arXiv:2304.04645v1 [math.OA] 10 Apr 2023

非稳定群

MARIUS DADARLAT

Abstract. 本文讨论两类群稳定性的上同调障碍。在第一部分中，我们证明：如果剩余有限群 Γ 是具有严格负截面曲率的紧黎曼流形的基本群，且其偶数阶贝蒂数 $b_{2i}(\Gamma)$不为零，那么关于算子范数，它们并非一致到局部稳定。在第二部分中，我们证明：维数为 $i > 1$ 的贝蒂数 $b_i(\Gamma)$不为零，会阻碍可由酉矩阵逼近且允许粗嵌入希尔伯特空间的群的C^*-代数稳定性。

1. Introduction

对于可数离散群 Γ，我们考察相对于酉群 $U(n)$（赋予一致范数）的若干自然稳定性性质。我们还考察Γ 相对于 C^*-代数的酉群的稳定性性质。关于群的逼近性质和稳定性性质，读者可参阅 Arzhantseva [1] 和 Thom [54] 的综述论文。正如我们此前关于这一主题的论文 [17], 所述，我们借鉴了 Kasparov [35]、Connes、Gromov 和 Moscovici [14], 、Gromov [26, 27], 、Tu [56] 以及 Kubota [43]的思想。此外，我们还使用了 Hanke 和 Schick [30], [31], 、Hunger [32] 以及 Baird 和 Ramras [4]的结果。

定义1.1。对于可数离散群 Γ，我们考虑含幺映射的序列 $\{\rho_n\}$ 和酉群表示的序列 $\{\pi_n\}$，其中 ρ_n、π_n：$\Gamma \to U(n)$。

若序列 $\{\pi_n\}$ 在局部近似 $\{\rho_n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(s) - \pi_n(s)\| = 0, \text{ for all } s \in \Gamma.$$

序列 $\{\pi_n\}$ 一致逼近 $\{\rho_n\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\Gamma} \|\rho_n(s) - \pi_n(s)\| = 0.$$

(a) 如果任意满足条件的序列 $\{\rho_n\}$，则 Γ 是局部稳定的。

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(st) - \rho_n(s)\rho_n(t)\| = 0, \text{ for all } s, t \in \Gamma$$

可在局部由一序列 $\{\pi_n\}$ 个酉表示逼近。

(b) Γ若任意序列 $\{\rho_n\}$ 满足一致稳定性

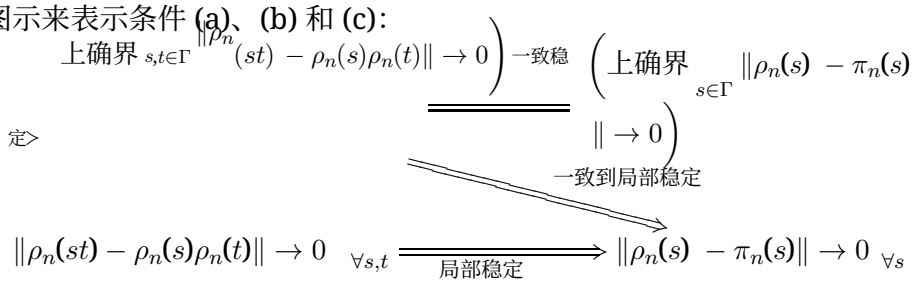
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s,t\in\Gamma} \|\rho_n(st) - \rho_n(s)\rho_n(t)\| = 0$$

Date: 2023 年 4 月 11 日。本研究部分由 NSF 资助。

c可以由一列酉表示 $\{\pi_n\}$ 一致逼近。

(c) Γ若任意满足 (b) 中假设的序列 $\{\rho_n\}$ 都能由酉表示序列 $\{\pi_n\}$ 在局部逼近，则称其为一致到局部稳定。(d) Γ 若任意满足 (a) 中假设的序列 $\{\rho_n\}$ 都能由酉表示序列 $\{\pi_n\}$一致逼近，则称其为局部到一致稳定。

可以用一个图示来表示条件 (a)、(b) 和 (c):



定义 1.1 中所考虑的稳定性性质在本质上有很大差异。局部到一致稳定性并不十分有趣，因为只有有限群满足这一性质。虽然显然一致稳定性和局部稳定性都蕴含一致到局部稳定性，但对这三种性质的研究更具挑战性。Eilers、Shulman 和 Sørensen 的论文将局部稳定性称为 矩阵稳定性 ，[21]。我们证明，对于大类群，包括所有可积群和所有线性群，偶数维有理上同调不消失是局部稳定性的一个障碍， [17] 并且 [18]。Bader、Lubotzky、Sauer 和 Weinberger 证明，半单实李群中的格通常不是局部稳定的 [3]。

在 Burger、Ozawa 和 Thom 的文章中，一致稳定性被称为 Ulam 稳定性 [9]。根据 Kazhdan 的一个经典结果，离散可积群具有一致稳定性，[39]。相比之下，若对于某些 $i>1$、[17]， Γ 群 $H^{2i}(\Gamma,\mathbb{R})\neq 0$ ，则该可积群不是局部稳定的。Glebsky、Lubotzky、Monod 和 Rangarajan 的一篇近期论文 [25] 借助渐近上同调研究了半单李群中余紧格的一致稳定性。

一致稳定性比一致到局部稳定性更强。事实上，如果 Γ有一个同构于自由群 $\mathbb{F}_k$的有限指数子群 $k\geq 2$，那么 Γ 是局部稳定的[21], [3] ，因而是一致到局部稳定的，但 Γ 不是一致稳定的。更一般地， [9]中证明了，如果比较映射 j： $H_b^2(\Gamma,\mathbb{R})\to H^2(\Gamma,\mathbb{R})$ 不是单射，那么 Γ 不是一致稳定的，因此，非初等双曲群不是一致稳定的，因为对于这类群， j 不是单射 [24]。

亏格为 $g>1$ 的曲面群 Γ_g 是最早被证明并非一致稳定的群，[39]。人们注意到，Kazhdan的证明利用了 $H^2(\Gamma_g,\mathbb{R})$ 不为零这一事实，表明实际上，亏格为 $g>1$ 的群 Γ_g 甚至不是一致到局部稳定的。受此观察启发，在本文的第一部分中，我们指出，洛伦兹群 $SO_0(n,1)$ 中的许多余紧格 $n>1$ 并非一致到局部稳定的。这将由以下受 Gromov [28, p.166] 的一个想法启发的定理推出：

定理1.2。设 M 是一个具有严格负截面曲率且基本群剩余有限的闭连通黎曼流形。如果 $b_{2i}(M)\neq 0$ 对某个 $i>0$，那么 $\pi_1(M)$ 不是一致到局部稳定的。

定理1.2 是第 4 节中定理4.2的直接推论。关于对贝蒂数的假设，注意到如果 M是可定向的且 dim $M = 2m$，那么 $b_{2m}(M) = 1$；而如果 M是可定向的且 dim $M = 2m+1$，那么只需要求对于某个 $1 \le i \le 2m$， $b_i(M) > 0$，因为根据 Poincar´e对偶性， $b_i(M) = b_{2m+1-i}(M)$，并且 i 或 $2m+1-i$ 必有一个为偶数。

回顾一下，半单实李群 G 中的紧格是 G 的离散子群 Γ，其商空间 G/Γ 是紧的。 n 维双曲空间 $\mathbb{H}^n$、 $n \ge 2$ 的截面曲率恒等于 -1。 $\mathbb{H}^n$ 的保定向等距变换群的单位元连通分支是洛伦兹群 $SO_0(n,1)$。由于 $\mathbb{H}^n$ 与对称空间 $SO_0(n,1)/SO(n)$ 等距，若 Γ 是 $SO_0(n,1)$ 中的无挠余紧格，则$M = \Gamma \setminus SO_0(n,1)/SO(n)$ 是一个截面曲率为 $= -1$ 的可定向闭连通黎曼流形。此外，由于余紧性， $\Gamma = \pi_1(M)$ 是有限生成的；因此，根据马尔采夫定理，它是剩余有限的，因为 $SO_0(n,1) \subset$ 一般线性群$(n,\mathbb{R})$。由此得到以下结论：

推论 1.3. 设 Γ 是 $SO_0(n,1)$ 中的无挠余紧格。

(i) 如果 n 是偶数，那么 Γ 不是一致到局部稳定的。(ii) 如果 n 是奇数，并且 $b_i(\Gamma) > 0$ 对某个 $i > 0$ 成立，那么 Γ 不是一致到局部稳定的。

该推论再次证明了卡兹丹的结果，因为 $\Gamma_g \subset SO_0(2,1)$， $g > 1$。为了将该推论应用于其他例子，注意到根据塞尔伯格引理，任意紧致离散子群Λ 属于 $SO_0(n,1)$ 都有一个无挠有限指数子群 Γ。因此，要将推论 1.3(ii) 应用于 Γ，还需满足关于贝蒂数的条件。

[3] 证明了，如果 Γ 是实半单李群 G 中的余紧格，且 G 不与 $SO(n,1)$（其中 n 为奇数）或 $SL_3(\mathbb{R})$ 局部同构，那么对于某个 $i > 0$，有 $b_{2i}(\Gamma) > 0$，因此根据 [17]， Γ 并非局部稳定。关于 $SO(n,1)$中的格， [3]确立了以下非消失结果。

定理 1.4（[3]的推论 3.13）。设 Λ 是 $SO(n,1)$中的一个余紧格，且 $n > 1$ 为奇数。假设以下任一条件成立：(i) $n = 3$；或(ii) $n = 4m+1$；或(iii) $n = 4m+3$，且 Λ 是算术的，但不是形如${}^6D_4$ 的形式，若 $n = 7$.。那么存在一个有限指数子群 $\Lambda_1 \le \Lambda$，使得对于任意有限指数子群$\Gamma \le \Lambda_1$，存在 $i > 0$，使得 $b_{2i}(\Gamma) > 0$。特别地，群 Γ 不是局部稳定的。

由定理 1.2，我们推得：

推论 1.5. 群 Γ 如定理 *1.4* 不是从一致到局部稳定的 e.

对于具体例子，可以考虑 $G = SO_0(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \sqrt{p}\,x_{n+1}^2, \mathbb{R}) \cong SO_0(n,1)$，其中 p 是无平方因子整数。令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{Q}\sqrt{p}$的整数环。那么，当 $p \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ 时 $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{p}$，且 $\mathcal{O} = \{\frac{a+b\sqrt{p}}{2}: \ a, b \in \mathbb{Z}, a - b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}$；当 $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$时， $G_{\mathcal{O}}$是 G中的余紧算术格， [6]。根据李和 Millson的结果， [44], 任意 $SO_0(n,1)$中的算术格，$n \ne 3, 7$ 都包含一个同余子群 Γ，使得 $b_1(\Gamma) > 0$。

在论文的第二部分，我们重新探讨局部稳定性，并讨论离散群的 C^*-稳定性 [21], ，这是一种可视为相对于 C^*-代数的局部稳定性的性质。

定义1.6。一个群 Γ 是 C^*-稳定的，当对于任意含幺映射序列 $\{\rho_n : \Gamma \to U(B_n)\}_n$，其中 B_n 是含幺 C^*-代数，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(st) - \rho_n(s)\rho_n(t)\| = 0, \quad \text{for all } s,t \in \Gamma,$$

存在一列群同态 $\{\pi_n : \Gamma \to U(B_n)\}_n$，满足

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(s) - \pi_n(s)\| = 0, \quad \text{for all } s \in \Gamma.$$

我们注意到，局部稳定性对应于相对于有限维 C^*代数的 C^*-稳定性。如前文所述，对于许多群而言，偶数维有理上同调不消失是矩阵稳定性的障碍。受 Dima Shlyakhtenko 关于奇数维上同调在群稳定性中可能作用的提问启发，我们证明如下：

定理 1.7。设 Γ 是一个具有 γ-元素的可数离散 MF 群。若对于某个 $k > 1$, $H^k(\Gamma, \mathbb{Q}) \neq 0$，则 Γ 不是 C^*-稳定的。

让我们回顾一下，一个群 Γ 是 MF 群，当且仅当它同构于冠 C^*-代数 $\prod_n M_n / \bigoplus_n M_n$的[12]酉群的一个子群。等价地， Γ 嵌入到 $\mathbf{U}/\mathbf{N}$ 中，其中 $\mathbf{U} = \prod_{n=1}^{\infty} U(n)$ 且 $\mathbf{N} = \{(u_n)_n \in \mathbf{U} : \|u_n - 1_n\| \to 0\}$。换句话说，如果一个群拥有足够多的近似酉表示，从而能够有效地区分其元素，那么它就是 MF 群。按照 [20] 的术语，这些群是 $\left(U(n)\ \|\cdot\|\right)_{n=1}^{\infty}$-逼近群。寻找不是 MF 群的离散可数群，是一个公开问题。局部可嵌入到 amenable 群的群，根据 [55]，都是 MF 群。

允许存在 γ-元素的群类非常广泛 [38], [34]。它包括那些能够一致嵌入希尔伯特空间的群 [56]。可积群，或者更一般地，具有 Haagerup 性质的群，都能够一致嵌入希尔伯特空间 [13] ；线性群也是如此 [29]。希尔伯特空间一致可嵌入性在子群、乘积、直极限、合并自由积以及由正合群作扩张下均保持不变 [19]。

定理 1.7 将作为一个结果的推论得到证明，该结果假设了较弱形式的稳定性，见定理 5.15 和定理 5.17。更准确地说，定理1.7 由定理 5.17(ii) 得出，其中只假设关于 C^*-代数具有如下形式 $M_n(C(\mathbb{T}))$ 的稳定性。证明通过改编 [17] 中的论证展开（为完整起见，我们在此重复其中许多论证）；其新意在于，用 Baird 和 Ramras 关于平坦丛族的陈类消失的定理 [4]，代替 Milnor [46] 的一个结果。

此外，我们在定理 5.15 中证明，如果一个拟对角群 Γ 含有一个 γ-元素，并且具有非零贝蒂数 $b_{2k}(\Gamma)$，那么存在如定义 1.1(a) 中的序列 $\{\rho_n\}$，即使允许使用非酉表示 $\pi_n : \Gamma \to GL_n(\mathbb{C})$，这些序列也无法进行局部近似。类似地，对于定理 1.7 中的有限生成群 Γ，存在如定义 1.6 中的含幺映射$\{\rho_n : \Gamma \to U_n(C(\mathbb{T}))\}$，但无法通过同态序列 $\{\pi_n : \Gamma \to GL_n(C(\mathbb{T}))\}$进行局部近似。

为便于读者理解，我们在论述中纳入了一些专家所熟知的事实。在第 2 节和 3 节中，我们重新探讨平坦丛和几乎平坦丛。

定理 1.2 的证明依赖于几乎平坦丛的近似单值对应，见第 4节。定理 1.7 的证明见第 5节。

2. Flat bundles

令 A 为一个含幺 C^*-代数，并令 V 为有限生成（投射）右Hilbert A-模。令 $\mathcal{L}(V)$表示作用于 V上的可伴随 A-线性算子所成的 C^*-代数。 $\mathcal{L}(V)$的酉群记作 $U(V)$。对于紧豪斯多夫空间 M，我们将 $\mathrm{Bdl}_A^V(M)$记作具有纤维 V和结构群 $U(V)$的局部平凡丛的同构类集合。若 $V = A$，我们将 $\mathrm{Bdl}_A(M)$记作 $\mathrm{Bdl}_A^A(M)$。若 $E \in \mathrm{Bdl}_A^V(M)$，则称 E为典型纤维为 V的 Hilbert A-模丛。若 M是一个光滑流形，则每个 $E \in \mathrm{Bdl}_A^V(M)$都具有一个光滑结构，该结构在同构意义下唯一 [51, 定理 3.14]。 $C^\infty(M, A)$-模 E的光滑截面记作 $C^\infty(E)$。若 $A = \mathbb{C}$且 $V = \mathbb{C}^r$，我们将 $\mathrm{Bdl}_{\mathbb{C}}^r(M)$记作 $\mathrm{Bdl}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}^r}(M)$，即秩为 r的厄米复向量丛的同构类集合。

定义 2.1. 光滑丛 $E \in \mathrm{Bdl}_A^V(M)$ 上的平坦结构由 M 的有限覆盖$\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ 以及光滑平凡化 $U_i \times V \to E_{U_i}$ 给出，使得相应的过渡函数 $v_{ij} \colon U_i \cap U_j \to U(V)$ 为常函数。

如 [51, 第3]节所述，向量丛上的经典联络理论可推广到光滑希尔伯特 A-模丛。设 E 是黎曼流形 M上的光滑希尔伯特 A-模丛。 E 上的联络是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla : C^\infty(TM \otimes \mathbb{C}) \otimes C^\infty(E) \to C^\infty(E), \quad X \otimes s \mapsto \nabla_X(s)$$

满足这些条件

(i) $\nabla_X(s \cdot \mathbf{f}) = s \cdot (X\mathbf{f}) + \nabla_X(s) \cdot \mathbf{f}$, (Leibnitz formula)
(ii) $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s)$

对于每个 $X \in C^\infty(TM \otimes \mathbb{C})$、 $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$、$\mathbf{f} \in C^\infty(M, A)$ 和 $s \in C^\infty(E)$。连接 ∇ 与 E 的度量相容，如果

$$X\langle s, s'\rangle = \langle \nabla_X s, s'\rangle + \langle s, \nabla_X s'\rangle.$$

拥有联络的重要性在于，它允许通过平行移动 $P_\gamma : E_p \to E_q$，将点$p, q \in M$ 之间的光滑路径 $\gamma(t)$ 提升为纤维 E_p 和 E_q 之间的同构。回顾一下，沿着 γ 的截面 s 若满足微分方程 $\nabla_{\partial_t \gamma} s = 0$，则称其为平行的。对于每个初值 $s(p) \in E_p$ ，该方程都有唯一解，从而唯一确定$s(q) \in E_q$ 的值，因此定义 $P_\gamma(s(p)) = s(q)$。 ∇ 与度量的相容性意味着 P_γ是一个酉算子，这就是为什么这样的联络 ∇ 也称为酉联络。

∇ 的曲率是张量 $R^\nabla \in \Omega^2(M, \mathrm{End}\ E)$，由以下方程定义

$$R^\nabla(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

定义 2.2. 若一对 (E, ∇) 由丛 $E \in \mathrm{Bdl}_A^V(M)$ 和酉联络组成，且酉联络的曲率为零，即 $R^\nabla = 0$，则称其为平坦的。

在讨论平坦丛时，采用 [30, 第3]节中的框架会比较方便。令 $\mathcal{P}_1(M)$ 表示 M的路径群胚，其对象为 M中的点，态射 $\mathcal{P}_1(M)(p, q)$ 为分段

光滑路径 $[0,1]\to M$，连接 p 与 q。两条路径的乘积 $\gamma\cdot\gamma'$ 是先沿着 γ'、再沿着 γ得到的路径，因此可表示为拼接 $\gamma'*\gamma$。赋予 $\mathcal{P}_1(M)$ 自然拓扑。通常，我们用 $\Omega_1(M,p)$ 表示 $\mathcal{P}_1(M)(p,p)$。用 $\Pi_1(M)$ 表示 M 的基本群胚，它由 $\mathcal{P}_1(M)$ 对固定端点的路径取同伦类得到；令 $\Gamma=\pi_1(M,p)$ 表示 M的基本群。

对于丛 $E\in \mathrm{Bdl}_A^V(M)$，我们用 $\mathcal{T}(E)$ 表示 E 的平行移动群胚，其对象为 M的点，态射为 $\mathcal{T}(E)(p,q)=\mathrm{Isom}_A(E_p,E_q)$。按照 [30, p.288],，我们赋予群胚 $\mathcal{T}(E)$ 自然拓扑：通过使用局部平凡化来识别 E 的邻近纤维，从而为态射集赋予拓扑，而 $\mathrm{Isom}_A(E_p,E_q)$ 采用一致范数。丛 E 上的全纯表示是群胚的连续态射

$$h:\mathcal{P}_1(M)\to\mathcal{T}(E) \tag{1}$$

根据一个经典结果，若 E 是光滑的，并且赋有酉联络 ∇，则相应的平行移动满足 $P_{\gamma\cdot\gamma'}=P_\gamma\circ P_{\gamma'}$，因此它定义了一个全纯表示$\gamma\mapsto h(\gamma)=P_\gamma$，其含义如上所述，[41, Thm.9.8]。

定义2.3。设 $\pi\colon\Gamma=\pi_1(M,p)\to U(V)$ 是一个群同态。 M的万有覆盖$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$记为 M。可以将 M实现为曲线 $\eta\colon[0,1]\to M$$\widetilde{\ }$的同伦类空间，其中 $\eta(0)=p$，以及保持端点不变的同伦。 G 在 M 上的左作用定义如下。如果 $s\in\pi_1(M,p)$由一个环路 $\gamma\in\Omega_1(M,p)$表示，那么 $s\cdot[\eta]=[\eta\cdot\gamma^{-1}]$ 由如下路径表示：先沿 γ 的相反方向行进，再沿 η行进。 Γ 在 $M\times V$上的左作用的轨道空间$\widetilde{\ }$定义为 $s\cdot([\eta],v)=(s\cdot[\eta],\pi(s)v)$，是一个（平坦的）Hilbert A-模丛 $\widetilde{M}\times_\pi V\to M$ 的总空间，记为 $L_\pi\in\mathrm{Bdl}_A^V(M)$。映射

$$\pi\mapsto L_\pi$$

阿蒂亚 [2] 在有限群表示的背景下引入了它。

如果 $A=C^*(\Gamma)$ 和 $\jmath:\Gamma\hookrightarrow U(C^*(\Gamma))$ 是自然包含，那么 $L_\jmath$ 是自由秩一 Hilbert $C^*(\Gamma)$-模的丛。丛 $L_\jmath\in\mathrm{Bdl}_{C^*(\Gamma)}(M)$ 被称为 Mishchenko 的平坦丛。

命题 2.4（[40]）。对于光滑丛 $E\in\mathrm{Bdl}_A^V(M)$，以下条件等价：

(i) E 具有平坦结构。(ii) E 具有酉联络 ∇，其曲率为零，$R^\nabla=0$，即 (E,∇) 是平坦的。(iii) E由表示 π定义：$\pi_1(M)\to U(V)$，其意义是 $E\cong L_\pi$。(iv) 存在一个 holonomy 表示 h：$\mathcal{P}_1(M)\to\mathcal{T}(E)$，它下降为群胚的态射 h：$\Pi_1(M)\to\mathcal{T}(E)$

证明。这在[40] 中已有证明（参见命题 1.2.5和 1.4.21），适用于复向量丛。相同的论证在当前语境下同样适用，无需任何改动。全纯表示 h 由关于 ∇的平行移动给出。将 h 限制到 $\pi_1(M,p)$，得到一个 π 如 (iii) 中所述的表示。□

使用自伴幂等元 e（位于矩阵 $m\times m$ 中）来表示丛 $E\in\mathrm{Bdl}_A^V(M)$ 也很方便；这些矩阵属于 C^* 代数 $C(M)\otimes A$，其中 $V\cong e(p)A^m$, $p\in M$。

记号 2.5。为 Mishchenko 丛 L_J 固定一个平坦结构，该结构由某个有限覆盖$\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ 给出，并配以光滑平凡化 $U_i \times C^*(\Gamma) \to (L_J)^{U_i}$，使得所有相应的转移函数 $s_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \Gamma \subset U(C^*(\Gamma))$ 都是常值。因此得到群元素 $s_{ij} \in \Gamma$，它们构成一个 1- 余循环：$s_{ij}^{-1} = s_{ji}$，并且当 $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. 时 $s_{ij}\cdot s_{jk} = s_{ik}$。令 $(\chi_i)_{i\in I}$ 为正光滑函数，满足 χ_i，其支集包含于 U_i，且 $\sum_{i\in I}\chi_i^2 = 1$。设$m = |I|$，并令 (e_{ij}) 为 $M_m(\mathbb{C})$ 的典范矩阵单位。于是 $L_J \in \mathrm{Bdl}^{C^*(\Gamma)}(M)$ 可由自伴投影表示

$$\ell_J = \sum_{i,j\in I} e_{ij} \otimes \chi_i\chi_j \otimes s_{ij} \in M_m(\mathbb{C}) \otimes C(M) \otimes C^*(\Gamma). \tag{2}$$

此外，与群同态 $L_\pi \in \mathrm{Bdl}^V_A(M)$ 相对应的丛 $\pi\colon \Gamma \to U(V)$（见定义 2.3），由自伴投影表示

$$\ell_\pi = \sum_{i,j\in I} e_{ij} \otimes \chi_i\chi_j \otimes \pi(s_{ij}) \in M_m(\mathbb{C}) \otimes C(M) \otimes \mathcal{L}(V). \tag{3}$$

3. Almost flat bundles

本节旨在证明关于近似单值对应的定理 3.10 。Skandalis 曾在 [53] 第 313 页的一个注释中指出了相应结果，但未给出证明。它推广了 [14] 中的一个结果：当 ε 足够小时，单连通流形上的 ε -平坦丛是平凡的。在 [15], 中，我们曾结合 Mishchenko-Fomenko 指标定理，利用定理 3.10 的内容，将 Connes、Gromov 和 Moscovici 关于 [14] 的指标定理加以推广。

固定 $F \subset \pi_1(M,p)$，并取 m 为记号 2.5 中的对象，以及记号 $s \mapsto \gamma_s$ 中的映射 3.6。

定义 3.1 （[14]）。丛 $E \in \mathrm{Bdl}^V_A(M)$ 上的酉联络 ∇ 称为 ε-平坦，$\varepsilon > 0$，如果其范数

$$\|R^\nabla\| = \sup_{p\in M}\{\|R^\nabla_p(X,Y)\|\colon \|X\wedge Y\| \le 1, X, Y \in TM_p\},$$

满足 $\|R^\nabla\| < \varepsilon$。在这种情况下，二元组 (E,∇) 被称为 ε-平坦。

ε-平坦性的拓扑对应概念如下。

定义 3.2。设 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$是 M 的一个开覆盖。丛 $E \in \mathrm{Bdl}^V_A(M)$ 称为 $(\mathcal{U},\varepsilon)$-平坦的，如果其由一个余循环 $v_{ij}\colon U_i \cap U_j \to U(V)$表示，使得 $\|v_{ij}(p) - v_{ij}(q)\| < \varepsilon$对所有$p$、$q \in U_i \cap U_j$ 以及所有 i、$j \in I$均成立。

在下文中，我们有时会将 $\mathrm{Bdl}^V_A(M)$ 中的一个丛 E 与由同一个上循环v_{ij} 构造的 $\mathrm{Bdl}^{\mathcal{L}(V)}_{\mathcal{L}(V)}(M)$ 中的相应丛等同起来：$U_i \cap U_j \to U(V) = U(\mathcal{L}(V))$。$A$和$\mathcal{L}(V)$ 是莫里田等价的，因为 V 是一个有限生成的 Hilbert A-模。特别地，对于 $A = M_r(\mathbb{C})$，我们可以将Hilbert $M_r(\mathbb{C})$-模的秩一丛与由相同过渡函数构造的秩-r 厄米复向量丛等同起来，并在两者之间来回转换。

我们将说明如何将阿蒂亚的最大周期映射 $\pi \mapsto L_\pi$ 扩展到近似群表示。设 M, $\Gamma = \pi_1(M,p)$, $(\chi_i)_{i\in I}$ 满足 $|I| = m$ 且 $F = \{s_{ij}\}$ 如记号 2.5 所述。

对于 $\varepsilon > 0$ 和 V一个射影希尔伯特 A-模，我们定义

$$\mathrm{Rep}^V_{(F,\varepsilon)}(\Gamma) = \{\rho : \Gamma \to U(V) : \|\rho(st) - \rho(s)\rho(t)\| < \varepsilon, \rho(s^{-1}) = \rho(s)^*,\ s,t \in F,\ \rho(1) = 1.$$

定义 3.3. (a) 映射 $\mathrm{Rep}^V{}_{(F,\frac{1}{5m^2})}(\Gamma) \to \mathrm{Bdl}^V_A(M)$,

$\rho \mapsto L_\rho$

定义如下。考虑 C^*-代数 $M_m(\mathbb{C}) \otimes C(M) \otimes \mathcal{L}(V)$ 中的自伴元 $x_\rho = \sum_{i,j\in I} e_{ij} \otimes \chi_i\chi_j \otimes \rho(s_{ij})$。由于

$$x_\rho^2 - x_\rho = \sum_{i,k} \left(\sum_j e_{ik} \otimes \chi_i\chi_k\chi_j^2 \otimes (\rho(s_{ij})\rho(s_{jk}) - \rho(s_{ik})) \right)$$

我们看到 $\|x_\rho^2 - x_\rho\| < 1/5$，因此 x_ρ 的谱包含于 $[0, 1/3) \cup (2/3, 1]$。由函数演算可得

$$\ell_\rho = \chi_{(\frac{2}{3},1]}(x_\rho)$$

它是同一个 C^*-代数中的自伴投影，且满足 $\|x_\rho - \ell_\rho\| < 1/3$。与 ℓ_ρ 对应的希尔伯特 A-模丛记为 L_ρ。

(b) 注意，如果 $\varphi : C^*(\Gamma) \to A$ 是一个含幺完全正映射，并且对于所有 $s,t \in F$ 都有 $\|\varphi(st) - \varphi(s)\varphi(t)\| < \frac{1}{5m^2}$，那么自伴元 $x_\varphi = \sum_{i,\ j\in I} e_{ij} \otimes \chi_i\chi_j \otimes \varphi(s_{ij})$ 满足$\|x_\varphi^2 - x_\varphi\| < 1/5$，因此我们可以像上面一样定义投影 ℓ_φ 及相应的丛 L_φ。

以下引理表明，彼此接近的近似表示会产生同构的丛。

引理 3.4.如果 $\rho, \rho' \in \mathrm{Rep}^V{}_{(F,\frac{1}{5m^2})}(\Gamma)$ and $\sup_{s\in F} \|\rho(s) - \rho'(s)\| < \frac{1}{3m^2}$则 $\|\ell_\rho - \ell_{\rho'}\| < 1$ 从而 $L_\rho \cong L_\rho$.

证明。 $\|\ell_\rho - \ell_{\rho'}\| \le \|\ell_\rho - x_\rho\| + \|x_\rho - x_{\rho'}\| + \|x_{\rho'} - \ell_{\rho'}\| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$ □

注3.5。 以下版本的引理3.4 成立。仅取决于记号 2.5中的数据，存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $\rho \in \mathrm{Rep}^V{}_{(F,\ \frac{1}{5m^2})}(\Gamma)$ 以及任意满足以下条件的同态 $\pi :\ \Gamma \to GL(V)$

$$\sup_{s\in F} \|\rho(s) - \pi(s)\| < \varepsilon,$$

幂等元 ℓ_π 由方程（3）定义，充分接近自伴投影 ℓ_ρ，因此它们由一个可逆元共轭。特别地，它们在K^0（M）中定义了相同的类。幂等元 ℓ_π 不一定是自伴的，因为 π 取值于 GL（V），而不是U（V）。

现在人们已经充分理解，命题2.4中所描述的单值化对应可推广为几乎平坦丛的近似单值对应。这一思想最初在[14] 中被提出，并在 [11], [32] 和 [42], 中得到详细探讨；它是本文的核心。在下文中，我们将在光滑情形下使用近似单值对应的一个版本。

我们将假设 $\Gamma = \pi_1(M,p)$ 不含 2 阶元素。这个限制并非真正必要，但为了简化某些论证，我们作此假设。无论如何，我们的主要应用只涉及无挠群。

记号 3.6. 对每个 $s \in \Gamma = \pi_1(M,p)$，选取一个分段光滑环路 γ_s，使其表示 s，并要求 $\gamma_{s^{-1}}(\tau) = \gamma_s(1-\tau)$，$\tau \in [0,1]$。这定义了一个映射 $\gamma\colon \Gamma \to \Omega_1(M,p)$。固定上述的 γ 后，对于定义在 M 上、带有酉联络 ∇ 的每个光滑厄米向量丛 E，我们考虑映射

$$\rho = \rho_{(E,\nabla)} : \Gamma = \pi_1(M,p) \to U(E_p)$$

$\rho(s) = h(\gamma_s) = P_{\gamma_s}$, $s \in \Gamma$，其中 $P = P^\nabla$ 是 E 中由 ∇ 定义的平行移动。

考虑两条光滑曲线 $f_0, f_1\colon [0,1] \to M$，它们从 p 到 q；并设 (f_t)，$0 \le t \le 1$ 是连接 f_0 和 f_1、具有固定端点的光滑同伦。令 $P_{f_i}: E_p \to E_q$ 为沿 f_i 的平行移动。假设同伦面积 (f_t) 满足：

$$\iint \|\partial_t f_t(s) \wedge \partial_s f_t(s)\|\, ds\, dt \le C.$$

命题 3.7（Buser-Harcher）。

$$\|P_{f_0} - P_{f_1}\| \le \iint \|R^\nabla(\partial_t f_t(s), \partial_s f_t(s))\|\, ds\, dt \le \|R^\nabla\| \iint \|\partial_t f_t(s) \wedge \partial_s f_t(s)\|\, ds\, dt \le \|R^\nabla\| C.$$

证明。 证明见 [10, 6.2。1], 另见 [32, 命题 2。7]。 □

将命题 3.7 推广到分段光滑曲线是常规做法。

引理 3.8（ [14]）。对于 M 紧致连通黎曼流形，以及 F (M,p) 中的$\Gamma = \pi_1$有限子集，存在常数 C，它仅依赖于 M和 F，使得对于任意一对 (E,∇),

$$\|\rho(st) - \rho(s)\rho(t)\| \le C\|R^\nabla\|, \quad for\ all \quad s,t \in F.$$

证明。 对于 s, $t \in F$，固定 $\gamma_t * \gamma_s$ 与 γ_{st}. 之间的一个同伦。由于 F 是有限的，存在常数C 大于所有这些同伦的面积。因此，由命题 3.7 可得 $\|P_{\gamma_t * \gamma_s} - P_{\gamma_{st}}\| \le C\|R^\nabla\|$, 对所有 s, $t \in F$。由于 $\rho(s)\rho(t) = P_{\gamma_s} \circ P_{\gamma_t} = P_{\gamma_t * \gamma_s}$, 证明完毕。 □

以下命题汇集了 Hanke 和 Schick 的论文 [31] 以及 Hanke [30]中的若干事实。

命题 3.9（ [30]）。设 M 是一个紧致连通黎曼流形，且设 $\varepsilon > 0$。设 (E_n, ∇_n) 是一个序列，其中 $E_n \in \mathrm{Bdl}_{\mathbb{C}}^{r_n}(M)$，并且对所有 n 均有 $\|R^{\nabla_n}\| \le \varepsilon$。设 $A_n = M_{r_n}(\mathbb{C})$，并令$A = \prod_n A_n$ 和 $B = \prod_n A_n / \bigoplus_n A_n$。那么

(i) 存在一个 $E_A \in \mathrm{Bdl}_A(M)$，其过渡函数为对角形式，且 E_A 的 $n^{th}-$ 分量与作为希尔伯特 A_n-模丛的 E_n 同构。(ii) 通过对 (E_n, ∇_n) 进行平行移动定义的全纯表示 h_n： $\mathcal{P}_1(M) \to \mathcal{T}(E_n)$ 汇集成一个全纯表示 h_A: $\mathcal{P}_1(M) \to \mathcal{T}(E_A)$。(iii) 若 $\lim_n \|R^{\nabla_n}\| = 0$，则复合映射 h_B: $\mathcal{P}_1(M) \overset{h_A}{\succ} \mathcal{T}(E_A) \succ \mathcal{T}(E_A \otimes_A B)$ 可下降为群胚 $\Pi_1(M) \to \mathcal{T}(E_A \otimes_A B)$ 之间的态射，因此诱导出一个群

同态 $\rho_B\colon \pi_1(M,p) \to U(B)$。希尔伯特 B-模丛 $E_A \otimes_A B$ 与 L_{ρ_B} 同构。

证明。 B 被视为一个左 A 模，其作用通过商映射 $q\colon A \to B$。在 Kasparov 的记号中，$E_A \otimes_A B = E_A \otimes_q B$。该命题的陈述结合了[30]中的命题 3.4、3.12 和 3.13。这些性质的证明基于[30]中的命题 3.4 所确立的以下事实。存在常数 C， $\lambda > 0$ 仅依赖于 M，使得对于任意一对（E， ∇）都有

$$\|P_\gamma - \mathrm{id}_{E_p}\| \le C\|R^\nabla\| \cdot \mathrm{length}(\gamma)$$

对于每个闭合回路 $\gamma \in \Omega_1(M,p)$，其长度$(\gamma) \le \lambda$。上述估计或引理3.8 也解释了为什么映射 h_B 下降到 $\pi_1(M,p)$，当 $\lim_n \|R^{\nabla_n}\| = 0$。 □

固定 $F \subset \pi_1(M,\ p)$ 以及 m 如记号 2.5 以及最大周期 $s \mapsto \gamma_s$ 如记号 3.6。

定理 3.10。存在 $\varepsilon = \varepsilon_M > 0$，使得对于任意光滑厄米向量丛 E on$M$，其具有酉联络 ∇ 且满足 $\|R^\nabla\| < \varepsilon$，由平行移动定义的映射 $\rho(s) = P^\nabla_{\gamma_s}$, $s \in \Gamma = \pi_1(M,p)$ 是一个近似表示 $\rho \in \mathrm{Rep}^r{}_{(F,\frac{1}{5m^2})}(\Gamma)$， $r = \mathrm{秩}(E)$，并具有性质 $L_\rho \cong E$。

证明。由引理3.8，存在 ε_0 使得如果 $\|R^\nabla\| < \varepsilon_0$，那么 $\rho \in \mathrm{Rep}^r{}_{(F,\frac{1}{5m^2})}(\Gamma)$。为导出矛盾，假设对于所有 $\varepsilon > 0$. 该陈述均不成立。因此，若我们固定一个收敛于0 且满足 $\varepsilon_n < \varepsilon_0$ 的序列(ε_n)，那么存在一个序列 (E_n, ∇_n)，使得 $E_n \in \mathrm{Bdl}^{r_n}_{\mathbb{C}}(M)$，$\|R^{\nabla_n}\| < \varepsilon_n$但对于所有 $n \in N$均有 $E_n \ncong L_{\rho_n}$。

设 E_A、 h_A、 h_B 和 ρ_B 如命题 3.9 所述，特别是 $E_A \otimes_A B \cong L_{\rho_B}$。定义 $\rho_A\colon \Gamma \to U((E_A)_p) \cong U(A)$，使得 $\rho_A(s) = h_A(\gamma_s)$。因此， ρ_A 的分量为 (ρ_n) 和 $q \circ \rho_A = \rho_B$，其中 $q\colon A \to B$ 是商映射。考虑元素

$$x_{\rho_A} = \sum_{i,j\in I} e_{ij} \otimes \chi_i\chi_j \otimes \rho_A(s_{ij}) \in M_m(\mathbb{C}) \otimes C(M) \otimes A,$$

并令 $\ell_{\rho_A} = \chi_{(2/3,1]}(x_{\rho_A})$ 为表示 L_{ρ_A} 的定义 3.3中的投影。则 $(\mathrm{id}_{M_m(\mathbb{C})\otimes C(M)} \otimes q)(\ell_{\rho_A}) = \ell_{\rho_B}$是一个表示 L_{ρ_B}.利用命题 3.9(iii)，可得

$$L_{\rho_A} \otimes_A B \cong L_{\rho_B} \cong E_A \otimes_A B.$$

根据函数演算的自然性， ℓ_{ρ_A} 的分量为（ℓ_{ρ_n}）。

这意味着 $L_{\rho_n} \cong (L_{\rho_A})_n \cong (E_A)_n \cong E_n$，对所有充分大的 n 都成立，而这与我们的假设相矛盾。 □

4. Uniform-to-local non-stable groups

设 M 是一个截面曲率非正的闭连通黎曼流形，$K(M) \le 0$。固定一个基点 $p \in M$，并考虑基本群 $\Gamma = \pi_1(M,p)$。这是一个经典结果： Γ 是无挠的，并且每个同伦类 $s \in \pi_1(M,p)$ 都包含唯一一条常速测地线 $\gamma_s\colon [0,1] \to M$，参见 [7, Thm.4.13, p.200]。特别地， $\gamma_{s^{-1}}$ 是 γ_s 以相反参数化得到的， $\gamma_{s^{-1}}(\tau) = \gamma_s(1-\tau)$。因此，对于截面曲率非正的流形，我们有一个优先选择的映射 $\Gamma = \pi_1(M,p) \to \Omega_1(M,p)$ $s \mapsto \gamma_s$，考虑到

在记号 3.6 中。对于一个 ε-平坦对 (E,∇)，如定义 3.1 所述，沿这些测地线的平行移动定义了一个映射 $\rho\colon \Gamma \to U(E_p)$,

$$\rho(s) = P_{\gamma_s},\ s \in \Gamma. \tag{4}$$

满足 $\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$ 对所有 $s \in \Gamma$。映射 ρ 根据引理 3.8 是一个近似酉表示。此外，正如 Gromov在 [28]第 166 页所指出的，ρ 当 M 具有严格负截面曲率时，是一个一致近似表示。

命题4.1 (Gromov)。设 M 为一个闭连通黎曼流形，其截面曲率为 $K(M) \le -\kappa < 0$. 则 $\|\rho(st) - \rho(s)\rho(t)\| \le \kappa\pi\|R^{\nabla}\|$ 对所有 s、$t \in \Gamma$。

证明。考虑万有覆盖 $\Phi : \widetilde{M} \to M$。我们在 $\widetilde{M}$ 上赋予 M 上 Riemann 度量的拉回度量，使得 Φ成为局部等距映射。固定基点 $\tilde{p} \in \widetilde{M}$，满足 $\phi(\tilde{p}) = p$。Γ通过等距变换作用于 $\widetilde{M}$: $\Gamma \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$，$(t,\tilde{x}) \mapsto t\cdot\tilde{x}$。对于每个 $t \in G$，令 $\tilde{\gamma}_t\colon [0,1] \to \widetilde{M}$为连接 $\tilde{p}$ 与 $t\cdot\tilde{p}$的唯一测地线。于是，由前面提到的唯一性结果可知 $\Phi\circ\tilde{\gamma}_t = \gamma_t$，见[7, 第201]页。固定 s 和 t 于 Γ中。令 $\bar{\gamma}_s$ 为 s 到 $\widetilde{M}$中路径的唯一提升，且满足 $\bar{\gamma}_s(0) = t\cdot\tilde{p}$。于是 $\gamma_t * \bar{\gamma}_s$ 提升了 st。考虑 M中的测地三角形，其顶点为 $\tilde{p}$、$t\cdot\tilde{p}$和$(st)\cdot\tilde{p}$，边为$\tilde{\gamma}_t$、$\bar{\gamma}_s$ 和 $\tilde{\gamma}_{st}$。按照 [10, 106], 页中的做法，我们在此测地三角形内构造一张张成曲面 S：对于每个 $\tau \in [0,1]$，用唯一的极小测地线连接$\tilde{\gamma}_t(\tau)$与 $\tilde{\gamma}_{st}(\tau)$（测地线随端点连续且光滑地变化）。由高斯方程，$S$ 的内蕴曲率为 $\le K(M)$）；根据 A.D. Aleksandrov 的面积比较定理（[10, 命题 6.7], ），S 的面积小于或等于具有相同边长的模型三角形 T 的面积。由于模型空间具有常曲率 $-\kappa < 0$，由高斯–博内定理可得 $\text{area}(T) \le \kappa\pi$，因此 $\text{area}(S) \le \kappa\pi$. 。这表明，存在一个同伦$(f_\tau)$，其面积为 $\le \kappa\pi$，连接路径 $\tilde{\gamma}_t * \bar{\gamma}_s$与 $\tilde{\gamma}_{st}$。由于Φ 是局部等距映射，因此 $f_\tau := \Phi\circ f_\tau$ 是连接 $f_0 = \gamma_t * \gamma_s$与 $f_1 = \gamma_{st}$. 的面积为 $\le \kappa\pi$ 的同伦。由命题 3.7 可知,

$$\|P_{\gamma_s}\circ P_{\gamma_t} - P_{\gamma_{st}}\| = \|P_{\gamma_t*\gamma_s} - P_{\gamma_{st}}\| \le \|R^{\nabla}\|\kappa\pi.$$

□

Kasparov 的对偶组装映射 $\nu : K^0(C^*(\Gamma)) \to RK^0(B\Gamma)$ 是 Atiyah 映射 $\text{Rep}(\Gamma) \to RK^0(B\Gamma)$, $\pi \mapsto [L_\pi]$的推广。Kasparov 已证明，如果 Γ 有一个 γ-元，那么 ν 是满射，[35]。在定理 4.2 的证明中，我们只使用 ν 在 Γ 是一个具有非正截面曲率的闭黎曼流形的基本群时的满射性。这是 Kasparov 在 [35, Thm.6.7] 中通过证明 Γ 有一个 γ-元而得到的。根据 Hadamard-Cartan 定理，M 的万有覆盖是可缩的，因此 M 是 $B\Gamma$ 的一个模型。此外，对于拟对角群（例如剩余有限群），即使将其定义域限制为拟对角 K-同调类，映射 ν 仍然是满射的 $K^0(C^*(\Gamma))^{qd}$, [16], [43], [17]。我们将在下面定理 4.2 的证明中详细阐述这一点。

定理 4.2. 设 M 是一个闭连通黎曼流形，其截面曲率为 $K(M) \le -\kappa < 0$.。假设 $\Gamma = \pi_1(M)$ 是剩余有限的，且对于某个 $i > 0$, $b_{2i}(M) \ne 0$。那么存在有限子集 $F \subset \Gamma$ 和 $C > 0$，具有以下性质。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个含幺映射 $\rho\colon \Gamma \to U(n)$，满足 $\sup_{s,\ t\in\Gamma}\|\rho(st) - \rho(s)\rho(t)\| < \varepsilon$；并且对于任意表示$\pi\colon \Gamma \to GL_n(\mathbb{C})$，$\sup_{s\in F}\|\rho(s) - \pi(s)\| > C$.

证明。令 $F \subset \Gamma$ 为注记 2.5中的有限集。我们构造一个含幺映射序列$\{\rho_n : \Gamma \to U(H_n))\}_n$，其中 H_n 是有限维希尔伯特空间，且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s,t\in\Gamma} \|\rho(st) - \rho_n(s)\rho_n(t)\| = 0,$$

对于其，不存在同态序列 $\{\pi_n : \Gamma \to GL(H_n)\}_n$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(s) - \pi_n(s)\| = 0, \text{ for all } s \in F. \tag{5}$$

由于 $M = B\Gamma$ 和 $b_{2k}(\Gamma) \neq 0$，有 $H^{2k}(M, \mathbb{Q}) \neq 0$。由于陈特征是一个有理同构，存在一个非挠元 $y \in \tilde{K}^0(M)$。由于对偶组装映射$\nu : K^0(C^*(\Gamma))_{qd} \to K^0(B\Gamma) = K^0(M)$根据[17, 定理4.6]，是满射的，存在 $x \in K^0(C^*(\Gamma))_{qd}$，使得 $\nu(x) = y$。以下关于拟对角 KK 类的 ν 实现是在 [16] 中引入的。元素 x 由一对含幺 $*$-表示 Φ, Ψ 表示：$C^*(\Gamma) \to \mathcal{L}(H)$，使得$\Phi(a) - \Psi(a) \in K(H)$、$a \in C^*(\Gamma)$，并且满足：存在 $K(H)$ 的递增近似单位$(p_n)_n$，其由投影组成，使得 $(p_n)_n$ 与 $\Phi(a)$ 和 $\Psi(a)$ 都渐近交换，对所有 $a \in C^*(\Gamma)$ 均成立。因此：

$$\lim_n \|p_n\Phi(a) - \Phi(a)p_n\| = 0, \quad \lim_n \|p_n\Psi(a) - \Psi(a)p_n\| = 0, \quad a \in C^*(\Gamma). \tag{6}$$

此外，由于群 Γ 是剩余有限的，存在一个剩余有限维的 C^*-代数D，它介于 $C^*(\Gamma)$和 $C_r^*(\Gamma)$ 之间，使得 x 属于映射 $K^0(D) \to K^0(C^*(\Gamma))$ 的像。[17]（命题 3.8 和定理4.6）对此作了说明；在那里，我们采用了Kubota 的思想[43]，考虑介于群的满 C^*-代数和约化 C^*-代数之间的拟对角 C^*-代数。这个事实使我们可以假设 Ψ 由 Γ 的有限维酉表示的直和给出，从而可以安排使每个 p_n 都与 Ψ 对易。

若 $r_n = \text{rank}(p_n)$，令 $A_n = M_{r_n}(\mathbb{C})$，$A = \prod_n A_n$, $B = \prod_n A_n / \bigoplus_n A_n$，并设 $q : A \to B$ 为商映射。定义含幺映射 $\varphi, \psi : C^*(\Gamma) \to A$，使得

$$\varphi(a) = (\varphi_n(a))_n \quad \text{and} \quad \psi(a) = (\psi_n(a))_n,$$

其中 $\varphi_n(a) = p_n\Phi(a)p_n$ 以及 $\psi_n(a) = p_n\Psi(a)p_n$. 。那么，$\varphi$ 是一个具有渐近乘法分量的含幺完全正映射，而 ψ 是一个含幺 $*$-同态。设 L_φ 和 L_ψ 为相应的 Hilbert A-模丛，其分量为 L_{φ_n} 和 L_{ψ_n}，参见定义 3.3。正如我们在 [16] 中基于 Phillips 和 Stone 的工作所指出的那样，[49, 3. 18], [50, 定理1], 中的丛 L_{φ_n}是（$\mathcal{U}$，ε_n'）-平坦的，且 $\lim \varepsilon_n' = 0$，并且每个 L_{ψ_n}都是平坦的，因为 ψ_n是真正的表示。此外，根据 [16]:

$$y = \nu(x) = [L_{\varphi_n}] - [L_{\psi_n}], \quad \text{for all } n \geq 1.$$

基于光滑联络定义的几乎平坦丛，如[14], 定义 3.1 所述，与基于过渡函数平坦性定义的几乎平坦丛等价，参见定义 3.2；这一点已由 Hunger [32]验证。因此，可以将这些丛L_{φ_n} 替换为光滑丛 E_n，它们与L_{φ_n} 同构，并且配备与度量相容的联络（E_n，∇_n），使得$\|R^{\nabla_n}\| \leq \varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n \leq C'\varepsilon_n'$，因而 $\lim \varepsilon_n = 0$。常数 C' 仅取决于 M和固定覆盖 $\mathcal{U}$。令 h_n：$\mathcal{P}_1(M) \to \mathcal{T}(E_n)$ 为由平行移动定义、对应于（E_n，∇_n）的 holonomy 表示，并令 $\rho_n(s) = h_n(s) = P_{\gamma_s}^{\nabla_n}$，$s \in \Gamma$。由定理 3.10 可得

that

$$L_{\rho_n} \cong E_n \cong L_{\varphi_n}$$

对所有充分大的 n。另一方面，由于我们考虑的是测地环路 γ_s，它们表示 Γ中的元素，因此由命题 4.1 可知

$$\sup_{s,t\in\Gamma} \|\rho_n(st) - \rho_n(s)\rho_n(t)\| \leq \kappa\pi\varepsilon_n.$$

我们断言，序列(ρ_n)无法扰动为满足(5) 的表示序列。为寻求矛盾，假设存在表示序列 $\pi_n : \Gamma \to GL_{r_n}(\mathbb{C})$，使得 $\lim_n \|\rho_n(s) - \pi_n(s)\| = 0$ 对所有 $s \in F$均成立。在这种情况下，由注 3.5可知，对于所有充分大的 n，$L_{\rho_n} \cong L_{\pi_n}$，从而$y = [L_{\rho_n}] - [L_{\psi_n}] = [L_{\pi_n}] - [L_{\psi_n}] \in \widetilde{K}^0(M)$。根据 [46]，平坦复向量丛的所有陈类在 $\mathbb{Q}$ 上均为零，因此 y 的陈特征为零，因为 π_n 和 ψ_n 都是表示。我们得到了矛盾，因为 y 是 $\widetilde{K}^0(M)$ 的非挠元。□

注记4.3。存在一种与定理 1.2 相关的方法，该方法基于 Gromov 引入的黎曼流形的 K-面积概念 [27, §4]。事实上，如果 M 是一个维数为 $\dim(M) = 2m$ 且基本群残有限的可定向闭连通黎曼流形，那么 M 根据[27, 例（v'）第25], 另见 [31]，具有无限 K-面积。这给出了一个序列（E_n，∇_n），满足 $\lim_n \|R^{\nabla_n}\| = 0$ 以及顶陈类 $c_m(E_n) \neq 0$。有了这个序列，便可按照定理 1.2证明的第二部分进行。

5. Obstructions to C^*-stability

本节将证明定理 1.7，将其作为一个更强结果的推论；该结果假设较弱形式的稳定性，参见定理 5.15 和定理 5.17。

关于 Kasparov 引入的各种 KK 理论群的定义和基本性质，请参阅 [35] 。我们将沿用其中的记号。因此，若 X 是一个局部紧群，且 A、B 是可分的 C^*-代数，我们将 $RKK^0(X; A, B)$ 记作 $\mathcal{R}KK(X; C_0(X) \otimes A, C_0(X) \otimes B)$，并将 $RK^0(X; B)$ 记作 $RKK^0(X; \mathbb{C}, B)$。

令 $\underline{E}\Gamma$ 为 Γ、[5] 的真作用的分类空间。已知 $\underline{E}\Gamma$ 有一个局部紧模型 [34]。回顾一下，若存在一个按照 [35] 意义定义的 $\Gamma - C_0(\underline{E}\Gamma)$-代数 A，以及两个元素 $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ 和 $\eta \in KK_\Gamma(\mathbb{C}, A)$（分别称为狄拉克元和对偶狄拉克元），使得元素 $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_\Gamma(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ 具有如下性质：$p^*(\gamma) = 1 \in \mathcal{R}KK_\Gamma(\underline{E}\Gamma; C_0(\underline{E}\Gamma)\ C_0(\underline{E}\Gamma))$，其中 $p:\ \underline{E}\Gamma \to$ 点，[56]，则称 Γ 有一个 γ-元。令 B 为一个带有平凡 Γ 作用的可分 C^*-代数。考虑系数取为 B 的对偶组装映射：

$$\alpha : KK_\Gamma(\mathbb{C}, B) \to RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma; \mathbb{C}, B)$$

由 $\alpha(y) = p^*(y)$定义，其中 $p : \underline{E}\Gamma \to$点。正如 [35], 我们将 $RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma; \mathbb{C}, B)$ 记作$\mathcal{R}KK_\Gamma(\underline{E}\Gamma; C_0(\underline{E}\Gamma)\ C_0(\underline{E}\Gamma) \otimes B)$。。

我们需要以下结果，这一结果基本上归功于 Kasparov，[35, 定理 6.5]。该结果曾在 [45, 定理 7.1], [22, 定理 23] 以及 [23, 引理 10.1] 中讨论。

定理 5.1（Kasparov）。若 Γ 是一个具有 γ元素的可数离散群，则对偶组装映射 $\alpha\colon KK_\Gamma(\mathbb{C},B) \to RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma;\mathbb{C},B)$ 是分裂满射，其核为 $(1-\gamma)KK_\Gamma(\mathbb{C},B)$。

由 $\underline{E}\Gamma$ 的泛性质，存在一个 Γ-等变映射（在同伦意义下唯一） $\sigma : E\Gamma \to \underline{E}\Gamma$。它诱导出一个映射 $\sigma^*\colon RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma;\mathbb{C},B) \to RKK^0_\Gamma(E\Gamma;\mathbb{C},B)$。回顾一下，$\mathcal{Q} = \bigotimes_n M_n$ 是泛 UHF 代数，且 $K_0(\mathcal{Q}) = \mathbb{Q}$ 和 $K_1(\mathcal{Q}) = 0$。我们可以将可表有理 K-理论群 $RK^0(X;\mathbb{Q})$ 识别为 $RK^0(X;\mathcal{Q})$，如 [36] 所示。我们将 $\mathcal{Q}$ 视为平凡的 Γ-代数。

推论 5.2. 设 Γ 是一个含有 γ-元素的可数离散群。设 B 是一个可分的平凡 Γ-代数，且 $B \cong B\otimes\mathcal{Q}$。那么复合映射

$$\gamma KK_\Gamma(\mathbb{C},B) \hookrightarrow KK_\Gamma(\mathbb{C},B) \xrightarrow{\alpha} RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma;\mathbb{C},B) \xrightarrow{\sigma^*} RKK^0_\Gamma(E\Gamma;\mathbb{C},B)$$

是一个满射。

证明。 [5, 第275页-6] 中证明了，σ 诱导一个有理单射同态

$$\sigma_* : RK_0^\Gamma(E\Gamma) \to RK_0^\Gamma(\underline{E}\Gamma).$$

由此可知，映射 $(\sigma_*)^*$: Hom$(RK_0^\Gamma(\underline{E}\Gamma)\ K_0(B)) \to$ Hom$(RK_0^\Gamma(E\Gamma)\ K_0(B))$ 是满射，因为 $K_0(B) \cong K_0(B)\otimes\mathbb{Q}$。根据 [33] 中引理 2.3 和 [38] 中引理 3.4 所述的泛系数定理，并将其应用于系数代数 B，交换图中的水平映射在线视频精品

$$\begin{array}{ccc} RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma;\mathbb{C},B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(RK_0^\Gamma(\underline{E}\Gamma),K_0(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\sigma_*)^*} \\ RKK^0_\Gamma(E\Gamma;\mathbb{C},B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(RK_0^\Gamma(E\Gamma),K_0(B)) \end{array}$$

是双射。因此限制映射 $\sigma^*\colon RKK^0_\Gamma(\underline{E}\Gamma;\mathbb{C},B) \to RKK^0_\Gamma(E\Gamma;\mathbb{C},B)$ 是满射。结论现由定理 5.1 得出。□

我们回顾一下，如果可分希尔伯特空间 H 上的算子集 $S\subset\mathcal{L}(H)$ 是拟对角的，则存在一个投影近似单位 $(p_n)_n$，属于 $K(H)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|[a,p_n]\| = 0, \quad \text{for all } a\in S.$$

可分 C^*代数 A 的表示 $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ 若集合 $\pi(A)$ 是拟对角的，则称其为拟对角表示。若 C^* 代数 A 存在忠实拟对角表示，则称其为拟对角代数。

设 A、B 是可分的 C^* 代数。任意一个类 $x\in KK(A,B)$ 都可由某个 Cuntz 对表示，即一对 $*$-同态 φ、$\psi\colon A\to M(K(H)\otimes B)$，使得对所有 $a\in A$，$\varphi(a)-\psi(a)\in K(H)\otimes B$。假设 B 是含幺的。

定义 5.3（[16], [17]）。如果元素 $x\in KK(A,B)$可由一个Cuntz对（φ,ψ）表示，并且存在投影近似单位（p_n）$_n$ 的K（H），使得对所有 $a\in A$都有$\lim_{n\to\infty}\|[\psi(a)\ p_n\otimes 1_B]\| = 0$，则称其为拟对角的。准对角元构成 $KK(A,B)$的一个子群，记为 $KK(A,B)_{qd}$。对于其他情形，将定义修改为要求存在一个由投影（q_n）组成的 K（H）$\otimes B$近似单位，使得对所有 $a\in A$ 都有 $\lim_{n\to\infty}\|[\psi(a)\ q_n]\| = 0$，会很有用。

注释 5.4 。（a）如果 θ： $A \to D$ 是一个 $*$-同态，那么 $\theta^*[\varphi,\psi] = [\varphi\circ\theta, \psi\circ\theta]$ 因此ϕι e

$$\theta^*(KK(D,B)_{qd}) \subset KK(A,B)_{qd}.$$

(b)设 D、B 是可分离的含幺 C^*-代数，且 B 为核。固定一个忠实的含幺表示 ψ_0： $D \to M(K(H))$，使得 $\psi_0(D)\cap K(H) = \{0\}$.。那么， $x \in KK(D,B)$ 中的任意元素都可由一个 Cuntz 对 (φ,ψ)表示，其中 $\psi = \psi_0 \otimes 1_B$： $A \to M(K(H)\otimes B)$， [52]。因此，如果 D是拟对角的，那么 $\psi_0(D)$ 是 $M(K(H))$ 的拟对角子集，从而 $KK(D,B) = KK(D,B)_{qd}$。

让我们回顾一下，若可数离散群 Γ 存在一个忠实酉表示 π： $\Gamma \to U(H)$，使得集合 $\pi(\Gamma)$是拟对角的，则称其为拟对角群。注意，剩余有限群，或更一般地，极大周期群（缩写为最大周期）是拟对角的。根据 [55]，剩余可积群是拟对角的。群 Γ 的拟对角性至少在形式上弱于其完整群 C^*-代数 $C^*(\Gamma)$的拟对角性。例如，对于所有剩余有限的无限性质T 群， $C^*(\Gamma)$ 的拟对角性问题仍完全悬而未决。

命题 5.5 ([17] 。对于可数离散群 Γ，以下断言等价:

(i) Γ是拟对角的。(ii) λ_Γ 弱包含于 Γ的一个拟对角表示 π 。(iii) 典范映射 q_Γ： $C^*(\Gamma)$ $\to C_r^*(\Gamma)$ 可经由一个含幺拟对角 C*-代数分解。

令 j_Γ 和 $j_{\Gamma,r}$ 为 Kasparov [35, 定理 3.11] 中的下降映射。因此， $\gamma \in KK_\Gamma(\mathbb{C},\mathbb{C})$ 给出一个元素 $j_\Gamma(\gamma) \in KK(C^*(\Gamma)\ C^*(\Gamma))$，它诱导一个映射

$$j_\Gamma(\gamma)^* = j_\Gamma(\gamma)\otimes_{C^*(\Gamma)} - : KK(C^*(\Gamma),B) \to KK(C^*(\Gamma),B).$$

$j_\Gamma(\gamma)^*$ 的像通常记为 $\gamma KK(C^*(G)\ B)$，而 $\gamma_r KK(C_r^*(\Gamma)\ B)$ 的定义类似，是 $j_{\Gamma,r}(\gamma)^*$ 的像。由于 G 是离散群，且在 B 上平凡作用，因此存在一个典范同构（称为对偶 Green-Julg 同构）， [35],

$$\kappa : KK_\Gamma(\mathbb{C},B) \xrightarrow{\cong} KK(C^*(\Gamma),B)$$

它与 Γ 的群环上的模结构相容。此外，根据 [48, 引理 11], ，对于每个 $x \in KK_\Gamma$（$\mathbb{C}$， $\mathbb{C}$），下图是交换图。

(7)
$$\begin{array}{ccc} KK_\Gamma(\mathbb{C},B) & \xrightarrow{\kappa} & KK(C^*(\Gamma),B) \\ \downarrow{\scriptstyle x\otimes -} & & \downarrow{\scriptstyle j_\Gamma(x)\otimes -} \\ KK_\Gamma(\mathbb{C},B) & \xrightarrow[\kappa]{} & KK(C^*(\Gamma),B) \end{array}$$

Kasparov [35, 3.12] 已证明，典范满射 q_Γ ： C^*（Γ） $\to C_r^*$（Γ）诱导出 γ-部分的同构 q_Γ^*： $\gamma_r KK$（C_r^*（Γ） B） $\xrightarrow{\cong} \gamma KK$（$C^*$（$\Gamma$） B）。特别地:

命题 5.6（Kasparov [35]）。若 Γ 是一个离散可数群，且它含有一个 γ-元素，则 γKK（C^*（Γ） B） $\subset q_\Gamma^*$（KK（C_r^*（Γ） B）。

我们阐述了命题 5.6 于 [17]。根据 [35,定理3。4], 另见 [38,第313], 存在自然下降同构

$$\lambda^\Gamma : RKK_\Gamma^0(E\Gamma;\mathbb{C},B) \xrightarrow{\cong} RKK^0(B\Gamma;\mathbb{C},B).$$

令 $\nu\colon\ KK^0(C^*(\Gamma)\ B) \to RK^0(B\Gamma; B)$ 为映射

$$\nu = \lambda^\Gamma \circ \sigma^* \circ \alpha \circ \kappa^{-1} : KK(C^*(\Gamma), B) \cong KK_\Gamma(\mathbb{C}, B) \to RKK^0_\Gamma(E\Gamma; \mathbb{C}, B) \cong RKK^0(B\Gamma; \mathbb{C}, B$$

注意，$\sigma^* \circ \alpha = p^*$ 其中 $p\colon\ E\Gamma \to point$。稍作术语上的滥用，我们也将 ν 称为对偶组装映射。

如同 [17], 我们采用 Kubota 的思路 [43]，使用一个拟对角 C^*-代数，它位于 $C^*_r(\Gamma)$ 与 $C^*(\Gamma)$ 之间，并显著改进了基于 K-拟对角性的 $C^*(\Gamma)$ 构造几乎平坦 K 理论类的方法，该方法由 [16]引入。

特别地，[17] 中的定理 4.6 有一个带系数的版本：

定理 5.7。设 Γ 是一个可数离散拟对角群，且 B 是一个可分核含幺 C^*-代数。若 Γ 含有一个 γ-元，则 $\gamma KK(C^*(\Gamma)\ B)) \subset KK(C^*(\Gamma)\ B)_{qd}$。由此可得 $\nu(KK^0(C^*(\Gamma)\ B)) = \nu(KK(C^*(\Gamma)\ B)_{qd})$，因此若 $B \cong B \otimes \mathcal{Q}$，则 $\nu(KK(C^*(\Gamma)\ B)_{qd}) = RK^0(B\Gamma; B)$。

证明。分解 $C^*(\Gamma) \xrightarrow{q_D} D \to C^*_r(\Gamma)$ 的 q_Γ 满足 D 含幺且拟对角，这由命题 5.5 结合注释 5.4 可知，蕴含

$$q^*_\Gamma(KK(C^*_r(\Gamma), B)) \subset q^*_D(KK(D, B)) = q^*_D(KK(D, B)_{qd}) \subset KK(C^*(\Gamma), B)_{qd}.$$

由此以及命题 5.6 我们得到 $\gamma KK(C^*(\Gamma)\ B)) \subset KK(C^*(\Gamma)\ B)_{qd}$。

根据定理 5.1，α 在（$1-\gamma$）KK_Γ（$\mathbb{C}$，B）上消失。由于图（7）是交换的，该群通过 $1-\gamma$）KK^0（C^*（Γ）B）映射到 κ，因此

$$\nu(KK^0(C^*(\Gamma), B)) = \nu(\gamma KK^0(C^*(\Gamma), B)) = \nu(KK(C^*(\Gamma), B)_{qd}).$$

根据推论 5.2，映射 ν 是满射，当且仅当 $B \cong B \otimes \mathcal{Q}$。 □

定义 5.8。 设 Γ 是一个可数离散群，设 $\mathcal{B}$ 是一类含幺 C^*-代数。 .

(a) Γ 称为局部 $GL(\mathcal{B})$-稳定的，如果对于任意含幺映射序列 $\{\varphi_n\colon\ \Gamma \to U(B_n)\}$ 满足$B_n \in \mathcal{B}$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(st) - \varphi_n(s)\varphi_n(t)\| = 0, \quad \text{for all } s, t \in \Gamma, \tag{8}$$

存在一个同态序列 $\{\pi_n\colon\ \Gamma \to GL(B_n)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(s) - \pi_n(s)\| = 0, \quad \text{for all } s \in \Gamma. \tag{9}$$

(b) Γ称为局部 $U(\mathcal{B})$-稳定的，如果对于满足(8)的任意含幺映射序列 $\{\varphi_n\colon\ \Gamma \to U(B_n)\}$，存在一个满足(9)的同态序列 $\{\pi_n\colon\ \Gamma \to U(B_n)\}$。(c) 如果 $\mathcal{B} = \{B_n\colon\ n \geq 1\}$，性质(a)也称为局部 $\{GL(B_n)\colon\ n \geq 1\}$-稳定性，而性质(b)称为局部 $\{U(B_n)\colon\ n \geq 1\}$-稳定性

注 5.9。以下观察是显然的。

(i) 如果 Γ 是局部 $U(\mathcal{B})$-稳定的，那么 Γ 是局部 $GL(\mathcal{B})$-稳定的。(ii) 如果 $\mathcal{B}$ 是所有含幺可分 C^*-代数构成的类，那么 Γ 是局部 $U(\mathcal{B})$-稳定的，当且仅当 Γ 按照 [21] 的意义是 C^*-稳定的；等价地，$C^*(\Gamma)$ 是弱半投射的。(iii) 如果 $\mathcal{B} = \{M_n(\mathbb{C})\colon\ n \in \mathbb{N}\}$，那么 Γ 是局部 $U(\mathcal{B})$-稳定的，当且仅当 Γ 按照 [21], [17], 的意义是矩阵稳定的，或者按照定义 1.1 的意义是局部稳定的。

(iv) 设 X 是一个紧致可度量空间。容易验证，如果一个 MF 群 Γ 是局部 $\{GL_n(C(X)) : n \in \mathbb{N}\}$-稳定的，那么 Γ 也是局部 $\{GL_n(\mathbb{C}) : n \in \mathbb{N}\}$-稳定的。

引理 5.10. 设 Γ 是一个可数离散 MF 群。

(i) 如果 Γ 局部 $\{U_n(\mathbb{C}) : n \in \mathbb{N}\}$-稳定，则 Γ 是最大周期的，因而是拟对角的。(ii) 如果 Γ 是有限生成的，且 Γ 局部 $\{GL_n(\mathbb{C}) : n \in \mathbb{N}\}$-稳定，则 Γ 是剩余有限的，因而是拟对角的。

证明。(i) 由于 Γ 是 MF 的，它嵌入到 $U(\prod_n M_n/\bigoplus_n M_n)$ 中。根据局部 $\{U_n(\mathbb{C}): n \in \mathbb{N}\}$-稳定性，我们得到 Γ 到 $\prod_n U(n)$ 中的一个嵌入。(ii) 根据局部 $\{GL_n(\mathbb{C}): n \in \mathbb{N}\}$-稳定性，我们得到 Γ 到 $\prod_n GL_n(\mathbb{C})$ 中的一个嵌入。如果 Γ 是有限生成的，则由马尔采夫定理 [8, 6.4.13] 可知 Γ 是剩余有限的，因而是拟对角的。□

记号 5.11。对于紧空间 Y，令 $RK^0(Y;B)_{\text{flat}}$ 是由局部平凡丛生成的 $RK^0(Y;B)$ 的子群，这些丛的典型纤维是射影 B-模 fB^k, $f^2 = f = f^* \in M_k(B)$，由 Y的有限开覆盖 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$和 1-Cech 上循环 $v_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(fM_k(B)f)$ 构-造，并且每个函数 v_{ij} 都是常值函数。回忆一下，我们将 $RK^0(Y;B)$ 与算子 K理论群 $K_0(C(Y) \otimes B)$ 等同。对于 $B\Gamma$的紧子空间 Y，我们将 $\nu: KK(C^*(\Gamma) B) \to RK^0(B\Gamma;B)$与限制映射$RK^0(B\Gamma;B) \to RK^0(Y;B)$ 的复合记为 ν_Y，其中 ν 是对偶组装映射。对于 $B = C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{Q}$，我们将使用自然同构

$$RK^0(Y;B) \cong K_0(C(Y) \otimes C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{Q}) \cong RK^0(Y \times \mathbb{T}; \mathbb{Q}). \tag{10}$$

命题 5.12。设 $\mathcal{B}$ 为一类含幺可分 C^*-代数，使得如果 $B \in \mathcal{B}$，并且对 $k \in \mathbb{N}$ 有$f^2 = f = f^* \in M_k(B)$，那么 $fM_k(B)f \in \mathcal{B}$。设 Γ 为一个离散可数群，并设$Y \subset B\Gamma$ 为一个有限连通CW-复形。如果 Γ 是局部 $GL(\mathcal{B})$-稳定的，那么对于任意 $B \in \mathcal{B}$,

$$\nu_Y(KK(C^*(\Gamma), B)_{qd}) \subset RK^0(Y;B)_{flat} \tag{11}$$

更一般地，如果 (B_k) 是一列递增的 C*-代数，且它们在 $\mathcal{B}$ 中共享同一单位，并且 B 是 $\bigcup_k B_k$ 的 C^*-完备化，那么

$$\nu_Y(KK(C^*(\Gamma), B)_{qd}) \subset \varinjlim_k RK^0(Y;B_k)_{flat} \subset RK^0(Y;B)_{flat}. \tag{12}$$

证明。我们先证明（11）。令 $\jmath: \Gamma \hookrightarrow U(C^*(\Gamma))$ 为自然包含。由 $s \cdot (\tilde{p}, v) = (s \cdot \tilde{p}, \jmath(s)v)$定义的 Γ 在 $E\Gamma \times C^*(\Gamma)$ 上的$\widetilde{\ }$左作用的轨道空间，是一个（平坦的）Hilbert $C^*(\Gamma)$-模丛 $E\Gamma \times_\jmath C^*(\Gamma) \to B\Gamma$，记作 $L_\jmath$ 的总空间。

$L_\jmath$ 到 Y的限制记为 L_Y，它给出环 $C(Y) \otimes \mathbb{C}[\Gamma]$ 上矩阵中的一个自伴投影 $p = p_Y$，其构造如下。设$(U_i)_{i\in I}$是由开集构成的 Y的有限覆盖，使得 $L_\jmath$ 在每个 U_i 上都是平凡的，并且 $U_i \cap U_j$ 是连通的。利用 $L_\jmath$ 在 U_i 上的平凡化，可得到群元素 $s_{ij} \in G$，它们定义了一个 1-余循环，在每个非空集合 $U_i \cap U_j$ 上为常值，并表示 L_Y。因此，当 $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. 时，$s_{ij}^{-1} = s_{ji}$ 和$s_{ij} \cdot s_{jk} = s_{ik}$。设$(\chi_i)_{i\in I}$是正的连续函数，且 χ_i 的支集包含于 U_i 中，并满足 $\sum_{i\in I} \chi_i^2 = 1$。令 $m = |I|$，并设(e_{ij})为 $M_m(\mathbb{C})$的标准矩阵单位。则 L_Y 由以下自伴投影表示

$$p = \sum_{i,j\in I} e_{ij} \otimes \chi_i\chi_j \otimes s_{ij} \in M_m(\mathbb{C}) \otimes C(Y) \otimes C^*(\Gamma). \tag{13}$$

Kasparov 已证明 [35, 引理 6。2], [37], 映射

$$\nu_Y : KK(C^*(\Gamma), B) \xrightarrow{\nu} K^0(B\Gamma; B) \to K^0(Y; B) \cong K_0(C(Y) \otimes B)$$

由 $\nu_Y(x) = [p] \otimes_{C^*(\Gamma)} x$ 给出。

将 ν_Y 限制到拟对角KK 类上可以如下描述，见 [16]。每个元素 $x \in KK(C^*(\Gamma) B)^{qd}$ 都由一对非零 $*$-表示 $\Phi^{(r)}$ 表示： $C^*(\Gamma) \to M(K(H) \otimes B)$， $r = 0, 1$，使得 $\Phi^{(0)}(a) - \Phi^{(1)}(a) \in K(H) \otimes B$， $a \in C^*(\Gamma)$，并且具有如下性质：存在 $K(H)$ 的一个由投影组成的递增近似单位 $(p_n)_n$ ，使得$(p_n \otimes 1_B)_n$ 对 $\varphi^{(0)}(a)$ 和 $\varphi^{(1)}(a)$都渐近交换，即对所有 $a \in C^*(\Gamma)$ 均成立。由此可知，压缩 $\varphi_n^{(r)}(\cdot) = (p_n \otimes 1_B)\Phi^{(r)}(\cdot)(p_n \otimes 1_B)$ 是完全正渐近同态 $\varphi_n^{(r)}$： $C^*(\Gamma) \to K(H) \otimes B$， $r = 0, 1$。令1表示 $C^*(\Gamma)$的单位元。进一步将这些映射微扰为完全正渐近同态是常规做法，使得$f_n^{(r)} := \varphi_n^{(r)}(1)$是 B 上矩阵中的自伴投影。因此，我们可以将这些映射视为含幺完全正映射 $\varphi_n^{(r)}$： $C^*(\Gamma) \to D_n^{(r)}$，其中每个 $D_n^{(r)} = f_n^{(r)}(K(H) \otimes B)f_n^{(r)}$都与 B莫里田等价。正如[16, Prop.2.5]，中所论证的，如果 $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{M_m(C(Y))}$，

$$\nu_Y(x) = [p] \otimes_{C^*(\Gamma)} x = (\mathrm{id} \otimes \varphi_n^{(0)})_\sharp(p) - (\mathrm{id} \otimes \varphi_n^{(1)})_\sharp(p), \tag{14}$$

对所有充分大的 n。这里，$(\mathrm{id} \otimes \varphi_n^{(r)})_\sharp(p) \in K_0(C(Y) \otimes B)$ 是由近似投影 $x_n^{(r)} = \sum_{i,j \in I} e_{ij} \otimes \chi_i \chi_j \otimes \varphi_n^{(r)}$ 通过连续函数演算得到的投影$\chi_{(1/2,1]}(x_n^{(r)})$ 的等价类。由于 $\varphi_n^{(r)}(s)$ 是近似酉元，且 Γ 可数，因此存在含幺映射序列 $\sigma_n^{(r)}$: $\Gamma \to U(D_n^{(r)})$，使得对所有 $s \in \Gamma$， $\lim_n \|\varphi_n^{(r)}(s) - \sigma_n^{(r)}(s)\| = 0$。序列 $(\sigma_n^{(r)})$ $r = 0, 1$ 按照 (8) 的意义是渐近乘法的。若 Γ 满足定义 5.8 (b)，则存在群同态序列 $\{\pi_n^{(r)}$: $\Gamma \to GL(D_n^{(r)})\}$,$r = 0, 1$，使得

$$\lim_n \|\sigma_n^{(r)}(s) - \pi_n^{(r)}(s)\| = 0 \tag{15}$$

对所有 $s \in \Gamma$。

注意，由以下关系定义的投影 $e_n^{(r)}$, $r = 0, 1$

$$e_n^{(r)} = (\mathrm{id} \otimes \pi_n^{(r)})(p) = \sum_{i,j \in I} e_{ij} \otimes \chi_i \chi_j \otimes \pi_n^{(r)}(s_{ij}) \in M_m(\mathbb{C}) \otimes C(Y) \otimes D_n^{(r)},$$

对应于平坦丛，因为它们由常值余循环 $\pi_n^{(r)}(s_{ij})$ 实现，因此$[e_n^{(0)}] - [e_n^{(1)}] \in RK^0(Y, B)_{\mathrm{flat}}$。由 (13)、(14) 和 (15) 可推出，对于所有充分大的 n， $\nu_Y(x) = [e_n^{(0)}] - [e_n^{(1)}]$，因为 $\|\sigma_n^{(r)}(s_{ij}) - \pi_n^{(r)}(s_{ij})\| \to 0$。我们据此得到 $\nu_Y(x) \in RK^0(Y, B)_{\mathrm{flat}}$，这正是所需结论。

(12)的证明类似。只需对前面的论证作一个小的调整。根据假设，$\bigcup_k B_k$ 在 B中稠密。枚举 $\Gamma = \{g_n\}_n$，并如下修改映射（$\sigma_n^{(r)}$）、 $r = 0$、1。选择 $h_n^{(r)}$中的自伴投影 $K(H) \otimes B_{k(n,r)}$，对于充分大的 $k(n, r) \in \mathbb{N}$，使得 $h_n^{(r)}$逼近 $f_{(r)n}$，并且对于所有 $s \in \{g_1, ..., g_n\}$， $\mathrm{dist}(\varphi_n^{(r)}(s)\ U(h_n^{(r)}(K(H) \otimes B_{k(n,r)})h_n^{(r)})) < 1/n$。令 $D_n^{(r)} = h_n^{(r)}(K(H) \otimes B_{k(n,r)})h_n^{(r)}$，现在我们可以构造 $\sigma_n^{(r)}$: $\Gamma \to U(D_n^{(r)})$

具有如下性质：对于所有 $s \in \Gamma$，$\lim_n \|\varphi_n^{(r)}(s) - \sigma_n^{(r)}(s)\| = 0$。其余证明与 (i) 中相同。注意，$[e_n^{(0)}] - [e_n^{(1)}] \in RK^0(Y, B_{k(n,r)})_{\text{flat}}$。□

令 X 为有限连通 CW 复形。令 Γ 为离散可数群，并令 $\rho\colon \Gamma \to GL_r(C(X))$ 为一个群同态。考虑平坦丛 L_ρ，其定义为 $E\Gamma \times_\rho C(X)^r \to B\Gamma$，其典型纤维为 $C(X)^r$。令 $Y \subset B\Gamma$ 为有限 CW 复形。我们可以将 L_ρ 到 Y 的限制（记为 $L_\rho|_Y$）视为 $Y \times X$ 上的秩 r 复向量丛。

定理 5.13 (Baird-Ramras, [4])。假设 $H^k(X; \mathbb{Q}) = 0$ 对于 $k > d$ 则对于所有 $m > 0$，陈类 $c_{d+m}(L_\rho|_Y) \in H^{2d+2m}(Y \times X; \mathbb{Z})$ 在 $H^{2d+2m}(Y \times X; \mathbb{Q})$ 中映射为零。

我们将对5.13 应用定理 $X = \{点\}$，其中 $d = 0$，并对 $X = \mathbb{T}$ 应用该定理，其中 $d = 1$。

引理 5.14. 设 X 是一个拓扑空间，满足 $H^2(X, \mathbb{Q}) = 0$，且 $H^{even}(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$ 作为环由 $H^0(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q}) \oplus H^2(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$ 生成。那么对所有 $k > 1$，$H^k(X, \mathbb{Q}) = 0$。

证明. 设 $\pi_1\colon X \times \mathbb{T} \to X$ 和 $\pi_2\colon X \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为典范投影。由 [47, 定理 61.6]，交叉积 $(x, y) \mapsto x \times y = \pi_1^*(x) \cup \pi_2^*(y)$ 诱导出代数同构

$$\theta : H^*(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(\mathbb{T}, \mathbb{Q}) \to H^*(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q}). \tag{16}$$

由于 $H^2(X, \mathbb{Q}) = 0$，我们必有 $H^1(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^1(\mathbb{T}, \mathbb{Q}) \cong H^2(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$。

由上同调环 $H^*(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$ 中的 [47, 定理 61.5]，，可得

$$(\alpha \times \beta) \cup (\alpha' \times \beta') = (-1)^{(deg\beta)(deg\alpha')}(\alpha \cup \alpha') \times (\beta \cup \beta')$$

对于 $\alpha, \alpha' \in H^*(X, \mathbb{Q})$ 和 $\beta, \beta' \in H^*(\mathbb{T}, \mathbb{Q})$。由此可得，在我们的情形下 $\gamma \cup \gamma' = 0$ 对于所有γ, $\gamma' \in H^2(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$，因为 $\beta \cup \beta' = 0$ 对于 $\beta, \beta' \in H^1(\mathbb{T}, \mathbb{Q})$。由于 $H^{even}(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$作为环由 $H^0(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q}) \oplus H^2(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$生成，我们推得 $H^{2k}(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q}) = 0$ 对于所有 $k \geq 2$。由于

$$H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \oplus H^{2k-1}(X, \mathbb{Q}) \cong H^{2k}(X \times \mathbb{T}, \mathbb{Q})$$

由（16），可得 $H^j(X, \mathbb{Q}) = \{0\}$ 对所有 $j \geq 2$。□

以下是我们论文第二部分的主要结果。其第一部分（i）加强了（至少在形式上）[17], 的主要结果，因为原则上，局部 $\{GL_n(\mathbb{C})\colon n \in \mathbb{N}\}$-稳定性弱于局部 $\{U_n(\mathbb{C}) : n \in \mathbb{N}\}$-稳定性。

定理 5.15。设 Γ 是一个可数离散群，且其含有一个 γ-元素。假设 Γ 要么是 MF 且有限生成的，要么 Γ 是拟对角的。

(i) 如果 Γ 在局部上是 $\{GL_n(\mathbb{C})\colon n \in \mathbb{N}\}$-稳定的，那么对所有 $k > 0$，$H^{2k}(\Gamma, \mathbb{Q}) = 0$。

(ii) 如果 Γ 在局部上是 $\{GL_n(C(\mathbb{T}))\colon n \in \mathbb{N}\}$-稳定的，那么对所有 $k > 1$，$H^k(\Gamma, \mathbb{Q}) = 0$。

注 5.16。定理 5.15 适用于有限生成线性群和剩余有限双曲群等。事实上，根据 [17]，线性群是 MF 群；根据 [29]，它们是精确的，因此由 [56] 可知它们具有一个 γ-元素。特别地，由于 [3] 已证明：如果 Γ 是实半单李群 G 中的余紧格，且该李群不与以下任一群局部同构：当 n 为奇数时的 $SO(n, 1)$，或 $SL_3(\mathbb{R})$，那么对于某个 $i > 0$，$b_{2i}(\Gamma) > 0$；又由于余紧性意味着 Γ 是有限生成的，我们推得 Γ 不是 $\{GL_n(\mathbb{C})\colon n \in \mathbb{N}\}$-稳定的。双曲群根据 [8] 是精确的。目前尚不清楚是否存在不是剩余有限的双曲群。

证明。（定理 5.15）根据引理 5.10 和注 5.9 （iv），满足（i）或（ii）中假设的 MF 有限生成群是拟对角的。因此，在证明的其余部分中，我们可以假设 Γ 是拟对角的。

令 $B = \mathcal{Q}$ 或 $B = C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{Q}$。根据定理 5.7 我们有一个满射

$$\nu : KK(C^*(\Gamma), B)_{qd} \to RK^0(B\Gamma; B).$$

若将 $B\Gamma$ 写成有限CW 复形的递增序列 $(Y_i)_i$ 的并，那么正如 [38], 中引理 3.4的证明所解释的，存在一个 Milnor $\varprojlim^1$ 精确序列，它给出

$$RK^0(B\Gamma; B) \cong \varprojlim RK^0(Y_i; B) \tag{17}$$

由于 $K_0(B)$ 是可除的。我们将上述定义的映射 ν 与限制映射 $RK^0(B\Gamma; B) \to RK^0(Y_i; B)$ 的复合记为 ν_i 。

(i) 对于 $B = \mathcal{Q}$，利用陈特征的自然性，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} KK(C^*(\Gamma), \mathcal{Q})_{qd} & \xrightarrow{\nu} & RK^0(B\Gamma; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{ch} & H^{even}(B\Gamma; \mathbb{Q}) \\ & \searrow^{(\nu_i)} & \downarrow & & \downarrow \\ & & \varprojlim RK^0(Y_i; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{ch} & \varprojlim H^{even}(Y_i; \mathbb{Q}) \end{array}$$

其竖直映射均为双射。回想一下，我们将 $RK^0(Y; \mathbb{Q})$ 与 $RK^0(Y; \mathcal{Q})$ 视为相同，[36]。将 $\mathcal{Q}$写成矩阵代数 $B_k \cong M_{k!}(\mathbb{C})$ 的归纳极限。由命题 5.12，任意 ν_i 的像都包含在 $\varinjlim_k RK^0(Y_i; B_k)_{\text{flat}}$ 中，因此，由定理 5.13 应用于 $X = \{\text{点}\}$可知，映射 $ch \circ \nu_i : RK^0(Y_i; \mathbb{Q}) \to H^{even}(Y_i; \mathbb{Q})$ 的像包含在 $H^0(Y_i; \mathbb{Q})$ 中。由于 ν是满射，可得 $ch(RK^0(B\Gamma; \mathbb{Q})) = H^{even}(B\Gamma; \mathbb{Q})$，进而对所有 $k \geq 1$，都有 $H^{2k}(\Gamma, \mathbb{Q}) = 0$。

(ii) 现在令 $B = C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{Q}$，并将 B 写成 $B_k = C(\mathbb{T}) \otimes M_{k!}(\mathbb{C})$ 的归纳极限。与上文相同，我们将映射 ν 与限制映射 $RK^0(B\Gamma; B) \to RK^0(Y_i; B) \cong RK^0(Y_i \times \mathbb{T}; \mathbb{Q})$ 的复合记为 ν_i 。由 (10) 和 (17)，我们有

$$RK^0(B\Gamma; B) = RK^0(B\Gamma; C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{Q}) \cong \varprojlim RK^0(Y_i; C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{Q}) \cong$$
$$\varprojlim RK^0(Y_i \times \mathbb{T}; \mathcal{Q}) \cong \varprojlim RK^0(Y_i \times \mathbb{T}; \mathbb{Q}) \cong RK^0(B\Gamma \times \mathbb{T}; \mathbb{Q}).$$

为简化记号，我们仍用 ν 表示通过将 ν 与上文的同构 $RK^0(B\Gamma; B) \cong RK^0(B\Gamma \times \mathbb{T}; \mathbb{Q})$ 复合而得到的最大周期 $KK(C^*(\Gamma) B)_{qd} \to RK^0(B\Gamma \times \mathbb{T}; \mathbb{Q})$。

我们将论证，每个映射 $\nu_i : KK(C^*(\Gamma) B)_{qd} \to RK^0(Y_i \times \mathbb{T}; \mathbb{Q})$ 都具有如下性质：有理陈类满足 $c_m(\nu_i(y)) = 0$ 对所有 $y \in KK(C^*(\Gamma) B)_{qd}$ 和 $m \geq 2$均成立。事实上，根据命题 5.12，每个 ν_i 的像都包含于 $\varinjlim_k RK^0(Y_i; B_k)_{\text{flat}}$，因此由定理 5.13 应用于 $X = \mathbb{T}$，可得所需性质。由此，对于所有$y \in KK(C^*(\Gamma) B)_{qd}$， $\nu_i(y)$ 的陈特征可计算如下：

$$ch(\nu_i(y)) = exp(c_1(\nu_i(y))).$$

利用垂直箭头均为双射的交换图

$$\begin{array}{ccccc} KK(C^*(\Gamma), C(\mathbb{T})\otimes\mathcal{Q})_{qd} & \xrightarrow{\nu} & RK^0(B\Gamma\times\mathbb{T};\mathbb{Q}) & \xrightarrow{ch} & H^{even}(B\Gamma\times\mathbb{T};\mathbb{Q}) \\ & \searrow^{(\nu_i)} & \downarrow & & \downarrow \\ & & \varprojlim RK^0(Y_i\times\mathbb{T};\mathbb{Q}) & \xrightarrow{ch} & \varprojlim H^{even}(Y_i\times\mathbb{T};\mathbb{Q}) \end{array}$$

我们推得，对于所有 $y\in KK(C^*(\Gamma)\ B)^{qd}$， $ch(\nu(y)) = exp(c_1(\nu(y)))$，从而根据 ν 的满射性，对于所有 $z\in RK^0(B\Gamma\times\mathbb{T};\mathbb{Q})$， $ch(z) = exp(c_1(z))$。由于陈特征是一个有理同构，且第一陈类的像具有二度，因此 $H^{even}(B\Gamma\times\mathbb{T},\mathbb{Q})$作为环由 $H^0(B\Gamma\times\mathbb{T},\mathbb{Q})\oplus H^2(B\Gamma\times\mathbb{T},\mathbb{Q})$ 生成。现在由引理 5.14得到定理的结论，因为 $H^*(B\Gamma,\mathbb{Q})\cong H^*(\Gamma,\mathbb{Q})$，并且根据上面的 (i) 部分和注 5.9 (iv)，我们已经知道 $H^2(B\Gamma,\mathbb{Q}) = 0$。□

下面定理的第一部分已在我们较早的论文中得到证明 [17]。为完整起见，我们给出其陈述。

定理 5.17. 设 Γ 是一个含有 γ-元素的 MF 可数离散群。

(i) 如果 Γ 是局部 $\{U_n(\mathbb{C}):\ n\in\mathbb{N}\}$-稳定的，则对所有 $k>0$， $H^{2k}(\Gamma,\mathbb{Q}) = 0$。
(ii) 如果 Γ 是局部 $\{U_n(C(\mathbb{T})):\ n\in\mathbb{N}\}$- 稳定的，则对所有 $k>1$， $H^k(\Gamma,\mathbb{Q}) = 0$。

证明。 由引理 5.10(i)， Γ 是拟对角的。由于局部 $U(\mathcal{B})$-稳定性蕴含局部 $GL(\mathcal{B})$-稳定性，定理 5.17 由定理 5.15得出。 □

References

[1] G.Arzhantseva。有限生成群的渐近逼近。载于 *Extended abstracts Fall 2012—automorphisms of free groups*，《 *Trends Math. Res. Perspect. CRM Barc.*》第1卷，第7–15页。施普林格，沙姆，2014年。1[2] M. F. 阿蒂亚。有限群的特征与上同调。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(9)：23–64，1961年。6[3] U. Bader、A. Lubotzky、R.Sauer 和S.Weinberger。半单群中格的稳定性与不稳定性。arXiv:2303.08943 [math.GR], 2023。2、3、19[4] T.Baird和D. A.Ramras。映射到代数集以及平坦联络空间的光滑化。 *Geom. Dedicata*，174：359–374，2015年。1、4、19[5] P. Baum、A. Connes 和N.Higson。真作用的分类空间以及群 K-理论和群 C^*-代数。载于*C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*，《 *Contemp. Math.*》第167卷，第240–291页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。13、14[6] A.Borel。对称空间的紧 Clifford-Klein形式。 *Topology*，2：111–122，1963年。3[7] M. R.Bridson和A. Haefliger。 *Metric spaces of non-positive curvature*，《 *Grundlehren der math-ematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*》第319卷。施普林格-弗拉格，柏林，1999年。10、11[8] N. P. Brown 和N. Ozawa。 *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*，《 *Graduate Studiesin Mathematics*》第88卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。17、19[9] M. Burger、N.Ozawa和 A. Thom。论 Ulam稳定性。 *Israel J. Math.*，193(1)：109–129，2013年。2[10] P.Buser和 H.Karcher。 *Gromov's almost flat manifolds*，《 *Astérisque*》第81卷。Soci´et´e Math´ematique de France，巴黎，1981年。9、11

[11] J. R. Carri´on 和 M. Dadarlat。曲面群的拟表示。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，88(2):501–522，2013。8[12] J. R. Carri´on、M. Dadarlat 和 C. Eckhardt。关于具有拟对角 C^*-代数的群。 *J. Funct. Anal.*，265(1):135–152，2013。4[13] P.-A. Cherix、M. Cowling、P. Jolissaint、P. Julg 和 A. Valette。 *Groups with the Haagerup property*，*Progress in Mathematics*第 197 卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2001 年。Gromov 的 a-T-可驯性。4[14] A. Connes、M. Gromov 和 H. Moscovici。Novikov 猜想与几乎平坦丛。 *C. R. Acad. Sci. ParisSér. I Math.*，310(5):273–277，1990。1，7，8，9，12[15] M. Dadarlat。群的拟表示与指标理论。 *J. Topol. Anal.*，4(3):297–319，2012。7[16] M. Dadarlat。群的拟表示与几乎平坦丛。 *J. Noncommut. Geom.*，8(1):163–178，2014。11，12，14，16，18[17] M. Dadarlat。离散群的矩阵稳定性障碍与几乎平坦 K 理论。 *Adv. Math.*，384：论文编号 107722，29，2021。1，2，3，4，11，12，14，15，16，19，21[18] M. Dadarlat。群的拟表示与二阶同调。 *Comm. Math. Phys.*，393(1):267–277，2022。2[19] M. Dadarlat 和 E. Guentner。保持离散群希尔伯特空间一致可嵌入性的构造。*Trans. Amer. Math. Soc.*，355(8):3253–3275（电子版），2003。4[20] M. De Chiffre、L. Glebsky、A. Lubotzky 和 A. Thom。稳定性、上同调消失与不可逼近群。 *Forum Math. Sigma*，8:e18，2020。4[21] S. Eilers、T. Shulman 和 A. P. W. Sørensen。离散群的 C^*-稳定性。 *Adv. Math.*，373:107324，41，2020。2，3，16[22] H. Emerson 和 R. Meyer。Dirac–对偶 Dirac 方法的下降原理。 *Topology*，46(2):185–209，2007。13[23] H. E merson 和 B. Nica。K-同调有限性与双曲群。 *J. Reine Angew. Math.*，745:189–229，2018。13[24] D. B. A. Epstein 和 K. Fujiwara。字双曲群的二阶有界上同调。 *Topology*，36(6):1275–1289，1997。2[25] L. Glebsky、A. Lubotzky、N. Monod 和 B. Rangarajan。半单群中格的渐近上同调与一致稳定性。arXiv:2301.00476 [math.GR], 2022。2[26] M. Gromov。关于 Novikov 猜想的几何反思。载于 *Novikov conjectures index theorems and rigidity Vol. 1 (Oberwolfach, 1993)*，*London Math. Soc. Lecture Note Ser.*第 226 卷，第 164–173 页。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。1[27] M. Gromov。正曲率、宏观维数、谱隙与高阶特征数。载于 *Functional analysis on the eve of the 21st century Vol. II (New Brunswick, NJ, 1993)*，*Progr. Math.*第 132 卷，第 1–213 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1996 年。1，13[28] M. Gromov。正曲率、宏观维数、谱隙与高阶特征数。载于 *Functionalanalysis on the eve of the 21st century Vol. II (New Brunswick, NJ, 1993)*，*Progr. Math.*第 132 卷，第 1–213 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1996 年。2，11[29] E. Guentner、N. Higson 和 S. Weinberger。线性群的 Novikov 猜想。 *Publ. Math. Inst. HautesÉtudes Sci.*，(101):243–268，2005。4，19[30] B. Hanke。正标量曲率、K-面积与本质性。载于 *Global differential geometry*，*Springer Proc. Math.*第 17 卷，第 275–302 页。施普林格，海德堡，2012 年。1，5，6，9，10[31] B. Hanke 和 T. Schick。可放大性与指标理论。 *J. Differential Geom.*，74(2):293–320，2006。1，9，13[32] B. Hunger。几乎平坦丛与无限 K-面积的同调不变性。 *New York J. Math.*，25:687–722，2019。1，8，9，12[33] G. Kasparov 和 G. Skandalis。“bolique”群与 Novikov 猜想。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IMath.*，319(8):815–820，1994。14[34] G. Kasparov 和 G. Skandalis。适当作用于“bolic”空间的群与 Novikov 猜想。 *Ann. ofMath. (2)*，158(1):165–206，2003。4，13

[35] G. G. Kasparov. 等变 KK-理论与 Novikov 猜想。 *Invent. Math.*, 91(1):147–201, 1988. 1, 11, 13, 15, 18[36] G. G. Kasparov. K-理论、群 C^*-代数与高阶特征数（概述）。载于 *Novikov conjectures, indextheorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser.*第 226 卷，页码 101–146。剑桥大学出版社，剑桥，1995. 14, 20[37] G. G. Kasparov. K-理论、群 C^*-代数与高阶特征数（概述）。载于 *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser.*第 226 卷，页码 101–146。剑桥大学出版社，剑桥，1995. 18[38] G. G. Kasparov and G. Skandalis. 作用于建筑上的群、算子 K-理论与 Novikov 猜想。*K-Theory*, 4(4):303–337, 1991. 4, 14, 15, 20[39] D. Kazhdan. 关于 ε-表示。 *Israel J. Math.*, 43(4):315–323, 1982. 2[40] S. Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. 普林斯顿经典文库。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州， [2014]. 1987 年版重印 [MR0909698]. 6[41] I. Kol´aˇr、P. W. Michor 和 J. Slov´ak。 *Natural operations in differential geometry*. 施普林格出版社，柏林，1993. 6[42] Y. Kubota. 几乎平坦相对向量丛与几乎单值化对应。 *J. Topol. Anal.*, 14(2):353–382, 2022. 8[43] Y. Kubota. 相对 Mishchenko-Fomenko 高阶指标与几乎平坦丛 II：几乎平坦指标配对。*J. Noncommut. Geom.*, 16(1):215–264, 2022. 1, 11, 12, 16[44] J.-S. Li and J. J. Millson. 关于具有算术基本群的双曲流形的第一贝蒂数。 *Duke Math. J.*, 71(2):365–401, 1993. 3[45] R. Meyer and R. Nest. 通过范畴局部化研究 Baum-Connes 猜想。 *Topology*, 45(2):209–259, 2006. 13[46] J. Milnor. 关于零曲率联络的存在性。 *Comment. Math. Helv.*, 32:215–223, 1958. 4, 13[47] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley 出版公司，门洛帕克，加利福尼亚州，1984. 19[48]S. Nishikawa and V. Proietti. 具有 Spanier-Whitehead 对偶性的群。预印本，2019，arXiv:1908.03749[math.KT]. 15[49] A. Phillips and D. Stone. 格点规范场、主丛与拓扑荷的计算。 *Comm.Math. Phys.*, 103(4):599–636, 1986. 12[50] A. V. Phillips and D. A. Stone. 计算 U(p) 值格点规范场陈类的新方法。第 17 卷，页码 621–623。1990。Lattice 89（卡普里，1989）。12[51] T. Schick. L^2-指标定理、 KK-理论与联络。 *New York J. Math.*, 11:387–443（电子版），2005. 5[52] G. Skandalis. K-理论中核性的一个概念。 *K-theory*, 1(5):549–573, 1988. 15[53] G. Skandalis. 通过循环上同调研究 Novikov 猜想（据 A. Connes、M. Gromov 和 H. Moscovici）。第 201–203 号，页码 Exp. No. 739, 299–320 (1992)。1991。S´Bourbaki 研讨班，1990/91 年卷。7[54] A. Thom. 群的有限近似及其应用。载于 *Proceedings of the International Con-gress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures*, 页码 1779–1799。World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018. 1[55] A. Tikuisis, S. White, and W. Winter. 核 C^*-代数的拟对角性。 *Ann. of Math. (2)*, 185(1):229–284, 2017. 4, 15[56] J.-L. Tu. 对可一致嵌入希尔伯特空间的群的伽马元。载于 *Recentadvances in operator theory, operator algebras, and their applications, Oper. Theory Adv. Appl.* 第 153 卷，页码 271–286。Birkh¨auser，巴塞尔，2005. 1, 4, 13, 19

MD: Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, USA

Email address: mdd@purdue.edu