frac{(Y_1^{\theta}H_1H_2)^2}{KY_1^{-\theta}H_1H_2} + (Y_1^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4} + Y_1^{-2\theta}H_1^4H_2^4 +$$
$$\Big(\frac{Y_1^{4\theta}H_1^{15}H_2^{17}}{KY_1^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8} + \Big(\frac{Y_1^{4\theta}H_1^3H_2}{KY_1^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/2} + (H_1^{13}H_2^{15})^{1/6} +$$
$$\Big(\frac{Y_1^{2\theta}H_1^8H_2^{10}}{KY_1^{-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/4} + (Y_1^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

该表达式的最大贡献来自 K， Y_1 最大且$Y_2 \asymp 1$。我们得到

$$S_{B_3}^{(2.2)}(N) \ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/4+5\theta/8}}{(H_1H_2)^{1/4}}\Big(N^{\theta}H_1H_2 + N^{3\theta-1}H_1H_2 + (N^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4} + \tag{4.20}$$
$$N^{-2\theta}H_1^4H_2^4 + (N^{5\theta-1}H_1^{14}H_2^{16})^{1/8} + (N^{5\theta-1}H_1^2)^{1/2} + (H_1^{13}H_2^{15})^{1/6} +$$
$$(N^{3\theta-1}H_1^7H_2^9)^{1/4} + (N^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

结合 (4.16) 和 (4.18)，我们得到

$$S_{B_3}^{(1)}(N) + S_{B_3}^{(2.1)}(N) \ll \tag{4.21}$$
$$N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(N^{1-\theta}H_1H_2\big)^{1/8}\Big(N^{2\theta} + \frac{N^{4\theta}}{N^{1-\theta}H_1H_2}\Big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(N^{\theta}H_1H_2 + N^{3\theta-1}H_1H_2 + (N^{\theta}H_1^7H_2^9)^{1/4} + N^{-2\theta}H_1^4H_2^4 + (N^{5\theta-1}H_1^{14}H_2^{16})^{1/8} +$$
$$(N^{5\theta-1}H_1^2)^{1/2} + (H_1^{13}H_2^{15})^{1/6} + (N^{3\theta-1}H_1^7H_2^9)^{1/4} + (N^{-\theta}H_1^5H_2^6)^{1/2}\Big)^{1/8}.$$

我们可以省略该项 $N^{4\theta}/\big(N^{1-\theta}H_1H_2\big)$，假设$H_1H_2 \gg N^{3\theta-1}$。取 $\varepsilon_1 < \varepsilon$。于是，由（4.10）和（4.21），

$$S(N) \ll S_{B_1}(N) + S_{B_2}(N) + N^{4\varepsilon}\sum_{i=1}^{9} S_i + S_{B_3}^{(2.2)}(N),$$

其中 S_i 对应于界（4.21）。我们有

$$S_1 = N^{-1/2+3\theta/4+1/8+\theta/4}, \qquad S_2 = N^{-1/2+5\theta/4}.$$

那么 S_1, $S_2 = o(N^{-4\varepsilon})$ 若 $\theta < \frac{3}{8} - 4\varepsilon = 0.375 - 4\varepsilon$。同理,

$$S_3 = N^{-3/8+29\theta/32} H_1^{3/32} H_2^{5/32}, \qquad S_4 = N^{-3/8+5\theta/8} H_1^{3/8} H_2^{3/8},$$
$$S_5 = N^{-25/64+61\theta/64} H_1^{6/64} H_2^{8/64}, \qquad S_6 = N^{-7/16+19\theta/16} H_2^{-1/8},$$
$$S_7 = N^{-3/8+7\theta/8} H_1^{13/48} H_2^{15/48}, \qquad S_8 = N^{-13/32+31\theta/32} H_1^{3/32} H_2^{5/32},$$
$$S_9 = N^{-3/8+13\theta/16} H_1^{3/16} H_2^{4/16}.$$

结合 4.11) 和 4.12) 中关于 $S_{B_1}(N)$ 以及$S_{B_2}(N)$ 的表达式与界，我们得到 $S(N) = o(1)$，当

$$\theta < \min\Big(\frac{1}{3-\kappa_1}, \frac{2}{6-\kappa_2}, \frac{12}{29+3\kappa_1+5\kappa_2}, \frac{3}{5+3\kappa_1+3\kappa_2}, \frac{25}{61+6\kappa_1+8\kappa_2}, \frac{7}{19-2\kappa_2}, \frac{18}{42+7\kappa_1+9\kappa_2}, \frac{13}{31+3\kappa_1+5\kappa_2}, \frac{6}{13+3\kappa_1+4\kappa_2}\Big) - 5\varepsilon,$$

其在 $(\kappa_1, \kappa_2) = (\frac{12}{43}, \frac{24}{43})$ 处取最大值。因此，我们有 $\theta < \frac{43}{117} - 5\varepsilon$，其中最大项为 S_7。由 (4.20) 可得

$$S_{B_3}^{(2.2)}(N) \ll N^{4\varepsilon}\Big(N^{-1/4+3\theta/4-(\kappa_1+\kappa_2)\theta/8} + N^{-3/8+\theta-(\kappa_1+\kappa_2)\theta/8} + N^{-1/4+21\theta/32-\kappa_1\theta/32+\kappa_2\theta/32} + N^{-1/4+3\theta/8+(\kappa_1+\kappa_2)\theta/4} + N^{-17/64+45\theta/64-16\kappa_1\theta/64} + N^{-5/16+15\theta/16-2\kappa_1\theta/16-4\kappa_2\theta/16} + N^{-1/4+5\theta/8+\kappa_1\theta/48+3\kappa_2\theta/48} + N^{-9/32+23\theta/32-\kappa_1\theta/32+\kappa_2\theta/32} + N^{-1/4+9\theta/16+\kappa_1\theta/16+2\kappa_2\theta/16}\Big),$$

其在 $o(1)$ 时

$$\theta < \min\Big(\frac{2}{6-\kappa_1-\kappa_2}, \frac{3}{8-\kappa_1-\kappa_2}, \frac{8}{21-\kappa_1+\kappa_2}, \frac{2}{3+2\kappa_1+2\kappa_2}, \frac{17}{45-16\kappa_1}, \frac{5}{15-2\kappa_1-4\kappa_2}, \frac{12}{30+\kappa_1+3\kappa_2}, \frac{9}{23-\kappa_1+\kappa_2}, \frac{4}{9+\kappa_1+2\kappa_2}\Big) - 5\varepsilon.$$

当 $(\kappa_1, \kappa_2) = (\frac{12}{43}, \frac{24}{43})$ 时，它覆盖区间 $\theta \in [0, \frac{43}{117})$。注意，取 (κ_1, κ_2) 时，条件 $H_1H_2 \gg N^{3\theta-1}$ 也满足。

4.3. **情形** $H_1 \approx H_2$。我们假设 $L^{-\varepsilon_1}H_1 \ll H_2 \ll L^{\varepsilon_1}H_1$。我们估计 $S_{B_3}(N)$ 使用引理4.4的第一部分:

$$\mathcal{B}_2 \ll_{\varepsilon_1} L^{2\varepsilon_1}\Big(L\tilde{H}_1\tilde{H}_2 + X^{-1}(L\tilde{H}_1\tilde{H}_2)^2 + L^{-2}\tilde{H}_1^2\tilde{H}_2^6 + \tilde{H}_1^2\tilde{H}_2^{8/3}\Big).$$

同样可以得出，表达式 $X^{1/8}\mathcal{B}_1^{1/8}\mathcal{B}_2^{1/8}$ 在 $\tilde{H}_1$、$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$和 H_2 均达到最大值时取得最大值，这发生在 $H_1 = H_1$ 和 $H_2 = L^{\varepsilon_1}H_1$ 时。然后

$$S_{B_3}(N) \ll \frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2} \sum_{K,Y_1,Y_2} K^{(2-\theta)/(1-\theta)-1} \max_{K\leqslant \tilde{K}\leqslant 2K} \sum_R K^{-3/(2(1-\theta))}(Y_1Y_2)^{1-\theta/2}\cdot$$
$$\frac{\big(\#\mathcal{N}_R(K,Y_1,Y_2)L\big)^{1/4}}{Z^{1/2}(H_1H_2)^{1/4}}\big(Z^{1-1/\theta}L^{1/\theta-2}H_1^2\big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big((KY_2^{\theta-1})^2+\big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)}Z^{1/\theta}L^{2-1\theta}H_1^{-2}\big)(KY_2^{\theta-1})^4\Big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(LH_1^2+\frac{(LH_1^2)^2}{Z^{1-1/\theta}L^{1/\theta-2}H_1^2}+L^{-2}H_1^8+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}.$$

情形 *1*. $Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2$.

与（4.15）类似，我们有

$$S_{B_3}^{(1)}(N) \ll \frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2} \sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} Y_1^{1-\theta/2}Y_2^{1/2+\theta/4}\sum_R \frac{R}{(H_1H_2)^{1/4}}\cdot$$
$$\big(K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1^2\big)^{1/8}\Big((KY_2^{\theta-1})^2+\frac{(KY_2^{\theta-1})^4}{K^3Y_2^{\theta-2}R^{-2}H_1^2}\Big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(RY_2K^{-1}H_1^2+\frac{\big(RY_2K^{-1}H_1^2\big)^2}{K^2Y_2^{-1}R^{-1}H_1^2}+\frac{H_1^8}{\big(RY_2K^{-1}\big)^2}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}.$$

同样，对 R 的求和主要由 R 最大时的项贡献，因此我们得到

$$S_{B_3}^{(1)}(N) \ll \frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2} \sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_2/2\leqslant Y_1\leqslant 2Y_2}} \frac{KY_2^{1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\cdot$$
$$\big(KY_2^{-\theta}H_1^2\big)^{1/8}\Big((KY_2^{\theta-1})^2+\frac{(KY_2^{\theta-1})^4}{KY_2^{-\theta}H_1^2}\Big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(Y_2^\theta H_1^2+\frac{(Y_2^\theta H_1^2)^2}{KY_2^{-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{Y_2^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}.$$

接下来，我们取 K、Y_1、Y_2 的最大值，得到

$$S_{B_3}^{(1)}(N) \ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(N^{1-\theta}H_1^2\big)^{1/8}\Big(N^{2\theta}+\frac{N^{4\theta}}{N^{1-\theta}H_1^2}\Big)^{1/8}\cdot \Big(N^{\theta}H_1^2+\frac{\big(N^{\theta}H_1^2\big)^2}{N^{1-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{N^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}. \tag{4.22}$$

情况 *2.* $Y_1 > 2Y_2$。

我们有

$$S_{B_3}^{(2)}(N) \ll \frac{\log N}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2}}\frac{KY_1^{1/4+\theta/2}Y_2^{1/4+\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(KY_1^{-\theta}H_1^2\big)^{1/8}\mathcal{B}_1^{1/8}\mathcal{B}_2^{1/8}.$$

情形 *2.1.* $(KY_2^{\theta-1})^{2+\varepsilon_1} \gg \big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)}ZX^{-1}\big)(KY_2^{\theta-1})^{4+\varepsilon_1}$.

注意现在 $X \asymp KY_1^{-\theta}H_1^2L^{O(\varepsilon_1)}$。与（4.17）类似，我们得到

$$S_{B_3}^{(2.1)}(N) \ll \frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2\\ Y_2^{2-\theta}\gg KY_1^{2\theta}(H_1^2)^{-1}N^{O(\varepsilon_1)}}}\frac{KY_1^{1/4+\theta/2}Y_2^{1/4+\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\cdot \big(KY_1^{-\theta}H_1^2\big)^{1/8}(KY_2^{\theta-1})^{1/4}\Big(Y_1^{\theta}H_1^2+\frac{(Y_1^{\theta}H_1^2)^2}{KY_1^{-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{Y_1^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}.$$

取最大的 K, Y_1, Y_2，我们得到

$$S_{B_3}^{(2.1)}(N) \ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(N^{1-\theta}H_1^2\big)^{1/8}N^{\theta/4}\cdot \Big(N^{\theta}H_1^2+\frac{(N^{\theta}H_1^2)^2}{N^{1-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{N^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}. \tag{4.23}$$

由 (4.22) 和 (4.23)，我们得到

$$S_{B_3}^{(1)}(N)+S_{B_3}^{(2.1)}(N) \ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/2+3\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(N^{1-\theta}H_1^2\big)^{1/8}\Big(N^{2\theta}+\frac{N^{4\theta}}{N^{1-\theta}H_1^2}\Big)^{1/8}\cdot \Big(N^{\theta}H_1^2+\frac{\big(N^{\theta}H_1^2\big)^2}{N^{1-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{N^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}.$$

根据我们选择的 $(\kappa_1,\ \kappa_2)$，我们有 $N^{2\theta}>N^{4\theta}/(N^{1-\theta}H_1^2)$。因此，

$$S_{B_3}^{(1)}(N)+S_{B_3}^{(2.1)}(N)\ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-3/8+7\theta/8}}{H_2^{1/4}}\cdot$$
$$\Big(N^{\theta}H_1^2+\frac{\big(N^{\theta}H_1^2\big)^2}{N^{1-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{N^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}=N^{4\varepsilon}\Big(N^{-3/8+\theta+\kappa_1\theta/4-\kappa_2\theta/4}+$$
$$N^{-1/2+5\theta/4+\kappa_1\theta/4-\kappa_2\theta/4}+N^{-3/8+5\theta/8+\kappa_1\theta-\kappa_2\theta/4}+N^{-3/8+7\theta/8+7\kappa_1\theta/12-\kappa_2\theta/4}\Big),$$

当.....时，其为 $o(1)$

$$\theta<\min\Big(\frac{3}{8+2\kappa_1-2\kappa_2},\ \frac{2}{5+\kappa_1-\kappa_2},\ \frac{3}{5+8\kappa_1-2\kappa_2},\ \frac{9}{21+14\kappa_1-6\kappa_2}\Big)-5\varepsilon,$$

当（$\kappa_1,\ \kappa_2$）=（$_{12}43$，$_{24}\sout{43}$）时，覆盖范围为$[\sout{0},\ \frac{43}{117})$。

Case 2.2. $(KY_2^{\theta-1})^{2+\varepsilon_1}\ll\big((KY_2^{\theta-1})^{\theta/(1-\theta)}ZX^{-1}\big)(KY_2^{\theta-1})^{4+\varepsilon_1}$.

与（4.19）类似，我们得到

$$S_{B_3}^{(2.2)}(N)\ll\frac{N^{\varepsilon+\varepsilon_1}}{N^2}\sum_{\substack{K,Y_1,Y_2\\ Y_1>2Y_2\\ Y_2^{2-\theta}\ll KY_1^{2\theta}(H_1^2)^{-2}N^{O(\varepsilon_1)}}}\frac{KY_1^{1/4+\theta/2}Y_2^{1/4+\theta/4}}{(H_1H_2)^{1/4}}\big(KY_1^{-\theta}H_1^2\big)^{1/8}\cdot$$
$$\Big(\frac{(KY_2^{\theta-1})^4}{KY_1^{-2\theta}Y_2^{\theta}H_1^2}\Big)^{1/8}\Big(Y_1^{\theta}H_1^2+\frac{(Y_1^{\theta}H_1^2)^2}{KY_1^{-\theta}H_1^2}+\frac{H_1^8}{Y_1^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}.$$

最大贡献来自 $K\asymp N^{1+\varepsilon}$, $Y_1\asymp N$, $Y_2\asymp 1$:

$$S_{B_3}^{(2.2)}(N)\ll N^{3\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{N^{-1/4+5\theta/8}}{(H_1H_2)^{1/4}}\Big(N^{\theta}H_1^2+N^{3\theta-1}H_1^2+\frac{H_1^8}{N^{2\theta}}+H_1^{14/3}\Big)^{1/8}\ll$$
$$N^{4\varepsilon}\Big(N^{-1/4+3\theta/4-\kappa_2\theta/4}+N^{-3/8+\theta-\kappa_2\theta/4}+$$
$$N^{-1/4+3\theta/8+3\kappa_1\theta/4-\kappa_2\theta/4}+N^{-1/4+5\theta/8+\kappa_1\theta/3-\kappa_2\theta/4}\Big),$$

当.....时，其为 $o(1)$

$$\theta<\min\Big(\frac{1}{3-\kappa_2},\ \frac{3}{8-2\kappa_2},\ \frac{2}{3+6\kappa_1-2\kappa_2},\ \frac{6}{15+8\kappa_1-6\kappa_2}\Big)-5\varepsilon,$$

其涵盖范围 $[0,\frac{43}{117})$，当 $(\sout{\kappa_1,}\kappa_2)=(_{12}43,_{24}43)$。 — —

References

[1]Christoph Aistleitner、Daniel El-Baz 和 Marc Munsch。一个两点相关问题，以及利用 ζ函数计数格点。《几何与泛函分析》，31(3):483–512，2021。[2] Tom M Apostol。《解析数论导论》。施普林格科学与商业媒体，1998。[3] Michael Victor Berry 和 Michael Tabor。规则谱中的能级聚集。《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学辑》，356(1686):375–394，1977。[4] Xiaodong Cao 和 Wenguang Zhai。含单项式的多重指数和。《算术学报》，92:195–213，2000。.[5] P Csillag。关于非整数正次幂模 1 的均匀分布。《塞格德科学文学学报》，5:13–18，1930。[6] Daniel El-Baz、Jens Marklof 和 Ilya Vinogradov。$\sqrt{n}$ 的小数部分的两点相关函数服从泊松分布。《美国数学会会刊》，143(7):2815–2828，2015。[7] Noam D. Elkies 和 Curtis T. McMullen。$\sqrt{n}$ 模 1 的间隙与遍历理论。《杜克数学杂志》，123(1):95–139，2004。[8] ´D. R. Heath-Brown。含单项式的指数和。《数论杂志》，33(3):311–333，1989。[9] D. R. Heath-Brown。αn^2的小数部分的两点相关。《剑桥哲学学会数学会刊》，148(3):385–407，2010。[10] Henryk Iwaniec 和 Emmanuel Kowalski。《解析数论》，美国数学学会讨论会出版物第 53 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2004。[11] L. Kuipers 和 H. Niederreiter。《序列的均匀分布》。纯粹与应用数学。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 纽约—伦敦—悉尼，1974。[12] P¨ar Kurlberg 和 Ze´ev Rudnick。二次剩余之间的间距分布。《杜克数学杂志》，100(2):211–242，1999。[13]Hong Quan Liu。补篇：“关于给定阶的阿贝尔群的数目” [《算术学报》59 (1991)，第 3 期，261–277；MR1133246 (92i:11103)]。《算术学报》，64(3):285–296，1993。[14] C. Lutsko、A. Sourmelidis 和 N. Technau。αn^θ的小数部分的两点相关。arXiv:2106.09800，2021。[15] J. Marklof 和 A. Str¨ombergsson。闭合 horocycle 上克罗内克序列的等分布。《几何与泛函分析》，13(6):1239–1280，2003。[16] Olivier Robert 和 Patrick Sargos。含单项式的三维指数和。2006。

[17] Ze'evRudnick。什么是……量子混沌？《美国数学会通报》，55(1)：32–34，2008。[18] Ze´evRudnick 和Peter Sarnak。多项式小数部分的对关联函数。《数学物理通讯》，194(1)：61–70，1998。[19]Ze´ev Rudnick、PeterSarnak 和Alexandru Zaharescu。 $n^2\alpha$的小数部分之间的间距分布。《发明数学》，145(1)：37–57，2001。[20] Ze´evRudnick和Niclas Technau。小的非整数次幂的两点相关函数的度量理论。《伦敦数学学会杂志》（第二辑），106(3)：2752–2772，2022。[21]P. Sargos和 J. Wu。含单项式的多重指数和及其在数论中的应用。《匈牙利数学学报》，87(4)：333–354，2000。[22] NiclasTechnau 和 Nadav Yesha。关于 n^{α} 模1 的相关性。《欧洲数学会杂志》，2022。.[23] Hermann Weyl。关于数模一的均匀分布。《数学年刊》，77(3)：313–352，1916。The University of Texas at Austin,
Department of Mathematics, RLM 8.100, 2515Speedway Stop C1200, Austin,
TX 78712电子邮箱地址：maksym.radziwill@gmail.com
Institute of Discrete Mathematics and Geometry, TU Wien, Wiedner Hauptstr.
8-10, A-1040 Wien, Austria电子邮箱地址：andrei.shubin@tuwien.ac.at