arXiv:2304.04663v1 [math.AP] 10 Apr 2023

具有光滑边界的紧黎曼曲面上的 Kazdan-Warner 问题

JIE XU

Abstract. 本文证明：(i) 具有非空光滑边界的紧黎曼曲面（$M,\partial M,g$）上的任意光滑函数都可以实现为高斯曲率函数；(ii) ∂M 上的任意光滑函数都可以在某个度量 $\tilde{g}\in[g]$ 下实现为测地曲率函数。关键步骤是在给定函数 K,σ 及某些常数 A,κ 的情况下，证明 M 中的 Brezis-Merle 型方程 $-\Delta_g u+Au=Ke^{2u}$ 以及 ∂M 上的 $\frac{\partial u}{\partial \nu}+\kappa u=\sigma e^u$ 存在解。此外，我们还借助了 Osgood、Phillips和Sarnak 给出的一致化定理推广。

1. Introduction

闭黎曼曲面上的 Kazdan-Warner 问题历史悠久，Kazdan和Warner 在20世纪70年代对其进行了全面研究， [16, 17, 18]。Kazdan-Warner 问题中共形变形的重要性，将几何问题与某些非线性椭圆型偏微分方程的可解性联系起来。因此，Kazdan-Warner 问题是几何分析领域中的一个重要课题。自然会引出这样的问题：如何在具有非空光滑边界的紧黎曼曲面上指定高斯曲率函数或测地曲率函数（$M,\partial M,g$） $n=$维 $M=2$。具体而言，我们考虑在共形类 $[g]$ 中为度量指定高斯曲率和测地曲率的问题。设共形变换为$\tilde{g}=e^{2u}g$，其中 $u\in\mathcal{C}^\infty$（M），那么将给定函数 K，σ 实现为 $\tilde{g}$ 的高斯曲率和测地曲率的问题，可归结为以下偏微分方程存在光滑解的问题

$$-\Delta_g u+K_g=Ke^{2u}\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma_g=\sigma e^u\text{ on }\partial M. \tag{1}$$

这里， $-\Delta_g$ 是正定的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，其系数可光滑延拓至 ∂M； K_g 和σ_g 分别是 g 的高斯曲率和测地曲率。给定的测地曲率函数 σ 最初定义在 ∂M上。在本文中，我们有时用相同的记号 $\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$表示原函数$\sigma\in\mathcal{C}^\infty(\partial M)$的某个光滑延拓。众所周知，高斯曲率和测地曲率受著名的高斯-博内定理支配，因此也受欧拉示性数 $\chi(M)$支配：

$$\int_M K_g d\mathrm{Vol}_g+\int_{\partial M}\sigma_g dA_g=2\pi\chi(M). \tag{2}$$

这里， $d\mathrm{Vol}_g$是 M上的黎曼密度， dA_g是 ∂M上的体积形式，二者均对应度量 g。高斯-博内公式（2）在共形变换下保持不变，即若将 K_g 替换为 K、将 σ_g 替换为 σ，则（2）对 $\tilde{g}$ 的体积形式仍成立，前提是 K 和 σ 能够实现为关于 $\tilde{g}=e^{2u}g$的相应曲率函数。

作为必要条件，可以推出：如果 $\chi(M)>0$，则 K 或 σ 必须在某处为正；或者，如果 $\chi(M)<0$，则 K 或 σ 必须在某处为负，等等。当 $\chi(M)=0$ 时，可能的情形包括 $K>0$、 $\sigma<0$、 K 变号以及 $\sigma\equiv 0$，等等。

本文旨在研究在具有光滑边界的紧黎曼曲面$(M,\partial M,g)$的共形类 $[g]$ 中，规定高斯曲率和测地曲率问题的充分条件，并涵盖所有可能的欧拉示性数。对于负欧拉示性数，我们通过单调迭代格式获得了最新的结果；对于具有极小边界的零欧拉示性数情形，我们通过变分方法也获得了最新的结果。大多数

该主题的已知结果主要集中在四个方向：(i) 对于负或零欧拉示性数，利用变分方法同时规定高斯曲率和测地曲率；或者对于负欧拉示性数，利用流方法，参见例如 [10, 15], ；(ii) 规定极小边界上的高斯曲率，或规定标量平坦度量的测地曲率，参见 [9], 等；(iii) 规定闭黎曼曲面上的高斯曲率，关于Nirenberg问题，参见 [6, 22], 等；关于零和负欧拉示性数，参见[16] 。此外，通过变分法的直接方法、爆破分析和刘维尔定理，还得到了许多存在性结果，参见例如[1, 3, 7, 10, 11, 12, 27]。

我们的主要结果表明，对于某个属于共形类 $[g]$ 的度量，任意光滑函数都可以实现为高斯曲率函数或测地曲率函数；与此同时，还可以同时指定某些相关的测地曲率函数/高斯曲率函数。

定理。令 $(M, \partial M, g)$ 为一带非空光滑边界的紧黎曼曲面 .

(i) 任意函数 $K \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 都可以实现为某个度量$\tilde{g} \in [g]$的高斯曲率函数；(ii) 任意函数 $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\partial M)$ 都可以实现为某个度量$\tilde{g} \in [g]$的测地曲率函数。

这与闭黎曼曲面上的结果截然不同，后者受到更多限制。由于边界的存在，我们在这里获得了灵活性；例如，高斯-博内公式 (2) 表明，高斯曲率和测地曲率都会影响欧拉示性数的符号。主要工具包括带边界黎曼曲面上的模型情形——带边界紧黎曼曲面的一致化定理。特别是，我们依赖 Osgood、Phillips和Sarnak [21] 给出的经典一致化定理的卓越推广：

定理 1.1. [21, 引言] 设$(M, \partial M, g)$是一个具有非空光滑边界的紧黎曼曲面。令 $[g]$ 为 g 的共形类。则

(i) 存在度量 $\tilde{g}_1 \in [g]$ ，使得 $K_{\tilde{g}_1}$ 为某个常数，且 ∂M 关于 $\tilde{g}_1$ 的测地曲率为零；(ii) 存在度量 $\tilde{g}_2 \in [g]$ ，使得 $\sigma_{\tilde{g}}$ 为某个常数，且 M 关于 $\tilde{g}_2$ 是平坦的。

第一个结果见定理 4.1，第二个结果见定理 4.2。

此外，我们依赖于 Brezis-Merle 型方程的存在性结果。

$$-\Delta_g u + Au = Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \kappa u = c\sigma e^u \text{ on } \partial M. \tag{3}$$

对于给定的 $K, \sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$。这里， A, κ, c 是一些给定的非负常数，使得 $A = 0, \kappa > 0$ 或 $A > 0, \kappa = 0$。由于 A 或 κ 中的任一个具有正性，我们可以应用最大值原理等许多工具，以获得关于（3）的解的更多信息。总之，以下命题在证明主要结果中发挥着核心作用。

命题。设 $(M, \partial M, g)$ 是一个具有非空光滑边界的紧流形， $n = \dim M \geqslant 2$。给定函数 $K \in \mathcal{C}^\infty(M)$ $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\partial M$。

(i) 若 $A = 0$ and $\kappa > 0$，则存在一些正常数 C_0, C_1 ，使得方程 (1) 存在一个光滑解 u ，其给定 K 和 σ ，并满足 $K \leqslant C_0$ on M，且 $c \leqslant C_1$；(ii) 若 $A > 0$ and $\kappa = 0$，则存在一些正常数 C_2, C_3 ，使得方程 (1) 存在一个光滑解 u ，其给定 K 和 σ ，并满足 $K \leqslant C_2$ on M，且 $c \leqslant C_3$。

第一个结论见定理 3.1，第二个结论见定理 3.2。上述结果很容易推广到 $A > 0, \kappa > 0$ 的情形，但本文不需要这一版本。

作为 Brezis-Merle 型方程存在性结果的另一项应用，对于共形类中的度量，只要 $\chi(M) = 0$, 我们就可以指定非正的高斯曲率函数和任意的测地曲率函数。这里拓扑条件很重要，因为对于具有 $\chi(M) > 0$ 的流形，我们无法得到类似结果，见定理 5.1。

本文组织如下。§1 为引言，并列出主要结果。§2 给出后续各节所需的全部必要定义和结果。§3 在定理 3.1 和定理 3.2 中介绍 Brezis-Merle 型方程的解的存在性。§4 是本文的主要部分，在定理 4.1 和定理 4.2 中证明主要结果。在 §5 中，我们在 $\chi(M) = 0$ 的条件下，于定理 5.1 中展示指定非正高斯曲率函数和任意测地曲率函数的结果。对于指定具有 $\chi(M) < 0$ 的高斯曲率函数和测地曲率函数，我们给出必要条件。在 §7 中，我们在命题 7.1 中证明，对于 $\chi(M) > 0$ 情形，指定高斯曲率和测地曲率的符号条件仅受到拓扑——高斯-博内定理——的限制。对于 $\chi(M) < 0$, 命题 7.2 给出了类似结果。

2. The Preliminaries

本节将介绍微分几何以及流形上的椭圆型偏微分方程理论中的基本定义和结果。本文中，我们用 $f \in C(M)$ 表示光滑函数，用 $f' \in C^k(M)$ 表示连续可微函数； $k = 0$ 表示 f' 是连续函数。我们还用 ν 表示紧流形 $(M, \partial M, g)$ 上沿着 ∂M 的单位外法向量场，其中流形具有非空的光滑边界。我们假设读者具备线性椭圆理论的标准基础知识，包括 Lax–Milgram 定理 [19, §6], 、Sobolev 嵌入定理 [2, §2], 、标准最大值原理 [23, §5], 、迹定理 [23, 第 4], 章、Schauder 估计 [14], 等。我们将介绍非线性椭圆偏微分方程在非线性斜边界条件下的单调迭代格式结果、适用于某些边值问题的 Stampacchia 型最大值原理，以及适用于带斜边界条件的椭圆型偏微分方程的 $W^{s,\ p}$ 型椭圆正则性。

我们首先给出紧流形（可能带边界）上整数阶 Sobolev 空间的定义。尽管在大多数情况下, $(M, \partial M, g)$ 表示带非空边界的紧黎曼曲面，但只要可能，我们都会将结果表述为适用于一般的 n 维紧流形带边界。

定义2.1。设(M, g) 是一个闭黎曼 n-流形，且$(M, \partial M, g)$ 是一个具有非空光滑边界的紧黎曼 n-流形，其体积密度为 $d\mathrm{Vol}_g$ ，在 M 上以及dS_g在 ∂M 上。设 u 为实值函数。令 $\langle v、\ w\rangle_g$和 $|v|_g = \langle v、\ v\rangle_g^{1/2}$ 分别表示关于 g 的内积和范数。

(i) 对于 $1 \leqslant p < \infty$，我们将 M 上的勒贝格空间定义为

$$\mathcal{L}^p(M, g) \text{ is the completion of } \left\{ u \in C^\infty(M) : \|u\|^p_{\mathcal{L}^p(M,g)} := \int_M |u|^p \, dVol_g < \infty \right\}.$$

对于 ∇u g的 Levi-Civita 联络，以及对于 $u \in C^\infty(\Omega)$或 $u \in C^\infty(M)$,

$$|\nabla^k u|_g^2 := (\nabla^{\alpha_1} \dots \nabla^{\alpha_k} u)(\nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_k} u). \tag{4}$$

特别地， $|\nabla^0 u|_g^2 = |u|^2$ 和 $|\nabla^1 u|_g^2 = |\nabla u|_g^2$.

(iii) 对于 $s \in \mathbb{N}$、$1 \leqslant p < \infty$，我们将 M 上的 (s, p) 型 Sobolev 空间定义为

$$W^{s,p}(M, g) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(M, g) : \|u\|^p_{W^{s,p}(M,g)} := \sum_{j=0}^{s} \int_M \left|\nabla^j u\right|_g^p \, dVol_g < \infty \right\}. \tag{5}$$

这里 $|D^j u|^p := \sum_{|\alpha|=j} |\partial^\alpha u|^p$ 在弱意义下成立。特别地，$H^s(M,g) := W^{s,2}(M,g)$ 是通常的 Sobolev 空间。

(iv) 对于 $s \in \mathbb{N}$、$1 \leqslant p < \infty$、$W^{s,p}_0(M,g)$ 定义为关于 $W^{s,p}$-范数的 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$ 的完备化。$H^s_0(M,g)$ 类似地定义。

接下来我们给出一个 Stampacchia 型最大值原理，该原理也曾用于 [16], ，其中研究了闭黎曼曲面上的预设高斯曲率问题。

命题 2.1. 设 $(M,\partial M,g)$ 是一个具有非空光滑边界的紧流形。设 $\kappa > 0$ 为某个常数。若存在函数 $u \in \mathcal{C}^2(M)$ 使得

$$-\Delta_g u \leqslant 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \kappa u \leqslant 0, \tag{6}$$

则 $u \leqslant 0$ 于 M 上。

证明。对于任意 $v \in H^1(M,g) \cap \mathcal{C}^0(M)$，若在 ∂M 上有 $v \geqslant 0$，则由 (6) 可得

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_M -\Delta_g u \cdot v d\mathrm{Vol}_g = \int_M \nabla_g u \cdot \nabla_g v d\mathrm{Vol}_g + \int_{\partial M} -\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v dS_g \\ &\geqslant \int_M \nabla_g u \cdot \nabla_g v d\mathrm{Vol}_g + \int_{\partial M} \kappa u v dS_g. \end{aligned}$$

记 $w = \max_M(u, 0)$。显然，$w \geqslant 0$，$w \in H^1(M,g) \cap C^0(M)$。在上述不等式中取 $v = w$，可得

$$0 \geqslant \int_M \nabla_g u \cdot \nabla_g w d\mathrm{Vol}_g + \int_{\partial M} \kappa u w dS_g \geqslant \int_M |\nabla_g w|^2 d\mathrm{Vol}_g + \int_{\partial M} \kappa w^2 dS_g \geqslant 0.$$

由此可得，$w \equiv 0$ 在 M上，包括边界。因此，$u \leqslant 0$。 □

注 2.1. 显然，若存在某个 u，使得

$$-\Delta_g u \geqslant 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \kappa u \geqslant 0, \tag{7}$$

然后 $u \geqslant 0$。通过替换 $u \mapsto -u$ 并应用命题 2.1，很容易看出。

此外，类似的论证也适用于光滑函数 v，其在 M 中满足 $-\Delta_g v + Av \leqslant 0$，并在 ∂M 上满足 $\frac{\partial v}{\partial \nu} \leqslant 0$，这说明 $v \leqslant 0$ 在 M 上。

现在我们针对具有首要微分算子 $-\Delta_g$ 且满足非线性斜边界条件的半线性椭圆偏微分方程，引入单调迭代格式的一般版本。

定理 2.1. [26, 定理 2.3] 设 $(M,\partial M,g)$ 是一个边界非空且光滑的紧流形，$n =$维数为 $M \geqslant 2$。设 $q > n$是一个正整数。设 $F(\cdot,\cdot)$ $G(\cdot,\cdot)$: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑函数。设 ν 是沿着 ∂M 的单位外法向量。设 σ 是某个非负常数。若

(i) 存在两个函数 $u_+ \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 和 $u_- \in \mathcal{C}^0(M) \cap H^1(M,g)$，使得

$$\begin{aligned} -\Delta_g u_+ &\geqslant F(\cdot,u) \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \geqslant G(\cdot,u_+) \text{ on } \partial M; \\ -\Delta_g u_- &\leqslant F(\cdot,u) \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \leqslant G(\cdot,u_-) \text{ on } \partial M, \end{aligned} \tag{8}$$

其中，下解可以在弱意义下成立；并且

(ii) 此外，$\sup_M |G(\cdot,u_+)|$、$\sup_M |\nabla G(\cdot,u_+)|$ 足够小；

(iii) 此外，$u_+ \geqslant u_-$ 在 M 上逐点成立；

那么存在一个光滑函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，使得 $u_- \leqslant u \leqslant u_+$，满足上述条件。

$$-\Delta_g u = F(\cdot,u) \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = G(\cdot,u) \text{ on } \partial M. \tag{9}$$

最后，为结束本节，我们给出具有一般维数的 $(M,\partial M,g)$ 上的一种 $W^{s,p}$ 型椭圆正则性。

定理 2.2. [24, 定理 2.2] 设 $(M,\partial M,g)$ 是一个具有非空光滑边界的紧流形。任取 $p>$维 $M,p\in\mathbb{N}$。设 $L\colon \mathcal{C}^\infty(M)\to\mathcal{C}^\infty(M)$ 是 M 上的一致二阶椭圆算子，具有延拓至 ∂M的光滑系数，并且可以延拓为 $L\colon W^{2,p}(M,g)\to\mathcal{L}^p(M,g)$。设 $f\in\mathcal{L}^p(M,g)$ $\tilde{f}\in W^{1,p}(M,g)$。设 $u\in H^1(M,g)$ 是下述边值问题的弱解

$$Lu=f \text{ in } M, Bu=\frac{\partial u}{\partial\nu}+c(x)u=\tilde{f} \text{ on } \partial M. \tag{10}$$

这里 $c\in\mathcal{C}^\infty(M)$。还假设 $\operatorname{Ker}(L)=\{0\}$ 与齐次罗宾边界条件相关。如果进一步有 $u\in\mathcal{L}^p(M,g)$，则 $u\in W^{2,p}(M,g)$，并满足以下估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(M,g)}\leqslant C'\left(\|Lu\|_{\mathcal{L}^p(M,g)}+\|Bu\|_{W^{1,p}(M,g)}\right) \tag{11}$$

He关于 C'取决于 L、p、c和流形（M、∂M、g），且与 u无关。

3. Brezis-Merle type Equations with Oblique Boundary Conditions

在本节中，我们考虑一般的具有非空光滑边界的紧流形（$M,\partial M,g$）上的两个带斜边界条件的 Brezis-Merle 型方程，$\dim M=n\geqslant 2$。给定函数 $K,\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$，第一个方程是

$$-\Delta_g u=Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial\nu}+\kappa u=c\sigma e^u \text{ on } \partial M. \tag{12}$$

这里 $\kappa>0$ 是某个固定常数， $c>0$ 是某个常数。我们将通过使用单调迭代格式证明，存在正的常数 C_0、C_1，它们取决于（M、∂M、g）、 κ、椭圆正则性以及边界条件中的非线性结构，使得当 $c\leqslant C_1$ 时，偏微分方程（12）对于任意 σ 和 $K\leqslant C_0$总有一个光滑解 u 。

第二个是

$$-\Delta_g u+Au=Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial\nu}=c'\sigma e^u \text{ on } \partial M. \tag{13}$$

其中 $A>0$ 为某个固定常数， $c'>0$ 为某个常数。我们将通过使用单调迭代格式证明，存在正数 C_2、C_3，它们依赖于 $(M,\partial M,g)$、 A、椭圆正则性以及边界条件的非线性结构，使得当 $c\leqslant C_3$ 时，对于任意 σ 和 $K\leqslant C_2$，偏微分方程 (13) 总存在一个光滑解 u 。

当 $g=g_e$时，欧几里得度量，偏微分方程的解的存在性

$$-\Delta_g u=Ke^{2u}, \tag{14}$$

其紧性性质被称为 Brezis-Merle 问题。在 [5], (14) 中，研究了有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 内带常系数 K 和狄利克雷边界条件的情形；在 [20], 中，对方程 (14) 的解序列进行了爆破分析；在 [8], 中，讨论了无界二维欧几里得区域上的 (14)。首先，方程 (14) 出现在闭黎曼曲面上指定高斯曲率的问题中，见 [6, 16, 25, 26] 及其中的参考文献。在适当的边界条件下，Brezis-Merle 型方程出现在同时指定高斯曲率和测地曲率的研究中，见 [9, 15], 等。我们指出，(12) 和 (13) 并非用于指定高斯曲率和测地曲率问题的恰当偏微分方程，但正如我们将在后续章节中看到的，它们在紧黎曼曲面上的 Kazdan-Warner问题中发挥着重要作用。

现在给出关于第一方程 (12 的解的存在性结果。).

定理 3.1. 设 $(M,\partial M,g)$ 为具有非空光滑边界的紧流形， $n=\dim M\geqslant 2$。设 $\kappa>0$ 为固定常数。给定函数 $K,\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$。若 $K\leqslant C_0$ on M，且 $c\leqslant C_1$ 对某些正常数 C_0,C_1 成立，则 (12) 存在一个具有给定 K 和 σ 的光滑解 u。

证明。我们构造方程（12）的子解和上解。对于上解，我们考虑

$$-\Delta_g u_0=f \text{ in } M,\frac{\partial u_0}{\partial\nu}+\kappa u_0=a \text{ on } \partial M.$$

这里 $f>0$ 是某个光滑函数， $a>0$ 是某个正常数。根据标准椭圆理论，上述方程存在一个光滑解。由命题 2.1 和注2.1 中的最大值原理，我们得出 $u_0>0$ 在 M 上。显然，存在某些正常数 C_0、C_1 使得

$$f\geqslant C_0e^{2u_0} \text{ on } M,a\geqslant C_1\sigma e^{u_0} \text{ on } \partial M.$$

因此，如果 $K\leqslant C_0$ 在 M 上，则可知

$$u_+:=u_0\Rightarrow -\Delta_g u_+\geqslant Ke^{2u_+} \text{ on } M,\frac{\partial u_+}{\partial\nu}+cu_+\geqslant c\sigma e^{u_+} \text{ on } \partial M,\forall 0\leqslant c\leqslant C_1. \tag{15}$$

注意， C_0和C_1 都可能非常小。对于下解，我们考虑

$$-\Delta_g u_1=b_1 \text{ in } M,\frac{\partial u_1}{\partial\nu}=b_2 \text{ on } \partial M,\int_M b_1 d\mathrm{Vol}_g=-\int_{\partial M}b_2 dS_g,b_1<0,b_2>0. \tag{16}$$

由于常数 b_1 和 b_2的选取，(16)具有一个光滑解 u_1。取 $C\gg 1$ 使得

$$u_2:=u_1-C<u_+ \text{ on } M \text{ pointwise.}$$

显然 地， $u_2\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 是方程 (16) 的解。此外，我们取 C 足够大，使得 t

$$b_1\leqslant Ke^{2u_2}=Ke^{2u_1}\cdot e^{-2C} \text{ on } M,$$

$$b_2+\kappa u_2=b_2+\kappa u_1-\kappa C\leqslant C_1\sigma e^{u_2}=C_1\sigma e^{u_1}\cdot e^{-C}\leqslant c\sigma e^{u_1}\cdot e^{-C} \text{ on } \partial M,\forall 0\leqslant c\leqslant C_1.$$

当 C 足够大时，由于 $b_1<0$、 $b_2+\kappa u_1-\kappa C<0$ ，且当 C 足够大时， e^{-C} 非常小，因此可以做到这一点。由此可得

$$u_-:=u_2\Rightarrow -\Delta_g u_-\leqslant Ke^{2u_-} \text{ on } M,\frac{\partial u_-}{\partial\nu}+\kappa u_-\leqslant c\sigma e^{u_-} \text{ on } \partial M. \tag{17}$$

如有必要，我们可以进一步减小常数 C_1 ，以满足定理 2.1 中的条件 (ii)。注意，对于较小的阈值 C_1，(15) 和 (17) 均成立。根据设定， $u_+\geqslant u_-$ 逐点成立，因此由定理 2.1 可知，只要对于某个正常数 C_0 和 C_1， $K\leqslant C_0$ 且 $c\leqslant C_1$ ，则 (12) 存在一个具有给定 K 和 σ 的光滑解 u 。□

注 3.1. 在前面的证明中，我们并未给出最优的 C_0 和 C_1 。上界 C_0 是出于纯粹的分析原因。值得注意的是，Brezis-Merle 问题的相关结果中也设有类似的上界，参见例如 [5, 20]。

现在我们转向第二个方程 (13)。证明策略与定理 3.1 中的相当相似。

定理3.2。设$(M,\partial M,g)$是一个具有非空光滑边界的紧流形， $n=$维 $M\geqslant 2$。设 $A>0$ 为一个固定常数。设 K， $\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 为给定函数。若 $K\leqslant C_2$ 在M上成立，并且 $c\leqslant C_3$ 对于某些正的常数 C_2， C_3成立，则（13）具有一个光滑解 u，其给定的 K 和 σ。

证明。我们构造下解和上解。对于上解，我们考虑 er

$$-\Delta_g u_0 + A u_0 = a \text{ in } M, \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = b \text{ on } \partial M. \tag{18}$$

这里 a、$b > 0$ 是(18)中的某个常数。根据标准椭圆理论，(18)存在一个光滑解 u_0。由于 a、$b > 0$，最大值原理表明，$u_0 \geqslant 0$ 在 M 上成立，直至边界。因此，如果$K \leqslant C_2 = a \cdot e^{-2\max^M u_0}$，由(18)可得

$$u_+ := u_0 \Rightarrow -\Delta_g u_+ + A u_+ = a \geqslant K e^{2u_+} \text{ on } M, \frac{\partial u_+}{\partial \nu} = b \geqslant c' \sigma e^{u_+} \text{ on } \partial M \tag{19}$$

对于每个 $c' \in [0, C_3]$。常数 C_3 由 b、σ 和 u_+ 决定。

对于下解，我们考虑

$$-\Delta_g u_1 = b_1 \text{ in } M, \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = b_2 \text{ on } \partial M, \int_M b_1 d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} b_2 dS_g, b_1 > 0, b_2 < 0. \tag{20}$$

由于这些选择 常数 b_1 和 b_2，(16) 有一个光滑解 u_1。选择 $C \gg 1$ 使得 t

$$u_2 := u_1 - C, u_2 \leqslant u_+ \text{ on } M.$$

显然，u_2 满足（18），我们可以将 C 取为更大的值，使得

$$\begin{aligned} u_- := u_2 \Rightarrow &-\Delta_g u_- + A u_- = b_1 + A(u_1 - C) < K e^{2u_1} \cdot e^{-2C} = K e^{2u_-} \text{ on } M; \\ &\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = b_2 \leqslant c' \sigma e^{u_1} \cdot e^{-C} = c' \sigma e^{u_-} \text{ on } \partial M. \end{aligned} \tag{21}$$

注意，对于（19）中选取的每个 c'，只要适当选取 C，（21）中的第二个不等式就成立。

最后，我们取阈值 C_3 足够小，从而定理 2.1 的条件(ii) 得以满足。应用单调迭代格式，我们得出存在某个 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，其对 $K \leqslant C_2$ 以及任意 σ（具有某个 $c' \leqslant C_3$）满足方程 (13)。□

注 3 .2. 类似于注 3.1，C_2、C_3 的选择显然不是最优的。

4. Prescribing Arbitrary Gaussian or Geodesic Curvatures

回顾闭黎曼曲面上的 Kazdan-Warner问题，显然并非每个光滑函数都能作为指定的高斯曲率实现。一个众所周知的障碍是 Bourguignon-Ezin 型障碍 [4], ，它指出任何指定的高斯曲率 K 都必须满足

$$\int_{M_0} \nabla_g K \cdot X_g d\mathrm{Vol}_g = 0.$$

此处（M_0，g）是任意一个维数至少为2 的闭流形，而 X_g 是其关联的共形 Killing 向量场。

在具有非空光滑边界的紧流形上，结果出奇地不同。我们能够证明，任意给定的函数 $K \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 都可以实现为某个度量 $\tilde{g} \in [g]$ 的高斯曲率函数，并与某个测地曲率 $\sigma_{\tilde{g}}$ 相关联；该测地曲率由 K、g 和 M 的拓扑决定。如果我们固定边界条件，例如极小边界，那么由于高斯-博内定理，对指定函数的选取会有一些限制。

类似地，我们还可以证明，任意给定的函数 $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\partial M)$ 都可以作为某个与 g逐点共形的度量的测地曲率函数来实现，并且该度量对应于由 M and σ 所确定的某个高斯曲率。尽管我们对外在曲率的限制较少，Escobar[13] 证明了在 $\mathbb{B}^n$ 上赋予标量平坦度量时，指定平均曲率函数 h on $\partial\mathbb{B}^n$ 的必要条件是

$$\int_{\partial \mathbb{B}^n} Y_g \cdot \nabla h dS_g = 0.$$

这里 Y_g 是 $\partial\mathbb{B}^n$上的共形Killing场。

这些令人惊讶的结果源于第 §3节中引入的Brezis-Merle 型方程。让我们首先考虑在共形类 $[g]$ 内指定高斯曲率。

定理 4.1. 设 $(M,\partial M,g)$ 是一具有非空光滑边界的紧黎曼曲面。对于任意给定的函数 $K\in\mathcal{C}^\infty(M)$，存在一个共形度量 $\tilde{g}\in[g]$，使得 $K_{\tilde{g}}=K$，并与某个由 K 和 $(M,\partial M,g)$ 确定的测地曲率 $\sigma_{\tilde{g}}$ 相关联。

证明。必要时，我们用某个正数常数 $b\ll 1$ 对 K 进行缩放，使得 $\sup_M bK\leqslant C_0$ 满足定理 3.1 中给出的常数 C_0。将 bK 和 $\sigma=0$ 代入定理 3.1，可得

$$-\Delta_g u=bKe^{2u}\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial\nu}+\kappa u=0\text{ on }\partial M \tag{22}$$

存在光滑解。当 $\chi(M)<0$时，我们可以根据定理 1.1假设模型情形为 $K_g=0$ 和$\sigma_g=-1$。由此可知，同一个解 u 满足以下方程

$$-\Delta_g u=bKe^{2u}\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial\nu}-1=\frac{-\kappa u-1}{e^u}e^u:=\sigma_1e^u\text{ on }\partial M.$$

经过缩放，我们得出度量 $\tilde{g}_1=be^{2u}g$具有 $K_{\tilde{g}_1}=K$和 $\sigma_{\tilde{g}_1}=b^{-\frac{1}{2}}\sigma_1$。

当 $\chi(M)=0$时，模型情形为 $K_g=\sigma_g=0$，因此解 u 也满足

$$-\Delta_g u=bKe^{2u}\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{-\kappa u}{e^u}e^u:=\sigma_2e^u\text{ on }\partial M,$$

由此可得，对于 $\tilde{g}_2=be^{2u}g$，$K_{\tilde{g}_2}=K$和 $\sigma_{\tilde{g}_2}=b^{-\frac{1}{2}}\sigma_2$。

最后，当 $\chi(M)>0$时，根据定理 1.1，模型情形为 $K_g=0$ 和 $\sigma_g=1$。式 (22) 中给出的函数 u也满足

$$-\Delta_g u=bKe^{2u}\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial\nu}+1=\frac{-\kappa u+1}{e^u}e^u:=\sigma_3e^u\text{ on }\partial M.$$

因此，$\tilde{g}_3=be^{2u}g$的高斯曲率为 K，测地曲率为 $b^{-\frac{1}{2}}\sigma_3$。 □

通过一个非常类似的论证，我们可以证明，任意函数都可以实现为某个共形度量的测地曲率。

定理 4.2. 设 $(M,\partial M,g)$ 是一个具有非空光滑边界的紧黎曼曲面。对于任意给定的函数 $\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$，存在一个共形度量 $\tilde{g}\in[g]$，使得 $\sigma_{\tilde{g}}=\sigma$，其对应的某个高斯曲率 $K_{\tilde{g}}$ 由 σ 和 $(M,\partial M,g)$ 决定。

证明. 这次我们应用定理 3.2 中的 $K=0$ 和给定的 σ。因此，存在足够小的常数 c，使得

$$-\Delta_g u+Au=0\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial\nu}=c\sigma e^u\text{ on }\partial M \tag{23}$$

存在一个光滑解 u。

当 $\chi(M)<0$时，根据经典一致化定理，我们可以假设现在的模型情形为 $K_g=-1$ 和 $\sigma_g=0$。因此，同一个函数 u 满足

$$-\Delta_g u-1=\frac{-Au-1}{e^{2u}}e^{2u}:=K_1e^{2u}\text{ in }M,\frac{\partial u}{\partial\nu}=c\sigma e^u\text{ on }\partial M.$$

因此，度量 $\tilde{g}_1=c^2e^{2u}g$ 具有所需的测地曲率 $\sigma_{\tilde{g}_1}=\sigma$ 和 $K_{\tilde{g}_1}=c^{-2}K_1$。

当 $\chi(M) = 0$ 和 $\chi(M) > 0$时，我们分别看到，同一个方程 u 满足以下两个方程。

$$-\Delta_g u = \frac{-Au}{e^{2u}} e^{2u} := K_2 e^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} = c\sigma e^u \text{ on } \partial M;$$
$$-\Delta_g u + 1 = \frac{-Au+1}{e^{2u}} e^{2u} := K_3 e^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} = c\sigma e^u \text{ on } \partial M.$$

因此结论显然成立。 □

5. Prescribing Gaussian and Geodesic Curvatures with $\chi(M) = 0$

。尽管我们在§4 中取得了有趣的结果，但我们愿意同时选取所需的高斯曲率和测地曲率。当 $\chi(M) = 0$ 时，我们可以做得稍微好一些。

在 [9, 25], 中，给出了关于在具有极小边界的 $(M, \partial M, g)$ 上指定高斯曲率的结果：对于某个共形度量 $[g]$，任意函数 K 能够作为某个具有极小边界的度量 $\tilde{g} \in [g]$ 的高斯曲率实现，当且仅当满足以下条件之一：(i) $K \equiv 0$；或 (ii) $\int_M K d\text{Vol}_g < 0$ 且 K 变号。

在本节中，我们介绍关于在满足$\chi(M) = 0$的条件下，在$(M, \partial M, g)$上为某个逐点共形度量指定非平凡高斯曲率函数和测地曲率函数 K、$\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$的结果。根据一致化定理，模型情形是 $K_g = \sigma_g = 0$。特别地，我们将考虑以下情形：

$$K < 0 \text{ everywhere on } M, \sigma > 0 \text{ everywhere on } \partial M. \tag{24}$$

基于模型情形，该问题归结为方程光滑解的存在性。

$$-\Delta_g u = Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} = c\sigma e^u \text{ on } \partial M. \tag{25}$$

这里我们有意在边界条件中引入常数 $c > 0$，以方便计算和记号。回顾一下，(25) 表明，度量 $\tilde{g} = e^{2u} g$ 具有 $K_{\tilde{g}} = K$ 和$\sigma_{\tilde{g}} = c\sigma$，这是通过假设可解性得到的。我们再次尝试构造 (25) 的下解和上解。关键步骤是 (12) 的可解性，即第 §3 节中讨论的 Brezis-Merle 型方程。

我们需要一个小引理，将偏微分方程 (25) 转换为另一个等价形式。 n:

引理 5.1. [26, 引理。5.1] 设$(M, \partial M, g)$是一个具有非空光滑边界的紧黎曼曲面。设 $K, \sigma \in \mathcal{C}^\infty($ $M)$ 为给定函数。则存在某个函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足

$$-\Delta_g u + K_g \geqslant Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_g \geqslant \sigma e^u \text{ on } \partial M \tag{26}$$

当且仅当存在某个正函数 $w \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足

$$-\Delta_g w - 2wK_g + \frac{|\nabla_g w|^2}{w} \leqslant -2K \text{ in } M, \frac{\partial w}{\partial \nu} - 2w\sigma_g \leqslant -2\sigma w^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{27}$$

此外，(26) 中的等式成立，当且仅当 (27) 中的等式成立；此外，(26) 中的不等式方向相反，当且仅当 (27) 中的不等式方向相应地相反。

注 5.1. 当 K_g 和 σ_g 分别为高斯曲率和测地曲率时，等号成立的公式 (26) 具有几何意义。但引理 5.1 对任意光滑函数 K_g 和 σ_g 仍然成立。(26) 中的 u 与 (27) 中的 w 之间的关系为 $w = e^{-2u}$。

定理 5.1. 设 $(M, \partial M, g)$ 是一个具有非空光滑边界的紧黎曼曲面，$\chi(M) = 0$。设 $K, \sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 为满足 (24) 的给定函数。那么存在一个正常数 D，使得对于给定的 K, σ 以及所有 $c \in (0, D]$，(25) 有一个光滑解。

证明。我们构造全局下解和上解。对于上解，我们考虑类型 (12) 的偏微分方程：

$$-\Delta_g u_0 = Ke^{2u_0} \text{ in } M, \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \kappa u = 0. \tag{28}$$

根据定理 3.1，方程 (28)对于定理3.1 中给出的 u_0 作为 $K < 0 < C_0$ 对于 C_0 存在一个光滑解。由于 $K < 0$ 在 M上处处成立，命题2.1中的最大值原理蕴含 $u_0 \leqslant 0$ 在 M 上成立。显然， $u_0 \not\equiv 0$。显然，

$$u_+ := u_0 \Rightarrow -\Delta_g u_+ \geqslant Ke^{2u_+} \text{ on } M, \frac{\partial u_+}{\partial \nu} = -\kappa u_+ \geqslant c\sigma e^{u_+} \text{ on } \partial M. \tag{29}$$

注意，当正数常量 $c \ll 1$ 足够小时，边界条件的不等式成立，因为 $-\kappa u_+ > 0$。对于下解，我们考虑偏微分方程。

$$-a\Delta_g w_0 = -2K \text{ in } M, \frac{\partial w_0}{\partial \nu} = A \text{ on } \partial M, A < 0, \int_M -2K d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} A dS_g.$$

注意，式(26)中的 u 与式(27) 中的 w 之间的关系为 $w = e^{-2u}$。由此可知，非常大的$w > 1$ 意味着非常负的 $u < 0$。选择足够大的 $C \gg 1$ 使得

$$w_1 := w + C \Rightarrow -\frac{1}{2}\log w_1 \leqslant u_+ \text{ on } M, A \geqslant -2c\sigma w_1^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{30}$$

注意，当 c 较小时，我们总可以选择较大的 C ，而（30）中的中间不等式仍然成立。此外，当 C较大时， $e^{-\frac{1}{2}\text{对数}\, w_1}$会更小，因此选择较大的 C不会影响单调迭代格式中定理 2.1的条件（ii）。固定 u_+，我们选择足够小的 c ，使得定理2.1 的条件（ii）成立，然后选择足够大的 C ，使得（30）成立。由（30）可知，

$$-\Delta_g w_1 + \frac{|\nabla_g w_1|^2}{w_1} \geqslant -2K \text{ on } M, \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = A \geqslant -2c\sigma w_1^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M.$$

应用引理 5.1,

$$u_- := -\frac{1}{2}\log w_1 \Rightarrow -\Delta_g u_- \leqslant Ke^{u_-} \text{ on } M, \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \leqslant c\sigma e^{u_-} \text{ on } \partial M. \tag{31}$$

显然，对于更小的正常数 c 以及 (30) 中更大的 C ，(30) 仍然成立，从而 u_- 更负。因此，常数 c 的上界 D 可由满足 (29)、(30) 和 (31) 的最大可能 c 确定。由 (30) 可知，逐点有 $u_+ \geqslant u_-$ 。对 (29) 和 (31) 应用定理 2.1，可知存在一个光滑函数 u ，当 c、 σ 和 K 足够小时，它满足 (25)。因此，度量 $\tilde{g} = e^{2u}g$ 具有 $K_{\tilde{g}} = K$ 和 $\sigma_{\tilde{g}} = c\sigma$。□

6. Prescribing Gaussian and Geodesic Curvatures with $\chi(M) < 0$

如果 $\chi(M) < 0$，我们已在 [25] 中证明，任意具有足够小的 $c \in (0, 1)$ 和任意 σ 的 $K < 0$ 与 $c\sigma$，分别都可以实现为具有 $\chi(M) < 0$ 的高斯曲率函数和测地曲率函数；此外，对于规定在某处为正的函数，还存在一个限制。在本节中，我们考虑以下情形，

$$K \text{ changes sign and positive somewhere on } M, \sigma \geqslant 0 \text{ everywhere on } \partial M. \tag{32}$$

回顾一下，如果满足以下条件，则光滑函数 K 和 σ 可实现为某个共形度量的高斯曲率和测地曲率：

$$-\Delta_g u + K_g = Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_g u = \sigma e^u \text{ on } \partial M. \tag{33}$$

类似于 [16]，中给出的必要条件，我们给出满足 (32) 类型的指定函数的必要条件。

命题 6.1. 设 $(M,\partial M,g)$ 为具有非空光滑边界的紧黎曼曲面，$\chi(M)<0$。若 (33) 存在光滑解 u，其中某些 K,σ 满足 (32)，则 (i) 方程的唯一解

$$-\Delta_g w=-2K \text{ in } M,\frac{\partial w}{\partial \nu}+2w=0 \text{ on } \partial M \tag{34}$$

在 M 上为正；

(ii) $\int_M K d\mathrm{Vol}_g<0$。

证明。由共形不变性和定理 1.1，不失一般性，我们可以假设 $K_g=0$ and $\sigma_g=-1$。根据假设，引理 5.1 表明存在一个正的光滑解 w_0，满足

$$-\Delta_g w_0+\frac{|\nabla w_0|^2}{w_0}=-2K \text{ in } M,\frac{\partial w_0}{\partial \nu}+2w_0=-2\sigma w_0^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{35}$$

由命题 2.1 可知，(34) 中的算子是单射。该算子也是自伴的，因此根据弗雷德霍姆择一定理，它是可逆的。因此，对于每个固定的 K、σ，(34) 都存在唯一的光滑解 w； w 的正则性由定理 2.2 给出。

用 (35) 减去 (34)，可得

$$-\Delta_g(w-w_0)=\frac{|\nabla w_0|^2}{w_0}\geqslant 0 \text{ in } M,\frac{\partial (w-w_0)}{\partial \nu}+2(w-w_0)=2\sigma w_0^{\frac{1}{2}}\geqslant 0 \text{ on } \partial M.$$

上面的最后一个不等式是由于 σ 非负。应用命题 2.1，可得$w-w_0\geqslant 0$。因此，在 M 上 $w\geqslant w_0>0$。这就证明了 (i)。

应用 (i) 的结果，我们观察到

$$\int_M -2Kd\mathrm{Vol}_g=-\int_{\partial M}-2wdS_g>0\Rightarrow\int_M Kd\mathrm{Vol}_g<0.$$

□

我们可以应用单调迭代格式，考虑指定常测地曲率且高斯曲率函数任意的情形，如下述命题所示。

引理 6.1. 设 $(M,\partial M,g)$ 是一张具有非空光滑边界的紧黎曼曲面。设 $K<0$ 处处为给定的光滑函数。下列方程

$$-\Delta_g u=Ke^{2u} \text{ in } M,\frac{\partial u}{\partial \nu}-\tilde{\kappa}=0 \text{ on } \partial M \tag{36}$$

当正的常数 $\tilde{\kappa}>0$ 足够小时，该方程有一个光滑解。

证明. 根据 [26, 定理 2.4]，中的方程 (23)，若我们选择某个足够小的 $\tilde{\kappa}$，使得 $\tilde{\kappa}\cdot{}_1\mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}<1$ 对某个固定数 $q>2$ 成立，则定理 2.1 的条件 (ii) 成立，因为对于这一非常特殊的诺伊曼边界条件，条件 (ii) 与次解和上解的选取无关，也与椭圆正则性无关。固定这个 $\tilde{\kappa}$。

对于上解，我们考虑偏微分方程

$$-\Delta_g w_0=-K \text{ in } M,\frac{\partial w_0}{\partial \nu}+2\tilde{\kappa}w_0=0. \tag{37}$$

根据标准椭圆理论，存在方程 (37) 的光滑解 w_0。由命题 2.1 中的最大值原理，$w_0\geqslant 0$ 在 M 上成立，因为 $-K>0$。根据二阶椭圆算子的标准最大值原理，我们得出 $w_0>0$ 在内部 M成立，因此由 Hopf 引理可知，$w_0>0$ 在整个流形（包括边界）上成立。接着我们取一个小常数 $0<\xi\ll 1$，使得

$$\frac{|\nabla_g(\xi w_0)|^2}{\xi w_0}-\xi K\leqslant -2K \text{ on } M.$$

由于两边均为正数，因此可以这样做。由此可得

$$w := \xi w_0 \Rightarrow -\Delta_g w + \frac{|\nabla_g w|^2}{w} = -\xi K + \frac{|\nabla_g(\xi w_0)|^2}{\xi w_0} \leqslant -2K \text{ on } M,$$
$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + 2\tilde{\kappa} w = \xi \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial \nu} + 2\tilde{\kappa} w_0 \right) = 0.$$

因此

$$u_+ := -\frac{1}{2}\log w \Rightarrow -\Delta_g u_+ \geqslant K e^{2u_+} \text{ in } M, \frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \tilde{\kappa} \geqslant 0 \text{ on } \partial M. \tag{38}$$

对于下解，我们考虑偏微分方程。

$$-\Delta_g u_0 = A \text{ in } M, \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \tilde{\kappa} \text{ on } \partial M, A < 0, \int_M A d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} \tilde{\kappa} dS_g.$$

根据标准椭圆理论， [23, 第 5], 章 u_0 存在一个光滑的 u_0 ，满足上面的方程˜。因此，当 $C \gg 1$足够大时，我们有

$$u_- := u_0 - \tilde{C} \Rightarrow -\Delta_g u_- = -\Delta_g u_0 = A \leqslant K e^{u_0} \cdot e^{-\tilde{C}} = K e^{u_-} \text{ on } M,$$
$$\frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \tilde{\kappa} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \tilde{\kappa} = 0 \text{ on } \partial M, \tag{39}$$
$$u_- \leqslant u_+ \text{ on } M \text{ pointwise.}$$

(39)中的第一个不等式成立，因为 A 和 Ke^{u_-} 都是负项。由(38)和(39)，根据定理 2.1，我们得出方程 (36) 有一个光滑解。□

注6.1。方程(36) 是另一个 Brezis-Merle 型方程，具有非平凡的Neumann 边界条件，是 (12)在 $\kappa = 0$下的特例。对于 (36)，限制条件是我们必须处处假设 $K < 0$ 。

7. Prescribing Gaussian and Geodesic Curvatures with $\chi(M) > 0$

紧黎曼曲面（$M, \partial M, g$）的一个典型例子是带有 χ（M） > 0 的上半球。它类似于尼伦伯格问题 [6] ，该问题研究在 $\mathbb{S}^2$上指定高斯曲率的问题。由于球面的拓扑结构，我们预期存在一定程度的障碍，因此这是一个颇具挑战性的问题。

一些人研究了 χ（M） > 0 情形。一个重要成果是 [21]给出的经典一致化定理的推广。其他已知结果要么研究带有极小边界 [13], 时指定高斯曲率，要么研究带有标量平坦度量 [9]时指定测地曲率。

回顾 指定高斯曲率和测地曲率函数的偏微分方程 $K, \sigma \in \mathcal{C}^\infty$（$M$） :

$$-\Delta_g u + K_g = K e^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_g = c\sigma e^u \text{ on } \partial M, c > 0. \tag{40}$$

当 K 和 σ 都不恒为零时，唯一不可能的情形是 $K \leqslant 0$ 且 $\sigma \leqslant 0$，这是由高斯-博内定理导致的。本节讨论指定高斯曲率和测地曲率函数时各种选择的可能性。第3节的结果似乎是在不使用变分方法或莫尔斯理论的情况下所能得到的最优结果。这类方法的本质困难源于拓扑障碍。在分析方面，我们主要使用

$$-\Delta_g u = AK_g \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} = B\sigma_g \text{ on } \partial M$$

以构造其中一个障碍函数。但常数 A、 B 的顺序由高斯–博内公式决定。例如，如果 $K_g < 0$、$\sigma_g > 0$ 和 $\chi(M) > 0$，我们必有 $A > B$，因为

否则，相容性条件 $\int_M AK_g d\text{Vol}_g = -\int_{\partial M} B\sigma_g dS_g$ 无法成立。以下命题表明，对于可能的情形，至少存在一个例子。

命题 7.1. 设 $(M, \partial M, g)$ 是一带非空光滑边界的紧黎曼曲面，$\chi(M) > 0$。存在光滑函数 $K_i, \sigma_i, i = 1, \ldots, 5$, $K_i, \sigma_i \not\equiv 0$，使得

$$
\begin{aligned}
&K_1 \geqslant 0 \ everywhere \ on \ M, \sigma_1 \geqslant 0 \ everywhere \ on \ M;\\
&K_2 \ changes \ sign \ on \ M, \sigma_2 \geqslant 0 \ everywhere \ on \ M;\\
&K_3 \leqslant 0 \ everywhere \ on \ M, \sigma_3 \geqslant 0 \ everywhere \ on \ M;\\
&K_4 \geqslant 0 \ everywhere \ on \ M, \sigma_4 \ changes \ sign \ on \ M;\\
&K_5 \geqslant 0 \ everywhere \ on \ M, \sigma_5 \leqslant 0 \ everywhere \ on \ M;\\
&K_6 \ changes \ sign \ on \ M, \sigma_6 \ changes \ sign \ on \ M;\\
&K_7 \leqslant 0 \ everywhere \ on \ M, \sigma_7 \ changes \ sign \ on \ M;\\
&K_8 \ changes \ sign \ on \ M, \sigma_8 \leqslant 0 \ everywhere \ on \ M;
\end{aligned}
$$

从而 K_i, σ_i 分别可实现为某个共形度量$g_i \in [g]$, $i = 1, \ldots, 8$ 的高斯曲率与测地曲率。

证明。我们构造 K_i 和 σ_i。对于前三种情形，我们选择模型情形 $K_g = 0, \sigma_g = 1$，这是由定理 1.1 得到的。考虑以下方程

$$
-\Delta_g u_i = f_i \text{ in } M, \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = A_i \text{ on } \partial M, \int_M f_i d\text{Vol}_g = -\int_{\partial M} A_i dS_g, i = 1, 2, 3 \tag{41}
$$

我们在 M 上选择 $f_1 \geqslant 0$，使其在 M 上变号，并在 M 上选择 $f_3 \leqslant 0$。此外，我们选择$f_i, i = 1, 2, 3$，使得 $|A_i| < 1$。根据标准椭圆理论，方程 (41) 分别可由光滑函数 u_1, u_2, u_3 求解。由 (41) 可得

$$
-\Delta_g u_i = \frac{f_i}{e^{2u_i}} \cdot e^{2u_i} := K_i e^{2u_i} \text{ in } M, \frac{\partial u_i}{\partial \nu} + 1 = A_i + 1 = \frac{A_i + 1}{e^{u_i}} e^{u_i} := \sigma_i e^{u_i} \text{ on } \partial M, i = 1, 2, 3. \tag{42}
$$

注意， K_i 的符号条件与 f_i 完全相同，因为 $e^{2u_i} > 0$ 一如既往。类似地，由于 $A_i + 1 > 0$，$\sigma_i > 0$ 在 ∂M 上。函数 K_i、σ_i、$i = 1$、2、3是前三种情况下 $g_i = e^{2u_i} g$ 所需的高斯曲率和测地曲率。

对于最后两种情形，我们再次根据定理 1.1，选择可通过某种共形变换实现的模型情形 $K_g = 1, \sigma_g = 0$ 。考虑以下方程。

$$
-\Delta_g u_i = B_i \text{ in } M, \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = h_i \text{ on } \partial M, \int_M B_i d\text{Vol}_g = -\int_{\partial M} h_i dS_g, i = 4, 5. \tag{43}
$$

我们选取在 ∂M 上变号的 h_4，以及在 ∂M 上的 $h_5 \leqslant 0$。此外，我们可以对 h_i、$i = 4$、5 进行缩放，使得 $|B_i| < 1$。利用方程 (43) 的光滑解 u_i、$i = 4$、5，我们得到

$$
-\Delta_g u_i + 1 = B_i + 1 = \frac{B_i + 1}{e^{2u_i}} \cdot e^{2u_i} := K_i e^{2u_i} \text{ in } M, \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \frac{h_i}{e^{u_i}} e^{u_i} := \sigma_i e^{u_i} \text{ on } \partial M, i = 4, 5. \tag{44}
$$

显然， $K_i > 0$在 M上， σ_4在 ∂M上变号，而在 $\sigma_5 \leqslant 0$上则于 ∂M变号。根据（40），我们得出，K_i、σ_i分别是度量 $g_i = e^{2u_i} g$对于 $i = 4$、5 的高斯曲率和测地曲率。

对于最后三个，我们考虑以下方程

$$-\Delta_g u_6 = F_6 \text{ in } M, \frac{\partial u_6}{\partial \nu} = F_6' \text{ on } \partial M, F_6 \text{ changes sign},$$
$$-\frac{3}{2} < F_6' < -\frac{1}{2}, \int_M F_6 d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} F_6' dS_g;$$
$$-\Delta_g u_7 = F_7 \text{ in } M, \frac{\partial u_7}{\partial \nu} = F_7' \text{ on } \partial M, F_7 < -1, F_7' \text{ changes sign}, \int_M F_7 d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} F_7' dS_g;$$
$$-\Delta_g u_8 = F_8 \text{ in } M, \frac{\partial u_8}{\partial \nu} = F_8' \text{ on } \partial M, F_8 \text{ changes sign}, F_8' < -1, \int_M F_8 d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} F_8' dS_g.$$

显然， F_i、 F_i'、 $i = 6$、7、8的所有选择都是可能的，因而得到光滑解u_i、 $i = 6$、7、8。对 u_7 应用模型情形 $K_g = 1$、 $\sigma_g = 0$，对u_8应用模型情形 $K_g = 0$、 $\sigma_g = 1$，我们得出最后三种情形成立。论证与上述非常相似，此处略去。□

当 $\chi(M)$ 60时，我们可以得到与上述类似的存在性结果。我们不一一列出，而仅举一例。

命题7.2.设$(M, \partial M, g)$是一个具有非空光滑边界的紧黎曼曲面，$\chi(M) = 0$。存在一个度量 $\tilde{g} \in [g]$ 使得 $K_{\tilde{g}} > 0$ 且 $\sigma_{\tilde{g}} < 0$。

证明。我们考虑偏微分方程

$$-\Delta_g u = b_1 \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} = b_2 \text{ on } \partial M, b_2 < 0 < b_1, \int_M b_1 d\mathrm{Vol}_g = -\int_{\partial M} b_2 dS_g.$$

接下来的论证与命题 7.1完全相同。 □

References

[1] A. Ambrosetti、Y. Li 和 A. Malchiodi。边界条件下的 Yamabe 问题与数量曲率问题。 *Math. Ann.*，322(4):667–699，2002。[2] T. Aubin。 *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampére Equations.* 数学科学基础。Springer，柏林、海德堡、纽约，1982。[3] B. Bianchini、L. Mari 和 M. Rigoli。带变号非线性项的 Yamabe 型方程与指定曲率问题。 *Journal of Differential Equations*，260(10):7416–7497，2016。[4] J. Bourguignon 和 J. Ezin。度量共形类中的标量曲率函数与共形变换。 *Trans. Am. Math. Soc.*，301(2):723–736，1987。[5] H. Brezis 和 F. Merle。二维中 $-\delta u = v(x)e^u$ 的解的一致估计与爆破解行为。*Commun. Partial. Differ.*，16:1223–1253，1991。[6] A. Chang。Nirenberg问题。 *Not. Am. Math. Soc.*，63(2):128–130，2016。[7] A. Chang、X. Xu 和 P. Yang。关于指定平均曲率的一个扰动结果。 *Math. Ann.*，310(3):473–496，1998。[8] W. Chen 和 C. Li。某些非线性椭圆方程的解的分类。

Duke Math. J. 63 3 615 622, , ( ): – 。 1991

[9] T. Cruz 和 F. Vit

´ *Calc. Var. Partial* orio。带 *Differential Equations* 4 58 2019

边界的黎曼流形的曲率指定。，( )，。[10] S. Cruz-Bl´azquez、A. Malchiodi 和 D. Ruiz。具有指定标量曲率和平均曲率的共形度量。*arXiv:2105.04185*。[11] S. Cruz-Bl´azquez 和 D. Ruiz。在圆盘上指定高斯曲率和测地曲率。 *Adv. Nonlinear Stud.*，18 3 453 468，2018 ( ): – 。[12] Z. Djadli、A. Malchiodi 和 M. Ahmedou。在

$\mathbb{B}^4$ *J. Differ-* 上的指定 *ential Equations* 206 2 373 398, 2004

边界平均曲率问题。，( ): – 。[13] J. Escobar。边界上具有指定平均曲率的共形度量*Calc. Var. Partial Differential Equations* 4 559 592, 1996 ，: – 。

[14] D. Gilbarg 和 N. Trudinger。 *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*。数学经典丛书。Springer，柏林、海德堡、纽约，2001。[15] P. Ho。曲面上的指定曲率流。 *Indiana Univ. Math. J.*，60(5):1517–1541，2011。

[16] J. Kazdan 和 F. Warner。紧流形的曲率函数。 2–，99:14–47，1974。 *Ann. of Math.*J. Kazdan 和 F. Warner。具有指定高斯曲率和标量曲率的度量的存在性与共形变形。 *Ann. of Math. (2)*，101(2):317–331，1975。[18] J. Kazdan 和 F. Warner。黎曼结构的标量曲率与共形变形。

J. Differential , : – *Geom.* 10 113 134, 1975

。[19] P. Lax。 *Functional Analysis*。Wiley-Interscience，霍博肯，2002。[20] Y. Li 和 I. Shafrir。二维中某些 $-\delta u = ve^u$ 的爆破分析。 *Indiana Univ. Math. J.*，43 4 1255 1270，1994 ( ): – 。[21] B. Osgood、R. Phillips 和 P. Sarnak。拉普拉斯算子的行列式的极值元。 *J. Funct. Anal.*，80 211，1988 148: – 。[22] M. Struwe。Nirenberg问题的流方法。 *Duke Math. J.*，128(19-64)，2005。[23] M. Taylor。 *Partial Differential Equations I*。Springer-Verlag，纽约，纽约，2011。[24] J. Xu。边界 Yamabe 问题 II：一般常平均曲率情形。 *arXiv:2112.05674*。[25] J. Xu。共形拉普拉斯算子与 Kazdan-Warner问题：第一特征值为零的情形。 *arXiv:2301.01014*。[26] J. Xu。带边界的紧致流形上指定标量曲率和平均曲率的三分定理。*arXiv:2301.01014*。[27] X. Xu 和 H. Zhang。单位球上具有指定平均曲率的共形度量。 *Math. Ann.*，365(1-2):496–557，2016。

111 Cummington Mall, Department of Mathematics and Statistics, Boston University, Boston, MA, USA, 02215*Email address*: xujie@bu.edu600 Dunyu Road, Institute for Theoretical Sciences, Westlake University, Hangzhou, Zhejiang,China, 310030*Email address*: xujie67@westlake.edu.cn