arXiv:2304.04678v1 [math-ph] 3 Apr 2023

穿孔夹层板的散射：黎曼曲面方法

Y.A. Antipov，路易斯安那州立大学数学系，美国
路易斯安那州巴吞鲁日，邮编 70803

2023年4月11日

摘要

本文精确求解了一个模型问题：声波在一种无限平面结构上的散射。该结构由半无限声学硬屏和半无限夹层板组成；夹层板一侧穿孔，另一侧覆盖着一层膜。该模型由上、下半平面中速度势所满足的两个亥姆霍兹方程，以及将二者耦合起来的 Leppington 有效边界条件和流体中的膜振动方程共同描述。本文提出并讨论了两种求解方法。两种方法均将问题归结为一个二阶向量黎曼–希尔伯特问题。矩阵系数的各项不同，具有 Chebotarev-Khrapkov 结构，并共享同一个四阶特征多项式。精确的 Wiener-Hopf 矩阵分解要求在椭圆曲面上求解一个标量黎曼–希尔伯特问题，以及相应的亏格为1的雅可比反演问题；后者用相应的黎曼θ-函数表示。文中报告并讨论了总速度势绝对值的数值结果。

1 引言

(1)、**(2)**中分析了穿孔对声波通过单叶板和双叶板的声音传输的影响。当弹性双叶蜂窝板从一侧或两侧进行穿孔时，声音传输会显著降低 **(3)**。Leppington**(3)** 采用匹配渐近展开方法，在胞壁为声学硬壁或声学透明壁的情况下，分析了无限蜂窝胞状结构中的这一影响。这项工作的主要成果之一是推导出了有效边界条件。特别是在胞壁为声学硬壁的情况下，板面上的有效边界条件 $S = \{x \in I, y = 0\}$具有以下形式

$$\psi_{1y} - \psi_{0y} + k\tau\psi_1 = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{1.1}$$

其中， ψ_0 和 ψ_1 分别是下半平面和上半平面中的速度势， ψ_{jy} 是 ψ_j的法向导数， k 是波数，而 τ 是一个用于表征穿孔的参数。条件（**1.1**）还需结合经典边界条件

$$D_x[\psi_{0y}] - \alpha(\psi_1 - \psi_0) = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{1.2}$$

其中， D_x 是关于 x 的微分算子，其阶数为2或4，具体取决于弹性结构的下部未穿孔蒙皮是膜还是弹性板，而 α 是一个参数。

由半无限声硬屏和半无限蜂窝弹性板构成的无限平面结构，其一侧带有穿孔的声学硬壁；针对平面声音波散射的模型问题被归约（**4**）为关于两对

函数的黎曼-希尔伯特问题。本文不对矩阵系数进行因式分解，而是应用小 τ 的渐近方法，其中首阶项由解耦问题确定。

文献(4) 中的向量黎曼–希尔伯特问题(5) 采用黎曼曲面上的因子分解方法(6)，(7)进行了分析。研究表明，该向量黎曼–希尔伯特问题的矩阵系数具有 Chebotarev-Khrapkov 结构(8)，(9) 其特征多项式 $f(s)$ 的次数为 8。当 $deg f(s) \leq 2$ 时，Khrapkov 方法适用。对于 Chebotarev-Khrapkov 矩阵的一个特例，且当 deg $f(s) = 4$ 时，文献(10)提出了一种椭圆函数方法，用以消除无穷远处的本性奇点。文献(11)开发了一种基于 Pad´e 逼近的数值方法，用于分解 Chebotarev–Khrapkov 矩阵。若 deg $f(s) = 8$，则维纳-霍普夫矩阵因子的精确表示包含具有三阶极点（位于无穷远处）的函数的指数，因而会产生不可接受的本性奇点。文献(5) 通过将矩阵因子分解问题归结为双曲曲面上的标量黎曼-希尔伯特问题(12) ，并求解相应的三亏格雅可比反演问题(13)，(14)，消除了这一奇点。该解(5) 针对实波数情形构造。在这种情况下，所有八个分支点都位于同一圆上，且关于原点对称。因此，分支切口以及 A- 和 B - 截面都是圆上的双侧弧。要完整求解模型问题，需通过满足附加条件来确定两个未知常数，分析维纳-霍普夫矩阵因子在无穷远处的行为，并基于所得解开发一种高效的速度势数值计算方法。这些方面不在该研究(5)的范围之内。

在本文中，我们分析一种与(4)、(5)中所考虑结构相似的结构对平面声波的散射模型问题。唯一的区别在于，该结构的下蒙皮是膜，而不是薄板。从数学上讲，这意味着在(1.2)中，我们使用二阶微分算子 D_x 替代四阶微分算子。我们的目标是推导出完整解，求出未知常数，分析矩阵因子在无穷远处的行为，并获得数值结果。在第2节中，我们构造模型问题，并写出由边界条件耦合的两个亥姆霍兹方程所对应的控制边值问题。在第3节中，我们应用拉普拉斯变换，将该问题转换为二阶向量黎曼–希尔伯特问题。我们证明，矩阵分解问题等价于椭圆曲面上的标量黎曼-希尔伯特问题。为消除因子在无穷远处的本性奇点，我们利用黎曼 θ函数求解亏格为1的雅可比反演问题。在第3节末，我们计算分解的部分指标，并证明它们是稳定的。在第4节中，我们提出将模型问题约化为向量黎曼–希尔伯特问题的另一种方法，以了解该方法是否优于第3节中采用的方法。第5节给出了基于第3节所推导解而获得的速度势的数值结果。

2 公式

设一块半无限夹层板与一块半无限声学刚性屏幕相连（图 1）。夹层板的上侧 $M_1 = \{0 < x < \infty, y = d\}$ 为穿孔的，而下侧$M_0 = \{0 < x < \infty, y = 0\}$ 是一层光滑的膜。未穿孔面板和穿孔面板通过单元连接，假设这些单元的侧面声学上是刚性的。刚性屏幕 $S = \{-\infty < x < 0, y = 0\}$和夹层板的下侧均固定，且不失一般性，连接点 $x = 0$, $y = 0$处的位移为零。

波速为 c 的可压缩流体占据夹层板和屏幕外部的区域。该系统由入射速度势为

$$\mathrm{Re}\{\phi_{inc} e^{-i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{e^{ik(x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0} e^{-i\omega t}\}, \quad y < 0, \tag{2.1}$$

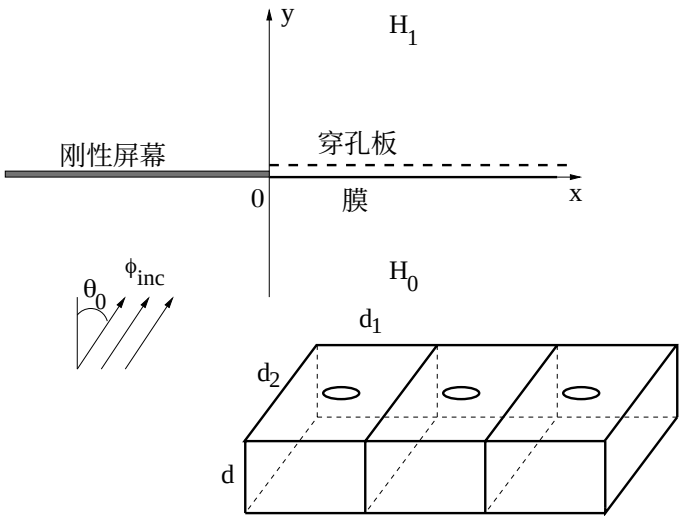

图 1：连接到声学刚性屏幕上的夹层板

的平面波激励，其中 $\theta_0 \in (-\pi/2,\ \pi/2)$，$k = \frac{\omega}{c}$ 为声波波数，$k = k_1 + ik_2$、$0 < k_2 << k_1$，且 ω 为角频率。下、上半平面 $\mathbb{H}_0$ 和$\mathbb{H}_1$ 中的速度势$\psi_{0,\ 1}e^{-i\omega t}$ 满足亥姆霍兹方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right)\psi_j(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{H}_j, \quad j = 0, 1. \tag{2.2}$$

两个势函数满足标准的声学硬边界条件

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad x < 0, \quad y = 0. \tag{2.3}$$

膜的表面位移 $\eta_0 e^{-i\omega t}$ 和压力波动 $p_j e^{-i\omega t}$ 可用势函数表示为以下关系

$$\eta_0 = \frac{i}{\omega}\frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad p_j = i\omega\rho_f\psi_j, \quad j = 0, 1, \tag{2.4}$$

其中，ρ_f 为流体的平均密度。膜的挠度根据线性化方程对总表面压力作出响应 **(15)**

$$m_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\eta_0 e^{-i\omega t}\right) = T\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\eta_0 e^{-i\omega t}\right) - (p_1 - p_0)e^{-i\omega t}, \quad y = 0, \quad x > 0. \tag{2.5}$$

这里，m_0 是膜的单位面积质量，T 是单位长度的张力。等价地，该边界条件可以写成以下形式

$$\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x^2 \partial y} + \mu^2\frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \alpha(\psi_1 - \psi_0) = 0, \quad y = 0, \quad x > 0, \tag{2.6}$$

其中

$$\mu = \sqrt{\frac{m_0}{T}}\omega, \quad \alpha = \frac{\rho_f \omega^2}{T}. \tag{2.7}$$

夹层板的第二个边界条件是 Leppington**(3)** 有效边界条件

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + k\tau\psi_1 = 0, \quad y = 0, \quad x > 0, \tag{2.8}$$

其中

$$\tau = \frac{kd}{1 - k^2 V/(2a)}, \tag{2.9}$$

其中， a 是孔径半径， V 是单元体积， $V = d_1 d_2 d$。在推导边界条件 (2.8) 的(3) 时，假设波长远大于间距参数 d_1、 d_2 和 d （图 1），因此 $|k|d_1 << 1$、 $|k|d_2 << 1$和 $|k|d << 1$。由于 $|k|d$ 很小，边界条件在 $y = 0$ 处可在首阶近似下应用。参数 τ 是无量纲的，而参数 μ 和 α 的量纲分别为 L^{-1} 和 L^{-3}，其中 L 以长度为单位。条件 $\tau = \infty$是亥姆霍兹共振(16) 条件的一个类似条件，它给出了波数的临界值 k_{res} (3)

$$k_{res} = \sqrt{\frac{2a}{V}}. \tag{2.10}$$

对于复波数 k，该条件永远不会满足。然而，显然，当 Re $k >>$ Im $k > 0$ 且 $|k| \to k_{res}$时， $|\tau| \to \infty$。

引入势为 $\phi_{ref} = e^{ik(x\,\text{正弦}\,\theta_0 - y\,\text{余弦}\,\theta_0)}$的反射波以及散射势 ϕ_0 和 ϕ_1，较为方便。于是，总速度势可通过入射势、反射势和散射势表示为

$$\psi_0 = \phi_{inc} + \phi_{ref} + \phi_0, \quad y < 0; \quad \psi_1 = \phi_1, \quad y > 0. \tag{2.11}$$

散射势满足亥姆霍兹方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \phi_j(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{H}_j, \quad j = 0, 1, \tag{2.12}$$

以及以下边界条件:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0, \quad x < 0, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x^2 \partial y} + \mu^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial y} - \alpha(\phi_1 - \phi_0) = -2\alpha e^{ikx \sin\theta_0}, \quad x > 0, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + k\tau\phi_1 = 0, \quad x > 0, \quad y = 0. \tag{2.13}$$

还要求散射势 ϕ_0 和 ϕ_1 在 $x^2 + y^2 \to \infty$时满足出射波辐射条件。

3 向量黎曼-希尔伯特问题

3.1 基于速度势拉普拉斯变换的推导

为了将边值问题（2.12）、（2.13）化为向量黎曼–希尔伯特问题（也称为矩阵 Wiener–Hopf 问题），我们引入速度势的拉普拉斯变换

$$\Phi_{j+}(s; y) = \int_0^\infty \phi_j(x, y) e^{isx} dx, \quad \Phi_{j-}(s; y) = \int_{-\infty}^0 \phi_j(x, y) e^{isx} dx. \tag{3.1}$$

它们的和 $\Phi_j(s;\ y) = \Phi_{j+}(s; y) + \Phi_{j-}(s; y)$ 满足方程

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - (s^2 - k^2) \right] \Phi_j(s; y) = 0, \quad j = 0, 1. \tag{3.2}$$

固定函数 $\gamma^2(s) = (s^2 - k^2)$的一个分支：在 s平面内沿连接分支点 k 和 $-k$ 且经过无穷远点的直线作割线。记 $\theta_* = \arg k \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为，并选择

$$-\pi + \theta_* \le \theta_+ \le \pi + \theta_*, \quad -2\pi + \theta_* \le \theta_- \le \theta_*, \tag{3.3}$$

其中 $\theta_\pm = \arg(s \pm k)$。则 $\gamma(0) = -ik$，且 $\operatorname{Re}\gamma(s) > 0$于 $L = (-\infty + i\kappa_0, \infty + i\kappa_0)$, $\kappa_0 \in (-k_2 \sin\theta_0, k_2)$。忽略在无穷远处指数增长的解后，我们将方程 (3.2) 的一般解写为

$$\Phi_0(s,y) = A_0(s)e^{\gamma y}, \quad y < 0, \quad \Phi_1(s,y) = A_1(s)e^{-\gamma y}, \quad y > 0. \tag{3.4}$$

将拉普拉斯变换（3.1）应用于边界条件（2.13），得到四个方程。它们是

$$\frac{d}{dy}\Phi_{0-}(s;0) = 0, \quad \frac{d}{dy}\Phi_{1-}(s;0) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\Phi_{1+}(s;0) - \frac{d}{dy}\Phi_{0+}(s;0) + k\tau\Phi_{1+}(s;0) = 0,$$

$$(\mu^2 - s^2)\frac{d}{dy}\Phi_{0+}(s;0) - \alpha\Phi_{1+}(s;0) + \alpha\Phi_{0+}(s;0) = N - \frac{2\alpha i}{s + k\sin\theta_0}. \tag{3.5}$$

在此，我们使用 以及这一事实，即由于在点 $x = 0$ 处位移的连续性 ，

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dy}\phi_0(x;0) = 0, \tag{3.6}$$

并记为 $N = \frac{d^2}{dxdy}\phi_0(0^+;0)$（此时 N 是一个自由常数）。在由 (3.4) 定义的通解及其导数中固定 $y = 0$，并同时利用系统 (3.6) 中的前两个方程，我们得到

$$\Phi_{j+}(s;0) + \Phi_{j-}(s;0) = A_j(s), \quad A_j(s) = \frac{(-1)^j}{\gamma(s)}\frac{d}{dy}\Phi_{j+}(s;0). \tag{3.7}$$

对（3.5）中的第四个方程和（3.7）中的方程进行无穷远处分析表明， t

$$\frac{d}{dy}\Phi_{0+}(s;0) = O(s^{-2}), \quad A_0(s) = O(s^{-3}), \quad A_1(s) = O(s^{-2}), \quad s \to \infty. \tag{3.8}$$

至于系统（3.5）中其他函数在无穷远处的渐近行为，可由拉普拉斯表示式（3.1）和渐近式（3.8）推出。我们有

$$\Phi_{j\pm}(s;0) = O(s^{-1}), \quad s \in \mathbb{C}^{\pm}, \quad j = 0,1, \quad \frac{d}{dy}\Phi_{1+}(s;0) = O(s^{-1}), \quad s \in \mathbb{C}^{+}, \quad s \to \infty,$$

$$\Phi_{0+}(s;0) + \Phi_{0-}(s;0) = O(s^{-3}), \quad \Phi_{1+}(s;0) + \Phi_{1-}(s;0) = O(s^{-2}), \quad |s| \to \infty, \quad s \in L. \tag{3.9}$$

现在，关系式 (3.7) 使我们能够从系统 (3.5) 的第三和第四个方程中消去导数 $\frac{d}{dy}\Phi_{j+}(s;0)$，从而得到

$$[(\mu^2 - s^2)\gamma(s) + \alpha]\Phi_{0+}(s;0) - \alpha\Phi_{1+}(s;0) + (\mu^2 - s^2)\gamma(s)\Phi_{0-}(s;0) = N - \frac{2\alpha i}{s + k\sin\theta_0},$$

$$-\gamma(s)\Phi_{0+}(s;0) + (k\tau - \gamma)\Phi_{1+}(s;0) - \gamma(s)\Phi_{0-}(s;0) - \gamma(s)\Phi_{1-}(s;0) = 0. \tag{3.10}$$

为了将此系统改写为矩阵-向量形式，我们记 $\Phi_j^{\pm}(s) = \Phi_{j\pm}(s,\ 0)$，并引入向量

$$\Phi^{\pm}(s) = \begin{pmatrix} \Phi_0^{\pm}(s) \\ \Phi_1^{\pm}(s) \end{pmatrix},$$

$$g(s) = \frac{1}{\gamma(s)(s^2-\mu^2)} \left(N - \frac{2\alpha i}{s + k\sin\theta_0} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

以及矩阵

$$G(s) = \begin{pmatrix} b(s) + c(s)l(s) & c(s)m \\ c(s)m & b(s) - c(s)l(s) \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

其中，$b(s)$ 和 $c(s)$ 是轮廓 L 上的 H¨older 函数，$l(s)$ 是多项式，m 是常数，定义为

$$b(s) = 1 - \frac{1}{\gamma(s)} \left(\frac{k\tau}{2} + \frac{\alpha}{s^2-\mu^2} \right), \quad c(s) = \frac{k\tau}{2\gamma(s)(s^2-\mu^2)},$$

$$l(s) = s^2 - \mu^2, \quad m = \frac{2\alpha}{k\tau}. \tag{3.13}$$

采用这些记号，系统 (3.10) 可改写为解析函数理论中的以下向量黎曼–希尔伯特问题。

求两个向量 $\Phi^+(s)$ 和 $\Phi^-(s)$，它们分别在上、下半平面 $\mathbb{C}^+$ 和 $\mathbb{C}^-$ 内解析，并可连续延拓至轮廓 L，且满足 *H¨older* 连续性，使其边界极限值满足向量方程

$$G(t)\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L. \tag{3.14}$$

该解在无穷远处趋于零，$\Phi^{\pm}(s) = O(s^{-1})$，$s \to \infty$，$s \in \mathbb{C}^{\pm}$，并且

$$\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = O(t^{-3}), \quad \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) = O(t^{-2}), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L. \tag{3.15}$$

此外，由条件 *(3.6)* 可知，

$$\int_L \gamma(t)[\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t)]dt = 0. \tag{3.16}$$

3.2 矩阵分解

向量黎曼–希尔伯特问题的矩阵系数 $G(s)$是 Chebotarev-Khrapkov 矩阵(8)，(9)。其特征多项式是一个四次多项式

$$f(s) = l^2(s) + m^2 = (s^2-\mu^2)^2 + m^2. \tag{3.17}$$

在这种情况下，分解问题可化为代数函数 $w^2 = f(s)$的一维亏格黎曼曲面 $\mathcal{R}$ 上的标量黎曼-希尔伯特问题。通过条件 $f^{1/2}(s) \sim s^2$, $s \to \infty$，在沿线段 $\Gamma_1 = [s_1, s_2]$和 $\Gamma_2 = [-s_2, -s_1]$切开的平面 $\hat{\mathbb{C}}$上固定该函数的一个分支。这里，$\pm s_1$和 $\pm s_2$是函数 $f(s)$的四个零点，$s_1^2 = \mu^2 + im$、$s_2^2 = \mu^2 - im$、s_1 和 s_2 分别是位于第二和第一象限的零点（图 2）。将曲面 $\mathcal{R}$ 沿切口 Γ_1 和 Γ_2 粘合的两个黎曼面记为 $\mathbb{C}_1$ 和 $\mathbb{C}_2$。令 $w = f^{1/2}(s)$，$(s,\ w) \in \mathbb{C}_1$ 以及 $w = -f^{1/2}(s)$，$(s,\ w) \in \mathbb{C}_2$。

因子分解问题的亚纯解

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1} = [X^-(t)]^{-1}X^+(t), \quad t \in L, \tag{3.18}$$

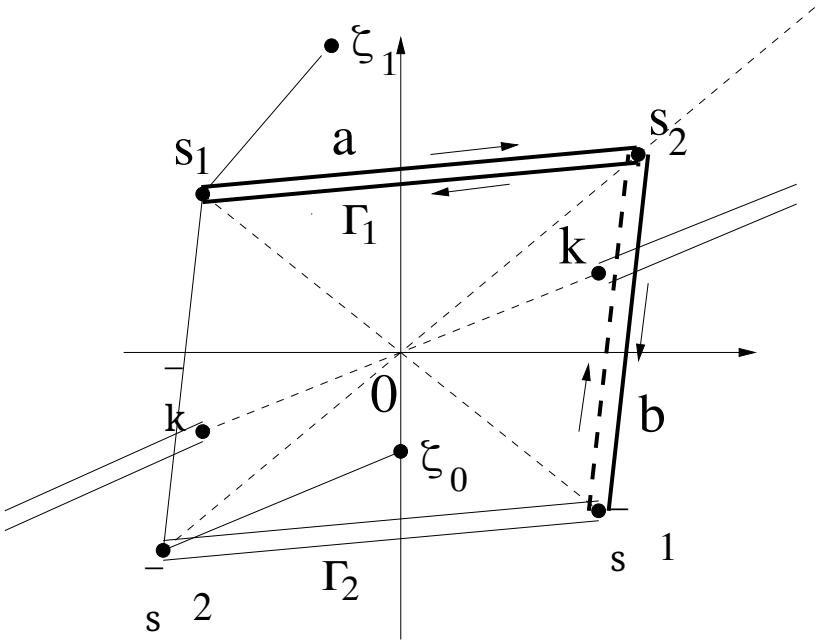

图 2：切口 Γ_1 和 Γ_2 以及规范横截面 **a** 和 **b**。

矩阵 $X(s)$ 及其逆矩阵，具有以下形式 **(6), (7), (5)**

$$X(s) = F(s,w)B(s,w) + F(s,-w)B(s,-w),$$

$$[X(s)]^{-1} = \frac{B(s,w)}{F(s,w)} + \frac{B(s,-w)}{F(s,-w)}, \tag{3.19}$$

其中

$$B(s,w) = \frac{1}{2}\left(I + \frac{A(s)}{w}\right), \quad A(s) = \begin{pmatrix} l(s) & m \\ m & -l(s) \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

函数 $F(s,\ w)$ 在轮廓 $\mathcal{L} = L_1 \cup L_2$，上满足以下标量黎曼-希尔伯特问题，其中 $L_1 \subset \mathbb{C}_1$ 和 $L_2 \subset \mathbb{C}_2$ 是轮廓 L的两个副本。

求一个函数 F（s, w），使其在曲面 $\mathcal{R}$ 上分片亚纯，在轮廓 $\mathcal{L}$ 上 *Hölder* 连续，在曲面 $\mathcal{R}$ 的两个无穷远点处有界，并且函数 F（s, w） 在轮廓 $\mathcal{L}$ 上的极限值满足关系式

$$F^+(t,\xi) = \lambda(t,\xi)F^-(t,\xi), \quad (t,\xi) \in \mathcal{L}, \tag{3.21}$$

其中，$\xi = w(t)$、$\lambda(t,\xi) = \lambda_j(t)$ 在 $\mathbb{C}_j$, $j = 1$、2 上，以及 $\lambda_1(t) = b(t) + c(t)f^{1/2}(t)$ 和 $\lambda_2(t) = b(t) - c(t)f^{1/2}(t)$ 是矩阵 $G(t)$ 的两个特征值。

可以直接验证，当 t 沿轮廓 L 从 $-\infty + i\kappa_0$ 到 $+\infty + i\kappa_0$ 遍历时，特征值 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 的辐角增量均为零。因此，问题 (3.21) 的通解具有如下形式

$$F(s,w) = e^{\chi(s,w)}, \quad (s,w) \in \mathcal{R}, \tag{3.22}$$

其中

$$\chi(s,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \log\lambda(t,\xi)dW + \int_{\Gamma} dW + m_a\int_{\mathbf{a}} dW + m_b\int_{\mathbf{b}} dW, \tag{3.23}$$

dW 是椭圆曲面上柯西核的魏尔斯特拉斯类比，

$$dW = \frac{w+\xi}{2\xi}\frac{dt}{t-s} \tag{3.24}$$

且 Γ 是曲面 $\mathcal{R}$ 上的一条轮廓，其起点 q_0 可任意选定，例如取为 $q_0 = (\zeta_0,\ f^{1/2}(\zeta_0)) \in \mathbb{C}_1$；而终点 $q_1 = (\zeta_1,\ w(\zeta_1)) \in \mathcal{R}$ 无法预先确定，必须求出。在公式 (3.23) 中，还有两个待定量 m_a 和 m_b。它们是整数，也需要确定。积分轮廓 $\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$ 是曲面 $\mathcal{R}$ 的标准截线（图 2）。截线 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+ \cup \mathbf{a}^-$ 是一个双侧回路，$\mathbf{a}^+ \in \mathbb{C}_1$ 和 $\mathbf{a}^- \in \mathbb{C}_2$。闭合轮廓 $\mathbf{b}$ 由线段 $[s_2, -s_1] \in \mathbb{C}_1$ 和线段 $[-s_1, s_2] \in \mathbb{C}_2$（图 2 中的虚线）组成。回路 $\mathbf{a}$ 在分支点 s_2 处从左向右与回路 $\mathbf{b}$ 相交。注意，轮廓 Γ 的选取必须确保它既不与轮廓 $\mathbf{a}$ 相交，也不与轮廓 $\mathbf{b}$相交。

由于积分 (3.23) 的第二项在轮廓 Γ 的端点处存在对数奇点，解 $F(s,\ w)$ 在点 $q_0 \in \mathbb{C}_1$ 处有一个简单极点，在点 $q_1 \in \mathcal{R}$ 处有一个简单零点。核 dW 在曲面的无穷远点处有二阶极点。因此，解 $F(s,\ w)$ 在无穷远点处有不可接受的本性奇点。为消除这些奇点，我们先将 $\chi(s,\ w)$ 改写为如下形式

$$\chi(s,w) = \chi_1(s) + w\chi_2(s), \tag{3.25}$$

其中

$$\chi_1(s) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\log\Delta(t)dt}{t-s} + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{dt}{t-s},$$

$$\chi_2(s) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\log\epsilon(t)dt}{(t-s)f^{1/2}(t)} + \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{dt}{(t-s)\xi},$$

$$\Delta(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t), \quad \epsilon(t) = \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}. \tag{3.26}$$

函数 $\chi(s,\ w)$ 在无穷远处有界，当且仅当 $w\chi_2(s) = O(1),\ s\to\infty$，或者等价地，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log\epsilon(t)dt}{f^{1/2}(t)} + \int_\Gamma \frac{dt}{\xi} + m_a\int_{\mathbf{a}}\frac{dt}{\xi} + m_b\int_{\mathbf{b}}\frac{dt}{\xi} = 0. \tag{3.27}$$

如果函数 $\chi_2(s)$ 满足这一条件，那么由恒等式

$$\frac{1}{t-s} = -\frac{1}{s} + \frac{t}{s(t-s)}, \tag{3.28}$$

它可表示为另一种形式

$$\chi_2(s) = \frac{1}{4\pi i s}\int_L \frac{\log\epsilon(t)tdt}{(t-s)f^{1/2}(t)} + \frac{1}{2s}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{tdt}{(t-s)\xi}. \tag{3.29}$$

该公式对所有 $s \neq 0$ 均成立，并且当 $|s| > 1$ 时可用于数值计算，此时可替代在 $|s| \leq 1$时更为方便的公式（3.26）。

3.3 雅可比反演问题

条件（3.27）等价于一个亏格为1的雅可比反演问题。为说明这一点，考虑阿贝尔积分（椭圆积分）

$$\omega(q) = \int_{-s_2}^{q} \frac{ds}{w(s)}, \quad q = (s, w(s)). \tag{3.30}$$

于是，式（3.27）中的第三和第四个积分，

$$\mathcal{A} = \int_{\mathbf{a}} \frac{ds}{w(s)} = 2\int_{\mathbf{a}^+} \frac{ds}{f^{1/2}(s)},$$

$$\mathcal{B} = \int_{\mathbf{b}} \frac{ds}{w(s)} = 2\int_{s_2}^{-s_1} \frac{ds}{f^{1/2}(s)}, \tag{3.31}$$

分别是积分 $\omega(q)$ 的 A 周期和 B 周期。因此，条件 (3.27) 构成了以下雅可比反演问题。

找到一点 $q_1 = (\zeta_1, w_1) \in \mathcal{R}$ 以及两个整数 m_a 和 m_b，使得

$$\omega(q_1) + m_a\mathcal{A} + m_b\mathcal{B} = d_0, \tag{3.32}$$

其中

$$d_0 = \omega(q_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log \epsilon(t) dt}{f^{1/2}(t)}. \tag{3.33}$$

将方程 (3.32) 除以 $\mathcal{A}$，我们得到 Jacobi 问题的规范形式

$$\hat{\omega}(q_1) = e_1 - k_1 - m_a - m_b\hat{\mathcal{B}} \equiv e_1 - k_1 \pmod{\text{the periods}} \tag{3.34}$$

对于规范阿贝尔积分 $\hat{\omega}(q) = \omega(q)/\mathcal{A}$。它的 A-周期为单位，而其 B-周期 $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/\mathcal{A}$ 的虚部 $\mathrm{Im}\,\hat{\mathcal{B}} > 0$ 为正。这里，$e_1 = \frac{d_0}{\mathcal{A}} + k_1$ 和 k_1 是沿回路 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 割开的曲面 $\tilde{\mathcal{R}}$ 的黎曼常数。它由 (17)，$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{B}}$ 计算得到。

未知点 $q_1 = (\zeta_1, w_1)$ 是 genus-1 黎曼 θ-函数的唯一零点

$$\mathcal{F}(q) = \theta(\hat{\omega}(q) - e_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp\{\pi i\hat{\mathcal{B}}\nu^2 + 2\pi i\nu[\hat{\omega}(q) - e_1]\}. \tag{3.35}$$

为求得 ζ_1，考虑积分

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\hat{\mathcal{R}}} \frac{d\log\mathcal{F}(q)}{s - i}, \tag{3.36}$$

其中 $\partial\mathcal{R}$ 是仅沿横截面$\mathbf{a}$ 割开的曲面 $\mathcal{R}$ 的边界。我们将要应用的过程是方法(9) 的一种修改：该方法不使用 (3.36) 中位于两点 $i_1 = (i, f^{1/2}(i)) \in \mathbb{C}_1$和 $i_2 = (i, -f^{1/2}(i)) \in \mathbb{C}_2$处的极点，而是使用一个在曲面 $\mathcal{R}$的无穷远点处具有两个极点的被积函数。不失一般性，我们假设 $\mathcal{F}(i_n) \neq 0$, $n = 1, 2$，并通过应用留数理论计算积分 M。我们有

$$M = \frac{1}{\zeta_1 - i} + \frac{\mathcal{F}'(i_1)}{\mathcal{F}(i_1)} + \frac{\mathcal{F}'(i_2)}{\mathcal{F}(i_2)}. \tag{3.37}$$

其中，黎曼 θ 函数的导数可表示为一个快速收敛的级数

$$\mathcal{F}'(q) = \frac{2\pi i(-1)^{n-1}}{\mathcal{A}f^{1/2}(s)} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu\exp\{\pi i\hat{\mathcal{B}}\nu^2 + 2\pi i\nu[\hat{\omega}(q) - e_1]\}, \quad q \in \mathbb{C}_n, \quad n = 1, 2. \tag{3.38}$$

积分 (3.36) 也可以表示为围道积分

$$M=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathbf{a}^+}+\int_{\mathbf{a}^-}\right)\frac{d\log\mathcal{F}(q)}{s-i}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{a}}\frac{1}{s-i}[d\log\mathcal{F}^+(q)-d\log\mathcal{F}^-(q)], \tag{3.39}$$

其中 $\mathbf{a}^+$ 和 $\mathbf{a}^-$ 方向相反，并且分别从黎曼面 $\mathbb{C}_1$ 和 $\mathbb{C}_2$一侧与回路$\mathbf{a}$ 逐点重合，而回路 $\mathbf{a}^+$ 和$\mathbf{a}$ 的正方向选取为：第一张黎曼面上割线 $[s_1,s_2]$ 的外部位于左侧。利用回路$\mathbf{a}$上黎曼 θ-函数的边界值之间的关系。

$$\mathcal{F}^+(p)=\mathcal{F}^-(p)\exp\{\pi i\hat{\mathcal{B}}-2\pi ie_1+2\pi i\hat{\omega}^+(p)\},\quad p\in\mathbf{a}, \tag{3.40}$$

其中

$$\hat{\omega}^+(p)=\lim_{q\to p,q\in\mathbb{C}_1}\hat{\omega}(q), \tag{3.41}$$

我们推导出积分 M的另一个公式

$$M=\int_{\mathbf{a}}\frac{d\hat{\omega}^+(q)}{s-i}=\frac{2}{\mathcal{A}}\int_{[s_1,s_2]^+}\frac{ds}{(s-i)f^{1/2}(s)}. \tag{3.42}$$

结合公式 (3.37) 和 (3.42)，并引入量量

$$\mathcal{J}=\frac{2}{\mathcal{A}}\int_{[s_1,s_2]^+}\frac{ds}{(s-i)f^{1/2}(s)}-\frac{\mathcal{F}'(i_1)}{\mathcal{F}(i_1)}-\frac{\mathcal{F}'(i_2)}{\mathcal{F}(i_2)} \tag{3.43}$$

我们找到参数 ζ_1

$$\zeta_1=i+\frac{1}{\mathcal{J}}. \tag{3.44}$$

评估　现在，取位于第一和第二黎曼面上的点 ζ_1 处的阿贝尔积分，

$$\hat{\omega}(\zeta_1,\pm f^{1/2}(\zeta_1))=\pm\frac{1}{\mathcal{A}}\int_{-s_2}^{\zeta_1}\frac{ds}{f^{1/2}(s)}. \tag{3.45}$$

并记

$$d_\pm=\frac{d_0}{\mathcal{A}}-\hat{\omega}(\zeta_1,\pm f^{1/2}(\zeta_1)). \tag{3.46}$$

取复方程（3.40）的虚部和实部，可确定常数 $m_b^\pm$和 $m_a^\pm$

$$m_b^\pm=\frac{\operatorname{Im}d_\pm}{\operatorname{Im}\hat{\mathcal{B}}},\quad m_a^\pm=\operatorname{Re}d_\pm-\frac{\operatorname{Re}\hat{\mathcal{B}}}{\operatorname{Im}\hat{\mathcal{B}}}\operatorname{Im}d_\pm. \tag{3.47}$$

如果结果表明整数 m_a^+和 m_b^+都是整数，那么 $m_a=m_a^+$、 $m_b=m_b^+$以及点 $q_1\in\mathbb{C}_1$。否则，$m_a=m_a^-$、 $m_b=m_b^-$是整数，且 $q_1\in\mathbb{C}_2$。

3.4 向量黎曼–希尔伯特问题的解

将矩阵 $G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}=[X^-(t)]^{-1}X^+(t)$ 分解为 $t\in L$，并消除了因子 $X^\pm(s)$ 在无穷远处的本性奇点后，我们通过将边界关系改写为以下形式，继续求解向量黎曼–希尔伯特问题 (3.14)：

$$X^+(t)\Phi^+(t)-N\Psi_+^{(1)}(t)-\Psi_+^{(2)}(t)=-X^-(t)\Phi^-(t)-N\Psi_-^{(1)}(t)-\Psi_-^{(2)}(t),\quad t\in L. \tag{3.48}$$

这里， $\Psi_{\pm}^{(n)}(t)$ 是柯西积分的极限值

$$\Psi^{(1)}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{X^-(t)J}{\gamma(t)(t^2-\mu^2)}\frac{dt}{t-s},\quad J=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\Psi^{(2)}(s)=-\frac{\alpha}{\pi}\int_L\frac{X^-(t)J}{\gamma(t)(t^2-\mu^2)(t+k\sin\theta_0)}\frac{dt}{t-s},\tag{3.49}$$

由索霍茨基–普莱梅利公式定义

$$\Psi_{\pm}^{(1)}(t)=\pm\frac{X^-(t)J}{2\gamma(t)(t^2-\mu^2)}+P.V.\Psi^{(1)}(t),$$

$$\Psi_{\pm}^{(2)}(t)=\mp\frac{\alpha iX^-(t)J}{\gamma(t)(t^2-\mu^2)(t+k\sin\theta_0)}+P.V.\Psi^{(2)}(t),\quad t\in L.\tag{3.50}$$

根据解析函数理论中的连续性原理和广义刘维尔定理,

$$\pm X^{\pm}(s)\Phi^{\pm}(s)-N\Psi_{\pm}^{(1)}(s)-\Psi_{\pm}^{(2)}(s)=R(s),\quad s\in\mathbb{C}^{\pm},\tag{3.51}$$

其中， $R(s)$是待确定的有理向量函数。由于矩阵 $X^{\pm}(s)$ 在无穷远处有界，而向量 $\Phi^{\pm}(s)$、 $\Psi_{\pm}^{(1)}(s)$ 和 $\Psi_{\pm}^{(2)}(s)$ 在 s 较大时表现为 s^{-1}const，我们有 $R(s)=O(s^{-1}),\ s\to\infty$。

接下来证明有理向量函数 $R(s)$在点 $s=\zeta_0$ 处有一个极点。事实上，由于函数 $\chi(s,\ w)$ 在轮廓 Γ 的起始点 $(\zeta_0,\ f^{1/2}(\zeta_0))\in\mathbb{C}_1$ 处具有对数奇性，函数 $F(s,\ w)$ 在此点有一个简单极点，并且在点$(\zeta_0,\ -f^{1/2}(\zeta_0))\in\mathbb{C}_2$ 处有界,

$$F(s,w)\sim D_0(s-\zeta_0)^{-1},\quad F(s,-w)=O(1),\quad s\to\zeta_0,\quad (s,w)\in\mathbb{C}_1.\tag{3.52}$$

对矩阵 $X(s)$使用（3.19）中的第一个公式，我们得到

$$X(s)\Phi(s)\sim\frac{D_0}{2(s-\zeta_0)}\left[\left(1+\frac{l(\zeta_0)}{f^{1/2}(\zeta_0)}\right)\Phi_0(\zeta_0)+\frac{m}{f^{1/2}(\zeta_0)}\Phi_1(\zeta_0)\right]\begin{pmatrix}1\\\eta_0\end{pmatrix},\tag{3.53}$$

其中

$$\eta_0=\frac{m}{l(\zeta_0)+f^{1/2}(\zeta_0)}.\tag{3.54}$$

这使我们能够求得向量 $R(s)$。我们有

$$R(s)=\frac{C}{s-\zeta_0}\begin{pmatrix}1\\\eta_0\end{pmatrix},\tag{3.55}$$

其中 C 是一个任意常数。将此表达式代入方程（3.51），我们得到向量黎曼–希尔伯特问题（3.14）的解

$$\Phi^{\pm}(s)=\pm[X^{\pm}(s)]^{-1}\left[\frac{C}{s-\zeta_0}\begin{pmatrix}1\\\eta_0\end{pmatrix}+N\Psi_{\pm}^{(1)}(s)+\Psi_{\pm}^{(2)}(s)\right],\quad s\in\mathbb{C}^{\pm}.\tag{3.56}$$

现在，函数 $F(s,\ w)$ 在点 $q_1\in\mathcal{R}$ 处有一个简单零点，这是由函数 $\chi(s,\ w)$ 在轮廓 Γ 的端点处的对数奇点所致。若 $q_1=(\zeta_1,\ w_1)\in\mathbb{C}_1$，则 $w_1=f^{1/2}(\zeta_1)$ 且

$$F(s,w)\sim D_1(s-\zeta_1),\quad F(s,-w)\sim D_2,\quad (s,w)\in\mathbb{C}_1,\quad s\to\zeta_1.\tag{3.57}$$

否则， $q_1 = (\zeta_1, w_1)$ 是否为 $\in \mathbb{C}_2$，那么 $w_1 = -f^{1/2}(\zeta_1)$ 和

$$F(s,w) \sim D_2, \quad F(s,-w) \sim D_1(s-\zeta_1), \quad (s,w) \in \mathbb{C}_1, \quad s \to \zeta_1. \tag{3.58}$$

这里， D_1 和 D_2 是非零常数。根据（3.19）中关于逆矩阵 $[X(s)]^{-1}$的第二个公式，可以明显看出，矩阵 $[X(s)]^{-1}$ 在点 $s = \zeta_1$处有一个极点。由于 $B(s,w)$的秩为 $= 1$，向量函数 $F(s,w)$在点 $s = \zeta_1$ 处有一个可去奇点，当且仅当

$$\Pi_0 C + \Pi_1 N = -\Pi_2, \tag{3.59}$$

其中

$$\Pi_0 = \left(\frac{w_1 + l(\zeta_1)}{m} + \eta_0\right)\frac{1}{\zeta_1 - \zeta_0}, \quad \Pi_1 = \frac{w_1 + l(\zeta_1)}{m}\Psi_0^{(1)}(\zeta_1) + \Psi_1^{(1)}(\zeta_1),$$

$$\Pi_2 = \frac{w_1 + l(\zeta_1)}{m}\Psi_0^{(2)}(\zeta_1) + \Psi_1^{(2)}(\zeta_1), \tag{3.60}$$

以及 $\Psi_0^{(n)}(s)$ 和 $\Psi_1^{(n)}(s)$ $(n = 1,2)$是由(3.49)给出的向量 $\Psi^{(n)}(s)$的两个分量。方程(3.59) 构成了关于未知常数 C 和 N 的第一个方程。

推导出的解必须限制在满足条件 (3.15) 的函数类中。为验证这些条件，我们考察向量 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 在 $|t| \to \infty$,$t \in L$ 时的渐近行为。我们从分析函数 $\Delta(t)$ 和 $\epsilon(t)$ 开始。由公式 (3.13) 和 (3.26) 可得

$$\Delta(t) = 1 - \frac{k\tau}{\gamma(t)} - \frac{2\alpha}{\gamma(t)(t^2-\mu^2)} + \frac{k\tau\alpha}{\gamma^2(t)(t^2-\mu^2)} = 1 - \frac{k\tau}{|t|} + O(t^{-3}), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L,$$

$$\epsilon(t) = \frac{b(t) + c(t)f^{1/2}(t)}{b(t) - c(t)f^{1/2}(t)} = 1 + \frac{k\tau}{|t|} + O(t^{-2}), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L, \tag{3.61}$$

通过将索霍茨基–普莱梅利公式应用于由 (3.26)和 (3.29) 给出的函数 $\chi_1(s)$ 和 $\chi_2(s)$ 的积分表示，我们推得

$$\chi_1^{\pm}(t) = \pm\frac{\log\Delta(t)}{4} + \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\log\Delta(t_0)dt_0}{t_0 - t} + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{dt_0}{t_0 - t}, \quad t \in L,$$

$$f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t) = \pm\frac{\log\epsilon(t)}{4} + \frac{f^{1/2}(t)}{4\pi i t}\int_L \frac{\log\epsilon(t_0)t_0 dt_0}{(t_0 - t)f^{1/2}(t_0)}$$

$$+\frac{f^{1/2}(t)}{2t}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{t_0 dt_0}{(t_0 - t)\xi(t_0)}, \quad t \in L \setminus \{0\}. \tag{3.62}$$

我们将注意力集中在式 (3.62) 中两个函数在无穷远处的渐近展开的主项上，并注意到此时

$$\chi_1^{\pm}(t) = \mp\frac{k\tau}{4|t|} + \frac{k\tau}{2\pi i t}\log|t| + \frac{h_1}{t} + O(t^{-2}), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L,$$

$$f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t) = h_0 \pm \frac{k\tau}{4|t|} - \frac{k\tau}{2\pi i t}\log|t| + \frac{h_2}{t} + O(t^{-2}), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L, \tag{3.63}$$

其中

$$h_0 = -\frac{1}{2}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{tdt}{\xi(t)} \tag{3.64}$$

和 h_1 和 h_2 是 一些常数。它们的取值不影响我们要推导的渐近行为。

接下来，利用关系式(3.25)，我们可以推导出曲面 $\mathcal{R}$ 上黎曼-希尔伯特问题的解的渐近行为，如下所示：

$$F^{\pm}(t, f^{1/2}(t)) = e^{h_0}\left[1 + \frac{h_+}{t} + O(t^{-2})\right], \quad |t| \to \infty, \quad t \in L,$$

$$F^{\pm}(t, -f^{1/2}(t)) = e^{-h_0}\left[1 \mp \frac{k\tau}{2|t|} + \frac{k\tau}{\pi i t}\log|t| + \frac{h_-}{t} + O\left(\frac{\log^2|t|}{t^2}\right)\right], \quad |t| \to \infty, \quad t \in L, \tag{3.65}$$

其中 $h_\pm = h_1 \pm h_2$。将这些表达式代入逆矩阵$[X(s)]^{-1}$ 的公式 (3.19)，得到

$$[X^{\pm}(t)]^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-h_0}(1 - h_+ t^{-1}) & 0 \\ 0 & e^{h_0}[1 - k\tau(\pi i t)^{-1}\log|t| - h_- t^{-1}] + O(t^{-2}\log^2|t|) \end{pmatrix}$$

$$\pm\frac{k\tau e^{h_0}}{2|t|}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L, \tag{3.66}$$

上述结果与公式 (3.50) 和 (3.56) 相结合，使我们能够推导出描述当 $|t| \to \infty$ 时，向量黎曼–希尔伯特问题的解 $\Phi^{\pm}(t)$在轮廓L 上的行为的公式

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{C_0}{t}\begin{pmatrix} e^{-h_0}(1 - h_+ t^{-1}) & 0 \\ 0 & e^{h_0}[1 - k\tau(\pi i t)^{-1}\log|t| - h_- t^{-1}] + O(t^{-2}\log^2|t|) \end{pmatrix}$$

$$+\frac{C_0 k\tau e^{h_0}}{2|t|t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{t^3}\right), \quad |t| \to \infty, \quad t \in L, \tag{3.67}$$

其中 C_0是一个常数。由此可立即得到 $\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = O(t^{-3})$ 和 $\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) = O(t^{-2})$, $|t| \to \infty$，并且条件 (3.15) 如预期般得到满足。

最后，我们满足条件 (3.16)，该条件保证位移在连接点 $x = 0$处连续。我们刚刚验证过的和 $\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = O(t^{-3})$, $t \to \infty$, $t \in L$的渐近行为足以保证 (3.16) 中积分的收敛。为了将条件 (3.16) 转化为关于常数 C 和 N的方程，我们改写公式 (3.19)，并通过复平面上的函数表示$[X^{\pm}(t)]^{-1}$

$$[X^{\pm}(t)]^{-1} = e^{-\chi_1^{\pm}(t)}\left\{I\cosh[f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t)] - \begin{pmatrix} t^2 - \mu^2 & m \\ m & -t^2 + \mu^2 \end{pmatrix}\frac{\sinh[f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t)]}{f^{1/2}(t)}\right\}. \tag{3.68}$$

引入以下函数较为方便

$$\Lambda_j^{\pm}(t) = e^{-\chi_1^{\pm}(t)}[\cosh(f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t)) + \frac{t^2 - \mu^2}{(-1)^j f^{1/2}(t)}\sinh(f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t))], \quad j = 0, 1,$$

$$\Lambda_2^{\pm}(t) = \frac{m e^{-\chi_1^{\pm}(t)}}{f^{1/2}(t)}\sinh(f^{1/2}(t)\chi_2^{\pm}(t)). \tag{3.69}$$

用这些函数表示，函数 $\Phi_0^{\pm}(t)$ 可写为：

$$\pm\Phi_0^{\pm}(t) = \Lambda_1^{\pm}(t)\left[\frac{C}{t - \zeta_0} + N\Psi_{0\pm}^{(1)}(t) + \Psi_{0\pm}^{(2)}(t)\right]$$

$$-\Lambda_2^{\pm}(t)\left[\frac{C\eta_0}{t - \zeta_0} + N\Psi_{1\pm}^{(1)}(t) + \Psi_{1\pm}^{(2)}(t)\right], \quad t \in L, \tag{3.70}$$

其中， $\Psi_{0\pm}^{(n)}(t)$ 和 $\Psi_{1\pm}^{(n)}(t)$ 是向量 $\Psi_{\pm}^{(n)}(t)$、 $n=1,\ 2$ 的两个分量，由式 (3.50) 给出。将这些表达式代入关系式 (3.16)，即可得到关于常数 C 和 N 的第二个方程

$$\Omega_0 C + \Omega_1 N = -\Omega_2, \tag{3.71}$$

where

$$\Omega_0 = \int_L [\Lambda_1^+(t) - \Lambda_1^-(t) - \eta_0 \Lambda_2^+(t) + \eta_0 \Lambda_2^-(t)] \frac{\gamma(t)dt}{t-\zeta_0},$$

$$\Omega_j = \int_L [\Lambda_1^+(t)\Psi_{0+}^{(j)}(t) - \Lambda_1^-(t)\Psi_{0-}^{(j)}(t) - \Lambda_2^+(t)\Psi_{1+}^{(j)}(t) + \Lambda_2^-(t)\Psi_{1-}^{(j)}(t)]\gamma(t)dt, \quad j=1,2. \tag{3.72}$$

系统 (3.59)、(3.72) 确定常数 C 和 N

$$C = \frac{\Pi_1\Omega_2 - \Pi_2\Omega_1}{\Delta_0}, \quad N = \frac{\Pi_2\Omega_0 - \Pi_0\Omega_2}{\Delta_0}, \tag{3.73}$$

其中 $\Delta_0 = \Pi_0\Omega_1 - \Pi_1\Omega_0$. 确定这些常数即可完成向量黎曼–希尔伯特问题 (3.14) 至 (3.16) 的求解。

3.5 分解的部分指标

本节旨在确定分解的部分指标，其定义为规范分解矩阵(18)、(19)、(20) 各列的阶数，采用 genus 3 情形(5)中应用的方法(18) 。规范分解矩阵是一个矩阵 $X(s)$，它满足分解问题$X^+(t) = G(t)X^-(t)$， $t \in L$，并满足以下条件

(i) 在任意有限点 $s \in \mathbb{C}$， $X(s)$ 均为标准形；(ii) $\det X(s)$ 在复平面的任意有限点均不为零；(iii) 矩阵 $X(s)$ 在无穷远处为标准形。

我们回顾一下，如果矩阵 $Y(s)$在某一点（有限点或无穷远点）处，其行列式的阶等于矩阵各列阶数之和，则称该矩阵在该点处为规范形。

假设 $Y_j(s) = Y_j^*(s)(s-s_0)^{\alpha_j}$, $s \to s_0$, $j=1,\dots,n$，其中α_j为实数， $Y_j^*(s)$在 $s=s_0$处有界，且 $Y_j^*(s_0) \neq 0$。那么，α_j称为函数 $Y_j(s)$在 $s=s_0$处的阶，而 $\alpha = \min\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$称为向量 $Y(s) = (Y_1(s)\dots,Y_n(s))$在点 $s=s_0$处的阶。

设 $Y_j(s) = Y_j^*(s)s^{-\alpha_j}$, $s \to \infty$, $j=1,\dots,n$，其中 α_j 为实数， $Y_j^*(s)$在无穷远处有界，且$Y_j^*(\infty) \neq 0$。那么， α_j 和 $\alpha = \min\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 分别称为函数 $Y_j(s)$ 和向量 $Y(s)$ 在无穷远处的阶。

由于逆矩阵 $[X(s)]^{-1}$ 的性质已在第3节 3.4 中研究过，我们将把矩阵 $[X(s)]^{-1}$而不是矩阵 $X(s)$本身化为典范矩阵。矩阵 $[X(s)]^{-1}$有三个奇点，分别是 ζ_0、 ζ_1 和 ∞。在点 $s=\zeta_0$ 处，它具有如下表示:

$$[X(s)]^{-1} \sim F_0 \begin{pmatrix} 1-\frac{l_0}{w_0} & -\frac{m}{w_0} \\ -\frac{m}{w_0} & 1+\frac{l_0}{w_0} \end{pmatrix} + (s-\zeta_0) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad s \to \zeta_0, \tag{3.74}$$

其中 $l_0 = l(\zeta_0)$、 $w_0 = f^{1/2}(\zeta_0)$ 以及 F_0 和 F_{nj} 均为非零常数。显然，当 $s \to \zeta_0$ 时，$\det\{[X(s)]^{-1}\} \sim 0$; 在点 ζ_0 处，行列式的阶为 1，而两列的零点阶数均为零。为将该矩阵化为标准形，我们从右侧乘以矩阵

$$T_0(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\zeta_0} & 0 \\ \frac{\nu_0}{s-\zeta_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_0 = \frac{w_0 - l_0}{m}. \tag{3.75}$$

新矩阵 $[X(s)]^{-1}T_0(s)$ 在点 $s=\zeta_0$ 处为标准形，

$$[X(s)]^{-1}T_0(s) \sim \begin{pmatrix} F_{11}+\nu_0 F_{12} & -\frac{m}{w_0}F_0 \\ F_{21}+\nu_0 F_{22} & \left(1+\frac{l_0}{w_0}\right)F_0 \end{pmatrix}, \quad s \to \zeta_0. \tag{3.76}$$

现在继续将新矩阵化为点 $\zeta = \zeta_1$ 处的标准形。原矩阵 $[X(s)]^{-1}$ 在点 (ζ_1, w_1) 处的表现为

$$[X(s)]^{-1} \sim \frac{F_1}{s-\zeta_1}\begin{pmatrix} 1+\frac{l_1}{w_1} & \frac{m}{w_1} \\ \frac{m}{w_1} & 1-\frac{l_1}{w_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} \end{pmatrix}, \quad (s,w) \to (\zeta_1, w_1), \tag{3.77}$$

其中 $w_1 = (-1)^{n-1} f^{1/2}(\zeta_1)$, $n = 1$ 如果点 $(\zeta_1,\ w_1)$ 位于第一张曲面上 $\mathbb{C}_1$ 且 $n = 2$ 否则, $l_1 = l(\zeta_1)$, 并且 F_1 和 $\hat{F}_{nj}$ 是非零常数。将新矩阵 $[X(s)]^{-1}T_0(s)$ 从右侧乘以矩阵

$$T_1(s) = \begin{pmatrix} \zeta_1 - \zeta_0 & 0 \\ \nu_1 - \nu_0 & s - \zeta_1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -\frac{w_1 + l_1}{m}, \tag{3.78}$$

我们得到矩阵 $[X(s)]^{-1}\hat{T}(s)$, 其中

$$\hat{T}(s) = T_0(s)T_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{\zeta_1-\zeta_0}{s-\zeta_0} & 0 \\ \nu_1 - \nu_0 + \frac{\nu_0(\zeta_1-\zeta_0)}{s-\zeta_0} & s-\zeta_1 \end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

可直接验证, 矩阵 $[X(s)]^{-1}\hat{T}(s)$ 在两个点 $s = \zeta_0$ 和 ζ_1 处均为标准形。在点 $(s,w) = (\zeta_1, w_1)$ 处, 我们有

$$[X(s)]^{-1}\hat{T}(s) \sim \begin{pmatrix} \hat{F}_{11} + \nu_1\hat{F}_{12} & \frac{m}{w_1}F_1 \\ \hat{F}_{21} + \nu_1\hat{F}_{22} & \left(1-\frac{l_1}{w_1}\right)F_1 \end{pmatrix}, \quad s \to \zeta_1. \tag{3.80}$$

采用类似的补救方法, 使矩阵 $[X(s)]^{-1}\hat{T}(s)$ 在无穷远处处于标准形。对矩阵 $[X(s)]^{-1}\hat{T}(s)$ 在无穷远处的分析表明

$$[X(s)]^{-1}\hat{T}(s) \sim \begin{pmatrix} e^{-h_0}(\zeta_1-\zeta_0)s^{-1} & h_{12}s^{-1} \\ e^{h_0}(\nu_1-\nu_0) & e^{h_0}s \end{pmatrix}, \quad s \to \infty, \tag{3.81}$$

其中, h_0 由(3.64)给出, 而 h_{12} 是一个非零常数。矩阵$[X(s)]^{-1}\hat{T}(s)$的各列在无穷远处的阶分别等于0和 -1, 其和不等于该矩阵的行列式在无穷远处的阶0。我们从右侧将其乘以矩阵

$$U(s) = \begin{pmatrix} 0 & \nu s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.82}$$

并得到矩阵 $\tilde{X}(s) = [X(s)]^{-1}T(s)$; 如果参数 ν 选择为 $\nu = (\nu_0 - \nu_1)^{-1}$, 则该矩阵在无穷远点处为标准形。然后

$$\tilde{X}(s) \sim \begin{pmatrix} e^{-d_0}(\zeta_1-\zeta_0)s^{-1} & e^{-d_0}\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\nu_0-\nu_1} \\ e^{d_0}(\nu_1-\nu_0) & d_{22} \end{pmatrix}, \quad s \to \infty, \tag{3.83}$$

$\hat{}$, 其中 d_{22} 是一个常数。变换矩阵 $T(s) = T(s)U(s)$ 是

$$T(s) = \begin{pmatrix} \frac{\zeta_1-\zeta_0}{s-\zeta_0} & \frac{(\zeta_1-\zeta_0)s}{(s-\zeta_0)(\nu_0-\nu_1)} \\ \nu_1 - \nu_0 + \frac{\nu_0(\zeta_1-\zeta_0)}{s-\zeta_0} & -\zeta_1 + \frac{\nu_0(\zeta_1-\zeta_0)s}{(\nu_0-\nu_1)(s-\zeta_0)} \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

$\tilde{}$矩阵 $X(s)$ 的各列阶数及其在无穷远处的行列式阶数均等于0。矩阵 $X(s)$的$\tilde{}$行列式在有限复平面内没有零点。因此, 矩阵 $X(s)$ 是规范分解矩阵, 且部分指标为 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$。

注意，原向量黎曼–希尔伯特问题可以改写为

$$\Phi^+(t) = -[G(t)]^{-1}\Phi^-(t) + [G(t)]^{-1}g(t), \quad t \in L. \tag{3.85}$$

由于

$$\tilde{X}(s) = [X(s)]^{-1}T(s), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.86}$$

and

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1} = [X^-(t)]^{-1}X^+(t), \quad t \in L, \tag{3.87}$$

我们看到

$$[G(t)]^{-1} = \tilde{X}^+(t)[T(t)]^{-1}T(t)[\tilde{X}^-(t)]^{-1} = \tilde{X}^+(t)[\tilde{X}^-(t)]^{-1}, \quad t \in L. \tag{3.88}$$

因此 $\tilde{X}(s)$是黎曼-希尔伯特问题(3.85)的系数 $[G(t)]^{-1}$ 的规范分解矩阵。现在可以得出，向量黎曼–希尔伯特问题 (3.14) 的部分指标为零，并且根据稳定性判据(21)，(20) 它们是稳定的。

4 与边界条件直接延拓相关的向量黎曼–希尔伯特问题

在前一节中，我们通过对速度势进行拉普拉斯变换，求解了由此导出的向量黎曼–希尔伯特问题。本节中，我们希望采用另一种方法来推导该问题，即使用傅里叶变换，并以另一种方式将边界条件延拓到整个实轴上。我们旨在了解一种方法是否优于另一种方法。为简便起见，我们只讨论 $0 < \theta_0 < \pi/2$ 的情形，并将 L 取为实轴。我们先写出散射势的一般积分表示式。

$$\phi_0(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_0(s)e^{-isx+\gamma y}ds, \quad y < 0,$$

$$\phi_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_1(s)e^{-isx-\gamma y}ds, \quad y > 0, \tag{4.1}$$

其中 $\gamma = \gamma(s)$是由（3.3）确定的分支。一级导数$\frac{\partial}{\partial y}\phi_0(x,0)$在点 $x = 0$处连续且等于0，而混合导数 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_0(x,0)$在点 $x = 0$处有界但不连续，

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_0(x,0) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_0(x,0) = N, \tag{4.2}$$

其中 N 是一个非零常数。现在将边界条件 (2.13) 延拓到整个实轴$L = \{-\infty < x < \infty, y = 0\}$，但不包括点 $x = 0$,

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial y} = \phi_0^+(x), \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y} = \phi_1^+(x),$$

$$\frac{\partial^3\phi_0}{\partial x^2\partial y} + \mu^2\frac{\partial\phi_0}{\partial y} - \alpha(\phi_1 - \phi_0) = \beta^+(x) + \phi_0^-(x),$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - \frac{\partial\phi_0}{\partial y} + k\tau\phi_1 = \phi_1^-(x), \tag{4.3}$$

其中

$$\phi_j^+(x) = 0, \quad x < 0; \quad \phi_j^-(x) = 0, \quad x > 0, \quad j = 0, 1.$$

$$\beta^+(x) = \begin{cases} -2\alpha e^{ikx\sin\theta_0}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

为推导相关的向量黎曼–希尔伯特问题，我们引入拉普拉斯变换（单边傅里叶积分）

$$\hat{\Phi}_j^-(s) = \int_{-\infty}^0 \phi_j^-(x)e^{isx}dx, \quad \Phi_j^+(s) = \int_0^\infty \phi_j^+(x)e^{isx}dx, \quad j = 0, 1, \tag{4.5}$$

应用 t 对边界条件 (4.3) 进行傅里叶积分变换，并注意到 t

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^3\phi_0}{\partial x^2\partial y}(x, 0)e^{isx}dx = -N - s^2\gamma(s)A_0(s). \tag{4.6}$$

于是，边界条件 (4.3) 可用函数 $\Phi_j^\pm(s)$ 和 $A_j(s)$ 表示为

$$\gamma(s)A_0(s) = \Phi_0^+(s), \quad \gamma(s)A_1(s) = -\Phi_1^+(s),$$

$$A_0(s)[\gamma(s)(\mu^2 - s^2) + \alpha] - \alpha A_1(s) = \hat{\Phi}_0^-(s) - \frac{2i\alpha}{s + k\sin\theta_0} + N,$$

$$[-\gamma(s) + k\tau]A_1(s) - \gamma(s)A_0(s) = \hat{\Phi}_1^-(s). \tag{4.7}$$

现在消去函数 $A_0(s)$ 和 $A_1(s)$，得到向量黎曼–希尔伯特问题

$$\begin{pmatrix} \hat{\Phi}_0^-(s) \\ \hat{\Phi}_1^-(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^2 - s^2 + \frac{\alpha}{\gamma(s)} & \frac{\alpha}{\gamma(s)} \\ -1 & 1 - \frac{k\tau}{\gamma(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0^+(s) \\ \Phi_1^+(s) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}g(s), \quad s \in L, \tag{4.8}$$

其中

$$g(s) = \left(\frac{4i\alpha}{s + k\sin\theta_0} - 2N\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

ˆ 为将该问题的矩阵系数变换为形式 (3.12)，我们用两个新函数替换函数 $\Phi_0^-(s)$ ˆ和 $\Phi_1^-(s)$,

$$\Phi_0^-(s) = 2\hat{\Phi}_0^-(s) + \frac{2\alpha}{k\tau}\hat{\Phi}_1^-(s), \quad \Phi_1^-(s) = -\frac{2\alpha}{k\tau}\hat{\Phi}_1^-(s). \tag{4.10}$$

用向量函数 $\Phi^\pm(s) = (\Phi_0^\pm(s)\ \Phi_1^\pm(s))^\top$ 表示时，黎曼-希尔伯特问题的形式为

$$\Phi^-(s) = (\mu^2 - s^2)G(s)\Phi^+(s) + g(s), \quad s \in L. \tag{4.11}$$

其中矩阵系数 $G(s)$ 定义为

$$G(s) = \begin{pmatrix} b_0(s) + c_0(s)l_0(s), & c_0(s)m \\ c_0(s)m & b_0(s) - c_0(s)l_0(s) \end{pmatrix},$$

$$b_0(s) = 1 + \frac{2\alpha}{\mu^2 - s^2}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{k\tau}\right), \quad c_0(s) = \frac{1}{\mu^2 - s^2}, \quad l_0(s) = \mu^2 - s^2, \quad m = \frac{2\alpha}{k\tau}. \tag{4.12}$$

可以看出，函数 $b_0(s)$、$c_0(s)$ 和 $l_0(s)$ 与第3节中出现的相应函数 $b(s)$、$c(s)$ 和 $l(s)$ 不同，而特征多项式 $f(s) = (s^2 - \mu^2)^2 + m^2$ 则相同。这意味着，这两个向量黎曼–希尔伯特问题都可约化为同一一维亏格黎曼曲面 $\mathcal{R}$ 上的标量黎曼-希尔伯特问题 (3.21)。(3.21) 问题的解、

矩阵分解和雅可比反演问题的公式与第3节中的公式相同，只需分别将函数 $b(s)$、 $c(s)$ 和 $l(s)$ 替换为 $b_0(s)$、 $c_0(s)$ 和 $l_0(s)$。

当我们开始分析函数 $\Delta(s) = \lambda_1(s)\lambda_2(s)$ 和 $\epsilon(s) = \lambda_1(s)/\lambda_2(s)$ 在无穷远处的行为时，这两个问题之间便开始出现显著差异。为了确定因式分解矩阵的渐近行为，需要这些渐近行为，而该矩阵对于应用刘维尔定理至关重要。不难证明，

$$\Delta(t) = \frac{4\alpha}{k\tau t^2}\left(1 - \frac{k\tau}{|t|} + O(t^{-2}\right), \quad t \to \pm\infty,$$

$$\epsilon(t) = \frac{\alpha}{k\tau t^2}\left(1 - \frac{k\tau}{|t|} + O(t^{-2}\right), \quad t \to \pm\infty. \tag{4.13}$$

这会导致函数 $\log\Delta(t)$ 和 $\log\epsilon(t)$ 在无穷远处出现对数奇异性，从而使得分析函数 $\chi_1(s)$ 和 $\chi_2(s)$ 在无穷远处的行为更加困难。首先考虑由 (3.62) 给出的函数 $\chi_1(s)$ 在轮廓 L 上的极限值 $\chi_1^{\pm}(t)$。

$$\chi_1^{\pm}(t) = \pm\frac{\log\Delta(t)}{4} + \frac{t}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\log\Delta(t_0)dt_0}{t_0^2 - t^2} + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{dt_0}{t_0 - t} + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad t \in L, \tag{4.14}$$

其中

$$I_1(t) = \frac{t}{2\pi i}\int_1^\infty \log\frac{k\tau t_0^2\Delta(t_0)}{4\alpha}\frac{dt_0}{t_0^2 - t^2},$$

$$I_2(t) = \frac{t}{2\pi i}\log\frac{4\alpha}{k\tau}\int_1^\infty \frac{dt_0}{t_0^2 - t^2}, \quad I_3(t) = -\frac{t}{\pi i}\int_1^\infty \frac{\log t_0 dt_0}{t_0^2 - t^2}. \tag{4.15}$$

除最后一个积分 $I_3(t)$ 外，(4.14) 和 (4.15)中各项在无穷远处的渐近行为可以立即写出。对于积分 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$，我们有

$$I_1(t) = \frac{k\tau}{2\pi i t}\log|t| - \frac{1}{2\pi i t}\int_1^\infty \left(\frac{k\tau}{t_0} + \log\frac{k\tau t_0^2\Delta(t_0)}{4\alpha}\right)dt_0 + O(t^{-2}), \quad t \to \pm\infty,$$

$$I_2(t) = \frac{1}{4\pi i}\log\frac{4\alpha}{k\tau}\log\frac{1 + t^{-1}}{1 - t^{-1}} = \frac{1}{2\pi i t}\log\frac{4\alpha}{k\tau} + O(t^{-3}), \quad t \to \pm\infty. \tag{4.16}$$

至于积分 $I_3(t)$，它可以表示为极限

$$I_3(t) = -\frac{t}{\pi i}\lim_{\nu\to 0}\frac{\mathcal{I}_\nu(t) - \mathcal{I}_0(t)}{\nu}, \quad \mathcal{I}_\nu(t) = \int_1^\infty \frac{t_0^\nu dt_0}{t_0^2 - t^2}. \tag{4.17}$$

作出代换 $t_0 = y^{-1/2}$ 和 $|t| = x^{-1/2}$ 后，我们将积分 $\mathcal{I}_\nu(t)$ 表示为梅林卷积积分

$$\mathcal{I}_\nu(t) = -\frac{x}{2}\int_0^\infty \frac{h_-(y)}{1 - \frac{x}{y}}\frac{dy}{y}, \quad x > 0, \tag{4.18}$$

其中

$$h_-(y) = \begin{cases} y^{-\nu/2 - 1/2}, & 0 < y < 1, \\ 0, & y > 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

根据梅林卷积定理，我们将积分改写为

$$\mathcal{I}_\nu(t) = -\frac{x}{4i}\int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{\cot\pi\sigma}{\sigma - \frac{\nu+1}{2}}x^{-\sigma}d\sigma, \quad \max\left\{0, \frac{\nu+1}{2}\right\} < \kappa < 1, \tag{4.20}$$

并利用留数理论计算它。在 $|t|>1$ 的情况下，我们有

$$\mathcal{I}_\nu(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{-2j-2}}{2j+\nu+1}+\frac{\pi|t|^{\nu-1}}{2}\tan\frac{\pi\nu}{2}. \tag{4.21}$$

将此表达式代入 (4.18) 并计算极限，得到

$$I_3(t)=\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}t+\frac{1}{\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{-2j-1}}{(2j+1)^2}. \tag{4.22}$$

将我们推导出的渐近行为与 (4.14) 和 (4.15) 中其他项的渐近行为合并后，可得函数 $\chi_1^{\pm}(t)$ 在实轴上当 $|t|$ 较大时的如下表示：

$$\chi_1^{\pm}(t)=\mp\frac{1}{2}\left[\log|t|-\frac{1}{2}\log\frac{4\alpha}{k\tau}+\frac{k\tau}{2|t|}\right]+\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}t+\frac{kt}{2\pi i}\frac{\log|t|}{t}+\frac{r_1}{t}+O(t^{-2}),\quad t\to\pm\infty, \tag{4.23}$$

其中

$$r_1=\frac{1}{2\pi i}\left[2+\log\frac{4\alpha}{k\tau}-\int_0^1\log\Delta(t)dt-\int_1^{\infty}\left(\frac{k\tau}{t}+\log\frac{k\tau t^2\Delta(t)}{4\alpha}\right)dt\right]+\frac{\zeta_0-\zeta_1}{2}. \tag{4.24}$$

现在分析函数 $\chi_1(s)$ 在 $s\to\infty$ 和 $s\in\mathbb{C}^{\pm}\setminus L$ 时的行为。我们有

$$\chi_1(s)=\frac{s}{2\pi i}\int_0^1\frac{\log\Delta(t)dt}{t^2-s^2}+\frac{1}{2}\int_\Gamma\frac{dt}{t-s}+I_1(s)+I_2(s)+I_3(s),\quad s\in\mathbb{C}^{\pm}\setminus L, \tag{4.25}$$

其中 $I_j(s)$ 由 (4.15) 定义。与前面一样，我们重点考察积分 $I_3(s)$。作代换 $s=\pm is_0$, $-\frac{1}{2}\pi<\arg s_0<\frac{1}{2}\pi$, $s\in\mathbb{C}^{\pm}$ 后，可将积分 $I_3(s)$ 表示为

$$I_3(s)=-\frac{s}{\pi i}\lim_{\nu\to0}\frac{\mathcal{J}_\nu(s_0)-\mathcal{J}_0(s_0)}{\nu},\quad \mathcal{J}_\nu(s_0)=\int_1^{\infty}\frac{t^\nu dt}{t^2+s_0^2}. \tag{4.26}$$

接下来将 t 替换为 $y^{-1/2}$，并将 s_0^2 替换为 x^{-1}，把积分 $\mathcal{J}_\nu(s_0)$ 写成 Mellin 卷积积分

$$\mathcal{J}_\nu(s_0)=\frac{x}{2}\int_0^{\infty}\frac{h_-(y)}{1+\frac{x}{y}}\frac{dy}{y}. \tag{4.27}$$

我们应用卷积定理，将该积分转换为如下形式：

$$\mathcal{J}_\nu(s_0)=\frac{x}{4i}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\frac{x^{-\sigma}}{\sin\pi\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma-\frac{\nu+1}{2}},\quad \max\left\{0,\frac{\nu+1}{2}\right\}<\kappa<1. \tag{4.28}$$

应用留数理论　后，我们得到 $|s_0|>$的积分级数表示　1

$$\mathcal{I}_\nu(s_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}x^{j+1}}{2j+\nu+1}+\frac{\pi x^{1/2-\nu/2}}{2\cos\frac{\pi\nu}{2}},\quad x=s_0^{-2},\quad |\arg s_0|<\frac{\pi}{2}. \tag{4.29}$$

回到 s ($s_0=\mp is$, $s\in\mathbb{C}^{\pm}$) 并计算式 (4.26) 中的极限，可得

$$I_3(s)=\mp\frac{1}{2}\log(\mp is)+\frac{1}{\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^{-2j-1}}{(2j+1)^2},\quad |s|>1,\quad s\in\mathbb{C}^{\pm}. \tag{4.30}$$

式 (4.25) 中其他项的渐近行为可通过简单方法推导得出，因此有

$$\chi_1(s) = \mp\frac{1}{2}\log(\mp is) \pm \frac{1}{4}\log\frac{4\alpha}{k\tau} + \frac{k\tau}{2\pi is}\log(\mp is) + \frac{r_1}{s} + O(s^{-2}), \quad s \to \infty, \quad s \in \mathbb{C}^{\pm}, \tag{4.31}$$

其中 r_1 由 (4.24) 给出。显然，当 (4.31) 中的 $s \to t \in L$ 时，对于分别讨论的两种情形 $t > 0$ 和 $t < 0$，所得渐近行为与公式 (4.23) 一致。

当 $s \to \infty$ 时，函数 $f^{1/2}(s)\chi_2(s)$ 的渐近行为的推导，与函数 $\chi_1(s)$ 的渐近行为的推导类似。我们有

$$f^{1/2}(s)\chi_2(s) = \mp\frac{1}{2}\log(\mp s) + \frac{k\tau}{2\pi is}\log(\mp is) \pm \frac{1}{4}\log\frac{\alpha}{k\tau}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{tdt}{\xi(t)} + \frac{r_2}{s} + O(s^{-2}), \quad s \to \infty, \quad s \in \mathbb{C}^{\pm}, \tag{4.32}$$

其中

$$r_2 = \frac{1}{2\pi i}\left[2 + \log\frac{\alpha}{k\tau} - \int_0^1 \log\epsilon(t)\frac{t^2dt}{f^{1/2}(t)} - \int_1^\infty\left(\frac{k\tau}{t} + \frac{t^2}{f^{1/2}(t)}\log\frac{k\tau t^2\epsilon(t)}{\alpha}\right)dt\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{t^2dt}{\xi(t)}. \tag{4.33}$$

与前面对于函数 $\chi_1(s)$ 的情形一样，当 $t \in L$ 时，通过索霍茨基–普莱梅利公式以及直接由 $s \to t \pm 0$ 时的渐近行为 (4.32) 得到的大 t 渐近行为，两者一致。

下一步是写出解的渐近行为

$$F(s, \pm f^{1/2}(s)) = e^{\chi_1(s) \pm f^{1/2}(s)\chi_2(s)} \tag{4.34}$$

在曲面 $\mathcal{R}$ 上的标量黎曼-希尔伯特问题的渐近行为。我们有

$$F(s, f^{1/2}(s)) = e^{r_1^{\pm} + r_2^{\pm}}(\mp is)^{\mp 1}\left[1 + \frac{k\tau}{\pi is}\log(\mp is) + \frac{r_1 + r_2}{s} + O\left(\frac{\log^2 s}{s^2}\right)\right],$$
$$F(s, -f^{1/2}(s)) = e^{r_1^{\pm} - r_2^{\pm}}\left[1 + \frac{r_1 - r_2}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right], \quad s \to \infty, \quad s \in \mathbb{C}^{\pm}, \tag{4.35}$$

其中

$$r_1^{\pm} = \pm\frac{1}{4}\log\frac{4\alpha}{k\tau}, \quad r_2^{\pm} = \pm\frac{1}{4}\log\frac{\alpha}{k\tau} - \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma + m_a\int_{\mathbf{a}} + m_b\int_{\mathbf{b}}\right)\frac{tdt}{\xi(t)}. \tag{4.36}$$

将渐近行为 (4.35) 代入表达式 (3.19)、(3.20) 中，并将 $l(s)$ 替换为 $l_0(s)$，我们得出

$$X^{\pm}(s) = e_{\pm}^{+}(\mp is)^{\mp 1}\left[1 + \frac{k\tau}{\pi is}\log(\mp s) + \frac{\kappa_+}{s} + O\left(\frac{\log^2 s}{s^2}\right)\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(s^{-2})\right]$$
$$+e_{\pm}^{-}\left(1 + \frac{\kappa_-}{s}\right)\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(s^{-2})\right], \ s \to \infty, \ s \in \mathbb{C}^{\pm},$$
$$[X^{\pm}(s)]^{-1} = \frac{1}{e_{\pm}^{+}}(\mp is)^{\pm 1}\left[1 - \frac{k\tau}{\pi is}\log(\mp s) - \frac{\kappa_+}{s} + O\left(\frac{\log^2 s}{s^2}\right)\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(s^{-2})\right]$$
$$+\frac{1}{e_{\pm}^{-}}\left(1 - \frac{\kappa_-}{s}\right)\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(s^{-2})\right], \ s \to \infty, \ s \in \mathbb{C}^{\pm}, \tag{4.37}$$

其中

$$e_{\pm}^{+}=e^{r_1^{\pm}+r_2^{\pm}},\quad e_{\pm}^{-}=e^{r_1^{\pm}-r_2^{\pm}},\quad \kappa_{\pm}=r_1\pm r_2. \tag{4.38}$$

现在 w 在 (4.11) 中将 $G(s)$ 替换为 $[X^{-}(s)]^{-1}X^{+}(s)$, $s\in L$, 并将 $X^{-}(s)g(s)$ 表示为

$$X^{-}(s)g(s)=\Psi^{+}(s)-\Psi^{-}(s), \tag{4.39}$$

其中

$$\Psi^{+}(s)=\frac{4\alpha i}{(s+k\sin\theta_0)(\mu+k\sin\theta_0)}\begin{pmatrix} X_1^{-}(-k\sin\theta_0)\\ X_2^{-}(-k\sin\theta_0)\end{pmatrix},$$

$$\Psi^{-}(s)=\frac{4\alpha i}{s+k\sin\theta_0}\left[\frac{1}{\mu+k\sin\theta_0}\begin{pmatrix} X_1^{-}(-k\sin\theta_0)\\ X_2^{-}(-k\sin\theta_0)\end{pmatrix}-\frac{1}{\mu-s}\begin{pmatrix} X_1^{-}(s)\\ X_2^{-}(s)\end{pmatrix}\right], \tag{4.40}$$

and

$$X_1^{-}(s)=e^{\chi_1^{-}(s)}[\cosh(f^{1/2}(s)\chi_2^{-}(s))+\frac{\mu^2-s^2}{f^{1/2}(s)}\sinh(f^{1/2}(s)\chi_2^{-}(s))],$$

$$X_2^{-}(s)=\frac{me^{\chi_1^{-}(s)}}{f^{1/2}(s)}\sinh(f^{1/2}(s)\chi_2^{-}(s)). \tag{4.41}$$

回到黎曼-希尔伯特问题的边界条件。我们有

$$\frac{1}{\mu-s}X^{-}(s)\left[\Phi^{-}(s)+2N\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+\Psi^{-}(s)=(\mu+s)X^{+}(s)\Phi^{+}(s)+\Psi^{+}(s),\quad s\in L. \tag{4.42}$$

利用以下 矩阵 $X^{\pm}(s)$ 在无穷远处的渐近式 (4.37), 由 (4.42) 可得 t

$$\Phi_0^{-}(s)=O(s^{-1}),\quad \Phi_1^{-}(s)=O(s^{-1}),\quad s\to\infty,\quad s\in\mathbb{C}^{-},$$

$$\Phi_0^{+}(s)=O(s^{-2}),\quad \Phi_1^{+}(s)=O(s^{-1}),\quad s\to\infty,\quad s\in\mathbb{C}^{+}. \tag{4.43}$$

$\Phi^{+}(s)=O(s^{-2})$、 $s\to\infty$、 $s\in\mathbb{C}^{+}$ 的渐近行为得到 $\phi^{+}(x)\to 0$、 $x\to 0^{+}$, 且满足 $x=0$、$y=0^{-}$ 处位移的连续性条件。

与第3节中一样, 向量 $X(s)\Phi(s)$在点 ζ_0 处有一个简单极点, 并具有表示式（3.53）。应用连续性原理和广义刘维尔定理, 我们得到向量黎曼–希尔伯特问题的解

$$\Phi^{-}(s)=-2N\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(\mu-s)[X^{-}(s)]^{-1}\left[\frac{C}{s-\zeta_0}\begin{pmatrix}1\\\eta_0\end{pmatrix}-\Psi^{-}(s)\right],\quad s\in\mathbb{C}^{-},$$

$$\Phi^{+}(s)=\frac{1}{\mu+s}[X^{+}(s)]^{-1}\left[\frac{C}{s-\zeta_0}\begin{pmatrix}1\\\eta_0\end{pmatrix}-\Psi^{+}(s)\right],\quad s\in\mathbb{C}^{+}, \tag{4.44}$$

其中 C 是任意常数。现在, 我们推导出的解在点（ζ_1, w_1）$\in\mathcal{R}$处有一个不可接受的简单极点。若常数 C 由以下条件确定, 该点便成为可去点

$$C=\frac{\zeta_1-\zeta_0}{w_1+l(\zeta_1)+m\eta_0}\left[(w_1+l(\zeta_1))\Psi_0(\zeta_1)+m\Psi_1(\zeta_1)\right]. \tag{4.45}$$

最后, 我们验证解 (4.44) 在无穷远处的渐近行为。将矩阵 $[X^{-}(s)]^{-1}$ from rd(4.37) 的表示代入公式 (4.44), 我们得到

$$\Phi_0^{-}(s)=-2N-\frac{C-\hat{\Psi}_0}{e_{-}^{-}}+O(s^{-1}),\quad \Phi_1^{-}(s)\sim\frac{i}{se_{-}^{+}}(C\eta_0-\hat{\Psi}_1),\quad s\to\infty,\quad s\in\mathbb{C}^{-},$$

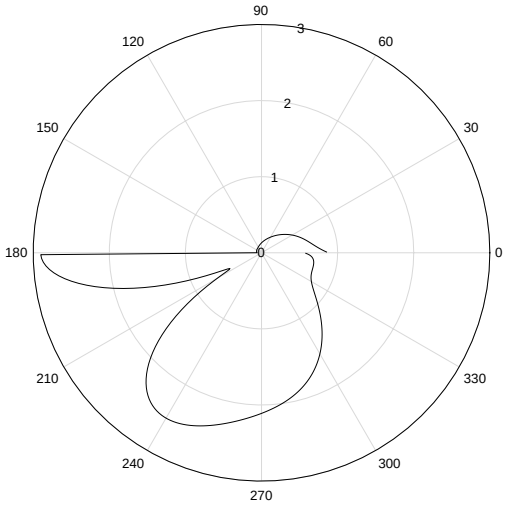

图 3：函数 $P(r,\ \theta)$对于 $r=5$和 $0\le\theta\le 2\pi$在 $\theta_0=\pi/4$、 $\rho_f/m_0=100$、$d=d_1=d_2=0.01$、$a=0.001$、 $|k|=1$、$\arg k=\tan^{-1}0.1$、 $|\alpha|=10$时的变化。

$$\Phi_0^+(s)\sim\frac{i}{s^2e_+^-}(C-\hat{\Psi}_0),\quad \Phi_1^+(s)\sim-\frac{i}{se_+^+}(C\eta_0-\hat{\Psi}_1),\quad s\to\infty,\quad s\in\mathbb{C}^+, \tag{4.46}$$

其中

$$\hat{\Psi}_j=\frac{4\alpha i}{\mu+k\sin\theta_0}X_j^-(-k\sin\theta_0),\quad j=0,1. \tag{4.47}$$

显然，函数 $\Phi_0^-(s)$ 在无穷远处趋于零，当且仅当常数 $N=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_0(0^+,0)$ 固定为 $\Phi_0^-(s)=O(s^{-1})$, $s\to\infty, s\in\mathbb{C}^-$ ——

$$N=-\frac{C-\hat{\Psi}_0}{2e_-^-}. \tag{4.48}$$

T至此，向量黎曼–希尔伯特问题 (4.11)、(4.12) 的求解完成 .

5 数值结果

在计算中，我们将采用第3节中得到的解，并考虑 $0<\theta_0<\pi/2$ 的情形。在这种情况下，我们可以选择 $\kappa_0=0$，且轮廓 L 是实轴。通过反演积分 (3.4) 并应用公式 (3.7)，我们将两个势 $\phi_0(x,\ y)$ 和 $\phi_1(x,\ y)$ 表示为黎曼-希尔伯特问题 (3.14) 至 (3.16) 的解

$$\phi_0(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_{0+}(s,0)+\Phi_{0-}(s,0)]e^{\gamma y-isx}ds,\quad y<0.$$

$$\phi_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_{1+}(s,0)+\Phi_{1-}(s,0)]e^{-\gamma y-isx}ds,\quad y>0. \tag{5.1}$$

将公式（3.56）和（3.68）代入这些表达式后，我们将其变换为

$$\phi_0(x,y)=C\hat{\Omega}_0(r,\theta)+N\hat{\Omega}_1(r,\theta)+\hat{\Omega}_2(r,\theta),\quad y<0,$$

$$\phi_1(x,y)=C\tilde{\Omega}_0(r,\theta)+N\tilde{\Omega}_1(r,\theta)+\tilde{\Omega}_2(r,\theta),\quad y>0, \tag{5.2}$$

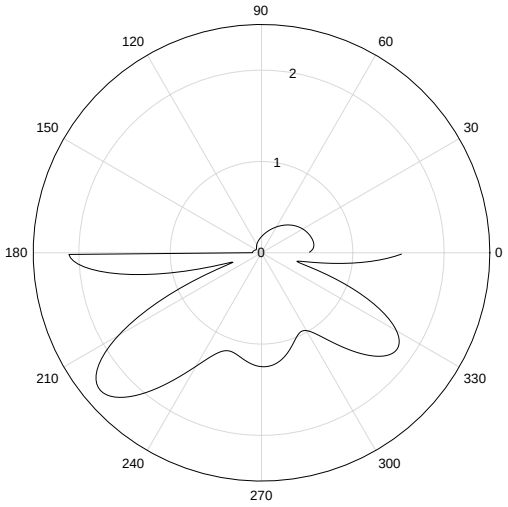

图 4：当 $\theta_0 = \pi/16$、$\rho_f/m_0 = 100$、$d = d_1 = d_2 = 0.01$、$a = 0.001$、$|k| = 1$、$\arg k = \tan^{-1} 0.1$、$|\alpha| = 10$ 时，$r = 5$ 和 $0 \le \theta \le 2\pi$ 对应的函数 $P(r,\ \theta)$ 的变化。

其中 (r, θ) 是点 (x, y) 的极坐标，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\hat{\Omega}_0(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Lambda_1^+(t) - \Lambda_1^-(t) - \eta_0\Lambda_2^+(t) + \eta_0\Lambda_2^-(t)]\frac{v_+(t,r,\theta)dt}{t-\zeta_0},$$

$$\hat{\Omega}_j(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Lambda_1^+(t)\Psi_{0+}^{(j)}(t) - \Lambda_1^-(t)\Psi_{0-}^{(j)}(t) - \Lambda_2^+(t)\Psi_{1+}^{(j)}(t) + \Lambda_2^-(t)\Psi_{1-}^{(j)}(t)]v_+(t,r,\theta)dt,$$

$$\tilde{\Omega}_0(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Lambda_2^-(t) - \Lambda_2^+(t) - \eta_0\Lambda_0^-(t) + \eta_0\Lambda_0^+(t)]\frac{v_-(t,r,\theta)dt}{t-\zeta_0},$$

$$\tilde{\Omega}_j(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Lambda_2^-(t)\Psi_{0-}^{(j)}(t) - \Lambda_2^+(t)\Psi_{0+}^{(j)}(t) - \Lambda_0^-(t)\Psi_{1-}^{(j)}(t) + \Lambda_0^+(t)\Psi_{1+}^{(j)}(t)]v_-(t,r,\theta)dt,$$

$$j = 1, 2, \quad v_\pm(t,r,\theta) = e^{[\pm\gamma(t)\sin\theta - it\cos\theta]r}, \tag{5.3}$$

而函数 $\Lambda_j^\pm(t)$ 由式 (3.69) 给出。

通过将轮廓 L 映射到单位正向圆 $\mathcal{C} = \{|u| = 1\}$，并应用辛普森法则，计算实轴 L 上的反常积分,

$$\int_L S(t)dt = -4\int_{\mathcal{C}}\frac{S(t)du}{(u-i)^2} = -4i\int_{\pi/2}^{5\pi/2}\frac{S(t)ud\theta}{(u-i)^2}, \tag{5.4}$$

其中 $t = -2i(u+i)(u-i)^{-1}$，且 $u = e^{i\theta}$。通过将轮廓 L 采用相同映射映射到单位圆 $\mathcal{C}$，并使用以下公式，计算沿该轮廓的柯西积分主值:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{S(t)dt}{t-s} = \frac{\sigma-i}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{S(t)du}{(u-i)(u-\sigma)}$$

$$= \frac{\sigma-i}{2(2n+1)}\sum_{j=-n}^{n}\frac{S(t_j)}{u_j-i}\left[1 + \frac{2i\sin((\theta-\theta_j)n/2)\sin((\theta-\theta_j)(n+1)/2)}{\sin((\theta-\theta_j)/2)}\right], \quad s \in L, \tag{5.5}$$

其中

$$\sigma = i\frac{s-2i}{s+2i}, \quad \theta = -i\log\sigma, \quad t_j = -2i\frac{u_j+i}{u_j-i}, \quad u_j = e^{i\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{2n+1}, \tag{5.6}$$

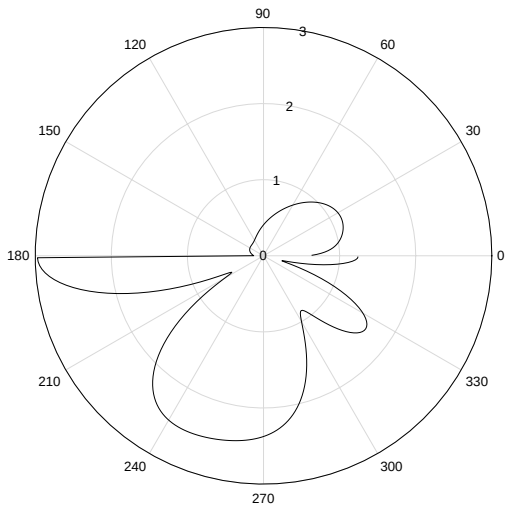

图 5：当 $r = 5$和 $0 \leq \theta \leq 2\pi$满足 $\rho_f/m_0 = 500$, $\theta_0 = \pi/4$,$|\alpha| = 10$, $d = d_1 = d_2 = 0.01$, $a = 0.001$, $|k| = 1$, $\arg k = \tan^{-1} 0.1$, $|\alpha| = 10$时，函数 $P(r, \theta)$ 的变化。

且 n 是积分公式中的节点数。计算积分 (3.31)、(3.43) 和 (3.45) 时，我们采用具有切比雪夫权重和节点的高斯求积公式。

在数值测试中，我们重点关注下半平面 $\mathbb{H}_0$中的完整势 $\psi_0 =\psi_{inc}+\phi_{ref}+\phi_0$以及上半平面 $\mathbb{H}_1$中的完整势 $\psi_1 = \phi_1$的绝对值。记 $P(r, \theta) = |\psi_1(x, y)|$, $(x, y) \in \mathbb{H}_1$ $(0 < \theta < \pi)$ 和 $P(r, \theta) = |\psi_0(x, y)|$, $(x, y) \in \mathbb{H}_0$ $(\pi < \theta < 2\pi)$。所有测试中，我们取水的密度为 $\rho_f = 997\ \text{kg/m}^3$。除图 8 和图 9 外，我们取 $\arg k = \tan^{-1} 0.1$,$|k| = 1\ \text{m}^{-1}$、单元尺寸 $d = d_1 = d_2 = 0.01\ \text{m}$ 和孔径半径 $a = 0.001\ \text{m}$。在这种情况下，参数 τ为复数，且其模很小，$\tau = 5.035610^{-2} + i5.153110^{-3}$。

图3至图6中的曲线展示了函数 $P(r, \theta)$ 随 θ变化的情况，其中r 保持不变。在图3中，我们取 $\theta_0 = \pi/4$, $|\alpha| = 10\ \text{m}^{-3}$, $\rho_f/m_0 = 100\ \text{m}^{-1}$和 $r = 5\ \text{m}$。对于图4，除 $\theta_0 = \frac{\pi}{16}$ 外，我们选取与图3相同的参数。在图5中，我们将比值 ρ_f/m_0 从100增至500，使板面密度降低至原来的五分之一。其余参数与图3计算中采用的参数相同。从图中可以推知，随着膜面密度增加，势ψ_1 的绝对值会减小。在图6中，我们减小 r ，并将其设为3 m，其余参数保持与图3相同。图7展示了函数 $P(r)$ 随 r 变化的情况，其中极角θ 分别取 $\pi/16, \pi/8, \pi/4, \pi/3$ 和 $5\pi/12$，其余参数的选取与图3相同。在图8中，我们将 $|k|$ 从1增至5，改变其自变量 $\arg k = \tan^{-1} 0.02$，并根据公式(2.7)将 $|\alpha|$ 从10增至250。图3中的其余参数保持不变。

当 $k_2 \to 0^+$ 和 $k_1 \to k_{res} = \sqrt{2a/V}$时，参数 $\tau \to \infty$。在图9中，我们改变单元尺寸、孔径半径以及 $\arg k$, $d = d_1 = d_2 = 0.2\,\text{m}$、 $a = 0.005\,\text{m}$ 和 $\arg k = \tan^{-1} 0.02$，其他参数则与图3相同。在这种情况下 $\tau = 0.96881 + i0.17439$。可以看出，当 $|\tau|$ 增大时，函数 $P(r)$ 的幅值也会增大。当波数 k 趋近共振值 k_{res}时，我们有$P(r) \to \infty$ 。

6 结论

我们为平面声波被一种无限薄结构散射的模型问题给出了闭式解。该结构由一块半无限声学硬屏连接夹层板构成

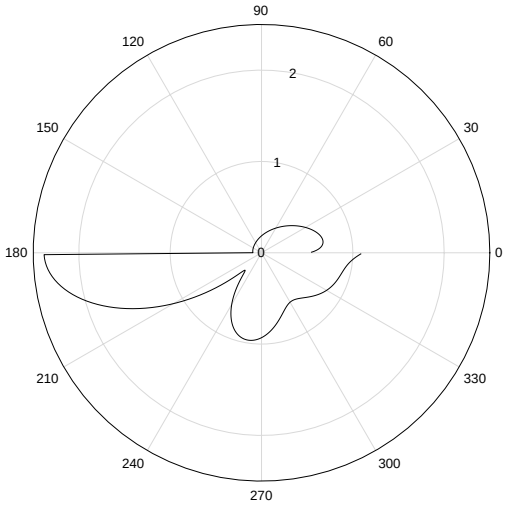

图 6：当 $\theta_0 = \pi/4$、 $\rho_f/m_0 = 100$、$d = d_1 = d_2 = 0.01$、 $a = 0.001$、 $|k| = 1$、$\arg k = \tan^{-1} 0.1$、$|\alpha| = 10$ 时， $r = 3$ 和 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的函数 $P(r, \theta)$ 的变化。

夹层板的两侧均为声学硬壁。夹层板的上侧是穿孔的，下侧则是一层未穿孔膜。我们采用两种方法将边界条件延拓至整个实轴，并推导出两个二阶向量黎曼-希尔伯特问题。这两个问题的矩阵系数均具有 Chebotarev-Khrapkov 结构，且具有相同的四阶特征多项式，但矩阵元素不同。通过求解同一椭圆曲面上的一个标量黎曼-希尔伯特问题，我们利用求积导出了这两个问题的维纳-霍普夫矩阵因子。该标量问题的系数在曲面的上层等于矩阵的第一特征值，在下层等于第二特征值。我们通过求解一个以黎曼 θ函数表示的亏格为1的雅可比反演问题，消除了曲面两个无穷远点处由柯西类比的简单极点引起的本性奇点。

我们发现，对于第一种方法，在无限结构的上、下表面上为速度势的单边傅里叶变换建立黎曼-希尔伯特问题时，对无穷远处维纳-霍普夫矩阵因子的分析更为简单。第二种方法通过未知函数将四个边界条件扩展到整个实轴，并采用这些函数的单边傅里叶变换。与第二种方法相比，第一种方法的优势在于：第二种方法所得解中涉及的奇异积分的密度在无穷远处存在对数增长。两种方法都得到含有两个任意常数的解。这些常数通过问题的附加条件确定。对于第一种方法，除了亚纯维纳-霍普夫因子之外，我们还构造了规范分解矩阵，并计算了分解的部分指标。结果表明，它们均等于零，因此是稳定的。

我们对第一种方法所得的解进行了数值测试。除$|\tau| \to \infty$的情况外，对于所测试的所有参数值，涉及的积分都能快速收敛；在该情况下，这种方法在数值计算上效率不高。我们计算了完整速度势的绝对值、函数 $P(r,\ \theta) = |\phi_1|$, $0 < \theta < \pi$，以及 $P(r,\ \theta) = |\phi_{inc} + \phi_{ref} + \phi_0|$,$\pi < \theta < 2\pi$。我们发现，从上侧穿孔的夹层板会降低声音传输；随着膜面密度 m_0 增大，函数 $P(r,\ \theta)$ $(0 < \theta < \pi)$ 会减小。我们还发现，当复波数的绝对值 $|k|$ 趋近共振值 k_{res}时， $|\tau| \to \infty$ ，且函数 $P(r,\ \theta)$ 的幅值趋于无穷大。

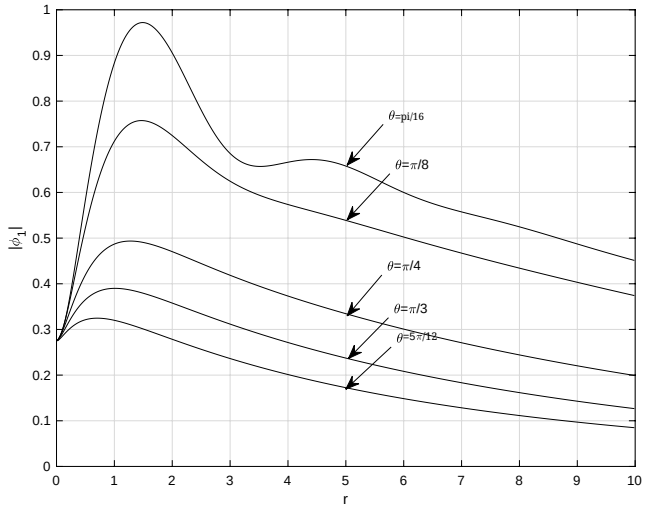

图 7：当 $\theta_0 = \pi/4$、$\rho_f/m_0 = 100$、$d = d_1 = d_2 = 0.01$、$a = 0.001$、$|k| = 1$、arg $k = \tan^{-1} 0.1$、$|\alpha| = 10$ 时，函数 $P(r,\theta) = |\phi_1(x,y)|$ 随 r 的变化，其中 $\theta = \pi/16, \pi/8, \pi/4, \pi/3$。

参考文献

1. J. E. Ffowcs Williams，吸声衬层附近湍流的声学，*J. Fluid Mech.***51** (1972) 737-749.. 2. F. G. Leppington 和 H. Levine，具有周期排列圆形或椭圆形孔口的平面屏上的反射与透射。*J. Fluid Mech.* **61** (1973) 109-127. 3. F. G. Leppington，可压缩流体中穿孔弹性夹层板的有效边界条件，*Proc. R. Soc.* A **427** (1990) 385-399. 4. C. M. A. Jones，单侧穿孔半无限夹层板的散射，*Proc. R.Soc.* A **431** (1990) 465-479. 5. Y. A. Antipov 和 V. V. Silvestrov，散射理论中黎曼曲面上的因子分解，*Quart. J. Mech. Appl. Math.* **55** (2002) 607-654. 6. N.G.Moiseyev，特殊形式矩阵函数的因子分解，*Soviet Math. Dokl.* **39** (1989) 264-267. 7. Y. A. Antipov 和 N. G. Moiseyev，跨越两种介质边界割线的复合平面的平面问题精确解，*J. Appl. Math. Mech. (PMM)* **55** (1991) 531-539. 8. G. N. Chebotarev，关于含 n 对函数的黎曼边值问题的闭式解，*Uchen. Zap. Kazan. Univ.* **116** (1956) 31-58. 9. A. A. Khrapkov，受集中力作用、顶点处带有非对称缺口的无限楔形体弹性平衡的若干情形，*J. Appl. Math. Mech. (PMM)***35** (1971) 625-637. 10. V. G. Daniele，关于两个耦合 Wiener–Hopf 方程的求解，*SIAM J. Appl. Math.***44** (1984) 667-680.

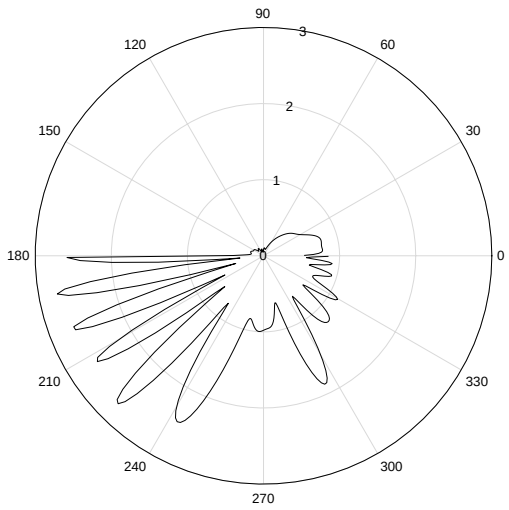

图8：当 $r = 5$和 $0 \leq \theta \leq 2\pi$时，函数 $P(r,\ \theta)$ 的变化，其中 $|k| = 5$，arg $k = \tan^{-1} 0.02$, $|\alpha| = 250$, $\theta_0 = \pi/4$, $\rho_f/m_0 = 100$, $d = d_1 = d_2 = 0.01$, $a = 0.001$。

11. I. D. Abrahams，关于 Khrapkov型 Wiener–Hopf核的非交换因式分解，*Proc. R. Soc. A* **454** (1998) 1719-1743。¨12. E. I. Zverovich，黎曼曲面上 Holder类解析函数理论中的边值问题，*Russian Math. Surveys* **26** (1971) 117-192。13. A. Krazer，*Theta*函数教程，Teubner，莱比锡，1903。14. G. Springer，黎曼曲面导论，Addison–Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1956。15. I. Papanikolaou 和 F. G. Leppington，平行的一对半无限承载波的表面上的声散射，*Proc. R. Soc.* A **455** (1999) 3743-3765。16. A. P. Dowling 和 J. E. Ffowcs Williams，声音与声源，Ellis Horwood，奇切斯特，1983。17. Y.A. Antipov 和 V.V. Silvestrov，各向异性半平面在斜入射下的电磁散射：精确解，*Quart. J. Mech. Appl. Math.* **59** (2006) 211-251。18. F. D. Gakhov，n对函数系统的黎曼边值问题，*RussianMath. Surveys* **7** (1952) 3-54。19. N. I. Muskhelishvili，奇异积分方程，Noordhoff，格罗宁根，1958。20. N. P. Vekua，奇异积分方程组 Noordhoff，格罗宁根，1967。21. I. Gohberg 和 M. G. Krein，关于多个未知函数希尔伯特问题部分指标系统的稳定性，*Dokl. AN SSSR* **119** (1958) 854-857。

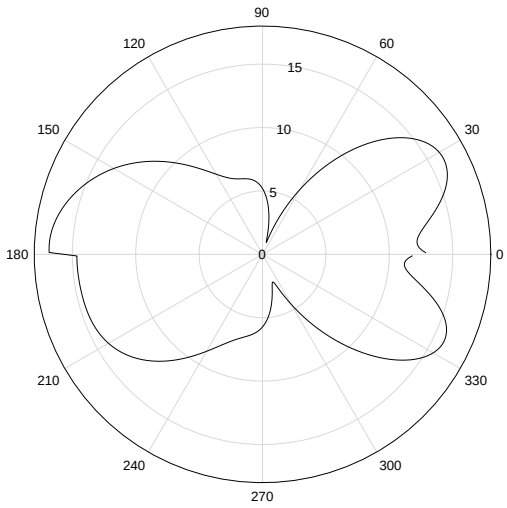

图 9：当 $r = 5$、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 和 k 接近共振值 k_{res} 时，函数 $P(r,\ \theta)$ 的变化。参数为 $\theta_0 = \pi/4$、$\rho_f/m_0 = 100$、 $d = d_1 = d_2 = 0.2$、 $a = 0.005$、 $|k| = 1$、$\arg k = \tan^{-1} 0.02$、 $|\alpha| = 10$.