arXiv:2304.04651v1 [math.LO] 10 Apr 2023

´滤子、理想独立性与理想型莫鲁卡空间

S. Bardyla, J. Cancino-Manr´iquez, V. Fischer, 和 C. Bacal Switzer

Abstract. 如果对于所有有限的 $\{X_i\}_{i\in n} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $A \in \mathcal{A} \setminus \{X_i\}_{i\in n}$, 集合 $A \setminus \bigcup_{i\in n} X_i$ 都是无限的，则称族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 为理想独立。

我们证明，对于某个定义在 ω 上的特定理想 $\mathcal{J}$，理想独立族 $\mathcal{A}$ 是极大的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{J}$-完全可分的，并且是极大的 $\mathcal{J}$-几乎不交族。我们证明 $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{s}_{mm}$，其中 $\mathfrak{s}_{mm}$ 是极大理想独立族的最小基数。特别地，这确立了 $\mathfrak{s}_{mm}$ 与 $\mathfrak{i}$ 的独立性。给定任意不可数基数集合 C，我们展示如何通过强迫同时添加基数为 λ 的极大理想独立族，对每个 $\lambda \in C$ 均如此，从而确立 $C \subseteq \mathrm{spec}(\mathfrak{s}_{mm})$ 的相容性。假设连续统假设，我们构造一个极大理想独立族；在任何适当的、 ${}^\omega\omega$-保界的、保留 p-点的强迫概念下强迫之后，它仍然是极大的。我们还在若干广为研究的强迫扩张中计算 $\mathfrak{s}_{mm}$。

我们还研究与理想独立性相关的自然滤子，并为理想独立族引入 Mr´owka 空间的一个类比。

1. Introduction

给定一个族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$，由 $\mathcal{A}$ 生成的理想是所有满足如下条件的 $X \subseteq \omega$ 的集合：存在某个 $\{A_i\}_{i\in n} \subseteq \mathcal{A}$ 使得 $X \subseteq^* \bigcup_{i<n} A_i$，其中 $\subseteq^*$ 表示模有限包含。若没有任何 $A \in \mathcal{A}$ 属于由 $\mathcal{A} \setminus \{A\}$生成的理想，则称族 $\mathcal{A}$为理想独立。几乎不交族和独立族都是理想独立族的例子。应用佐恩引理很容易证明极大理想独立族存在；然而，极大几乎不交族或极大独立族并不总是极大理想独立族。本文针对每个理想独立族 $\mathcal{A}$，构造一个理想 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$（见定义3.1），并据此得到如下对极大理想独立族的刻画（见定理3.3）：

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03E35,03E17,54A35.

Key words and phrases. 理想独立族、理想、滤子、超滤子、基数特征、莫罗卡空间。

Acknowledgments.: 第一作者获得了奥地利科学基金会FWF的资助（ESP399项目）。第二、第三和第四作者感谢奥地利科学基金会（FWF）通过START项目Y1012-N35提供的慷慨支持。

定理。理想独立族 $\mathcal{A}$ 是极大的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是极大 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-几乎不交的，并且 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-完全可分。

我们用 $\mathfrak{s}_{mm}$ 表示极大理想独立族的最小基数。关于 $\mathfrak{s}_{mm}$ 的早期研究可见 [5], ，其中证明了 $\max\{\mathfrak{d},\mathfrak{r}\} \leq \mathfrak{s}_{mm}$ ，并且以下每个不等式 $\mathfrak{u} < \mathfrak{s}_{mm}$、$\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{i}$、 $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{c}$ 都是一致的。这里， $\mathfrak{d}$、 $\mathfrak{u}$、 $\mathfrak{r}$、 $\mathfrak{i}$ 分别表示支配数、超滤数、再分割数和独立数。关于组合基数特征的定义和基本性质（本文不再赘述），请参阅 [1] 。在第 2 节中，我们通过加强和补充上述结果，证明以下 ZFC 不等式，它也回答了 [5], 的问题 17；参见定理 3.7：

定理。 $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{s}_{mm}$。

因此，我们得到了 $\mathfrak{s}_{mm}$ 与 $\mathfrak{i}$ 的独立性： $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{i}$ 的一致性已在 [5, 定理 16], 中得到证明，而 $\mathfrak{i} < \mathfrak{u}$ 的一致性则由 Shelah 的 [17] 建立；因此，根据上述定理， $\mathfrak{i} < \mathfrak{s}_{mm}$ 在后一个模型中成立。

推论。 $\mathfrak{s}_{mm}$ 与 $\mathfrak{i}$ 独立。

在我们的研究中，特定滤子发挥着关键作用，它们与给定的理想独立族自然相关。一方面，这些滤子是我们所称的补滤子，见定义3.1；另一方面，还有一些滤子类似于独立族的对角化滤子这一概念，例如见 [8, 定义 1]。与早先出现的对角化实数不同（例如与几乎不交族、塔或余有限群相关的对角化实数），对于给定的理想独立族，对角化实数的存在性需要借助 Cohen 实数（见引理 4.1）。通过沿适当的有限支撑迭代共终地为理想独立族加入对角化实数，并以此前用于控制独立谱等性质的强迫构造为基础加以修改（特别参见 [8, 9]），我们得到以下结果（见定理 4.4）：

定理。（GCH）设 R 是一组正则不可数基数。那么，存在一个 ccc 泛型扩张，使得对于每个 $\lambda \in R$ ，都存在一个基数为 λ 的极大理想独立族。

此外，我们还研究了对 $\mathfrak{s}_{mm}$的小见证的保留性。在强迫迭代下保留实数极值集的极大性（例如极大几乎不相交族、实数的极大最终不同族或极大独立族）通常是一项非平凡的任务，并且往往涉及构造一个在强意义下极大的组合对象，例如紧几乎不相交族和选择性独立族。部分受到高阶贝尔空间中 $\mathcal{U}$支持的极大独立族这一概念的启发（见 [7], 中的定义 5.1），我们引入

$\mathcal{U}$涵盖的理想独立族这一概念，并建立以下强有力的保留性结果（见定理 5.2 和 5.3）。

定理。（连续统假设）存在一个极大理想独立族 $\mathcal{A}$ ，它在任何由适当的、 ω^ω-有界且保 p 点的强迫概形所得到的泛型扩张中仍然是极大的，因此也是 $\mathfrak{s}_{mm} = \aleph_1$ 的见证。

上述定理适用于一大类偏序，并意味着在许多经过充分研究的强迫扩张中，$\mathfrak{s}_{mm} = \max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\}$。

最后，对于每个理想独立族 $\mathcal{A}$ ，我们对应一个拓扑空间 $\psi(\mathcal{A})$，它是著名的 Mr´owka 空间的推广版本。Mr´owka 空间在集合论拓扑中发挥着重要作用（参见 [12] 及其中的参考文献）。本文刻画了其对应空间为局部紧或伪紧的理想独立族（见命题 6.6 和 6.7）。令人惊讶的是，这对应于几乎不交族的情形，这表明由非几乎不交族构成的 Mr´owka 空间与经典理论中的情形迥然不同。具体而言，我们证明如下结论。

定理。对于一个极大理想独立族 $\mathcal{A}$ ，以下条件等价。

(1) $\psi(\mathcal{A})$是伪紧的。(2) $\mathcal{A}$ 是 MAD 族。
(3) $\mathcal{A}$ 是一个完全可分的 MAD 族。

我们以对剩余未解决问题的简要讨论结束本文。

2. Preliminaries

回顾一下，给定 $f, g \in \omega$ ，我们记作 $f \leq^* g$ （f 最终被 g支配），当且仅当存在 $n \in \omega$ ，使得对所有 $m \geq n$， $f(m) \leq g(m)$。基数 $\mathfrak{b}$，即有界数，是这样一个族 $A \subseteq \omega^\omega$ 的最小大小：没有任何单个 $f \in \omega^\omega$ 能最终支配其中的每个 $g \in A$。对偶地，支配数 $\mathfrak{d}$是支配族的最小大小，也就是说，是这样一个族 $D \subseteq \omega^\omega$的最小大小：每个 $f \in \omega^\omega$ 都最终被某个 $g \in D$支配。我们用 $[\omega]^\omega$ 表示 Ramsey 空间，即 ω 的无限子集构成的 Polish 空间。通常，将该空间按由有限子集组成的理想 Fin 取商会很方便。例如，若 A、B 属于 $[\omega]^\omega$ ，则记作 $A \subseteq^* B$，读作“A 几乎包含于 B”，当且仅当 $A \setminus B$ 是有限集。类似地，若 A 与 B 的对称差为有限集，我们称它们几乎相等，记作 $A =^* B$；若 A 与 B 的交集为有限集，我们称它们几乎不交，记作 $A \cap B =^* \emptyset$。

给定由 $\mathcal{A}^+$ 确定的 ω 的子集族 $\mathcal{A}$ ，我们用 ω 表示所有不属于由 $\mathcal{A}$ 生成的理想的子集。对于包含理想 Fin 的 ω 上的理想 $\mathcal{J}$ ，以及 ω 的子集 A、B ，若 $A \setminus B \in \mathcal{J}$，则记作 $A \subseteq^{\mathcal{J}} B$ 。若对于

任意不同的 A_1、$A_2 \in \mathcal{A}$，都有，则称族 $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega \setminus \mathcal{J}$ 为 -几乎不交族。给定一个族 $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega \setminus \mathcal{J}$，令

$$\mathcal{B}^{+\mathcal{J}} = [\omega]^\omega \setminus \{X \in [\omega]^\omega : X \subseteq^{\mathcal{J}} \bigcup \mathcal{Y}, \text{ where } \mathcal{Y} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$$

and

$$\mathcal{B}^{++\mathcal{J}} = \{X \in [\omega]^\omega : \exists \{B_i : i \in \omega\} \in [\mathcal{B}]^\omega \text{ such that } X \cap B_i \notin \mathcal{J} \quad \forall i \in \omega\}.$$

集合 $\mathcal{B}^{+\mathcal{J}}$ 中的元素称为相对于理想 $\mathcal{J}$ 的正元素。若 $\mathcal{J} = \mathsf{Fin}$，则我们写作 $\mathcal{B}^+$（分别为 $\mathcal{B}^{++}$），而不写 $\mathcal{B}^{+\mathcal{J}}$（分别为 $\mathcal{B}^{++\mathcal{J}}$）。

给定一个族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$，若其任意有限子族的交集都是无限的，我们就称 $\mathcal{A}$ 具有有限交性质。若无限子集 $B \subseteq \omega$ 满足对每个 $A \in \mathcal{A}$ 都有 $B \subseteq^* A$，则称其为族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 的伪交。基数特征 $\mathfrak{p}$ 是具有有限交性质但没有伪交的族的最小基数。若超滤子包含一个单元素集，则称其为主超滤子；否则称为非主超滤子。除非另有说明，我们均假设所有超滤子都是非主超滤子。若 $\mathscr{U}$ 是一个超滤子，则 $\mathscr{U}$ 的一个基是子集 $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{U}$，使得每个元素 $A \in \mathscr{U}$ 都几乎包含某个 $B \in \mathcal{B}$。此时，我们称 $\mathcal{B}$ 生成 $\mathscr{U}$，有时记作 $\langle \mathcal{B} \rangle$。超滤数 $\mathfrak{u}$ 是非主超滤子之基的最小基数。对于超滤子 $\mathscr{U}$，我们称

(1) $\mathscr{U}$ 是一个 p-点，如果 $\mathscr{U}$ 的每个可数子族在 $\mathscr{U}$中都有一个伪交。(2) $\mathscr{U}$ 是一个 q-点，如果将 ω 划分为有限集的任意划分 $\{I_n\}_{n<\omega}$，则存在一个 $U \in \mathscr{U}$，使得对于每个 $n < \omega$都有 $|U \cap I_n| = 1$。(3) $\mathscr{U}$ 是 Ramsey 的，或称选择的，当且仅当它是一个 p-点和一个 q-点。(4) $\mathscr{U}$ 是一个 $p_\mathfrak{c}$-点，如果任意 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$、$|\mathscr{F}| < \mathfrak{c}$ 在$\mathscr{U}$ 中都有一个伪交。

最后，若对于 $\mathcal{I}$ 的任意两个有限、互不相交且非空的子族 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，集合 $\bigcap A \setminus \bigcup \mathcal{B}$ 都是无限的，则称族 $\mathcal{I} \subseteq [\omega]^\omega$ is为独立族。尽管这一概念在技术上对有限族也有意义，但在这种情况下它有些退化，因此我们将默认独立族指无限的独立族。一个极大的（无限）独立族的最小基数记为 $\mathfrak{i}$。

3. Filters, Almost Disjointness and Ideal Independence

以下定义在本节中起着核心作用。

定义3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族，且 $A \in \mathcal{A}$。

(1) 用 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$表示由该族生成的滤子

$$\{A \setminus \bigcup \mathcal{B} : A \notin \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\}.$$

(2) 用 $\mathcal{J}(\mathcal{A}, A)$表示由该族生成的理想

$$\{A \cap B : B \in \mathcal{A} \setminus \{A\}\} \cup \mathsf{Fin}.$$

(3) 我们用 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 表示由族 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{J}(\mathcal{A}, A)$ 生成的理想。

我们将形如 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 的滤子称为 $\mathcal{A}$ 的补滤子；对于固定的 $A \in \mathcal{A}$，则称 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 为对应于 A 的（ $\mathcal{A}$ 的）补滤子。注意，对于任意 $A \in \mathcal{A}$，子集 $B \subseteq A$属于理想 $\mathcal{J}(\mathcal{A}, A)$ 当且仅当 $A \setminus B \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$。

注意，理想独立族 $\mathcal{A}$ 是极大的，当且仅当每个$X \in [\omega]^\omega$ 要么属于由 $\mathcal{A}$ 生成的理想，要么属于滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 中至少一个（这两种可能并不互斥）。“补滤子”这一名称源于如下观察：在极大性下， $\mathcal{A}$ 所生成的理想的补集中的每个元素都属于某个补滤子。

下面引理的证明是直接的。

引理 3.2. 对于族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$，以下陈述成立：

(1) 如果对于某个理想 $\mathcal{J}$ on ω，族 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{J}$-几乎不交的，那么 $\mathcal{A}$ 是理想独立的；(2) 如果族 $\mathcal{A}$ 是理想独立的，那么 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-几乎不交的。

定义. 若一个 $\mathcal{J}$-几乎不交族 $\mathcal{A}$ 满足：对于任意 $B \in \mathcal{A}^{++\mathcal{J}}$，都存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $A \subseteq^{\mathcal{J}} B$，则称其为 $\mathcal{J}$-完全可分的。

容易验证，对于任意极大的 $\mathcal{J}$-几乎不交族 $\mathcal{A}$，都有 $\mathcal{A}^{+\mathcal{J}} = \mathcal{A}^{++\mathcal{J}}$。当 $\mathcal{J} =$ 为 Fin 时，我们将 $\mathcal{J}$-完全可分族简称为完全可分族。在 ZFC 中，完全可分极大几乎不交族是否存在仍是一个开放问题（相关历史见 [13] ）。完全可分极大几乎不交族已在文献中得到广泛研究（参见综述 [11] 及其中的参考文献）。 $\mathcal{J}$-几乎不交族近期在 [16] 中得到了研究。下面的定理建立了 $\mathcal{J}$-完全可分$\mathcal{J}$-几乎不交族与极大理想独立族之间的联系。

定理 3.3. 理想独立族 $\mathcal{A}$ 是极大的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是极大 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-几乎不交的，且 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-完全可分的。

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是极大理想独立族。由引理 3.2，族 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-几乎不交的。为导出矛盾，假设存在 $B \in \mathcal{J}(\mathcal{A})^+ \setminus \mathcal{A}$，使得对任意 $A \in \mathcal{A}$，都有 $B \cap A \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$。那么 $\mathcal{A} \cup \{B\}$ 是理想独立的，这与 $\mathcal{A}$ 的极大性矛盾。因此，族 $\mathcal{A}$ 是极大 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-几乎不交的。为证明族 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-完全可分的，任取 $C \in \mathcal{A}^{++\mathcal{J}(\mathcal{A})}$。注意到 $C \in \mathcal{A}^+ \setminus \mathcal{A}$。根据 $\mathcal{A}$ 的极大性，存在 $A \in \mathcal{A}$ 和 $\{A_i : i \in n\} \in [\mathcal{A} \setminus \{A\}]^{<\omega}$，使得 $A \subseteq^* \bigcup_{i\in n} A_i \cup C$。因此

$$A = A \cap A \subseteq^* A \cap \big(\bigcup_{i\in n} A_i \cup C\big) \subseteq \big(\bigcup_{i\in n}(A \cap A_i)\big) \cup C.$$

然后 $A \subseteq^{\mathcal{J}(\mathcal{A})} C$，当 $\bigcup_{i\in n}(A \cap A_i) \in \mathcal{J}(\mathcal{A}, A) \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{A})$ 时。由此可知，族 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$-完全可分的。

假设族 $\mathcal{A}$ 是极大的 $\mathcal{J}$（$\mathcal{A}$）-几乎不交且 $\mathcal{J}$（$\mathcal{A}$）-完全可分的。由引理 3.2，族 $\mathcal{A}$ 是理想独立的。

任取 $C \in \mathcal{A}^+$。我们来证明$C \in \mathcal{A}^{+\mathcal{J}(\mathcal{A})}$。反设不然，则可找到 $\{A_i : i \in n\} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ 和 $D \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$，使得 $C \subseteq \bigcup_{i\in n} A_i \cup D$。于是存在 $\{D_i : i \in m\} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$，使得 $D \subseteq^* \bigcup_{i\in m} D_i$。但此时 $C \subseteq^* \bigcup_{i\in n} A_i \cup (\bigcup_{i\in m} D_i)$，这表明 $C \notin \mathcal{A}^+$。由此矛盾可知$C \in \mathcal{A}^{+\mathcal{J}(\mathcal{A})}$。考虑到 $\mathcal{A}^{+\mathcal{J}(\mathcal{A})} = \mathcal{A}^{++\mathcal{J}(\mathcal{A})}$，$\mathcal{J}(\mathcal{A})$-完全可分性意味着存在 $A \in \mathcal{A}$，使得 $A \subseteq^{\mathcal{J}(\mathcal{A})} C$。根据 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$的定义，集合 $A \setminus C$ 属于$\mathcal{J}(\mathcal{A})$，因而它可以模有限地被有限多个元素 E_1、.....、$E_m \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$的并覆盖，这表明 $C \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$。因此，族 $\mathcal{A}$ 是极大理想独立的。□

定理 3.3 的以下推论描述了极大理想独立的几乎不交族。

推论 3.4。几乎不交族 $\mathcal{A}$ 是极大理想独立的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是完全可分的极大几乎不交族。

注意，独立族从来都不是极大理想独立的。事实上，对于独立族 $\mathcal{A}$ 的每个元素 A，族 $\mathcal{A}\cup\{\omega\setminus A\}$ 都是理想独立的。

对于一个滤子 $\mathcal{F}$令 $\chi(\mathcal{F}) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$是 $\mathcal{F}\}$的基。

定理 3.5. 设 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ 是一个（极大的）理想独立族，并且对于任意 $\alpha \in \kappa$，$\mathcal{G}_\alpha$，设它们是 ω 上的滤子，使得 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A_\alpha) \subseteq \mathcal{G}_\alpha$且 $\chi(\mathcal{G}_\alpha) \leq \kappa$。则存在一个（极大的）理想独立族$\mathcal{A}' = \{A'_\alpha : \alpha \in \kappa\}$，使得对于所有 $\alpha \in \kappa$，都有 $\mathcal{F}(\mathcal{A}', A'_\alpha) = \mathcal{G}_\alpha$。

证明。固定一个理想独立族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ 以及满足上述条件的滤子 $\mathcal{G}_\alpha$、$\alpha \in \kappa$。对于每个 $\alpha \in \kappa$，令 $\mathcal{C}_\alpha$ 为 $\mathcal{G}_\alpha$ 的一个基，其基数为 $\leq \kappa$。此外，假设对于每个 $\alpha \in \kappa$ 和 $C \in \mathcal{C}_\alpha$，都有 $C \subseteq A_\alpha$。后一个假设意味着，对于每个 $\alpha \neq \beta$，都有 $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta = \emptyset$。将集合 $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha\in\kappa} \mathcal{C}_\alpha$ 枚举为 $\{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$，并进一步假设对于每个 $\alpha \in \kappa$，都有 $D_\alpha \notin \mathcal{C}_\alpha$。对于每个 $\alpha \in \kappa$，令 $A'_\alpha = A_\alpha \cup (A_{\sigma(\alpha)} \setminus D_\alpha)$，其中 $D_\alpha \in \mathcal{C}_{\sigma(\alpha)}$。由于对于每个 $\alpha \neq \beta$，集合 $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta$ 为空，序数 $\sigma(\alpha)$是唯一的，因此定义良好。我们来证明族 $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ 是理想独立的。固定任意 $\alpha \in \kappa$和 $\{\beta_i : i \in n\} \in [\kappa \setminus \{\alpha\}]^{<\omega}$。我们需要证明 $A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A'_{\beta_i} \neq^* \emptyset$。有两种情况：

(1) $\alpha \notin \{\sigma(\beta_i) : i \in n\}$;
(2) $\alpha \in \{\sigma(\beta_i) : i \in n\}$。

情形 1）注意到 $A_\alpha \subseteq A'_\alpha$ 和

$$\bigcup_{i\in n} A'_{\beta_i} = \bigcup_{i\in n} (A_{\beta_i} \cup (A_{\sigma(\beta_i)} \setminus D_{\beta_i})) \subseteq \bigcup_{i\in n} (A_{\beta_i} \cup A_{\sigma(\beta_i)}).$$

因此，$A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A'_{\beta_i} \subseteq A_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} (A_{\beta_i} \cup A_{\sigma(\beta_i)}) \neq^* \emptyset$，因为 α 不属于 $\{\beta_i : i \in n\} \cup \{\sigma(\beta_i) : i \in n\}$，且族 $\mathcal{A}$ 是理想独立的。

情形 2）设 $\Gamma = \{i \in n : \alpha = \sigma(\beta_i)\}$。由于 $A_\alpha \cap \bigcap_{i\in\Gamma} D_{\beta_i} \in \mathcal{G}_\alpha$，我们得到：

$$A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n}(A_{\beta_i} \cup (A_{\sigma(\beta_i)} \setminus D_{\beta_i})) \supseteq$$
$$\big(A_\alpha \setminus (\bigcup_{i\in n} A_{\beta_i})\big) \cap (A_\alpha \cap \bigcap_{i\in\Gamma} D_{\beta_i}) \cap (A_\alpha \setminus (\bigcup_{i\notin\Gamma} A_{\sigma(\beta_i)})) \in \mathcal{G}_\alpha.$$

因此 $A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A'_{\beta_i} \neq^* \emptyset$，这表明族 $\mathcal{A}'_\alpha$ 是理想独立的。

任取 $\alpha \in \kappa$ 和 $C \in \mathcal{C}_\alpha$。存在 $\xi \in \kappa \setminus \{\alpha\}$ 使得 $C = D_\xi \subseteq A_\xi$。注意到 $\sigma(\xi) = \alpha$。于是

$$A'_\alpha \setminus (A'_{\sigma(\alpha)} \cup A'_\xi) \subseteq (A_\alpha \cup (A_{\sigma(\alpha)} \setminus D_\alpha)) \setminus \big(A_{\sigma(\alpha)} \cup (A_{\sigma(\xi)} \setminus D_\xi)\big)$$
$$\subseteq A_\alpha \setminus (A_\alpha \setminus D_\xi) = C,$$

这表明 $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A}', A'_\alpha)$。为证明反向包含，任取$F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}', A'_\alpha)$。于是存在 $\{\alpha_i : i \in n\} \in [\kappa \setminus \{\alpha\}]^{<\omega}$ 使得

$$A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A'_{\alpha_i} = \big(A_\alpha \cup (A_{\sigma(\alpha)} \setminus D_\alpha)\big) \setminus \bigcup_{i\in n} \big(A_{\alpha_i} \cup (A_{\sigma(\alpha_i)} \setminus D_{\alpha_i})\big) \subseteq^* F.$$

直接验证可知，如果 α 不属于 $\{\sigma(\alpha_i) : i \in n\}$，那么

$$A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A'_{\alpha_i} \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A_\alpha) \subseteq \mathcal{G}_\alpha,$$

这意味着 $F \in \mathcal{G}_\alpha$。假设集合 $\Gamma = \{i \in n : \sigma(\alpha_i) = \alpha\}$ 非空。那么

$$F \supseteq^* A'_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A'_{\alpha_i} \supseteq \big(A_\alpha \setminus \bigcup_{i\in n} A_{\alpha_i}\big) \cap (A_\alpha \cap \bigcap_{i\in\Gamma} D_{\alpha_i}) \cap (A_\alpha \setminus \bigcup_{i\notin\Gamma} A_{\sigma(\alpha_i)}) \in \mathcal{G}_\alpha.$$

因此，对于每个 $\alpha \in \kappa$，都有 $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{F}(\mathcal{A}', B'_\alpha)$。

假设理想独立族 $\mathcal{A}$ 是极大的，并固定任意一个 $C \in \mathcal{A}'^+$。容易看出 $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}'^+$。由 $\mathcal{A}$ 的极大性，存在 $\alpha \in \kappa$ 使得 $C \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A_\alpha) \subseteq \mathcal{G}_\alpha = \mathcal{F}(\mathcal{A}', A'_\alpha)$，这证明族 $\mathcal{A}'$ 也是极大的。□

特别地，我们得到：

推论 3.6。存在一个极大理想独立族 $\mathcal{A}$，使得对于所有 $A \in \mathcal{A}$，$\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 都是超滤子。

证明。设 $\mathcal{D}$ 是一个大小为 $\mathfrak{c}$ 的几乎不交族。将其扩充为一个极大理想独立族 $\mathcal{A}$。对于任意 $A \in \mathcal{A}$，固定一个包含滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 的超滤子 $\mathcal{G}_A$。定理 3.5 表明，存在一个极大理想独立族 $\mathcal{A}'$，使得对于任意 $A' \in \mathcal{A}'$，滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}', A')$ 都与超滤子 $\mathcal{G}_A$ 相同。□

我们想指出，在假设 $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ 下，还可以得到一个极大理想独立族 $\mathcal{A}$，其具有这样的性质：$\mathcal{A}$ 的所有补滤子都是 $p_\mathfrak{c}$-点。

理想独立族与超滤子之间的关系可以通过以下 ZFC 定理形式化。

定理 3.7. $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{s}_{mm}$。

证明。反设 $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{u}$，并令 $\mathcal{A}$ 为基数最小的极大理想独立族。极大性意味着，存在 $\mathcal{A}$ 的一个可数子族 $\{A_n\}_{n\in\omega}$，其并集几乎等于 ω。定义 $B_0 = A_0$，并且对于 $n > 0$，$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$。对每个 $n \in \omega$，令 $\mathcal{F}_n$ 为滤子$\mathcal{F}(\mathcal{A}, A_n) \restriction B_n$。由于 $\mathcal{F}_n$ 不是超滤子（根据关于$\mathfrak{u}$大小的假设），对于任意 $s \in 2^n$，存在 $D_s \in \mathcal{F}_n^+ \setminus \mathcal{F}_n$，使得对于不同的 s、$r \in 2^n$、$D_r \cap D_s = \emptyset$。现在，对每个 $f \in 2^\omega$，定义 $D^f = \bigcup_{n\in\omega} D_{f\restriction n}$。
断言。对于每个 $f \in 2^\omega$ 以及每个 $\mathcal{F} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$，$D^f \not\subseteq \bigcup \mathcal{F}$。

证明。令 $\mathcal{F} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ 并令 $n \in \omega$ 使得 $A_n \notin \mathcal{F}$。不妨设 $\{A_i : i < n\} \subseteq \mathcal{F}$。由于 $D_{f\restriction n}$ 是 $\mathcal{F}_n$-正的，它不能被$\bigcup F$ 覆盖，因此 D^f 也不能被 $\bigcup \mathcal{F}$ 覆盖。□

由 $\mathcal{A}$的极大性，对于任意 $f \in 2^\omega$，存在

$$A_f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{F}_f \in [\mathcal{A} \setminus \{A_f\}]^{<\omega}$$

使得 $A_f \setminus \bigcup \mathcal{F}_f \subseteq^* D^f$。注意，不存在 $n \in \omega$使得 $A_n = A_f$，否则，对于某个 $n \in \omega$，我们将有 $A_n \setminus \mathcal{F}_f \subseteq^* D^f$，这意味着

$$B_n \setminus \bigcup \mathcal{F}_f = A_n \setminus \left(\bigcup \mathcal{F}_f \cup \bigcup_{i<n} A_i \right) \subseteq^* D_{f\restriction n},$$

这与集合 $D_{f\restriction n}$ 的选择相矛盾。由于 $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{c}$，存在不同的$f, g \in 2^\omega$ 使得 $A_f = A_g$ 且 $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_g$。根据构造，我们有

$$A_f \setminus \mathcal{F}_f \subseteq^* D^f \cap D^g \subseteq \bigcup_{i\leq n_0} B_i,$$

其中 $n_0 \in \omega$ 是满足 $f \restriction n_0 = g \restriction n_0$的最大自然数。但 $\bigcup_{i\leq n_0} B_i = \bigcup_{i\leq n_0} A_i$，这意味着 $A_f \setminus \bigcup \mathcal{F}_f \subseteq^* \bigcup_{i\leq n_0} A_{n_0}$，因此 $A_f \subseteq^* \bigcup \mathcal{F}_f \cup \bigcup_{i\leq n_0} A_i$，矛盾。□

考察定理 3.7 的证明可知，事实上，除了存在可数无限多个元素 $A_n \in \mathcal{A}$（其对应的补滤子不是超滤子）之外，我们只需要 $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{c}$ 就能得到矛盾。因此，可以使用同一证明推导出以下命题，以补充推论 3.6。

命题 3.8. 若 $\mathcal{A}$ 是一个大小为 $< \mathfrak{c}$的极大理想独立族，那么至多有有限多个 $A \in \mathcal{A}$，其对应的补滤子不是超滤子。

请注意，对于基数为 $\mathfrak{c}$的极大理想独立族而言，情况不一定如此，因为任何完全可分极大几乎不交族 $\mathcal{A}$ 都是极大理想独立的（见推论 3.4），并且对于任何

$A \in \mathcal{A}$ 对应的补滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 不是超滤子，因为它由 A 的余有限子集生成。

4. Arbitrarily Large Maximal Ideal Independent Families

在本节中，我们考察如何通过强迫加入一个具有所需基数的极大理想独立族，从而开始研究此类族的谱。极大理想独立族的谱记为 $\mathrm{spec}(\mathfrak{s}_{mm})$，定义为所有极大理想独立族的基数组成的集合。在全文中，V 表示基模型，而 $\mathbb{C}$ 表示用于加入单个 Cohen 实数的偏序集。

引理 4.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族。存在一个 ccc 强迫$\mathbb{P}(\mathcal{A})$，它添加一个集合 z，使得在 $V^{\mathbb{P}(\mathcal{A})}$ 中：

(1) $\mathcal{A} \cup \{z\}$ 是一个理想独立族，并且 (2) 对于每个 $y \in V \cap ([\omega]^{\omega} \setminus \mathcal{A})$，族 $\mathscr{A} \cup \{z, y\}$ 不是理想独立族。

证明。向 V 添加一个 Cohen 实数，并考虑一个包含该 Cohen 实数且相对于以下性质为极大的滤子 $\mathcal{U}$：

$(*)$ 对于任意 $X \in \mathcal{U}$、任意 $A \in \mathcal{A}$ 和有限的 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \setminus \{A\}$，集合 $X \cap (A \setminus \bigcup \mathcal{F})$ 是无限的。

令 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ 为相对于 $\mathcal{U}$ 的马蒂亚斯强迫，令 x 为 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ 在 $V^{\mathbb{C}}$ 上添加的泛型实数，令 $\dot{x}$ 为 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ 关于 x（在 $V^{\mathbb{C}}$ 中）的名称，并令 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \mathbb{C} * \mathbb{M}(\mathcal{U})$。

命题 4.2。在 $V^{\mathbb{P}(\mathcal{A})}$ 中，族 $\mathcal{A} \cup \{\omega \setminus x\}$ 是理想独立的。

证明。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{A}$ 的有限子集。首先我们证明，$\bigcup \mathcal{F}$ 不几乎包含 $\omega \setminus x$。设 $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$，$(s, B) \in \mathbb{M}(\mathcal{U})$，并令 $n \in \omega$ 任意。由于 Cohen 实数属于 $\mathcal{U}$，我们可以假设 B 是它的子集，因此 $A \setminus (B \cup \bigcup \mathcal{F})$ 是无限的。取 $k \in \omega$ 足够大，使得 $[\max(s),\ k) \cap (A \setminus (B \cup \bigcup \mathcal{F}))$ 包含多于 n 个元素。于是 $(s \cup \{k\}, B)$ 强迫 $(\omega \setminus \dot{x}) \setminus \bigcup \mathcal{F}$ 包含多于 n 个元素；由于 n 是任意的，因此 $(\omega \setminus x) \setminus \bigcup \mathcal{F}$ 是无限的。一个一般性论证表明，对于任意 $A \in \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{F} \in [\mathcal{A} \setminus \{A\}]^{<\omega}$，$x \cap (A \setminus \bigcup \mathcal{F})$ 都是无限的，这意味着 $(A \setminus \bigcup \mathcal{F}) \setminus (\omega \setminus x)$ 是无限的。□

断言 4.3。设 $A \in ([\omega]^{\omega} \cap V) \setminus \mathcal{A}$。那么在 $V^{\mathbb{P}(\mathcal{A})}$ 中，$\mathcal{A} \cup \{\omega \setminus x, A\}$ 不是理想独立的。

证明。设 $A \in [\omega]^{\omega} \cap V$为任意集合。若存在 $X \in \mathcal{U}$、$B \in \mathcal{A}$和$\mathcal{F} \in [\mathcal{A} \setminus \{B\}]^{<\omega}$使得 $X \cap (B \setminus \bigcup \mathcal{F}) \subseteq^* A$，则 $x \cap (B \setminus \bigcup \mathcal{F}) \subseteq^* A$。但是$x \cap (B \setminus \bigcup \mathcal{F}) = (B \setminus \bigcup \mathcal{F}) \setminus (\omega \setminus x)$，因此不能将 A添加到 $\mathcal{A} \cup \{\omega \setminus x\}$中，$B$、$\mathcal{F}$和 $\omega \setminus x$可以证明这一点。另一方面，若对于所有 $X \in \mathcal{U}$、$B \in \mathcal{A}$和 $F \in [\mathcal{A} \setminus \{B\}]^{<\omega}$，都有 $X \cap (B \setminus \bigcup F) \not\subseteq^* A$，则$(\omega \setminus A) \cap X \cap (B \setminus \bigcup F)$是无限的。因此，根据 $\mathcal{U}$的极大性，$\omega \setminus A \in \mathcal{U}$，这意味着 $x \subseteq^* \omega \setminus A$，从而 $A \subseteq^* \omega \setminus x$。□

这就完成了该引理的证明。 □

定理 4.4。假设 GCH。设 C 是一个不可数基数的集合，并设 κ 是一个正则不可数基数，满足 $\sup C \leq \kappa$。则存在一个 ccc 泛型扩张，其中

$$C \subseteq \mathrm{spec}(\mathfrak{s}_{mm}).$$

证明。向基模型 V 添加 κ 个 Cohen 实数，从而得到一个满足 $\mathfrak{c} = \kappa$ 的模型；对于每个 $\lambda \in C$，令 $\mathcal{A}_\lambda$ 为一个基数为 λ 的理想独立族。令 $\langle \lambda_\beta : \beta < \gamma \rangle$ 为 C 的一个枚举。进行一个有限支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$，其中每个迭代项都是一个长度为 C 的有限支撑迭代，具体如下：

令 $\mathbb{P}_0$ 为由 $\mathbb{R}^0_0 = \mathbb{P}(\mathcal{A}_{\lambda_0})$ 和 $\mathbb{R}^0_j \Vdash \dot{\mathbb{S}}^0_j = \mathbb{P}(\mathcal{A}_{\lambda_j})$ 定义的有限支撑迭代 $\langle \mathbb{R}^0_\beta, \dot{\mathbb{S}}^0_j : j < \gamma \rangle$。对 $\mathbb{P}_0$ 进行强迫后，对于每个 $j < \gamma$，定义 $\mathcal{A}^0_j = \mathcal{A}_{\lambda_j} \cup \{x_j\}$，其中 x_j 是由迭代 $\mathbb{P}_0$ 的第 j 步根据引理 4.1 添加的实数。现在，假设 $\mathbb{P}_\beta$ 和 $\{\mathcal{A}^\beta_j : j < \gamma\}$ 已定义。下一步 $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ 是有限支撑迭代 $\langle \mathbb{R}^\beta_j, \dot{\mathbb{S}}^\beta_j : j < \gamma \rangle$，满足 $\mathbb{R}^\beta_0 = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\beta_0)$ 和 $\mathbb{R}^\beta_j \Vdash \dot{\mathbb{S}}^\beta_j = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\beta_j)$。在 $V[G_{\beta+1}]$ 中，对 $\mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{Q}}_\beta$ 进行强迫后，定义 $\mathcal{A}^{\beta+1}_j = \mathcal{A}^\beta_j \cup \{x_j\}$，其中 x_j 是由迭代 $\mathbb{Q}_\beta$ 的第 j 步根据引理 4.1 添加的实数。如果 β 是一个极限序数，并且对于所有 $\alpha < \beta$ 和 $j < \gamma$，$\mathbb{P}_\alpha$、$\mathcal{A}^\alpha_j$ 都已定义，则令 $\mathbb{P}_\beta$ 为有限支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \beta \rangle$，并且对于 $j < \gamma$，$\mathcal{A}^\beta_j = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{I}^\alpha_j$。

令 $\mathbb{P}_{\omega_1}$ 为上述迭代，并对任意 $j < \gamma$，令 $\mathcal{A}^*_j = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}^\alpha_j$。固定 j。令$y \in V[G_{\omega_1}] \cap [\omega]^\omega \backslash \mathcal{A}^*_j$。那么，存在 $\alpha < \omega_1$，使得 y在迭代的第 α 阶段被加入。由于 $y \notin \mathcal{A}_j$，同样有 $y \notin \mathcal{A}^{\alpha+1}_j$，因此根据由 $\mathbb{S}^\alpha_j$在 x 处加入的泛型对象的对角化性质，$\mathcal{A}^j_{\alpha+1} \cup \{x, y\}$ 不是理想独立的。由于 $x \in \mathcal{A}_j$，$\mathcal{A}_j \cup y$ 不是理想独立的。因此$\mathcal{A}^*_j$ 是极大的。偏序集 $\mathbb{P}_{\omega_1}$ 保留所有基数，而我们只向族 $\mathcal{A}_j$ 中加入了 ω_1 个集合以得到 $\mathcal{A}^*_j$，$\mathcal{A}^*_j$ 的大小确实为 λ_j。 □

注1. 极大理想独立族的基数可以具有可数余终性，而任何超滤子的特征都是不可数的。第一个断言由取 $\kappa > \aleph_\omega$ 应用上一定理即可得到。第二个断言可见于 *[3]*。

5. Forcing Invariant Maximal Ideal Independent Families

下文中，我们构造一个具有强组合性质的极大理想独立族，这些组合性质保证其极大性在大量强迫概念下得以保持。

定义 5.1. 设 $\mathcal{U}$ 是一个超滤子。极大理想独立族$\mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{U}$-涵盖的，如果满足以下条件：

(1) $\mathcal{U}\cap\mathcal{A}=\emptyset$，即 $\mathcal{A}$ 包含在 $\mathcal{U}$ 的对偶理想中。(2) 对每个 $X\in\mathcal{U}$，满足 $X\in\mathcal{F}(\mathcal{A},A)$ 的 $A\in\mathcal{A}$ 集合是余可数的。

定理 5.2。假设连续统假设。对于任意 p-点 $\mathcal{U}$，存在一个 $\mathcal{U}$-涵盖的极大理想独立族 $\mathcal{A}$，使得对于所有 $A\in\mathcal{A}$，相应的补滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A},A)$ 是一个 p-点。

证明。设 $\mathcal{U}$ 是一个 p-点，并且 $\langle Y_\alpha:\alpha\in\omega_1\rangle$ 是一个生成 p-点 $\mathcal{U}$ 的 $\subseteq^*$-递减序列。设 $\langle X_\alpha:\alpha\in\omega_1\rangle$ 是 $[\omega]^\omega$ 的一个枚举。通过递归，我们构造一个序列 $\langle\mathcal{A}_\alpha:\alpha\in[\omega,\omega_1)\rangle$，使得:

(1) 对所有 α，$\mathcal{A}_\alpha\subseteq\mathcal{U}^*$ 是一个可数理想独立族。(2) 对所有 α，若 $X_\alpha\notin\mathcal{A}_{\alpha+1}$，则 $\mathcal{A}_{\alpha+1}\cup\{X_\alpha\}$ 不是理想独立族。(3) 对所有 α，$\mathcal{A}_{\alpha+1}=\mathcal{A}_\alpha$ 或 $\mathcal{A}_{\alpha+1}=\mathcal{A}_\alpha\cup\{A_0^\alpha,A_1^\alpha\}$ 对某个 A_0^α，$A_1^\alpha\in\mathcal{U}^*$，并且 $A_0^\alpha\setminus A_1^\alpha$，$A_1^\alpha\setminus A_0^\alpha\subseteq Y_\alpha$。(4) 若 α 是一个极限序数，则 $\mathcal{A}_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{A}_\beta$。(5) 若 $A_i^\alpha\in\mathcal{A}$ 在迭代的步骤 α 中加入，$\langle\mathcal{P}^{\alpha,}{}_\beta{}^i:\beta\in[\alpha+1,\omega_1)\rangle$ 是 A_i^α 的所有划分的枚举，其中 $i\in 2$，并且对于所有 α 和 $\beta>\alpha$，存在有限的 $F\subseteq[\beta\setminus\{\alpha\}]^{<\omega}$ 和 $k\in\omega$，使得对于任意 i，$j\in 2$ 集合 $A_i^\alpha\setminus\left(A_j^\beta\cup\bigcup F\right)\setminus k$:

- 或者是分划 $\mathcal{P}^{\alpha,}{}_\beta{}^i$ 的部分选择子,
- 或包含在划分 $\mathcal{P}^{\alpha}{}_{,\beta}{}^i$。

递归完成后，我们定义 $\mathcal{A}=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathcal{A}_\alpha$。条件(1) 确保$\mathcal{A}$ 是一个理想独立族，而 (2) 确保 $\mathcal{A}$ 是极大的。条件(3)确保 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{U}$-涵盖的。条件(5)确保滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A},A)$ 对所有 $A\in\mathcal{A}$都是选择超滤子。我们首先令 $\mathcal{A}_\omega=\langle A_n:n\in\omega\rangle$ 是 ω 的一个划分，将其划分为无穷多个无限集。对于每个 $n\in\omega$，令 $A_0^n=A_1^n=A_n$ 并令 $\langle\mathcal{P}^n{}_,{}_\beta{}^i:\beta\in[\omega,\omega_1)\rangle$枚举 A_n的所有划分。假设 $\mathcal{A}_\alpha$ 已经构造完成。我们处理集合 X_α 并定义 $\mathcal{A}_{\alpha+1}$。

如果 $X_\alpha\in\mathcal{U}$，我们只需定义 $\mathcal{A}_{\alpha+1}=\mathcal{A}_\alpha$，而定义 5.1 中的条件 (2) 将确保 X_α 不能加入族 $\mathcal{A}$。如果 X_α 属于由族 $\mathcal{A}_\alpha$ 生成的理想，我们无需采取任何操作，可以再次定义 $\mathcal{A}_{\alpha+1}=\mathcal{A}_\alpha$。否则，$X_\alpha\notin\mathcal{U}$ 和 X_α 相对于由 $\mathcal{A}_\alpha$生成的理想是正的。令 $e_\alpha:\omega\to\mathcal{A}_\alpha$ 为 $\mathcal{A}_\alpha$中元素的一个枚举，并定义 $C_0=e_\alpha(0)$ $C_{n+1}=e_\alpha(n+1)\setminus\bigcup_{i\le n}e_\alpha(i)$。

如果存在 $n\in\omega$和有限的 $F\subseteq\mathcal{A}_\alpha\setminus\{e_\alpha(0).....,e_\alpha(n)\}$，使得$C_n\setminus X_\alpha\subseteq^*\bigcup F$ 且 $C_n\cap X_\alpha$是无限的，那么我们有 $C_n\setminus\bigcup F\subseteq^* C_n\cap X_\alpha\subseteq X_\alpha$，并且可以再次定义 $\mathcal{A}_{\alpha+1}=\mathcal{A}_\alpha$。

因此，假设对于所有的 $n\in\omega$，$C_n\setminus X_\alpha$ 是有限的，或者 $C_n\setminus X_\alpha$ 不被任何 $F\subseteq\mathcal{A}_\alpha\setminus\{e_\alpha(0)\ldots,e_\alpha(n)\}$ 覆盖。由于 $e_\alpha(n)$ 几乎不包含于来自 $\mathcal{A}_\alpha\setminus\{e_\alpha(n)\}$ 的有限多个元素之并中，并且

$\mathcal{A}_\alpha \setminus \{e_\alpha(n)\}$ 是可数的，因此我们可以通过递归构造一个无限集 $B_n \subseteq e_\alpha(n)$，使得：

(1) $B_n \cap X_\alpha = \emptyset$，(2) 对所有不同于 $e_\alpha(n)$ 的 $Z \in \mathcal{A}_\alpha$，都有 $Z \cap B_n =^* \emptyset$；(3) 此外，必要时取子集后，B_n 是划分 $\mathcal{P}^{\gamma,\ \alpha}{}^{i}$的部分选择子，或者完全包含在划分 $\mathcal{P}^{\gamma,\ \alpha}{}^{i}$的某个元素中，其中 γ 和 i 满足 $A_i^\gamma = e_\alpha(n)$

此外，由于对所有 $n \in \omega$，$C_n \notin \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{U}$ 是一个 p-点，存在 $A \in \mathcal{U}$，使得对所有 $n \in \omega$，$C_n \cap A$ 都是有限的，$X_\alpha \cap A = \emptyset$ 且 $A \subseteq Y_\alpha$。令 W_0、W_1 为 A 的互不相交的无限子集，且不属于超滤子 $\mathcal{U}$。定义 W 如下：

$$W = \left(\bigcup_{n \in \omega} C_n \setminus B_n \right) \setminus A$$

最后，定义 $A_i^\alpha = W \cup W_i$，对于 $i \in 2$，以及 $\mathcal{A}_{\alpha+1} = \mathcal{A}_\alpha \cup \{A_0^\alpha, A_1^\alpha\}$。注意 $X_\alpha \subseteq A_i^\alpha$，$A_i^\alpha \setminus A_{1-i}^\alpha = W_i \subseteq Y_\alpha$。最后需要指出，根据 A_0^α 和 A_1^α 的构造，族 $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ 是理想独立的。□

定理 5.3.设 $\mathcal{U}$ 是一个 p-点，并设 $\mathbb{P}$ 是一种适当的、ω^ω-有界的强迫概念，它保持 p-点。则 $\mathbb{P}$ 保持任何 $\mathcal{U}$-包容的极大理想独立族 $\mathcal{A}$ 的极大性，使得对于所有 $A \in \mathcal{A}$，相应的补滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 是一个 p-点。

注意，这个定理意味着，在连续统假设下，经由任何保持适当 ω^ω-有界 p-点的强迫偏序 $\mathfrak{s}_{mm}$ 得到的泛型扩张 $\aleph_1$是如此。

证明。固定一个超滤子 $\mathcal{U}$、一个 $\mathcal{U}$-涵盖的极大理想独立族 $\mathcal{A}$，其具有以下性质：$\mathcal{A}$ 的所有补滤子都是p-点；再固定一个适当的、ω^ω-有界的、保持 p-点的强迫概念 $\mathbb{P}$。令 $p \in \mathbb{P}$，并令 $\dot{X}$ 为一个名称，使得 $p \Vdash \dot{X} \in [\omega]^\omega$。我们需要证明某个 $q \leq p$ 强迫：$\dot{X}$ 不能被加入到 $\mathcal{A}$ 中而不破坏理想独立性。更确切地说，这意味着我们需要找到一个 $q \leq p$，使得 q 强迫 $\dot{X}$ 属于由 $\mathcal{A}$ 生成的理想；或者找到$q \leq p$ 以及一个 $A \in \mathcal{A}$，使得 q 强迫 $\dot{X}$ 属于与 A对应的补滤子。

因此，反设 p 强制认为，$\dot{X}$ 既不属于由 $\mathcal{A}$ 生成的理想，也不属于任何滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$，对任意 $A \in \mathcal{A}$ 都成立。注意，这尤其意味着 $\dot{X}$ 不属于 $\mathcal{U}$；因为若它属于其中，那么它就会属于某个滤子 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$（事实上，会属于不可数多个）。由于 $\mathbb{P}$ 保持 $\mathcal{U}$ 为一个 p-点，因此 p 强制认为 $\dot{X}$ 的补集属于 $\mathcal{U}$，故可找到一个 $q \leq p$ 和一个 $Z \in \mathcal{U}$，使得 $q \Vdash \dot{X} \cap Z = \emptyset$。固定这样的 q 和 Z。因此，要完成证明，只需证明存在某个 $r \leq q$ 强制认为，对于某个 $n \in Z$，有 $n \in \dot{X}$。

对于任意 $u \in \mathbb{P}$，令 $X_u = \{n \in \omega \mid u \nVdash \check{n} \notin \dot{X}\}$ 为.....的外包 $\dot{X}$关于 u，即被某个$u' \leq u$强制属于 $\dot{X}$ 的 $n < \omega$ 的集合。注意，对于任意 $u \in \mathbb{P}$，$u \Vdash \dot{X} \subseteq \check{X}_u$。由此可知，对于任意

比 p更强的条件 u， X_u 不属于由 $\mathcal{A}$生成的理想。此外，由于 $\mathcal{A}$的极大性，我们还可得，对于每个 $r \leq q$，集合 X_r 都属于 $\mathcal{A}$的某个补滤子。因此，要完成证明，只需证明事实上任何这样的 X_r 都属于不可数多个这样的滤子。这就足够了，因为若确实如此，特别是对 X_q 也成立；并且，根据 $\mathcal{U}$-包容的定义，对于余可数多个 $A \in \mathcal{A}$， Z属于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$，所以存在某个 $A \in \mathcal{A}$，使得 $Z \cap X_q \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$，从而 $Z \cap X_q$与有无限交集。因此，某个 $r \leq q$ 强制 $n \in X$ 对某个（事实上是无穷多个）$n \in Z$成立。总而言之，只需证明以下断言。

断言 5.4. 对任意 $u \in \mathbb{P}$强于 p，集合 $X_u \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 对不可数多个 $A \in \mathcal{A}$ 成立。

固定这样一个 $u \in \mathbb{P}$，并反设只有可数多个 $A \in \mathcal{A}$满足 $X_u \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$。令 $M \prec H_\theta$为一个关于足够大的 θ的可数模型，其中包含 $\mathbb{P}, p, u, \mathcal{A}, \mathcal{U} \in M$，并包含每个满足 $X_u \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 的 A。将 $\mathcal{A} \cap M$枚举为 $\{A_i \mid i < \omega\}$。由于 p，因此 u 强迫对每个 $n < \omega$，名称 X不属于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A_n)$；并且根据我们的假设，这些滤子中的每一个都是一个 p-点，因此是一个在 $\mathbb{P}$ 下保持不变的超滤子，所以在 M 中存在一个位于 u 以下的稠密条件集，强迫对某个 $k_n \in \omega$，$\dot{X} \cap A_n \setminus \bigcup_{i<k_n} A_i$ 为有限集。应用 ω^ω-有界性和适当性，我们可以在基模型中找到函数 f，$g \in \omega^\omega$ 以及一个条件 $r \leq u$，它是 $(M, \mathbb{P})$-泛型的，使得对每个 $n < \omega$，我们有

$$r \Vdash \dot{X} \cap A_n \setminus \bigcup A_i \subseteq \check{g}(n)$$

特别地，我们得到 $X_r \cap A_n \setminus \bigcup_{i<\check{f}(n), i \neq n} A_i \subseteq g(n)$，因此对于任意 $n < \omega$，都有 $X_r \notin \mathcal{F}(\mathcal{A}, A_n)$。但是，将应用于 u 的同一论证应用于 r，我们便得到：对于某个 $B \in \mathcal{A}$， X_r 属于某个 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, B)$，且对于任意 $n < \omega$，都有 $B \neq A_n$。然而这就产生了矛盾，因为 $X_r \subseteq X_u$，并且根据 A_n 的定义， $X_u \notin \mathcal{F}(\mathcal{A}, B)$。这个矛盾意味着 X_q 属于 $\mathcal{A}$ 的不可数多个补滤子，因此证明完成。□

作为一个直接的推论，我们得到：

推论 5.5。

(1) 在萨克斯模型中， $\mathfrak{s}_{mm} = \aleph_1$。(2) 在米勒划分模型中， $\mathfrak{s}_{mm} = \aleph_1$，因此 $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{a}_T$ 是相容的。(3) 在 h-完美树强迫模型中，$\mathfrak{s}_{mm} = \aleph_1$，因此 $\mathfrak{s}_{mm}$ <non($\mathcal{N}$) 是相容的。

证明。对于(1)，迭代的萨克斯强迫保留p-点，并且是 ω^ω-有界的，这是一个标准事实。对于(2)，在 [14], 米勒构造了一种强迫，称为米勒划分强迫，它使基数不变量$\mathfrak{a}_T$ 等于 $\aleph_2$，正如最近在 [4] 中所证明的；并且正如在.....中所证明的，它保留 p-点，

[18])是 ω^ω-有界的。对于(3)，回忆一下，该 h-完美树强迫是适当的、$^\omega\omega$-有界的，保留 p-点，并且在 h-完美树强迫模型中$\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \aleph_2$，参见 [10, 第 2] 节。□

交替使用米勒划分和 h-完美树强迫将导出一个满足 $\mathfrak{i} = \mathfrak{s}_{mm} < \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{a}_T = \aleph_2$ 的模型（关于相应偏序集的影响，$\mathfrak{i}$ 参见 [4] 和 [19]）。

推论 5.6。 $\mathfrak{s}_{mm}$ 独立于 $\mathfrak{a}_T$

证明。在米勒划分模型中，$\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{a}_T$。另一方面，众所周知，$\mathfrak{a}_T < \mathfrak{u}$ 在随机模型中成立，因此 $\mathfrak{a}_T < \mathfrak{s}_{mm}$在该模型中也成立。□

6. Ideal Mrówka Spaces

对于每个理想独立族 $\mathcal{A}$，我们都可以关联一个拓扑空间$\psi(\mathcal{A})$，定义如下。

定义。设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族。空间 $\psi(\mathcal{A})$ 是集合 $\omega \cup \mathcal{A}$，赋予满足以下条件的拓扑 τ：

集合 $\bullet$ 当且仅当对任意 $A \in \mathcal{A} \cap U$，存在 $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$，使得 $F \subseteq U$。

容易看出，集合 ω 是 $\psi(\mathcal{A})$的稠密离散子集，并且对任意 $A \in \mathcal{A}$，族 $\{F \cup \{A\} : F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)\}$ 构成了 $\psi(\mathcal{A})$中 A 处的开邻域基。集合 $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{A})$是闭且离散的。对任意 $A \in \mathcal{A}$，集合 $\{A\} \cup A$ 是 A的既开又闭邻域。因此，我们得到以下结论：

引理 6.1. 对任意理想独立族 $\mathcal{A}$，空间 $\psi(\mathcal{A})$ 都是蒂赫诺夫、零维、可分的散布空间（高度为 2）。

注意，对于任意几乎不交族 $\mathcal{A}$，空间 $\psi(\mathcal{A})$ 都是与几乎不交族 $\mathcal{A}$ 对应的著名 Mr´owka 空间。

引理 6.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族。若 $\mathcal{A}$ 是极大的，则每个 $C \in \mathcal{A}^+$ 在 $\psi(\mathcal{A})$ 中都有一个聚点。此外，若除有限多个 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 外，$A \in \mathcal{A}$ 都是超滤子，那么只要每个 $C \in \mathcal{A}^+$ 都有一个聚点，$\mathcal{A}$ 就是极大的。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是一个极大理想独立族，且 $C \in \mathcal{A}^+$。$\mathcal{A}$ 的极大性意味着存在 $A \in \mathcal{A}$，使得 $C \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$。于是，$A$ 是集合 C 的一个聚点。

设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族，使得除有限多个 $A \in \mathcal{A}$ 外，对所有 $A \in \mathcal{A}$，$\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 都是超滤子，并且每个 $C \in \mathcal{A}^+$ 在 $\psi(\mathcal{A})$ 中都有一个聚点。记 $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{A} : \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 不是超滤子$\}$。考虑任意一个 $C \in \mathcal{A}^+$。设 $D = C \setminus \bigcup \mathcal{P}$。由于族 $\mathcal{P}$ 是有限的，集合 D 是正的。因此，D 在 $\psi(\mathcal{A})$ 中存在一个聚点 $A \in \mathcal{A}$。由此可知，对于任意 $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$，$D \cap F \neq \emptyset$。显然，$A \notin \mathcal{P}$。于是，$\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 是一个超滤子，因而 $C \supseteq D \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$。因此，理想独立族 $\mathcal{A}$ 是极大的。□

对于一个理想独立族 $\mathcal{A}$ ，我们用 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}(\omega)$ 表示 $\psi(\mathcal{A})$ 中 ω 的所有闭子集构成的集合。下面的引理从拓扑角度描述与理想独立族 $\mathcal{A}$ 对应的理想 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$。

引理 6.3. 对于任意理想独立族 $\mathcal{A}$ ，我们有 $\mathcal{J}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}(\omega)$。此外，如果 $\mathcal{A}$ 是极大的，那么 $\mathcal{J}(\mathcal{A}) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}(\omega)$。

证明。设 A_1、A_2 是理想独立族 $\mathcal{A}$ 中任意两个不同元素，并令 $C = A_1 \cap A_2$。注意，对于任意 $A \in \mathcal{A} \setminus \{A_2\}$ ，集合 $A \setminus A_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 和 $(A \setminus A_2) \cap C = \emptyset$。同样，集合 $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A_2)$ 和 $(A_2 \setminus A_1) \cap C = \emptyset$。因此，集合 C 在 $\psi(\mathcal{A})$ 中是闭且离散的。此时不难看出，对于任意 $A \in \mathcal{A}$ ，理想 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 由闭集（在 $\psi(\mathcal{A})$ 中）组成。由于有限个闭集的并仍为闭集，且闭离散集的任意子集都是闭集，因此我们得到 $\mathcal{J}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}(\omega)$。

设 $\mathcal{A}$ 是极大理想独立族。任取集合 $C \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}(\omega)$。由于集合 C 是闭集，因此对每个 $A \in \mathcal{A}$，都有 $C \notin \mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$。$\mathcal{A}$ 的极大性意味着 $C \notin \mathcal{A}^+$。因此存在有限集族 $\{A_i : i \in n\} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ ，使得 $C \subseteq^* \bigcup_{i\in n} A_i$。由于 C 是闭集，对每个 $i \in n$，都存在 $F_i \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, A_i)$，使得 $F_i \cap C = \emptyset$。于是，对每个 $i \in n$ ，存在 $m(i) \in \omega$ ，以及有限族 $\{D^i_j : j \in m(i)\} \in [\mathcal{A} \setminus \{A_i\}]^{<\omega}$，使得 $(A_i \setminus \bigcup_{j\in m(i)} D^i_j) \cap C =^* \emptyset$，这表明 $C \subseteq^* \bigcup_{i\in n} \bigcup_{j\in m(i)} (A_i \cap D^i_j) \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$。因此 $\mathcal{J}(\mathcal{A}) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}(\omega)$。□

如果每个定义在 X 上的连续实值函数都有界，则称蒂霍诺夫空间 X 为伪紧的。下面的引理是一个众所周知的结果。

引理 6.4. 设 X 是一个具有开离散稠密子空间 D 的空间。那么， X 是伪紧的，当且仅当每个 $A \in [D]^\omega$ 在 X 中都有一个聚点。

引理 6.5. 设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族。当且仅当 $\mathcal{A}$ 是一个极大几乎不交族时，空间 $\psi(\mathcal{A})$ 是伪紧的。

证明。如果 $\mathcal{A}$ 是一个极大几乎不交族，那么由 [12] 可知，Mr ´owka 空间 $\psi(\mathcal{A})$ 是伪紧的。

假设理想独立族 $\mathcal{A}$ 不是几乎不交的。那么存在 A_1、$A_2 \in \mathcal{A}$ ，使得集合 $C = A_1 \cap A_2$ 是无限的。由引理 6.3，集合 C 在 $\psi(\mathcal{A})$ 中是闭的。引理 6.4 表明，空间 $\psi(\mathcal{A})$ 不是伪紧的。□

推论 3.4 和引理 6.5 推出如下结论。

命题 6.6。对于一个极大理想独立族 $\mathcal{A}$，以下条件等价：

(1) $\psi(\mathcal{A})$是伪紧的；(2) $\mathcal{A}$是极大几乎不交族；(3) $\mathcal{A}$是完全可分极大几乎不交族。

命题 6.7. 设 $\mathcal{A}$ 是一个理想独立族。当且仅当对于某个几乎不交族 $\mathcal{B}$， $\psi(\mathcal{A})$与 $\psi(\mathcal{B})$同胚时，空间 $\psi(\mathcal{A})$ 是局部紧的。

证明。充分性源于以下事实：对于任意几乎不交族 $\mathcal{B}$，Mr´owka 空间 $\psi(\mathcal{B})$ 都是局部紧的。

假设对于某个理想独立族 $\mathcal{A}$， $\psi(\mathcal{A})$ 是局部紧的。由于空间 $\psi(\mathcal{A})$ 是零维的（见引理 6.1），对于每个 $A \in \mathcal{A}$，我们都可以找到 A 的一个紧开邻域 U_A。回顾一下，对于每个 $A \in \mathcal{A}$，集合 $A \cup \{A\}$ 都是 A 的一个既开又闭邻域。因此，$V_A = U_A \cap (A \cup \{A\})$ 是 A 的一个紧开邻域。由于 $V_A \cap \mathcal{A} = \{A\}$，我们推得 A 是 V_A 的唯一非孤立点。V_A 的紧致性意味着 $B_A = V_A \cap \omega$ 是 $\psi(\mathcal{A})$ 中收敛到 A 的一个序列。令 $\mathcal{B} = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$。显然，族 $\mathcal{B}$ 是几乎不交的。定义 $f : \psi(\mathcal{B}) \to \psi(\mathcal{A})$ 如下。

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{if } x = n \in \omega; \\ A & \text{if } x = B_A \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

通过常规验证可知，映射 f 是一个同胚。 □

7. Conclusion and Open Questions

以下问题仍值得关注：

问题 7.1. 对于每个极大理想独立族 $\mathcal{A}$，是否都存在一个 $A \in \mathcal{A}$，使得 $\mathcal{F}(\mathcal{A}, A)$ 是一个超滤子?

若此问题的答案为肯定，则可推出存在不可完全可分的极大几乎不交族。已知在 $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ 或 $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ 的条件下，这类族都存在，分别见 [15] 和 [12], 。

在拓扑的语境下，我们进一步探讨理想独立族的 Mr´owka 空间。本文对其中可能存在的情况仅作了初步探讨；例如，下面这个自然问题目前仍未解决。

问题 7.2. 是否存在一个 ZFC 中的例子，使得无限极大理想独立族 $\mathcal{A}$ 满足 $\psi(\mathcal{A})$ 是 Fr´echet-Urysohn 或第一可数的?

显然，如果 ZFC 中存在完全可分的极大几乎不交族，那么上述问题的答案是肯定的。

本文的结果与 [5] 的结果相结合，要么给出一个 ZFC 关系，要么确立 $\mathfrak{s}_{mm}$ 与任何其他研究充分的基数特征之间的独立性，几乎不交数 $\mathfrak{a}$ 除外。以下问题仍未解决。

问题 7.3. $\mathfrak{s}_{mm} < \mathfrak{a}$ 是否相容?

关于 $\mathfrak{i}$的相应问题，即 $\mathfrak{i} < \mathfrak{a}$ 的一致性，是连续统的基数特征领域中最有趣的开放问题之一，而解决该问题所面临的许多障碍也是相同的

作为试图回答上述问题的一部分。参见 [4] 的附录，其中对 Vaughan 问题有一段有趣的讨论。

如引言中所述，定理 5.2 表明，在许多标准强迫扩张中，$\mathfrak{s}_{mm} = \max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\}$。然而，这并非 ZFC 中的等式，因为在布尔超幂模型中，$\mathfrak{s}_{mm} > \max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\}$ 成立，例见[2]。该模型需要一个可测基数，并且会增大 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{d}$。因此，以下两个问题仍然非常值得关注：

问题 7.4. $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{u}\} < \mathfrak{s}_{mm}$ 与 ZFC 相容吗?

问题 7.5. 如果 $\mathfrak{d} = \mathfrak{u} = \aleph_1$，那么 $\mathfrak{s}_{mm} = \aleph_1$吗?

后一个问题是 Roitman 问题的理想独立版本。定理 4.4 带来了这样一种可能性：存在一个大小为 $\aleph_\omega$的极大理想独立族。因此我们可以问：

问题7.6。是否一致地有 $\mathfrak{s}_{mm} = \aleph_\omega$? 更一般地，$\mathfrak{s}_{mm}$能有可数余终性吗?

最后，我们可以更一般地询问极大理想独立族的谱：

问题 7.7。ZFC 对集合spec($\mathfrak{s}_{mm}$) 有哪些限制？它是否可以等于任何包含连续统的正则基数集合?

References

[1] A.Blass，《连续统的组合基数特征》，载于：Foreman M.、Kanamori A.（编），《集合论手册》。Springer，Dordrecht（2010），24–27。[2] J.Brendle，《极大几乎不相交族与迭代理论》，Contemp. Math.，302，1–31，2002。[3] J.Brendle、S. Shelah，《ω 上的超滤子——其理想及其基数特征》，Trans. Amer.Math.Soc.，351（7），2643-2674，1999。[4] J. A. Cruz-Chapital、V.Fischer、O.Guzman、J. Supina，《分割强迫与极大独立族》，即将发表于 Journal of Symbolic Logic，doi:10.1017/jsl.2002.68，2022。[5] J. Cancino、O. Guzman、A. W. Miller，《理想独立族与超滤数》，Journalof Symbolic Logic，86（1），128–136，2021。[6] R.Engelking，《一般拓扑》，第2版，Heldermann，Berlin，1989。[7] V. Fischer、D. C. Montoya，《更高阶独立性》，Journal of Symbolic Logic，doi:10.1017/jsl.2022.33，2022。[8]V. Fischer、S. Shelah，《独立谱》，Archive for MathematicalLogic，58（7-8），877-884，2019。[9] V. Fischer、S. Shelah，《独立谱 II》，Annals ofPure andApplied Logic，第173卷，第9期，doi.org/10.1016/j.apal.2022.103161，2022。[10] M. Goldstern、H. Judah、S. Shelah，《没有科恩实数的强零测集》，Journal of Symbolic Logic，58（4），1323–1341，1993。

[11] O. Guzman，《关于完全可分的极大几乎不相交族》，预印本，2021，http://hdl.handle.net/2433/266189[12] M.Hrusak，《拓扑学中的几乎不交族》。载于《一般拓扑学最新进展 III》。Atlantis Press，巴黎，601–638，2014。[13]M. Hrusak, P. Simon，《完全可分的极大几乎不相交族》，《拓扑学中的未决问题 II》，179–184，2007。[14] A. Miller，《用 2^ω ω_1 个不交闭集覆盖》，载于 J. Barwise、H.J. Keisler、K.Kunen 编，《Kleene 研讨会》，第101卷，《逻辑基础研究》，1980，第415–421 页。[15]H. Mildenberger，D. Raghavan，J. Steprans，《分裂族与完全可分性》，《加拿大数学通报》57 (1)，119–124，2014。[16]D.Raghavan，J. Steprans，《理想乘积的几乎不交性不变量》，《拓扑学及其应用》323，108295，2023。[17] S. Shelah，《Con u $>$ i》，《数学逻辑文献》31 (6)，1992，第433–443页。[18] O. Spinas，《划分数》，《纯粹与应用逻辑年刊》90 (1-3)，1997，第243–262 页。[19] C.Switzer，《选择性独立性与 h-完美树强迫概念》，即将发表于 RIMSKokyuroku 会议论文集：《集合论 2021》，2022。
Institute of Mathematics, Univeristy of Vienna, Kolingasse 14-16, 1090Vienna, Austria*Email address*:sbardyla@gmail.comInstitute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, Praha 1,Praha, Czech Republic *Email address*: cancino@math.cas.czInstitute of Mathematics, Univeristy of Vienna, Kolingasse 14-16, 1090Vienna, Austria*Email address*: vera.fischer@univie.ac.atInstitute of Mathematics, Univeristy of Vienna, Kolingasse 14-16, 1090Vienna, Austria*Email address*: corey.bacal.switzer@univie.ac.at